

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI**  
**FAKTULTA EKONOMICKÁ**

**Bakalářská práce**

Modelování ekonomických systémů pomocí fraktálů

Modelling of economic systems using fractals

Jan Beránek

PLZEŇ 2013

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou diplomovou práci na téma

*„Modelování ekonomických systémů pomocí fraktálů“*

vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího bakalářské práce

za použití pramenů uvedených v příložené bibliografii.

V Plzni, dne 30.dubna 2013

.....

podpis autora

## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu doc. RNDr. Ing. Ladislavu Lukášovi, CSc., za odborné rady a cenné připomínky při zpracování předkládané bakalářské práce

## OBSAH

Úvod.....	7
1 Motivace.....	9
1.1 Teorie fraktálů.....	9
1.1.1 Konstrukce fraktálů a příklady .....	9
1.2 Teorie úrokové míry.....	13
1.2.1 Klasická teorie úrokové míry.....	13
1.2.2 Teorie racionálního očekávání.....	14
1.3 Poptávka po investicích .....	16
1.3.1 Vliv úrokové míry na poptávku po investicích.....	17
1.3.2 Matematická reprezentace .....	18
1.4 Diferenciální rovnice v Ekonomii.....	19
1.4.1 Úvod k diferenciálním rovnicím.....	19
1.4.2 Využití diferenciálních rovnic v ekonomii .....	20
1.4.3 Nelineární dynamické systémy v ekonomii.....	22
2 Modelování krátkodobé úrokové míry.....	25
2.1 Testování nelinearity funkce krátkodobé úrokové míry .....	25
2.2 Nelineární driftové funkce návratu ke středu krátkodobé úrokové míry .....	29
3 Nelineární dynamický finanční model .....	32
3.1 Představení nelineárního dynamického finančního modelu .....	32
3.2 Modelování dynamického finančního systému v softwaru Mathematica.....	35
3.2.1 Funkce NDSolve.....	36
3.2.2 Funkce Plot a ParametricPlot.....	37
3.3 Numerické výpočty .....	38

3.3.1 Úprava počátečních podmínek.....	39
3.3.2 Volba funkce míry investic.....	44
3.3.3 Náhodně generované veličiny.....	48
4 Závěr .....	51
5 Seznam obrázků .....	52
6 Seznam použitých symbolů .....	52
7 Seznam použité literatury.....	53
Příloha A:.....	55
ABSTRAKT .....	64
ABSTRACT.....	65

## Úvod

Pojem fraktál uvedený v názvu této bakalářské práce je pojmem poměrně mladým, je pojmem spojeným se jménem matematika Benoita B. Mandelbrota, který zkoumal různá využití fraktálů. S fraktály je možné se setkávat všude okolo, například v geografii při popisu pobřeží nebo břehů řek, dále také v počítačové grafice, v kryptografii a v neposlední řadě i v ekonomii zvláště v oblasti financí.

Zajímavou oblastí, ve které se rovněž objevuje speciální druh fraktálů, takzvané podivné atraktory, jsou dynamické systémy. Druhů dynamických systémů je též mnoho, ale stěžejní charakteristikou, pro tuto bakalářskou práci je deterministický chaos, vyskytující se v některých z dynamických systémů. Deterministický chaos v dynamických systémech totiž vykazuje známky fraktálního chování. Jelikož je tato práce zpracovávána na ekonomické fakultě, bylo po konzultaci s vedoucím práce dohodnuto, že pojem fraktál – sloužící spíše pro geometrické tvary se bude v této práci objevovat pojem popisující chování systému – chaos, raději než pojem popisující tvar trajektorie systému – podivný atraktor nebo fraktál.

Tato bakalářská práce je členěna do tří kapitol. První kapitola se zabývá teoretickým uvedením do tématu. Je zde uvedena stručná teorie fraktálů včetně některých známých příkladů. Dále první kapitola obsahuje teorii ohledně úrokových měr a investic, a zabývá se též diferenciálními rovnicemi a úvodem do nelineárních dynamických systémů včetně jejich využití pro ekonomii.

Druhá kapitola se zabývá modelováním nelineární úrokové míry. Jsou zde uvedeny dva odlišné způsoby využití takto modelované úrokové míry, a to testování nelinearity úrokové míry a nelineární driftové funkce modelu návratu ke středu.

Třetí kapitola je složena ze tří částí. V první části je představen nelineární dynamický finanční model s chaotickým chováním a jeho charakteristiky. Druhá část se věnuje funkcím, pomocí nichž je s finanční model pracováno ve Wolfram Mathematica. A konečně ve třetí části jsou provedeny numerické experimenty s představeným dynamickým finančním modelem.

Jedním z cílů této bakalářské práce je přiblížení tematiky fraktálů a nelineárních dynamických modelů se zaměřením na ty, ve kterých figuruje chaotický pohyb, a tudíž se zde může objevovat i fraktálová struktura. Dalším z cílů je prozkoumat programové

schopnosti SW Mathematica při modelování a grafické interpretaci výsledků systému složeného třemi diferenciálními rovnicemi. Hlavním cílem této bakalářské práce je provést analýzu chování systému za různých podmínek, které zvolený dynamický systém ovlivňují, a to provedením numerických experimentů a interpretací vzniklých trajektorií systému ve stavovém prostoru.

# 1 Motivace

Úvodní kapitola této bakalářské práce je zaměřena na teorii fraktálů, úrokových měr a investic, dále obsahuje úvod k diferenciálním rovnicím a jejich využití v ekonomii, a nakonec se zabývá nelineárními dynamickými systémy v ekonomii.

## 1.1 Teorie fraktálů

Pojem **fraktál** je nerozlučně spojený se jménem matematika Benoit Mandelbrota, který je považován za zakladatele fraktální geometrie, a který použil jako první pojem **fraktál**. Toto slovo pochází z latinského fractus – znamenajícího rozbitý nebo rozlámáný. Původní latinské slovo zvolil B. Mandelbrot vzhledem ke tvaru útvarů, které jsou popisovány jako **fraktály**, a které jsou velice členité, nepravidelné. Tyto útvary je možné nalézt v celé řadě vědních oborů, například v geografii mohou **fraktály** sloužit k popisu pobřeží nebo tvarů řek. (MANDELBROT, 2003)

**Fraktálem** je geometrický objekt, ve kterém jsou propojeny detail a celek a ve kterém se jednotlivé detaily podobají celku, nebo jeho části. Tato vlastnost je pojmenována jako sobě-podobnost. Dalším znakem **fraktálů** je neceločíselná dimenze, na rozdíl od běžných geometrických útvarů, ve kterých je dimenze dána celými čísly, mají fraktály neceločíselné dimenze. Těmito čísly dimenze **fraktálů** mohou být zlomky, reálná čísla a v některých případech dokonce i iracionální čísla, například  $\pi$ . Vtom případě může být dimenze takovýchto objektů mezi čísly 1 a 2, nebo 2 a 3. (MANDELBROT, 2003)

**Fraktály** je možné také definovat jako spojité funkce bez derivace v kterémkoli z bodů celého objektu. Což je způsobené předpokladem, že v bodě, ve kterém by měla být tečna sestrojena, není objekt hladký, ale pokud je bod z povrchu objektu zvětšen, je objeveno, že nelze nalézt tečnu, jelikož v tomto bodě není hladký, ale je složen z dalších útvarů podobných okolí původního bodu. A tak stále do větších detailů (MANDELBROT, 2003)

### 1.1.1 Konstrukce fraktálů a příklady

Fraktály lze nejčastěji konstruovat dvěma způsoby. Prvním je využití afinních transformací – jednoduchých operací s objektem, jakými jsou například rotace, zmenšení či posun. Algoritmus, který takovéto transformace provádí, se nazývá IFS – iterační funkce, která dané transformace s každým stupněm iterace stále stejným



způsobem opakuje. Příklady tímto způsobem vzniklého fraktálu je Sierpenského trojúhelník nebo Kochova křivka. (ZELINKA, a další, 2006 stránky 30 - 31)

Druhým způsobem konstrukce fraktálů, je využití algoritmu TEA. Toho se využívá při konstrukci tzv. *Juliových množin*. Tyto množiny jsou tvořeny hranicemi mezi body, ve kterých vzniklá trajektorie diverguje – tedy uniká do nekonečna a body, ze kterých trajektorie konverguje k nějakému pevnému bodu, nebo cyklické trajektorii. (ZELINKA, a další, 2006 str. 51)

Trajektorie funkcí mohou být konvergentní – tedy směřující do jednoho bodu, či periodické – které nesměřují k jednomu pevnému bodu. V případě že se jedná o konvergentní trajektorii, musí existovat nějaké pevné body funkce ( $\alpha$ ), ke kterým nějaká trajektorie dorazí – jedná se o tzv. *atraktory* – přitahující body. *Atraktory* mají derivaci v bodě menší než jedna ( $|f'(\alpha)| < 1$ ), trajektorie startující z těchto bodů v tomto bodě také končí. To neplatí o všech bodech takovéto funkce, k některým bodům nemusí dorazit žádná trajektorie. V tom případě – jsou tyto body nazývány jako *zdroje* – neboli *repulzivní body*, ty mají derivaci větší než jedna ( $|f'(\alpha)| > 1$ ), a všechny trajektorie, které v takovémto bodě startují, unikají z jeho okolí. Existuje ještě třetí druh pevných bodů tzv. *neutrální body*. Tyto body mají derivaci rovnou jedna ( $|f'(\alpha)| = 1$ ), trajektorie začínající v tomto bodě se mohou chovat oběma způsoby. (ZELINKA, a další, 2006 stránky 52 - 53)

Jednotlivé periodické trajektorie je možné klasifikovat podle chování jednoho bodu z této trajektorie. Pokud je jakýkoliv bod trajektorie *atraktorem* – je tato celá trajektorie přitahujícím cyklem, pokud je naopak alespoň jeden bod trajektorie *zdrojem*, jedná se o repulzivní trajektorii. Množiny, ze kterých vznikají konvergentní trajektorie, jsou nazývány oblasti přitažlivosti – anglicky *basin of attraction*. Trajektorie vzniklá v této množině bývá omezená, přitahovaná *atraktorem*. *Juliovy množiny* vzniklé z takovýchto množin bývají souvislé, existují také *Juliovy množiny*, které souvislé nejsou, ty vznikají z tzv. kritického bodu. V tom případě trajektorie unikají do nekonečna a *Juliova množina*, která takovou trajektorii obsahuje, je nesouvislá. (ZELINKA, a další, 2006 str. 54)

Juliovy množiny je možné vykreslovat algoritmem TEA (Time Escape Algorithms), stejně jako algoritmus IFS se jedná o iterační algoritmus, který pracuje do té doby, než překročí maximální počet iterací, nebo do té doby než překročí zadané hranice. Tento

algoritmus hledá trajektorie v komplexní rovině, a to tak, že z počátečního bodu provede požadovanou transformaci a porovnává výslednou komplexní hodnotu se zadanými hranicemi. V případě, že takto vypočítaná hodnota je součástí ohraničené oblasti pokračuje další iterací, do té doby než vypočtená hodnota nepřekročí hranice. V tom případě zabarví daný bod podle počtu iterací, pokud v žádné z iterací hranice nepřekročí je původní počáteční bod zabarven černě. Tímto způsobem vznikají zajímavé barevné obrazce. Ukázkou aplikace TEA algoritmu je například Mandelbrotova množina. (ZELINKA, a další, 2006 str. 54)

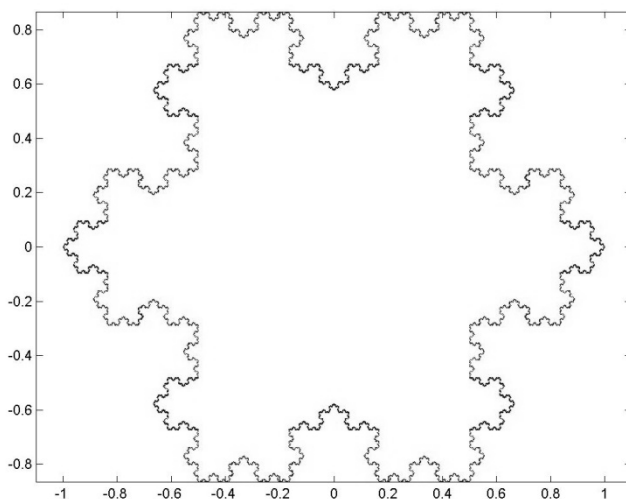
Speciálním druhem *fraktálů* jsou tzv. *podivné atraktory* (strange attractors), které se vyskytují jako trajektorie dynamických systémů, které vykazují prvky chaotického chování. To je definované jako chování systému, které se po určitém čase neustálí v jednom bodě, ale zároveň ani nediverguje. Takovéto systémy obsahují fraktální dynamiku, která je označována jako *deterministický chaos*. (TIŠNOVSKÝ, 1999), (ARONOV, a další)

Nejznámějším příkladem *podivných atraktorů* je Lorenzův atraktor, který je složen třemi diferenciálními rovnicemi a jedná se o dynamický systém popisující změny počasí. Dalším příkladem může být Uedův atraktor (obr. 3) blíže popsany níže v části této kapitoly zaměřené na dynamické systémy. Tyto obrazce se na první pohled nemusí zdát *fraktály*, ale přesto se o *fraktály* jedná, jelikož při přiblížení se neztrácí detailnost. Prvky deterministického chaosu se také objevují v dynamickém finančním systému, který je jádrem této bakalářské práce. (ARONOV, a další)

Vzhledem k zaměření práce na ekonomické fakultě jsou v této práci označení pro *fraktály* nebo *podivné atraktory*, které slouží spíše jako název pro geometrické objekty, použity výrazy popisující chování systému, tedy zda systém vykazuje prvky chaotického chování. Tato práce se věnuje dynamickému nelineárnímu finančnímu modelu, ve kterém se objevuje deterministický chaos, a jehož trajektorie v původním zadání vytváří *podivný atraktor*.

### 1.1.1.1 Kochova křivka

Jedním z nejznámějších **fraktálů** je křivka pojmenovaná po švédském matematikovi Helge von Kochovi. Jedná se o představitele fraktálu vzniklého iterační funkcí. V tomto případě se jedná o jednoduchý postup, kdy se původní rovnostranný trojúhelník rozdělí na třetiny, nad prostřední třetinou se sestrojí další rovnostranný trojúhelník s délkou hrany rovnou této třetině, a základna takto vzniklého trojúhelníku se odstraní. Tímto způsobem se pokračuje stále dokola. Tato křivka má nekonečnou délku, a jedná se o křivku spojitou, která nemá v žádném bodě tečnu. Kombinací tří Kochových křivek vzniká tzv. Kochova vločka ukázaná na obr. 1 (MANDELBROT, 2003 str. 28)

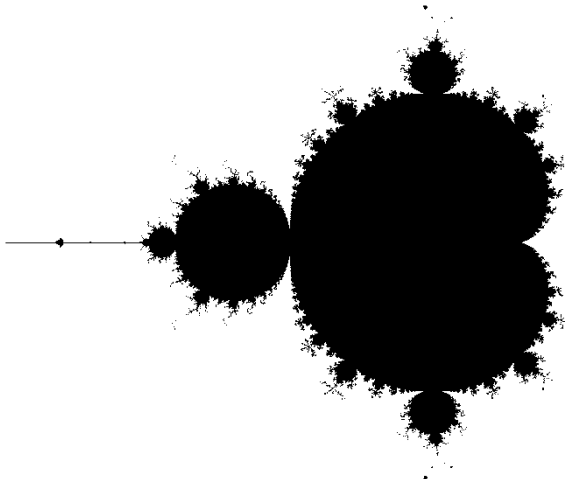


**Zdroj:** <http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~hejtmmar/img/koch.jpg>

**Obr. 1:** Kochova vločka

### 1.1.1.2 Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina je fraktál složený množinou komplexních čísel. Tato množina je definována jako posloupnost komplexních čísel, které jsou určeny rovnicí  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , kde  $z$  a  $c$  jsou komplexními čísly. Tato rovnice je následně iterována, kdy v každém systému iterací je parametr  $c$  nastavený tak, že za jeho reálnou část je dosazena souřadnice  $x$  z intervalu  $x \in [-2, 0.5]$ , a za imaginární část je dosazena souřadnice  $y$  z intervalu  $y \in [-1, 1]$ . Tímto způsobem je omezen prostor, ve kterém má být Mandelbrotova množina generována. (ZELINKA, a další, 2006 stránky 54, 64)



Zdroj: <http://cp4space.files.wordpress.com/2012/09/monochrome.png>

**Obr. 2:** Mandelbrotova množina

## 1.2 Teorie úrokové míry

Existuje vícero teorií, které popisují úrokovou míru. Zde jsou zmíněny pro orientaci v tomto tématu pouze dvě, první z nich je **klasická teorie úrokové míry**, druhá **teorie racionálního očekávání**. **Klasická teorie úrokové míry** tvrdí, že úroková míra je určena *nabídkou úspor a poptávkou po investičním kapitálu*. **Teorie racionálního očekávání** staví do popředí informace, na základě nichž jsou ovlivněny ceny cenných papírů a úrovně úrokových měr. (ROSE, 1994 str. 225)

### 1.2.1 Klasická teorie úrokové míry

Prvním faktorem ovlivňujícím **klasickou teorii úrokové míry** je *Nabídka úspor*. Ta je spojená s běžnými úsporami, především domácností, které bývají vyjádřeny, jako rozdíl mezi běžným příjmem a běžnými spotřebními výdaji. Uvažuje se také, že spotřebitel upřednostňuje současnou spotřebu před spotřebou budoucí – tedy momentální uspokojení svých potřeb, před uspokojením v budoucnu, s čímž souvisí výše úrokové míry. Proto má na úspory domácností vliv také úroková míra. Při vyšší úrokové míře je budoucí hodnota současných prostředků domácnosti vyšší, a proto mají vyšší sklon ke spoření, než když je úroková míra nižší, v tomto případě výhoda úspor, a tedy i vyšší hodnoty momentálních prostředků domácnosti je menší, a spotřebitel si spíše vybere momentální uspokojení potřeby, než by čekal do budoucna. (ROSE, 1994 stránky 225 - 227)

Druhým faktorem, ovlivňujícím *nabídku úspor*, jsou úspory firem. Tyto úspory závisí na tom, jak se firmě daří – tedy na jejím zisku, a také na její dividendové politice. Velké množství firem preferuje stálou úroveň vyplácených dividend nebo jejich každoroční mírný růst, a to bez ohledu na současný zisk. A zde opět přichází na řadu úroková míra,

při vyšší úrokové míře firmy vyplácejí dividendy spíše z interních zdrojů, například ze zadrženého zisku. Naopak pokud je úroková míra nízká, mají tendenci si na výplatu dividend půjčovat z externích prostředků na peněžních a kapitálových trzích. (ROSE, 1994 stránky 227 - 228)

*Nabídka úspor* se týká také úspor vlád, jedná se převážně o nečekané úspory, jež vlády tvoří pouze v případě, kdy jsou vládní příjmy vyšší než vládní výdaje, tedy pokud existuje rozpočtový přebytek. Zásadní vliv na úspory vlád má daňová politika vlády společně s tokem příjmů v ekonomice. Vládní úspory jsou ovšem mnohem menší položkou tvořící *nabídku úspor* oproti firmám a domácnostem, vlády ve většině případů nemají takový objem úspor, i vzhledem k vysoké proměnlivosti vládních politik. (ROSE, 1994 stránky 228 - 229)

*Poptávkou po investičním kapitálu* se zabývá samostatná podkapitola, poptávka po investicích, všechny informace jsou obsaženy tam.

**Klasická teorie úrokové míry** popisuje a vysvětluje faktory ovlivňující úrokové sazby, ale vzhledem k tomu, že se jedná pouze o teorii, obsahuje i některá omezení. Hlavním je fakt, že se nezabývá jinými faktory, než jsou úspory a investice. Dále také tvrdí, že úrokové míry jsou zásadní pro míru úspor. Dnešní ekonomové se spíše přiklánějí k názoru, že nejdůležitějším faktorem, ovlivňujícím úrokové míry, je výše příjmů spotřebitelů. A také tato teorie tvrdí, že poptávka po zápůjčním kapitálu je ovlivněna pouze podnikovým sektorem, tento fakt byl s časem částečně vyvrácen. Dnes je známo, že spotřebitelé i vlády také významným způsobem ovlivňují dostupnost úvěrů. (ROSE, 1994 stránky 235 - 236)

### **1.2.2 Teorie racionálního očekávání**

**Teorie racionálního očekávání** je oproti klasické teorii úrokových měr, mnohem novější teorií, a zvláště v dnešní době, teorií relativně moderní, vzhledem k vývoji dnešní společnosti s rozvojem výpočetní techniky a telekomunikací ke společnosti, ve které může znalost informací před konkurencí znamenat velmi významnou výhodu, a kde je výměna informací otázkou okamžiku i na obrovské vzdálenosti. Tato teorie tvrdí, že peněžní a kapitálové trhy, jsou velice citlivé na informace, které následně ovlivňují úrokové sazby a ceny cenných papírů.

Před přiblížením tvrzení teorie racionálního očekávání je potřeba se seznámit s některými důležitými předpoklady, z nichž tato teorie vychází. Za prvé by měly cenné papíry a úrokové sazby být v korelaci s informacemi, které jsou všeobecně dostupné a případné změny by se měly odehrávat pouze na základě nepředvídatelných informací. Předvídatelné informace by již měly být v cenách cenných papírů a úrovních úrokových sazeb obsaženy. Dále by měly náklady na získané informace být zanedbatelné stejně jako transakční náklady spojené s obchodováním s cennými papíry. A nakonec by očekávání, která se týkají cenných papírů a úrokových sazeb měla být formována racionálně a dále efektivně využívána. (ROSE, 1994 stránky 251 - 253)

Literatura hovoří o firmách a jednotlivcích jakožto o racionálních agentech, kteří se snaží vytvářet nezájaté předpovědi budoucích cen z důvodů maximalizace svých zisků na základě jim známých informací. Tito racionální agenti formulují svá očekávání s předpokladem, že se budoucí ceny cenných papírů nebudou mnoho lišit od optimálních předpovědí. A pokud toto tvrzení je efektivní z pohledu peněžních a kapitálových trhů, pak můžeme tvrdit, že úrokové sazby se budou pohybovat okolo nebo budou téměř na své rovnovážné úrovni. Platí, že odchylky způsobené poptávkou nebo nabídkou jsou velice brzy eliminovány. A z tohoto důvodu obchodníci, kteří předpokládají výrazně vyšší, nebo výrazně nižší úroveň úrokových sazeb pravděpodobně nebudou dlouhodobě úspěšní. (ROSE, 1994 str. 253)

Důležitým faktorem ovlivňujícím úrokové sazby je aktuálnost informací, úrovně ovlivňují pouze zcela nové a neočekávané informace, již známe, nebo předpokládané informace jsou již v úrokových sazbách obsaženy. Minulost úrovně úrokových sazeb proto není zcela spolehlivým vodítkem pro odhad úrovně budoucí. Směr pohybu úrokových sazeb je však dán tím, co účastníci trhu předpokládají na základě známých informací. Pokud je očekáván nárůst poptávky (při nezměněné nabídce), a nová neočekávaná informace hovoří o snížení poptávky, úroveň úrokových sazeb poklesne, místo předpokládaného vzrůstu, a to samé naopak. Teorie racionálního očekávání proto tvrdí, že pro určování úrovně úrokových sazeb je potřeba znát aktuální očekávání na trhu, a porovnávat tato očekávání s novými informacemi, pokud mají dostatečnou váhu k tomu, aby tato očekávání změnila, pak dojde i ke změně úrokových sazeb. Pokud se však očekávání nezmění, nezmění se ani úroková sazba. (ROSE, 1994 stránky 253 - 254)

Tato teorie má smysl spíše pro analýzu krátkodobých úrokových sazeb, vzhledem k okamžité reakci na nově známé informace. Je velice těžké zcela přesně určit, které informace jsou využívány pro vytváření očekávání na trhu. Dále neplatí jeden z předpokladů této teorie, že náklady spojené se sběrem informací a jejich následnou analýzou sloužící k formování očekávání jsou zanedbatelné. Nakonec se dá nalézt i určitý vztah mezi minulostí a současností u některých úrokových sazeb. Z těchto důvodů se může zdát, že tato teorie je stále ve stádiu vývoje. Ale i přes tento fakt je stále schopna ukázat modernější přístup k určování úrovně úrokových sazeb, než teorie klasická. (ROSE, 1994 stránky 254 - 255)

### 1.3 Poptávka po investicích

**Poptávka po investicích** je silně spjata s **klasickou teorií úrokových sazeb**, jedná se podle ní o jeden ze dvou faktorů (po míře úspor domácností, firem a vlád), které ovlivňují výši úrokových sazeb.

Z definice vyplývá, že **poptávka po investicích**, se zabývá investicemi firem. Firmy mají ve svém vlastnictví určitý kapitál, který musí obnovovat, a to z důvodů opotřebování či zastaralosti technologie. Investice firem do svého stávajícího kapitálového majetku se nazývají *reprodukční investice*, nebo také *amortizace*. Firmy nadále také nakupují nový kapitálový majetek, z důvodů očekávání větších zisků, expanze firem, nebo jejich vzniku. Takovýmto způsobem jsou definovány *čisté investice*. A pokud se tyto dva druhy investic, tedy *reprodukční* a *čisté investice*, sečtou, stávají se z nich *hrubé investice*. (ROSE, 1994 str. 229)

Jakýkoliv majetek se s časem opotřebovává, stejně tak zároveň vědci přicházejí se stále novými objevy a technologiemi, které se zařazují do všech částí produkce firmy. Pokud firmy chtějí být dlouhodobě konkurenceschopné, musí svůj kapitálový majetek obnovovat. Ať už kvůli opotřebování nějakého stroje či jeho modernizaci, aby se vyrovnali nebo předčili konkurenci. Z tohoto důvodu firmy neustále vydávají zdroje na obnovu svého kapitálového majetku – podnikají *reprodukční investice*. Tyto investice bývají financovány z vnitřních zdrojů firem, z čehož vyplývá, že se dají snáze předpokládat, kupříkladu na základě odpisové politiky dané společností. (ROSE, 1994 str. 229)

Naopak *čisté investice* jsou velice nestálou silou v ekonomice, z důvodů častých změn ovlivňujících pořízení *čisté investice* nového majetku. Nový majetek si společnosti pořizují z různých důvodů, které se nedají tak snadno předvídat. Může se jednat o zavedení zcela nové linky, zvýšení stávajících výrobních kapacit, zavedení zcela nové technologie, ale i na základě nákladů na získání potřebných peněžních prostředků. *Čisté investice* jsou ovšem také zásadní řídicí silou v ekonomice a to kvůli svému celkovému objemu a své nestálosti. Jak uvádí literatura: „Čisté investice jsou vzhledem ke své celkové velikosti a nestálosti řídicí silou v ekonomice.“ Významný pokles *čistých investic*, může být předzvěstí hospodářské krize (ROSE, 1994 str. 229). Může tak vést k poklesu produktivity a zároveň k růstu nezaměstnanosti. Literatura (ROSE, 1994 str. 229) uvádí jako příklad roky 1982 a 1991, kdy došlo k poklesu *čistých investic* na základě vysokých úrokových sazeb a dalších faktorů, a následnému nárůstu nezaměstnanosti a zároveň k poklesu produktivity průmyslu.

### **1.3.1 Vliv úrokové míry na poptávku po investicích**

Objem celkové poptávky po investicích závisí, krom jiného, také na úrokové sazbě. Společnosti počítají návratnosti investic a na jejich základě určují, zda danou investici uskuteční či neuskuteční. Zde přichází v úvahu právě úrokové sazby. Společnosti pro výpočet návratnosti investic používají více různých metod. Jednou z nejčastěji využívaných je vnitřní výnosové procento, kterým firma stanovuje výnosnost dané investice v procentech. Jednotlivá vnitřní výnosová procenta investic poté může společně porovnávat a vybírat ty investiční možnosti, které mají nejvyšší očekávanou míru výnosnosti. Výsledné projekty poté společnosti mohou porovnávat s výší úrokových sazeb – tedy s náklady, které se pojí se získáním potřebného kapitálu pro uskutečnění dané investice. Pokud se tyto náklady zvýší, může se pro firmu investice stát nevýhodnou a může od ní upustit. Zároveň pokud úrokové sazby klesnou, sníží se náklady na získání kapitálu, a tedy společnost může realizovat i investice s nižší mírou výnosnosti. Z tohoto důvodu úrokové sazby ovlivňují výši investic v ekonomice a klasičtí ekonomové považují poptávku firem po investičním kapitálu za negativní vůči úrokové míře. (ROSE, 1994 stránky 231 - 232)



### 1.3.2 Matematická reprezentace

Pro doplnění je zde představena možná matematická reprezentace jednotlivých druhů investic.

$$I_t = N_{jt} + R_{jt} \quad (1)$$

kde:

$I_t$ ... hrubé investice

$N_{jt}$ ...čisté investice

$R_{jt}$ ... reprodukční investice

Hrubé investice  $I_t$  v čase  $t$ , jsou sumou čistých investic,  $N_{jt}$ , a reprodukčních investic,  $R_{jt}$ .

$$R_{jt} = \sum_{i=1}^n d_{ji} I_{t-1} \quad (2)$$

kde:

$R_{jt}$ ... reprodukční investice

$d_{ji}$ ... opotřebování  $i$ -tého majetku vzhledem k  $j$ -tým odpisům

$I_{t-1}$ ...hrubé investice v čase  $t-1$

Reprodukční investice je část hrubých investic, která nahrazuje opotřebování majetku vzhledem k  $j$ -tým odpisům.

$$N_{jt} = I_t - R_{jt} \quad (3)$$

Ze vztahu (1) vyplývá rovnice čistých investic  $N_{jt}$ , které jsou rozdílem hrubých,  $I_t$ , a reprodukčních investic,  $R_{jt}$ . (TERREGROSSA, 37 (1997) str. 85)

## 1.4 Diferenciální rovnice v Ekonomii

Diferenciální počet a zvláště diferenciální rovnice pronikají v současnosti do mnoha vědeckých oborů, kde mají své využití při modelování změn a pohybů. Stejně je tomu i v ekonometrické analýze, kde se začíná objevovat teorie diferenciálních rovnic zvláště po rozšíření možností výpočetní techniky. (ZHANG, 2005 str. 1)

### 1.4.1 Úvod k diferenciálním rovnicím

Pro potřeby této bakalářské práce je vhodné se podívat na jednotlivé druhy diferenciálních rovnic. S důrazem především na obyčejné diferenciální rovnice. Obyčejné diferenciální rovnice jsou takové rovnice, kdy řešením je funkce jedné nezávislé proměnné, nejčastěji značené  $t$ , která vyjadřuje čas. Jednotlivá řešení jsou pak funkcemi  $x(t)$ , které vyjadřují změnu nějakého sledovaného parametru v čase – jedná se tedy o proměnné závislé.

Obyčejné diferenciální rovnice se nadále dělí na autonomní a neautonomní. Následující rovnice (4) je autonomní diferenciální rovnicí s parametry  $a$ ,  $b$ , čas  $t$  není součástí nějakého parametru a proto se jedná o autonomní diferenciální rovnici. (ZHANG, 2005 str. 2)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \quad (4)$$

kde:

$\dot{x}(t)$ ... derivace funkce  $x$  vzhledem k času  $t$

$a$ ,  $b$ ... parametry, které jsou nějakou konstantou

$x(t)$ ... proměnná závislá na čase  $t$

Naopak tato rovnice (5), je diferenciální rovnicí neautonomní, jelikož  $\sin t$  je funkcí, která je závislá na čase.

$$\dot{x}(t) = x(t) + \sin t \quad (5)$$

Dalším rozlišením diferenciálních rovnic je podle nejvyšší derivace objevující se v rovnici, tímto řádem je poté daná diferenciální rovnice nazývána, například rovnice

$\dot{x}(t)=ax(t) + b$  je autonomní diferenciální rovnicí prvního řádu, protože nejvyšší řád derivace, který obsahuje je jedna. Rovnice: (ZHANG, 2005 str. 2)

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - 2x + 2$$

(6)

je diferenciální rovnicí druhého řádu, protože derivace  $\ddot{x}(t)$  je derivací  $\dot{x}(t)$ . A tato rovnice má obecné řešení:

$$x(t) = A_1 e^{2t} + A_2 e^t + 1$$

(7)

kde  $A_1$  a  $A_2$  jsou dvě konstanty integrace. První derivace  $\dot{x}$  se tak může objevit pouze v obyčejné diferenciální rovnici prvního řádu, ale tato derivace může mít různou mocninu:  $\dot{x}^2$ ,  $\dot{x}^3$ . V tomto případě hovoříme o stupni dané diferenciální rovnice. Například:

$$3\dot{x}^2 - 2x + 2 = 0$$

(8)

je obyčejná diferenciální rovnicí prvního řádu a druhého stupně. (ZHANG, 2005 str. 3)

#### 1.4.2 Využití diferenciálních rovnic v ekonomii

Pro seznámení s možným využitím diferenciálních rovnic v ekonomii a ekonometrii je nutné nejprve definovat, co vlastně tyto rovnice vyjadřují, a tím je změna stávajícího stavu vyjádřená funkcí tohoto stavu. Tuto změnu stavu ukazuje například rovnice hrubého domácího produktu (GDP), ve které jsou sledovány změny GDP v čase. Pokud je míra změn GDP úměrná momentálnímu stavu GDP, je možné zavést proměnnou  $x$ , která vyjadřuje stav hrubého domácího produktu ekonomiky. A dále rovnici vyjadřující změny GDP v čase:

$$\dot{x}(t) = gx(t)$$

(9)

kde:

$x(t)$ ...funkce  $x$  závislá na čase  $t$

$g$ ... parametr, který je konstantou

kde  $t$  je čas a  $\dot{x}(t)$  je derivace funkce  $x$  vzhledem k času  $t$ . Míra růstu GDP je potom  $\dot{x}/x$ . Z čehož vyplývá následující, pokud je míra růstu  $g$  daná v jakémkoli čase  $t$ , pak je GDP v  $t$  určena řešením diferenciální rovnice. Řešení této diferenciální rovnice vypadá následovně: (ZHANG, 2005 str. 1)

$$x(t) = x(0)e^{gt} \quad (10)$$

Z tohoto řešení vyplývá, že GDP roste nebo klesá v čase exponenciálně v závislosti na kladném nebo záporném  $g$ . Tato diferenciální rovnice se dá za konstantního  $g$  explicitně řešit. Problémem je, že na míru růstu většinou působí více faktorů jako: momentální stav ekonomického systému, okolí ekonomiky, znalosti dané ekonomiky a další. Proto může mít míra růstu komplikovanější formu  $g(x, t)$ . Takto vytvořená diferenciální rovnice (11), pro ekonomický růst, je pak mnohem složitěji řešitelná: (ZHANG, 2005 str. 2)

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t)x(t) \quad (11)$$

kde:

$g$ ... funkce závislá na  $x$  a  $t$

Zásadní otázkou týkající se diferenciálních rovnic a jejich aplikaci v ekonomii, či v dalších vědních oborech, je otázka linearit a nelinearity. Linearita systému znamená, že existuje nějaké pravidlo, které přesně určuje, jak se bude systém chovat v další okamžik, a že toto chování není ovlivněno současným stavem. Toto pravidlo chování systému tak lze jednoduše geometricky vyjádřit. Naopak nelinearita a popis chování dynamických systémů se liší tím, že se zabývá vzájemným vztahem současného a budoucího stavu systému.

Na základě této myšlenky je založeno srovnání vlivů parametrů na lineární a nelineární systém, které jsou díky tomu velmi odlišné. Pokud se parametr popisující lineární systém změní, pak se povaha chování systému kvalitativně nezmění, ale pokud se změní parametr u systému, který vykazuje známky nelinearity, tak i pouhá nepatrná změna

může vyvolat náhlé a velmi dramatické změny v chování systému, a to jak po stránce kvalitativní, tak i po stránce kvantitativní. (ZHANG, 2005 str. 3)

### **1.4.3 Nelineární dynamické systémy v ekonomii**

Teorie nelineární dynamiky systémů je schopna ukázat, jaký je vztah celku ke změně svých jednotlivých částí, jaké jsou rozdíly celku a jeho částí. Tato teorie závisí na rozvoji počítačových technologií a možností, které z tohoto rozvoje vyplývají. Tento vývoj a základní myšlenky nelineární dynamiky mají dnes široké uplatnění od fyziky, ekonomie přes biologii, ekologii až po sociologii. V mnoha komplexních systémech, vytvořených v rámci jednotlivých vědeckých disciplín, byly nalezeny společné vlastnosti. Právě rozmanitost aplikace této teorie poukazuje na možné sjednocení metodologie v těchto různých vědních oborech. Skrze zkoumání společných znaků, objevujících se v odlišných systémech, si mohou být vědci blíže, protože teorie nelineární dynamiky dává vědcům do rukou nový nástroj pro modelování a objevování komplikovanosti, a to jak v přírodě, tak ve společnosti. A dále jsou tyto nové techniky a koncepty schopny poskytnout metody určené k modelování a simulaci trajektorií náhlých a nezvratných změn ve společenských i přírodních systémech.

Počátek moderní teorie nelinearity je spojen se jménem francouzského matematika H. Poincaré, který přinesl do studia a popisu vlastností řešení nelineárních diferenciálních rovnic kvalitativní techniky a topologii geometrie, oproti tradičně používaným analytickým metodám. Považoval za důležitější pochopení globálního chování všech řešení systému spíše než lokální chování jednoho analyticky přesně určeného řešení. (ZHANG, 2005 str. 4)

Studium nelineárních systémů rozšířili zvláště matematikové v Sovětském Svazu jako Ljapunov, Pontryagin, Andronov. Na jejichž práci pak navazovali další okolo roku 1960 například Smale v USA, Peixoto v Brazílii nebo Kolmogorov, Arnol'd a Sinai ze Sovětského Svazu. V roce 1975 došlo k důležitému objevu. Byl objeven nový druh pohybu v dynamických systémech, dnes nazývaný chaotickým pohybem. Tento nový pohyb byl popsán jako nestálý či kolísavý s velkým množstvím period, ale ne quasiperiodický. Může se objevit i ve velmi jednoduchém systému. Komplikovanost tohoto pohybu v dynamických systémech vědce velice zajímala, ale k tomu, aby mohl být chaotický pohyb v dynamických systémech pozorován, bylo nejprve třeba počítačů

a obrazovek schopných grafického vyjádření těchto systémů. (ZHANG, 2005 stránky 4 - 5)

Tato teorie se dá využít v mnoha oblastech ekonomie, dá se aplikovat například na katastrofy, hospodářský cyklus, ekonomický růst, ekonomický chaos, vliv stochastického ruchu na socio-ekonomické struktury, rychlé a pomalé socio-ekonomické procesy nebo vztah mezi mikroekonomickými a makroekonomickými strukturami. Všechna témata nemohou být zcela efektivně zkoumána tradičními analytickými metodami, které jsou založeny na linearitě stability a stabilním rovnovážném bodě. Teorie nelineární dynamiky také změnila pohled ekonomů na evoluci. Kupříkladu tradiční pohled na vztah příčiny a následku, aplikovaný na zákony a z nich vyplívající chování tvrdí, že z jednoznačných pravidel vyplývá jednoznačné chování, a že složitá pravidla znamenají složitě chování. Právě tohle tvrzení, skrze teorii nelinearity, naráží. Teorie nelinearity totiž ukazuje, že složitě chování může vzejít i z jednoduchých pravidel. Příkladem takového chování je atraktor japonského matematika J. Uedy: (ZHANG, 2005 stránky 5 - 6)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x^3 = F \cos t \quad (12)$$

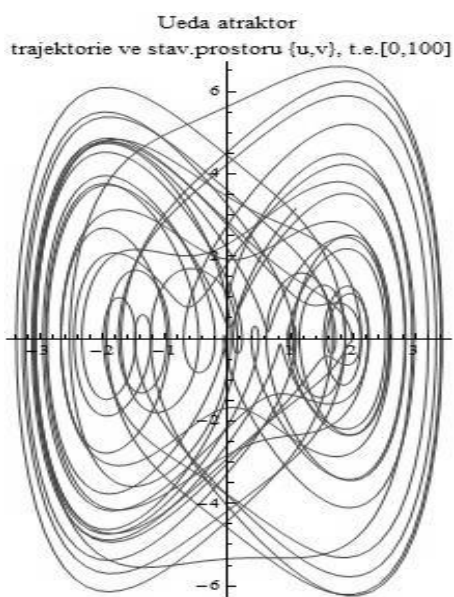
kde:

$\ddot{x}$ ... druhá derivace  $x$

$\dot{x}$ ... první derivace  $x$

$\gamma, F$ ... konstanty

Tento jednoduchý dynamický systém vykazuje chaotické chování, když  $\gamma = 0,025$  a  $F=7,5$ . S takto přesně zadanými hodnotami parametrů tento model vykazuje chaotické chování po celou dobu průběhu funkce, bez stopy po periodickém nebo pravidelném pohybu. Toto chování ilustruje přiložený obrázek. (ZHANG, 2005 str. 6)



**Zdroj:** Vlastní výpočet

**Obr. 3:** Trajektorie Uedova atraktoru ve stavovém prostoru

Nelineární dynamické systémy jsou schopny ukázat, že řešení daných rovnic existuje, ale často je nemožné tato řešení napsat přesně v algebraickém tvaru, ale řešení dostaneme jen numericky. Ekonomie založená na teorii nelineární dynamiky se snaží o poskytnutí nového pohledu na dynamiku směrem k nepředvídatelnosti, komplexnosti, pomíjivosti a mnohočetnosti. V ekonomii se díky tomuto pohledu rozšiřuje tendence zaměřit se na obecné složitější celky spíše než na detailní jednoduchý popis jevu. Pojetí nelinearity, sebe organizace, strukturální změny, řádu a chaosu objevující se v ekonomii, dostalo nový a širší význam. Dynamika ekonomiky se také může podobat turbulentnímu pohybu v kapalinách, ve kterých se proměnlivé víry i relativně stabilní proudy neustále navzájem ovlivňují. Tyto proměny jsou složeny vlastním dynamickým uspořádáním, které probíhá zároveň se spontánním utvářením nepatrných a komplikovaných struktur. Pro nelineární systémy je charakteristické náhodné objevování strukturálních změn s náhodným pohybem, jakými jsou například bifurkace. Ta způsobuje ztrátu schopnosti dynamických jevů vrátit se do původního stavu. (ZHANG, 2005 stránky 7 - 8)

Tradiční ekonomové se zaměřili na pravidelný cyklus ekonomických systémů. A proto studenti, kteří se zajímají o dynamiku ekonomických systémů, jsou limitováni při svém studiu diferenciálních rovnic popisujících obvyklá řešení, stabilní řešení a periodická řešení. A to z toho důvodu, že se ekonomové zajímají převážně o existenci

jednoznačného stabilního rovnovážného bodu, a proto studenti, kteří se učí tradiční ekonomii, mají sklon k představě ekonomické reality jakožto stavu, který je naprosto přesně dán technologiemi, institucemi a preferencemi, nemění se s časem, a to vše za ideálních podmínek. Proti tomu však hovoří běžné zkušenosti z praxe, které hovoří o mnohem složitější podobě ekonomické reality. Ekonomické struktury nezůstávají neměnné i v rámci jedné generace a ekonomické systémy se mohou zhroutit nebo naopak velice rapidně vzrůst bez očividných znaků strukturálních změn. (ZHANG, 2005 str. 8)

Chaos v nelineárních dynamických systémech je možné též popsat jako nahodilost obsaženou v určitém systému, která není způsobená vnějšími vlivy, ale působením vlastních parametrů systému, a dá se říci, že je tato nahodilost nepravidelná a těžko předvídatelné chování systému. Teorie chaosu v systémech poskytuje nástroje, jak vysvětlit složité chování systému ne jako důsledek vnějších vlivů nebo náhodné chování, ale jako výsledek chování a směřování vnitřních struktur systému. (MA, a další, 2001 stránky 1242 - 1243)

## **2 Modelování krátkodobé úrokové míry**

Změny úrokové míry bývají vyjadřovány jako lineární funkce. Mnohem zajímavější jsou případy, kdy se úrokové míry modelují nelineárně, dvěma takovýmito modelům se věnuje tato kapitola. Každý z těchto modelů je jinak zaměřený. První z nich sleduje krátkodobou úrokovou míru a pomocí matematických nástrojů se snaží nalézt možné nelinearity, druhý je modelem návratu ke středu. Oba dva modely jsou velice rozdílné, ale je možné najít společného jmenovatele. Tím je v tomto případě krátké období úrokové míry. Jak vyplývá z obou těchto modelů, nelinearita se dá mnohem snadněji vysledovat u denních či měsíčních změn úrokové míry. V delších časových obdobích se spíše než krátkodobé nelineární odchylky prosazuje jistý dlouhodobý lineární trend.

### **2.1 Testování nelinearity funkce krátkodobé úrokové míry**

První model se zabývá testováním linearitu a nelinearity krátkodobé úrokové míry. Většina literatury zabývající se reakcemi úrokové míry na inflaci a celkovou reálnou produkci předpokládá lineární vývoj úrokové míry nezávislý na čase. Avšak



empirickým pozorováním a teoretickými studii byl striktně lineární vývoj zpochybněn, a zároveň je prováděn výzkum, za jakých podmínek může úroková míra vykazovat známky nelinearity. Nelinearitu úrokové míry může například způsobit produkční mezera či odchylka inflace od předpokládané úrovně jak uvádí ve své práci *Nonlinearity and Structural Change in Interest Rate Reaction Functions for the US, UK and Germany* – tedy Nelinearita a strukturální změny v reakčních funkcích úrokových měr pro Spojené státy americké, Velkou Británii a Německo autoři: Mehtap Kesriyeli, Denise R. Osborn and Marianne Sensier. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) stránky 2 - 3)

Nyní k samotnému modelu, který autoři zvolili pro analýzu hodnot měsíční krátkodobé úrokové míry, a jakým způsobem testují případnou linearitu či nelinearitu, vychází ze základního lineárního modelu reakční funkce úrokové míry definovaného jako:

$$r_t = \alpha w_t + u_t \quad (13)$$

kde:  $r$  je krátkodobá úroková míra v čase  $t$ ,  $w_t$  je ( $p \times 1$ ) vektor vysvětlujících proměnných,  $\alpha$  je ( $p \times 1$ ) vektor koeficientů a  $u_t$  je poruchová složka s rozdělením i.i.d.(0,  $\sigma^2$ ), (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem  $\sigma^2$ ). Aby takto definovaný model mohl ukázat dynamiku změn hodnot úrokové míry, obsahuje i hodnoty mimo sledované období, které jsou vyjádřeny jako snaha centrální banky o vyhlazení úrokové míry. Tento lineární model je následně modifikován tak, aby mohli být obsaženy případné nelinearity. Zároveň takto formulovaný model umožňuje sledovat vývoj koeficientů nebo strukturální změny úrokové míry tím, že obsahuje složku času, jakožto jednu z přechodových proměnných. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) stránky 4 - 5)

$$r = \beta_0' w_t + \beta_1' w_t F(s_t) + u_t \quad (14)$$

kde:

$r$ ... úroková míra

$w_t$ ... vektor vysvětlujících proměnných

$\beta$ ... vektorový koeficient

$u_t$ ... poruchová složka – i.i.d.(0,  $\sigma^2$ )

$F(s_t)$ ... přechodová funkce definovaná následovně:

$$F(s_{it}) = [1 + \exp\{-\gamma_i(s_{it} - c_i)/\sigma(s_{it})\}]^{-1} \quad \gamma_i > 0, i = 1, 2.$$

(15)

kde:

$s_{it}$ ... logistická funkce

$\gamma_i, c_i$ ... parametry

$\sigma$ ... směrodatná odchylka

exp... exponent

Tato logistická funkce je vhodná pro daný model, protože se jedná o monotónně rostoucí funkci  $s_{it}$ , díky čemuž se v ní mohou promítnout dopady hospodářského cyklu nebo změny úrokové míry centrální bankou. Parametr  $\gamma_i$  může dopomoci k plynulému přechodu mezi dvěma hodnotami, kterých může funkce nabývat:  $F(s_{it}) = 0$  a  $F(s_{it}) = 1$ , pro relativně malá  $\gamma_i$ , nebo může být náhlý pro vysoká  $\gamma_i$ . Umístění přechodu mezi těmito hodnotami je dáno parametrem  $c_i$ , s tím, že středový bod přechodu určuje hodnota  $F(c_i) = 0,5$ . Exponent funkce  $F$  je standardizován pomocí vzorové standardní odchylky přechodové proměnné, publikované Teräsvirtou<sup>1</sup>. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) str. 5)

Z formulace funkce krátkodobé úrokové míry (14) nelze jednoznačně určit linearitu, či případná nelinearita, a právě z tohoto důvodu autoři sice vychází z lineárního modelu, ale nadále volí jeho úpravu tak, aby testováním bylo možno zjistit, zda nelinearitu obsahuje nebo ne. Vzhledem k nedostatečnému určení parametrů pro testování linearitu nulovou hypotézou je použito Taylorovy aproximace přechodové funkce  $F(s_t)$  pomocí polynomu třetího stupně. Výsledkem této aproximace je test linearitu a nelinearity krátkodobé úrokové míry jakožto test nulové hypotézy:  $\delta_{2j} = \delta_{3j} = \delta_{4j} = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ), která je dosazena do rovnice zdánlivé regrese, jejíž autoři jsou Luukkonen, Saikkonen a Teräsvirta<sup>1</sup>. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) stránky 5, 24)

$$y = \delta_0 + \delta_1^{w_t} + \delta_2^{w_t s_t} + \delta_3^{w_t s_t^2} + \delta_4^{w_t s_t^3} + v_t$$

(16)

---

<sup>1</sup> Luukkonen, R. P., Saikkonen and T. Teräsvirta. Testing Linearity Against Smooth Transition

Tato regrese se v praxi používá jako F-test pro výběr vhodných a eliminaci nepotřebných proměnných. Každá vysvětlující proměnná  $w_t$  je považována za možnou přechodovou proměnnou  $s_t$ . Aby bylo možno otestovat stabilitu parametrů, je čas považován také za přechodovou proměnnou, což umožňuje sledovat i případné změny koeficientů krátkodobé úrokové míry. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) str. 24)

Na základě předpokladu, kdy jsou vysvětlující proměnné i čas považovány za potenciální přechodovou proměnnou, jsou vybrány vhodné přechodové proměnné metodou vyhledávání v síti a následnou aplikací metody nejmenších čtverců na vybrané proměnné. Metoda vyhledávání v síti je aplikována pro 150 hodnot parametru  $\gamma$  a 40 hodnot parametru  $c$  ze sledovaného rozmezí pro každou uvažovanou proměnnou, aby bylo definováno rozpětí transitivní funkce -  $F(s_t)$ . Pro vypočítané hodnoty  $s_t$ ,  $\gamma$  a  $c$  logistické funkce  $F(s_t)$  je spočtena metoda nejmenších čtverců a aplikována na rovnici (14). Přechodová proměnná s nejmenší sumou čtverců odchylek (reziduí) je poté vybrána za  $s_t$ . (KESRIYELI, a další, 044 (2004) stránky 24 - 25)

Po výběru  $s_t$  je na model (14) aplikována metoda nejmenších čtverců za podmínky, že daná přechodová funkce má nejmenší hodnotu sumy čtverců odchylek. Jako doplnění vyhledávání v síti, je možné použít testu  $p$  – hodnoty linearity dané přechodové proměnné  $s_t$ , výsledkem tohoto testu nemusí nutně být stejné přechodové proměnné, a vzhledem k tomu, že metoda vyhledávání v síti je založena na vyhledávání nejvhodnějšího kritéria nelineárního modelu, je autory preferována. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) str. 25)

Na vybrané přechodové proměnné je následně aplikována metoda nejmenších čtverců s podmínkou nejmenší sumy odchylek pro danou přechodovou proměnnou. Jednotlivé méně vhodné proměnné jsou vynechány použitím  $t$  – testu, a jsou vybrány pouze některé proměnné z vektoru vysvětlujících proměnných  $w_t$ . Dále je takto vzniklý model přepočítán nelineární metodou nejmenších čtverců, ve které jsou využity parametry  $c$  a  $\gamma$ , s hodnotami přejatými z předcházejícího lineárního odhadu. Hodnoty parametrů vypočtené nelineární metodou jsou následně porovnány s výsledkem vyhledávání v síti tak aby se zajistilo, že se výrazně neliší. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) str. 25)

Data, vzniklá aplikací výsledné přechodové funkce pro každou ze zemí, jsou následně vyhodnocena a okomentována s důrazem na potenciální nelinearitu, či nestabilitu parametrů. Tyto výsledky jsou nadále porovnány se dvou přechodovou funkcí, která je

vybrána stejným způsobem, tedy vyhledáváním v síti pro nalezení přechodové proměnné a následné aplikaci metody nejmenších čtverců s důrazem na nejmenší sumu odchylek tak, že nejvhodnější je nyní pár dvou přechodových proměnných, který má nejmenší sumu odchylek. Výsledky takto vzniklých přechodových proměnných jsou nakonec okomentovány. (KESRIYELI, a další, 044 (2004) str. 26)

Zde jsme si představili, jak je možné postupovat při procesu určování linearitu a nelinearity úrokové míry, jaké jsou vhodné metody a jaké výsledky nám tyto metody mohou poskytnout.

## 2.2 Nelineární driftová funkce návratu ke středu krátkodobé úrokové míry

Druhý model, představený v práci Nonlinear Mean Reversion in Short-Term Interest Rate Christopherem S. Jonesem, se zabývá nelineárním *driftem* krátkodobé úrokové míry. Tento *drift*, jak práce popisuje, je důležitým determinantem pro určování cen rozličných aktiv stálých příjmů. (JONES, 3 (2003))

Také v tomto případě je obvyklé modelovat úrokovou míru lineárním způsobem, zde jako funkce s lineárním *driftem*, často s konstantní elasticitou odchylky. Proces bývá popisován jako rozptyl následujícím vzorcem: (JONES, 3 (2003) str. 798)

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dB_t$$

(17)

kde:

$dr_t$ ...

$\kappa$ ... konstanta

$\mu$ ... střední hodnota

$\sigma r_t^\gamma$ ... volatilita

$dB_t$ ... D-dimenzionální Brownův pohyb

Kde hodnota, ke které směřuje *drift* v dlouhém období, je dána  $\mu$  – střední hodnotou, rychlost tohoto *driftu* je dána  $\kappa$ . Volatilitu měří  $\sigma$  – směrodatná odchylka (volatilita), a

pružnost odchylky je dána  $2\gamma$ . Existují speciální případy této rovnice návratu ke středu, a to Vašíčkův model a Cox-Ingersoll-Rossův model. Vašíčkův model je variantou, kdy  $\gamma$  se rovná 0 a člen  $\sigma r_t^\gamma$  je nahrazen volatilitou  $b$ . Více o tomto modelu říká následující „ $r_t$  fluktuuje kolem konstantní úrovně  $\gamma$ , přičemž trendový koeficient  $\alpha(\gamma-r_t)$  vrací hodnoty  $r_t$ , které se od  $\gamma$  příliš odchýlily, zpět na tuto úroveň (za výrazného přispění skutečnosti, že volatilita  $b$  je konstantní“ (CIPRA, 2006 str. 130). Rovná-li se  $\gamma$  0.5 – tedy  $\sigma\sqrt{r_t}$ , jedná se o model použitý Cox-Ingersoll-Rossův, kde není volatilita konstantní jako ve Vašíčkově modelu, ale je rovna hodnotě  $\sqrt{r_t}$ . Analýzou problematiky spojené s těmito modely se zabýval také Chan a kolektiv ve své studii<sup>2</sup>. (JONES, 3 (2003) str. 798) (CIPRA, 2006 stránky 130 - 131)

Odhad *driftu* lineárních funkcí je, podle autora, stejně jednoduchý jako regrese metodou nejmenších čtverců. Avšak pro popis krátkodobých změn a jejich důsledků byly tyto modely často shledány nedostačujícími. Existuje množství alternativ, které jsou ovšem velice často mnohem složitější. Některé zobecňují standardní modely tak, že obsahují posuny průběhu funkce, anglicky *regime shifts*. Jiné zvažují multi-faktorové modely, ve kterých je proměnlivost určena stochasticky, nebo se úroková míra lineárně přibližuje ke stochastickému atraktoru. (JONES, 3 (2003) str. 798)

Model, který je zde popisován, zůstává ve třídě modelů s jedním faktorem, a to i přes větší zobecnění než modely navržené Vašíčkem nebo Cox-Ingersoll-Rossem. Rozhodnutí pro takovéto řešení je podloženo přesvědčením, že tento druh modelů ještě není úplně prozkoumán. Dále hovoří pro toto rozhodnutí i možné zjištění, zda je tento model schopen popsat změny v dynamice krátkodobých i dlouhodobých výnosů i přesto, že se nejedná o model multi-faktorový, ale o model jedno-faktorový. (JONES, 3 (2003) str. 798)

Možnou modifikaci modelu, který byl představen výše, nabízí Ait-Sahalia<sup>3</sup>. A to na základě tvrzení, že není možné předpokládat přesné specifikace rozptylové funkce či *driftové funkce*. Proto navrhuje jinou formulaci modelu, která je mnohem flexibilnější v odhadování pravého stavu obou funkcí. (JONES, 3 (2003) str. 798)

---

<sup>2</sup>Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Finance*.47.1992, strany 1209-1227.

<sup>3</sup> Ait-Sahalia, Y.. Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate. *Review of Financial Studies*.9.1996b, strany 385 - 426.

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t) dt + \sqrt{\beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 r_t^{\beta_3}} dB_t$$

(18)

Tento model dále přepracoval Conley a kolektiv, který přijímá parametry *driftu* definované Aït-Sahaliou, ale ponechává stálou chybovost rozptylu použitou Chanem<sup>4</sup>.

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dB_t$$

(19)

Vzhledem k předpokladům charakteristik modelu v pracích, ze kterých tento model vychází, můžeme stanovit určitá omezení nutná ke generování stability. Stability modelu s nelineárním *driftem* jsme schopni dosáhnout různými způsoby. Například jednoduchou postačující podmínkou, kdy  $\alpha_2 < 0$  a  $\alpha_3 > 0$ . Tato podmínka vychází z omezení parametrů definovaných Aït-Sahaliou. A může být dále upravena na základě Conleye tak, že podmínka pro  $\alpha_2$  není nutná, pokud  $\gamma > 1.5$ . V tomto případě totiž proces stabilizace může být vyvolán spíše nestálostí trhu než *driftem*. (JONES, 3 (2003) str. 799)

Úpravy výše představeného modelu (17) až do finálního zobecněného tvaru daného rovnicí (19), ukazují, jak je možné pracovat s takovými modely, tak aby bylo možno obsáhnout více možných řešení, a hlavně, že se zpočátku úzce specifický model dá použít, po adekvátních úpravách, pro širší spektrum vstupů.

### 3 Nelineární dynamický finanční model

Vývoj teorie chaosu a její možná aplikace v ekonomii měla za následek objevení možných nahodilostí obsažených v makroekonomických rozhodnutích vlád, kterým se dá velice jen velice těžko předejít například změnou monetární politiky. Ekonomické předpovědi jsou kvůli nestabilitě a složitosti nahodilostí velice obtížné. V oblastech financí či sociální ekonomie jsou vnitřní struktury často nelineární a vzájemné vztahy velice složité, proto studie zkoumající vlivy vnitřních strukturálních charakteristik takového ekonomického systému představená v člancích STUDY FOR THE BIFURCATION TOPOLOGICAL STRUCTURE AND THE GLOBAL COMPLICATED CHARACTER OF A KIND OF NONLINEAR FINANCE SYSTEM (I) a (II) (MA, a další, 2001), představuje systém diferenciálních rovnic s možným chaotickým chováním. (MA, a další, 2001)

#### 3.1 Představení nelineárního dynamického finančního modelu

Modely dynamických finančních systémů, tvořených penězi, produkcí a pracovní silou dané ekonomiky, mohou obsahovat určité trendy poukazující na význam citlivosti parametrů k počátečním hodnotám, ze kterých se následně systémy vyvíjejí až ke strukturálním změnám. Ty mohou vyvolávat kolísání v dlouhém časovém období. Výskyt těchto vlastností nemusí být nutně způsobem pouze činností ekonomiky, ale může mít i jiné příčiny. Podobné vlastnosti pak mohou přejít v mechanismy, které jsou schopné vyvolávat změnu struktury ekonomiky do stavu, ve kterém se vyskytuje chaotické chování. (MA, a další, 2001 str. 1241)

Aby se problém chaotického chování systému snáze řešil, byla klíčová část finančního modelu zjednodušena. Na základě zevrubné analýzy a experimentů bylo rozhodnuto pro výběr následujících proměnných:  $x$  jakožto úrokové míry,  $y$  zastupující poptávku po investicích a  $z$  - jako cenový index. Klíčovou součástí těchto proměnných je i citlivost na změnu známých informací v ekonomice, a jelikož je vliv citlivosti proměnných na změnu informací diskutovaným problémem, jsou změny těchto tří proměnných v čase definovány jakožto stavové proměnné:  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\dot{y} = dy/dt$ ,  $\dot{z} = dz/dt$ . (MA, a další, 2001 str. 1241)

Úrokovou míru ovlivňují faktory ze dvou hledisek. Zaprvé trh investic, kdy je úroková míra ovlivněna opakem, například přebytek investicemi nad úsporami se projeví v nižší

úrokové míře. Druhým hlediskem jsou strukturální změny vycházející z cen statků. Z těchto důvodů je funkce  $x$  znázorněna jako: (MA, a další, 2001 str. 1241)

$$\dot{x} = f_1 (y - SV) x + f_2 z \quad (20)$$

kde:

$SV$ ... suma úspor

$f_1, f_2$ ... konstanty

Velikost změn poptávky po investicích  $y$  je v poměru s mírou investic, a zároveň v opačném poměru s cenou investic a úrokovou mírou. Výnos investic se předpokládá jako konstantní v určitém časovém úseku, což vede k rovnici: (MA, a další, 2001 str. 1241)

$$\dot{y} = f_3 (BEN - \alpha y - \beta x^2) \quad (21)$$

kde:

$BEN$ ... výnos investic

$f_3, \alpha$  a  $\beta$ ... konstanty.

Změny cenového indexu –  $z$ , jsou ovlivňovány rozdílem poptávky a nabídky obchodních trhů, dále jsou ovlivněny také velikostí inflace. V tomto modelu je předpokládáno, že se velikost nabídky a poptávky v určitém časovém úseku nemění, a zároveň, že je celková suma poptávky a nabídky v obráceném poměru k cenám. A dále, že změna velikosti inflace může být vyjádřena změnou reálné úrokové míry, a že se velikost inflace rovná rozdílu nominální a reálné úrokové míry. Možným matematickým zápisem předcházejících předpokladů je následující funkce: (MA, a další, 2001 stránky 1241 - 1242)

$$\dot{z} = -f_4 z - f_5 x \quad (22)$$

kde

$f_4, f_5$  ... konstanty.



Tyto tři dílčí rovnice složené do jedné soustavy jsou základem dynamického finančního modelu pro  $x$ ,  $y$  a  $z$ , a to včetně vzájemného vlivu informací. Tímto způsobem získaný model obsahuje devět nezávislých parametrů, které ovlivňují daný systém, ale v tomto případě nejsou tak důležité přesné hodnoty jednotlivých parametrů, jako spíše vzájemné vztahy a z nich vyplývající změny v chování systému. Z tohoto důvodu je třeba, aby byl tento model zjednodušen. Zjednodušení modelu dynamického finančního modelu je dosaženo zvolením vhodné soustavy souřadnic a dimenze každé stavové proměnné. Tímto způsobem je namodelován dynamický finanční systém jako soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic se třemi parametry:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . (MA, a další, 2001 str. 1242)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz,\end{aligned}\tag{23}$$

kde:

$a$ ... výše úspor, ( $a \geq 0$ )

$b$ ... náklady na investici ( $b \geq 0$ )

$c$ ... elasticita poptávky firem ( $c \geq 0$ )

Dynamický finanční systém představovaný soustavou obyčejných diferenciálních rovnic (23) by měl podle původního zdroje (MA, a další, 2001 str. 1242) obsahovat chaotické chování. Toto tvrzení je prozkoumáno numerickými experimenty, které jsou provedeny s tímto systémem. Z této soustavy tří diferenciálních rovnic je nejzajímavější rovnice poptávky investic  $\dot{y} = 1 - by - x^2$ , protože obsahuje úrokovou míru ve druhé mocnině. Vzhledem k výše představeným článkům, které se nelineární úrokovou mírou zabývají, existuje zřejmě důvod pro toto rozhodnutí, pouze není uvedený ve zdrojovém článku a tak byla tato skutečnost brána jako daná a jako s takovou se s ní dále počítalo.

Výše představený model byl poté dále rozpracován a zkoumán také jako systém diferenciálních rovnic frakčního řádu. Volbou frakčních derivací bylo dosaženo určitého zobecnění oproti původnímu celočíselnému modelu, tak aby bylo zjištěno, zda tento finanční systém může vykazovat chaotické chování a zda obsahuje „paměť“, tedy zda si finanční proměnné pamatují předchozí hodnoty a jsou jimi ovlivněny. Následně

byly provedeny numerické simulace tohoto systému, aby se tyto předpoklady potvrdily či vyvrátily. Bylo zjištěno, že chaotické chování se v systému skutečně objevuje od řádu 2.35. (CHEN, 36 (2008) str. 1313)

Pro účely této bakalářské práce jsou převzata data ohledně počátečních podmínek a volby parametrů, se kterými se počítalo ve výše uvedeném modelu frakčního řádu, ale od samotných frakčních derivací bylo upuštěno, a s definovaným dynamickým finančním modelem je pracováno jakožto s modelem obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

### **3.2 Modelování dynamického finančního systému v softwaru Mathematica**

Tento rok byl zakoupen Ekonomickou fakultou Západočeské Univerzity v Plzni matematický SW Wolfram Mathematica 9, který nabízí nástroje vhodné k využití ve všech možných vědních oborech, to znamená i v ekonomii. K seznámení s tímto programem uspořádala Katedra ekonomie a kvantitativních metod Fakulty ekonomické úvodní seminář. Do tohoto semináře byli pozváni především zájemci z řad akademických pracovníků fakulty, ale bylo umožněno účastnit se i studentům, kteří by měli zájem o tento seminář.

Seminář probíhal většinu letního semestru akademického roku 2012/2013, a byl zaměřen na základy SW Mathematica – seznámení s programovacím prostředím, možnostmi a využitím tohoto programu. Dále byl seminář zaměřen na vizualizaci dat a práci s daty, práci s implementovanými grafickými nástroji, způsoby programování v SW Mathematica a na symbolické a numerické výpočty v tomto programu.

Tento kurz byl pod vedením pana doc. RNDr. Ing. Ladislava Lukáše, CSc., pana RNDr. Mikuláše Gangura Ph.D. a pana RNDr. Jaroslava Potměšila, CSc., kteří se střídali ve výkladu jednotlivých oblastí semináře. Pro účastníky tohoto semináře byly připraveny dobrovolné procvičovací příklady, které bylo možno plnit a dále se seznamovat s funkcionalitou tohoto matematického SW.

Na základě znalostí získaných na tomto semináři jsme při konzultacích s vedoucím bakalářské práce sestavili notebook určený k práci s dynamickým finančním modelem, představeným výše. Kompletní znění tohoto notebooku je přiloženo jako příloha této bakalářské práce.

Wolfram Mathematica podporuje široké spektrum matematických oborů a obsahuje velice silné nástroje na řešení úloh statistiky, ekonomické analýzy, finanční analýzy a dalších oborů ekonomické matematiky. Je též schopna řešit rovnice jak na numerické bázi, tak i na bázi analytické. Je například schopná nalézt charakteristickou řešení zadané diferenciální rovnice, stejně jako je schopna vykreslit řešení diferenciálních rovnic ve dvourozměrném, nebo ve třírozměrném prostoru.

Numerické řešení diferenciálních rovnic zprostředkovává zabudovaná funkce `NDSolve` Mathematica – tato funkce sice diferenciální rovnici vyřeší, ale neumožňuje grafické vyjádření tohoto řešení, k tomu slouží funkce `Plot` a `ParametricPlot3D`. Tyto tři funkce jsou stěžejní pro tuto bakalářskou práci.

### 3.2.1 Funkce `NDSolve`

Tato integrovaná funkce v `sw Mathematica` umožňuje nelézt numerické řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic. Umožňuje kromě jednotlivých diferenciálních rovnic řešit i jejich soustavy. Podmínkou pro řešení soustavy rovnic je závislost všech funkcí této soustavy na jedné nezávislé proměnné, společné pro všechny rovnice.

Díky tomu, že je `NDSolve` součástí programovacího prostředí, není složité zvolenou diferenciální rovnici, nebo soustavu rovnic, naprogramovat, ale na druhou stranu je potřeba přesně znát syntaxi a parametry této funkce.

Na základě podrobné dokumentace, která je součástí `sw Mathematica`, ale je dostupný i online na adrese:

<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html> je možné se velmi podrobně seznámit se základní syntaxí této funkce včetně výčtu všech parametrů. Nejjednodušší zápis funkce `NDSolve` vypadá následovně: `NDSolve[eqns, u, {t, tmin, tmax}]`, kde – `eqns` – představuje zvolenou diferenciální rovnici kterou má příkaz vyřešit. Tato rovnice musí být doplněna o počáteční podmínku či podmínky, které stanovují hodnotu funkce `u` za určité hodnoty proměnné `t`. Dalším parametrem `NDSolve` je funkce `u` – pro níž se mají počítat funkční hodnoty závislé na třetím základním parametru, v tomto případě představovaným `t`, který je z intervalu ohraničeném dvěma hodnotami `tmin` a `tmax`. Hodnoty `tmin` a `tmax` určují průběh řešení funkce, v jakém bodě má být počátek

řešení a v jakém bodě má řešení skončit. (Wolfram Mathematica 9 Documentation, 10.4.2013)

V případě, že je potřeba řešit soustavu nelineárních rovnic, se zápis funkce `NDSolve` jen nepatrně liší:

`NDSolve[{eqn1, eqn2, ...}, {y1, y2, ...}, {t, tmin, tmax}]`, zde jsou jednotlivé diferenciální rovnice, ze zadané soustavy, zapsány jako seznam položek `{eqn1, eqn2, ...}`, společně s počátečními podmínkami pro všechny funkce `{y1, y2, ...}`. Kromě těchto odlišností platí vše co bylo řečeno výše. (`NDSolve`)

`NDSolve` hledá řešení postupně, začíná na počáteční hodnotě parametru `tmin`, a následně provádí sérii kroků až do doby než dosáhne `tmax`. (Wolfram Mathematica 9 Documentation, 10.4.2013)

Výsledkem `NDSolve` je přibližná funkce jejíž hodnoty jsou nalezeny interpolací. Tuto funkci je vhodné vykreslit pomocí některého z grafických nástrojů, které SW Mathematica nabízí, a které jsou představeny níže.

### 3.2.2 Funkce `Plot` a `ParametricPlot`

Nejjednodušší nástroj pro grafické vyjádření průběhu funkce v SW Mathematica je obsažen ve funkci `Plot[f, {x, xmin, xmax}]`. Která získává souřadnice `y` křivky jako funkce souřadnic `x`. Při vykreslování požadované křivky funkce `Plot` nejprve vyhodnocuje `f` pomocí řady určitý počet vzorových bodů tak, aby získala vzor pro adaptivní algoritmus, pomocí něhož dokreslí zbytek křivky. Počet těchto bodů je možné ovlivnit přidáním parametru `PlotPoints`. Druhým parametrem, který ovlivňuje, jakým způsobem `Plot` vykreslí zadanou funkci je `MaxRecursion` – který udává počet úrovní rekurze v místech, kdy je potřeba více bodů pro získání určité kvality vykreslované křivky. (Wolfram Mathematica 9 Documentation, 11.4.2013)

Hlavní rozdíl mezi funkcemi `Plot` a `ParametricPlot` tkví v tom, že v případě `Plot` je zadána funkce a parametr `x`, pomocí kterého jsou vykresleny jednotlivé body křivky této funkce, proti tomu u `ParametricPlot` jsou zadány souřadnice `x` a `y` jakožto funkce třetího parametru `t`. (Wolfram Mathematica 9 Documentation, 11.4.2013)

Funkcí, která byla použita při vykreslování výsledků pohybu dynamického finančního modelu, je `ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {t, tmin, tmax}]`. Jak název této funkce napovídá, jedná se o funkci pracující s třírozměrným prostorem, který je nutnou podmínkou pro interpretaci výsledků numerických experimentů, vzhledem ke třem stavovým veličinám soustavy diferenciálních rovnic. `ParametricPlot3D` vychází při své práci z výše představených dvou funkcí, s tím rozdílem, že výsledná křivka je složena do třírozměrného prostoru ze souřadnic získaných z funkčních hodnot  $f_x$ ,  $f_y$  a  $f_z$  nabývajících v bodech  $t$ . (Wolfram Mathematica 9 Documentation, 11.4.2013)

Dalšími užitečnými parametry společnými pro funkce představené výše jsou například:

- `Axes` - s hodnotami *true* nebo *false*, která určuje, zda mají být vykresleny osy
- `AxesLabel` – sloužící k popisu os, ty mohou být pojmenovány automaticky, ale je možné jim přiřadit i vlastní název
- `PlotLabel` – označení výsledného obrázku, zadané jako výraz v uvozovkách
- `Tooltip` – pomocí tohoto parametru je možné přiřadit hodnotám bližší informace, které se zobrazí při najetí kurzorem

### 3.3 Numerické výpočty

Cílem této práce bylo prozkoumat, zda daný dynamický finanční systém vykazuje známky chaotického chování za různých podmínek. Při zadávání jednotlivých numerických experimentů bylo vycházeno z hodnot

Aby bylo možno interpretovat chování dynamického finančního systému zadaného třemi diferenciálními rovnicemi, byly provedeny numerické experimenty. Cílem těchto experimentů bylo zjistit chování systému za různých podmínek, a toto chování následně popsat. Základem pro tyto numerické systémy by systém tří diferenciálních rovnic (20) blíže popsaný výše.

Chování systému popisují jednotlivé trajektorie ve stavovém prostoru, jenž je dán třemi veličinami – úrokovou mírou, poptávkou po investicích a cenovým indexem. Vzhledem ke třem stavovým veličinám, se jedná o trojdimenzionální prostor, ve kterém se pohybuje daný finanční systém. Tento pohyb závisí na počátečních podmínkách a na

hodnotě tří parametrů ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ),  $a$  - představující výši úspor,  $b$  - jakožto náklady na investici a  $c$  – elasticitu poptávky firem.

Pro numerické experimenty jsme se rozhodli vzhledem k tomu, že diferenciální rovnice se na ekonomické fakultě probírají pouze okrajově v prvním ročníku studia, a proto důkladná analýza takového systému by byla velice složitá. Oproti tomu numerické experimenty nabízí, v kombinaci se softwarem, který dokáže interpretovat jejich výsledky, takové řešení, že je možné toto řešení popsat i bez hlubších znalostí analýzy diferenciálních rovnic.

Výchozí parametry těchto výpočtů byly přejaty ze článku (CHEN, 36 (2008)), kde  $t$  – je bezrozměrný čas nastavený na hodnotu 50 během něhož se počítaný systém vyvíjí. Parametry systému jsou zvoleny:  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 1$ . Počáteční podmínky systému rovny:  $x = 2.0$ ,  $y = 3.0$ ,  $z = 2.0$ , v čase  $t = 0$ .

### 3.3.1 Úprava počátečních podmínek

Jako první z numerických experimentů byla zvolena úprava počátečních podmínek, z nichž, dynamický finanční systém vychází. Motivací pro tyto výpočty byla myšlenka, že chování systému v čase je zcela zásadně ovlivněno počátečním stavem, ze kterého vychází. Pro ilustraci této myšlenky byla vypočtena tři odlišná zadání. První výpočet byl proveden na základě originálních hodnot, ve druhém byla simulována odlišná výchozí situace systému vyjádřená změnou počátečních podmínek, tak aby bylo možno zjistit, zda se systém, za takového stavu, chová podobně nebo odlišně, a zda takovéto podmínky vyvolají chaotický pohyb. V třetím zadání byly počáteční podmínky systému zvoleny nulové, také s motivací sledování reakce systému na takto vyjádřený počáteční stav.

Pro úplnost je zde uveden zápis programu jednoho zástupce pro každý z druhů provedených numerických experimentů.

Nejdříve jsou pomocí funkce `Clear` vymazány ty proměnné, tak aby bylo zajištěno, že se nebude počítat s hodnotami někdy dříve zadanými. Tento postup je nutný vzhledem k faktu, že SW Mathematica má všechny proměnné, které byly naplněny nějakými daty, uložené v paměti, což může způsobit nepředvídané a chybné výsledky.

```
Clear[xyz];
```

V případě úprav počátečních podmínek byly jako další zadány parametry systému, pojmenované jako  $aa$ ,  $bb$ ,  $cc$ , kterým byla následně přiřazena jejich hodnota známá z originálního zadání dynamického finančního systému.

```
aa=3;bb=.1;cc=1;
```

Následně byly určeny počáteční podmínky, ze kterých jednotlivé veličiny vychází  $x_0$ ,  $y_0$  a  $z_0$ , kterým byly opět přiřazena daná čísla, v tomto případě originální data, jak je možné si povšimnout, jsou tyto počáteční podmínky zadány jako reálná čísla, i přesto, že se jedná o celá čísla. Jsou zde takto zadána z toho důvodu, že SW, ve kterém jsou experimenty počítány, by v případě zadání celých čísel, hledal řešení také pouze celočíselné, a naopak v případě zadání reálných čísel hledá řešení v množině reálných čísel.

```
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;
```

Po zadání parametrů a počátečních podmínek soustavy diferenciálních rovnic, je na radě řešení této soustavy. Zde je do proměnné  $x_{yz}$  přiřazeno řešení funkce `NDSolve`, která řeší tři diferenciální rovnice známé z definice dynamického finančního systému. Tyto tři rovnice jsou zadány do složených závorek jako seznam oddělený čárkami. Je třeba na tomto místě zdůraznit, že pokud má být vyjádřena rovnice, tedy včetně matematického znaménka *rovná se*, je nutné v SW Mathematica toto znaménko zdvojit (`==`), pokud je zadáno jednoduše (`=`) – znamená přiřazení nějaké hodnoty, proměnné, funkce a podobně.

Předně je nutné změnit původní matematický zápis soustavy rovnic do takového tvaru, aby s ním byli SW prostředky schopny počítat. Například první rovnice, daná následovně:  $\dot{x} = z + (y - a)x$ , má po naprogramování následující znění: `x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t]`. Z tohoto zápisu lze pozorovat, nutnost definovat jednotlivé funkce včetně jejich závislosti na čase. Podobným způsobem jsou naprogramovány i další dvě rovnice z původní soustavy. Následně jsou zavedeny počáteční podmínky, přiřazením hodnot funkcí v čase 0, počátečním podmínkám obsaženým v proměnných  $x_0$ ,  $y_0$  a  $z_0$ ., tedy `x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0`.

Po přepsání rovnic do formátu, se kterým je SW Mathematica schopna pracovat, následuje parametr, jímž jsou určeny funkce, pro které chceme výsledek `NDSolve` interpretovat tedy jednotlivé stavové proměnné celého dynamického finančního modelu,

v programu dané seznamem:  $\{x, y, z\}$ . Posledním parametrem funkce `NDSolve` je čas  $t$  ve kterém sledujeme hodnoty funkcí  $x$ ,  $y$  a  $z$ , tento parametr má definovanou počáteční a konečnou hodnotu, ve všech případech 0 až 50. Celý příkaz vypadá následovně:

```
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-bby[t]-
(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];
```

Dalším krokem, při získávání požadovaného výsledku, je grafický výstup, vypočtené funkce `NDSolve`. K tomu slouží funkce `ParametricPlot3D`. Ve které je prvním parametrem vnořená funkce `Evaluate`, která zaručí vyhodnocení funkcí  $x$ ,  $y$  a  $z$ , kterým je přiřazen výsledek operace `NDSolve` uložený v proměnné `xyz`. Následuje parametr  $\{t, 0, 50\}$ , který je dosazen do funkcí jednotlivých proměnných, a následně je vykreslena trajektorie systému, složená z funkčních hodnot, v čase  $t$ , od 0 do 50. Posledním parametrem této funkce je – `PlotLabel` – sloužící k lepší přehlednosti mezi jednotlivými obrázky, v tomto případě říká, že se jedná o výpočet s originálními daty. Výstup je nadále uložen do proměnné `bpBJ01`, z toho důvodu, aby mohl být exportován.

```
bpBJ01=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz},{t,0,50}
,PlotLabel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n orig.pocatec.data:
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0"]
```

Pro možnost vložení výsledku `ParametricPlot3D`, jako obrázku, například do této bakalářské práce slouží následující funkce `Export` se dvěma parametry. Prvním parametrem je název výsledného souboru včetně přípony, určující typ exportovaného souboru, v tomto případě obrázek ve formátu `jpeg`. Druhý parametr funkce `Export` slouží k určení obsahu, který má být exportován, zde se jedná o proměnnou `bpBJ01`, ve které je uložený výsledek funkce `ParametricPlot3D`.

```
Export["bpBJ01trajektorieOrigData.jpeg",bpBJ01]
```

Když dohromady části naprogramovaného numerického experimentu vysvětlené výše dostaneme následující seznam příkazů:

```
Clear[xyz];
aa=3;bb=.1;cc=1;
```



```

x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;

xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-bb y[t]-
(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ01=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,
0,50},PlotLabel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n
orig.pocatec.data: x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0"]

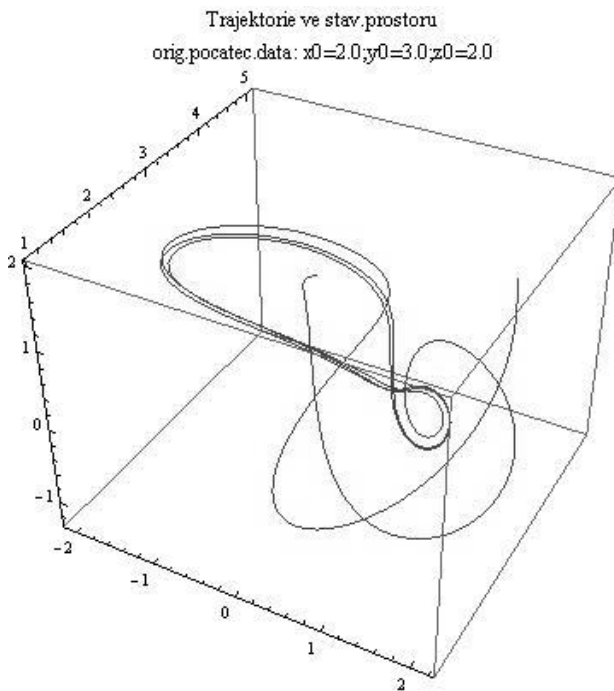
Export["bpBJ01trajektorieOrigData.jpeg",bpBJ01]

```

Kompletní znění celého programu pro všechny numerické experimenty je přiloženo viz příloha A.

### 3.3.1.1 Originální hodnoty počátečních podmínek

První numerický experiment, kdy byla replikována data známá z originálního článku, je vyvedený níže. Tento numerický experiment byl proveden proto, aby byl nějaký vzor, se kterým se dají ostatní výsledky porovnávat. Jak je zřejmé z obrázku 3, takto zadaný systém spěje k chaotickému chování, které se opakuje v nepravidelném spirálovitém pohybu, aby byl ukončen návratem k podobným hodnotám, ze kterých systém vychází, s rozdílem s konečnou souřadnicí  $x$  – tedy úroková míra.



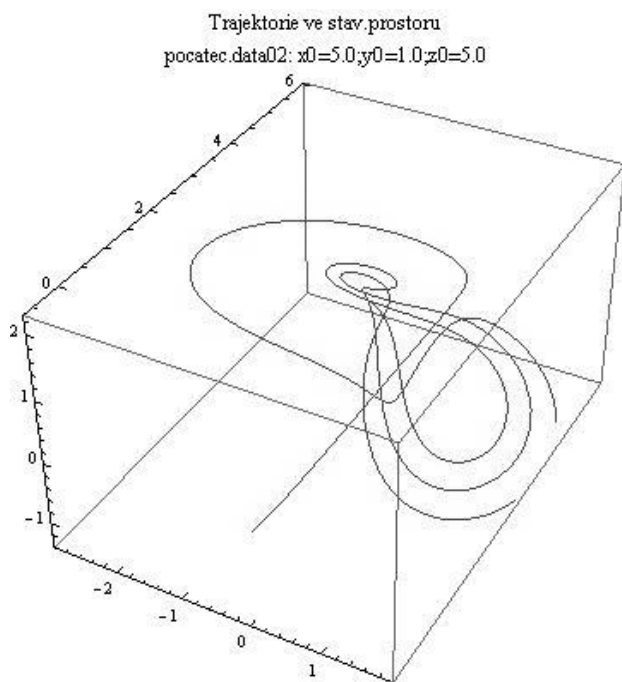
**Zdroj:** Vlastní výpočet

**Obr. 4:** Trajektorie systému ve stav. prostoru s využitím originálních dat

### 3.3.1.2 Jinak definované hodnoty počátečních podmínek

Pro druhý numerický experiment s počátečními podmínkami dynamického finančního systému, byly vybrány hodnoty  $x_0 = 5.0$ ,  $y_0 = 1.0$  a  $z_0 = 5.0$ . Pro tyto hodnoty bylo rozhodnuto z důvodu změny oproti originálním datům, tak aby měli opačný poměr, tedy v původním zadání byla úroková míra –  $x_0$  a cenový index –  $z_0$  menší než poptávka po investicích –  $y_0$ . Následně byl zvolen větší rozdíl mezi jednotlivými veličinami, tak aby byl výsledek tohoto numerického experimentu výrazněji odlišný od původních dat.

V obrázku 4, je možné sledovat trajektorii systému, která stejně jako u původních dat spěje k chaotickému spirálovitému pohybu.



Zdroj: Vlastní výpočet

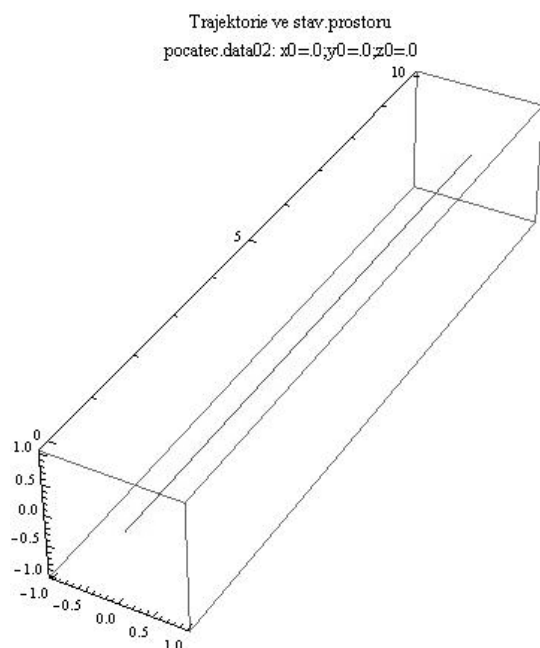
**Obr. 5:** Trajektorie ve stavovém prostoru s upravenými poč. daty

### 3.3.1.3 Nulové počáteční podmínky

Tento experiment byl proveden s počátečními podmínkami stanovenými na nule tedy:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  a  $z_0 = 0$ , tak aby bylo zjištěno, jak se bude systém za takového stavu chovat, z předchozích dvou experimentů bylo zjištěno, že systém, po nějaké době, spěje k chaotickému chování, ale není možné s jistotou říci, zda je toto chování vyvoláno

pouze na základě parametrů, které ho ovlivňují, nebo jestli hrají určitou roli v tomto procesu i počáteční podmínky, z nichž systém vychází. Proto byl proveden tento experiment.

Výsledek vedl k výrazně odlišnému výsledku, než předchozí experimenty. Za nulových počátečních podmínek se v systému nevyskytují žádné známky chaotického chování. Zcela naopak, zdá se, že systém stagnuje, a po celou dobu trvání se jako celek vůbec nevyvíjí, pouze souřadnice  $y$  – tedy míra investic systému roste.



**Zdroj:** Vlastní výpočet

**Obř. 6:** Trajektorie ve stav. prostoru s nulovými poč. hodnotami

Na základě výsledků tří výše uvedených experimentů zaměřených na úpravu počátečních podmínek systému, je možné stanovit závěr, že na volbě počátečních podmínek, ze kterých se má systém vyvíjet, s naprostou jistotou záleží. Tyto podmínky, s ohledem na získané výsledky, jsou stěžejní pro chování systému v čase. Jako takové mohou způsobit stagnaci systému, stejně tak mohou, při některých hodnotách, vyvolat chaotické chování systému.

### 3.3.2 Volba funkce míry investic

Druhým typem numerických experimentů, které jsme se rozhodli realizovat, byla změna parametru  $b$  – nákladů na investici z pevně dané konstanty na funkci Sinus. Konkrétněji

$b_1 |\sin(b_2 t + b_3)|$ , která představuje pravidelně se opakující nákup investic. Funkce Sinus je nadále „obalena“ absolutní hodnotou, aby byly vyloučeny záporné investice. Dále aby se nejednalo o jednoduchou funkci sinus, jsou přítomny parametry  $b_2$  a  $b_3$ . Parametr  $b_2$  upravující frekvenci funkce Sinus a  $b_3$  posun funkce po ose x. Celá funkce je následně multiplikována parametrem  $b_1$ , jehož vliv na výslednou trajektorii systému zkoumají následující tři numerické experimenty.

Zápis části programu týkající se tohoto druhu numerických experimentů je ve většině aspektů stejný jako v případě úpravy počátečních podmínek. Vzhledem k faktu, že tentokrát je manipulováno s parametry soustavy diferenciálních rovnic, jsou tyto parametry, společně s proměnnou  $xyz$ , pro jistotu promazány, aby nedošlo k chybám ve výpočtu

```
Clear[xyz,aa,bb,b1,b2,b3,cc];
aa=3;bb=.1;b1=.1;b2=5;b3=3;cc=1;
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;
```

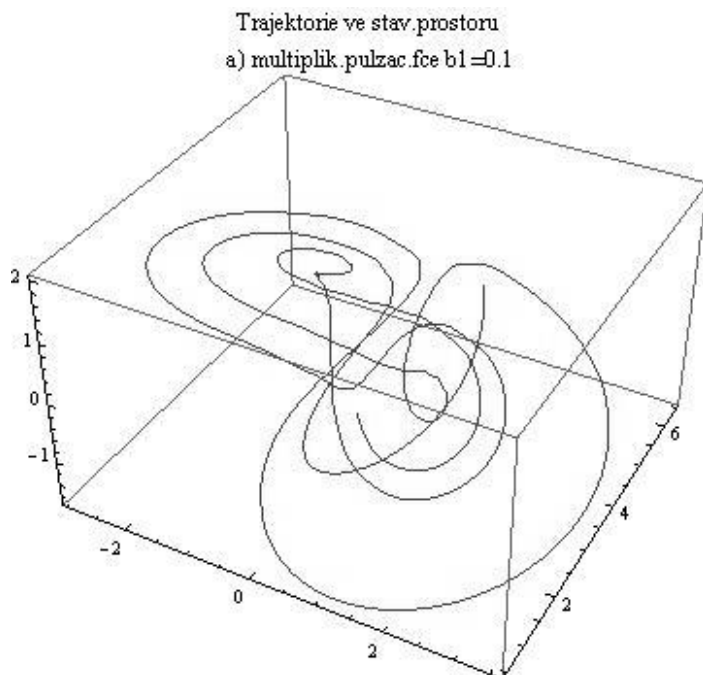
Odlíšná je pouze formulace funkce `NDSolve`, kde se objevuje zvolená pulzační funkce na místě parametru dříve definovaného jako `bb`. Matematický zápis představený výše je zde nahrazen výrazem `b1Abs[Sin[b2t+b3]]`. Tento výraz obsahuje tři parametry, jejichž význam je uvedený výše. Dále obsahuje funkci `Sin`, která je vnořena do funkce `Abs` – tak aby byla vyjádřena pouze její absolutní hodnota.

```
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],
y'[t]==1-b1Abs[Sin[b2 t+b3]]y[t]-(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];
```

Grafické vyjádření získaných výsledků je naprogramováno stejným způsobem jako u předchozích numerických experimentů zaměřených na úpravu počátečních podmínek.

```
bpBJ04=
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,0,50},PlotLa
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n a) multiplik.pulzac.fce
b1=0.1"]
```

Trajektorie tohoto systému s multiplikovanou pulzační funkcí

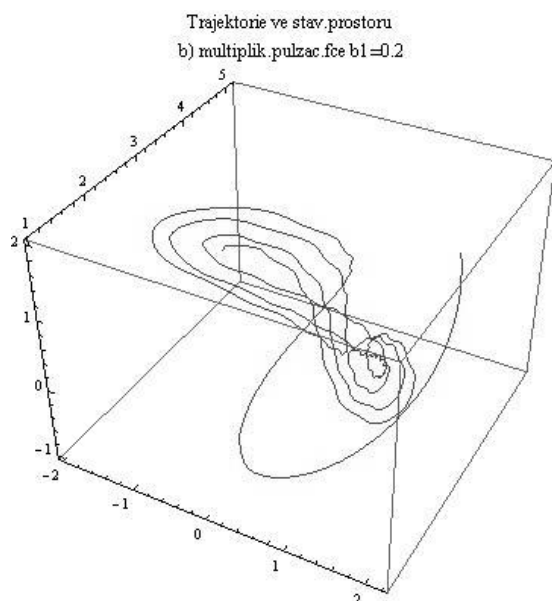


Zdroj: Vlastní výpočet

**Obr. 7:** Trajektorie ve stav. prostoru multiplikované pulzační funkce

### 3.3.2.1 Druhá volba funkce míry investic

Druhý numerický experiment s multiplikátorem pulzační funkce  $b_1$ , tentokrát zvoleným  $b_1 = 0.2$ , vykazuje podobné chování jako předchozí experiment. Na výsledku tohoto experimentu je možné pozorovat větší vliv multiplikátoru investiční funkce na trajektorii celého systému, která již není tak hladká, jako byla v prvním případě.

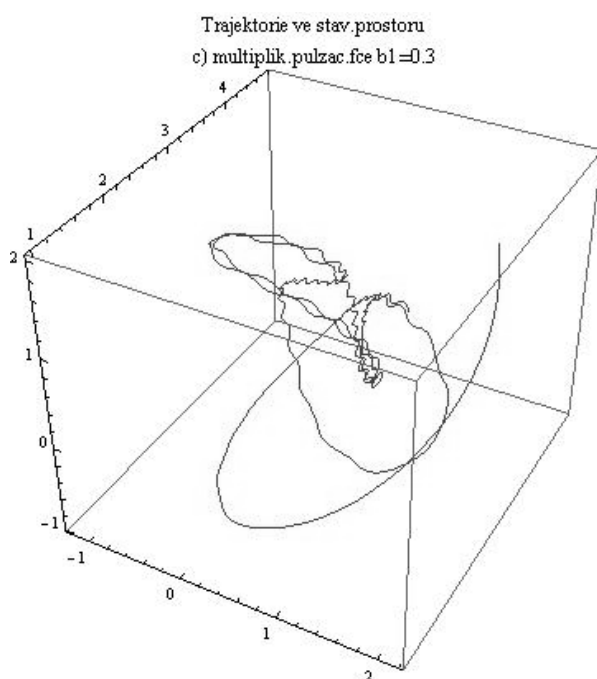


Zdroj: Vlastní výpočet

**Obr. 8:** Trajektorie ve stav. prostoru pulzační fce s dvojnásobným multiplikátorem

### 3.3.2.2 Třetí volba funkce míry investic

Za třetí byl zvolený multiplikátor pulzační funkce míry investic,  $b_1 = 0.3$ . Jak je patrné z obrázku, trajektorie systému je tímto multiplikátorem velmi významně ovlivněna. A s přibývajícím časem se chová stále podivněji, což je způsobeno právě zvoleným multiplikátorem, jelikož všechny ostatní parametry systému zůstávají stejné jako v předchozích dvou případech.



Zdroj: Vlastní výpočet

**Obr. 9:** Trajektorie ve stav. prostoru pulzační fce s trojnásobným multiplikátorem

Při porovnání trajektorií ze všech tří případů multiplikované investiční funkce je patrné, že se jednotlivé trajektorie od sebe liší už poměrně ze začátku. S postupem času se tyto rozdíly výrazně zvětšují, například trajektorie s multiplikátorem  $b_1 = 0.1$  a  $b_1 = 0.3$  si nejsou téměř vůbec podobné. Od původně deterministického chování systému, které by se dalo nazvat atraktorem, se vlivem multiplikátoru trajektorie mění na náhodnější.

### 3.3.3 Náhodně generované veličiny

Jako poslední byl zvolen experiment s náhodně generovanými hodnotami parametrů. Systém jsme nechali počítat z originálních počátečních podmínek, ale jednotlivé parametry jsme nechali vygenerovat funkcí `RandomReal[{xmin, xmax}]`, obsaženou přímo v SW Mathematica. Tato funkce generuje náhodná reálná čísla s rovnoměrným rozdělením z množiny ohraničené dvěma argumenty funkce – `xmin`, `xmax`.

Jednotlivé hranice množin rozdělení náhodné veličiny byly zvoleny tak, aby se hodnoty parametrů, vypočítané funkcí `RandomReal`, blížili originálnímu zadání. Jednotlivé intervaly byly zvoleny následovně: pro parametr  $a \in [2,4]$ ,  $b \in [0.05,0.4]$ ,  $c \in [0.1,5]$ .

Při programování tohoto numerického experimentu byly stejně jako u předchozích výpočtů nejprve vymazány všechny používané proměnné, stejně tak byly zavedeny počáteční podmínky.

```
Clear[x, y, z, x0, y0, z0];  
x0=2.0; y0=3.0; z0=2.0;
```

Tento výpočet se od ostatních odlišuje pouze formulací parametrů soustavy diferenciálních rovnic v rámci funkce `NDSolve`. Jak lze pozorovat v zápise této funkce níže prosté označení parametrů diferenciálních rovnic, proměnnou vystřídala vnořená funkce `RandomReal`, obsahující jediný parametr určující množinu ze které má být dané reálné číslo generováno. Žádné další úpravy nejsou v tomto případě nutné.

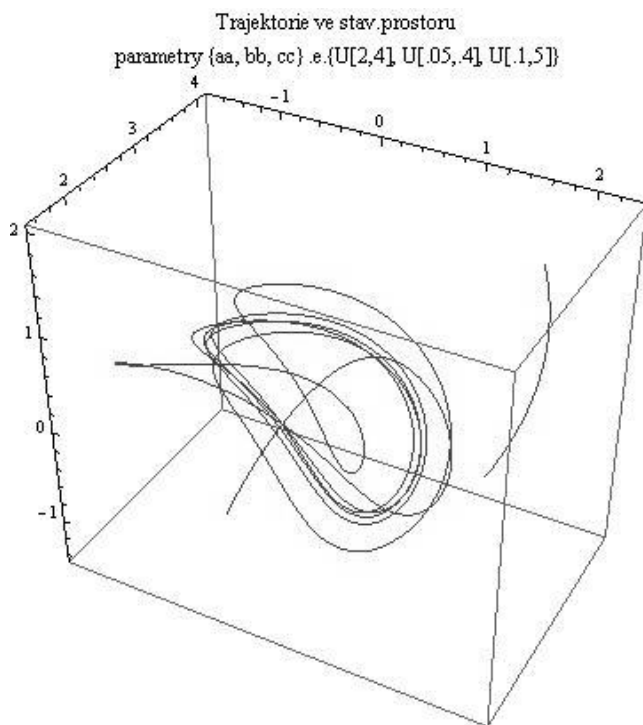
```
xyzU=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-RandomReal[{2,4}])x[t], y'[t]==1-  
RandomReal[{.05,.4}] y[t]-(x[t])^2, z'[t]==-x[t]-  
RandomReal[{.1,5}]  
z[t], x[0]==x0, y[0]==y0, z[0]==z0}, {x, y, z}, {t, 0, 50}];
```

Vykreslení a export obrázku do souboru se také nijak výrazně neliší od předcházejících zadání.

```
bpBJ07=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]}/.xyzU], {t, 0, 50},  
PlotLabel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n parametry {aa, bb,  
cc} .e.{U[2,4], U[.05,.4], U[.1,5]}"]  
Export["bpBJ07trajektorieRandParam.jpeg", bpBJ07]
```

Jak je patrné z přiloženého obrázku, náhodně zvolené parametry, v tomto konkrétním případě, vyvolávají chaotické chování systému. Vzhledem k tomu, že generované

veličiny nejsou známy, je nemožné spolehlivě určit, kde systém začíná. Velice zajímavá je patrné vychýlení systému naprosto odlišným směrem, které je patrné v pravé části obrázku. Bohužel se ze stejného důvodu, z jakého se nedá určit, ve kterém bodě systém začíná, nedá zjistit, zda se tak děje na začátku nebo na konci času.



**Zdroj:** Vlastní výpočet

**Obr. 10:** Trajektorie ve stav. prostoru s náhodně generovanými veličinami

Provedené numerické experimenty ukazují, že daný dynamický finanční systém spíše ve většině případů k chaotickému chování, které může vykazovat známky *podivných atraktorů*. Z původně zadaného času se toto těžko určuje, pro jistotu této domněnky je nutné provést větší množství numerických experimentů. Naopak s jistotou je potvrzena domněnka, že velmi záleží na hodnotě počátečních podmínek, které určují následující chování systému. V případě nulových počátečních podmínek se tento konkrétní systém chová naprosto odlišně než ve všech ostatních případech a tak lze tvrdit, že je chování způsobené hlavně vlivem počátečních podmínek. Druhý typ numerických experimentů, kdy byla zvolena pulzační funkce místo konstantního parametru míry investic, prokázal vliv multiplikátoru této funkce na trajektorii celého systému. Kdy s větší hodnotou, tento multiplikátor více ovlivňuje systém, až do té míry, že se zdá, že osciluje okolo určitého trendu. Třetí typ numerických experimentů prokázal, že v případě náhodných



hodnot parametrů systém spěje k chaotickému chování, toto chování, toto chování ale není deterministické, je spíše náhodné.

## 4 Závěr

Téma fraktálů bylo pro mě před zpracováním této práce známé pouze jako ukázka zajímavých obrazců, a s dynamickými systémy a chaosem jsem se setkal v článkách na internetu. Proto byla úvodní kapitola věnována těmto tématům, společně s tématy úrokových měr a investic, se kterými jsem byl obeznámen během svého studia. První z cílů mé práce je obsažený v první kapitole. Tento cíl jsem následně využil při seznamování s charakteristikami představeného dynamického finančního systému.

Dalším z cílů bylo zjistit, jaké jsou možnosti SW Mathematica při modelování dynamických systémů složených soustavou diferenciálních rovnic. Tento program se ukázal jako velice vhodný pro modelování soustavy diferenciálních rovnic a provádění souvisejících numerických experimentů. Díky velice dobře zpracovaným funkcím grafických výstupů programu je možné pozorovat trajektorie systému ve stavovém prostoru.

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo provést analýzu chování systému za různých podmínek, které zvolený dynamický systém ovlivňují. Pro tuto analýzu byly provedeny numerické experimenty s původním dynamickým finančním modelem a analýzy jejich trajektorie. Výsledek prvního typu numerických experimentů, volba počátečních podmínek systému, potvrdil, že trajektorie systému je zásadně ovlivněna jeho počátečním stavem. Druhý typ numerických experimentů zaměřený na volbu investiční funkce ukázal, jakým způsobem je hodnota multiplikátoru jedné funkce, zvolené místo jednoho pevně daného parametru, schopna ovlivnit zcela zásadním způsobem průběh celého systému. Třetí typ numerických experimentů vypočítaný z náhodných hodnot parametrů ukázal, že vzniklá trajektorie systému prokazuje spíše známky náhodného chování než deterministického chaosu.

Prezentovaný dynamický finanční model by šlo jistě dále studovat. Například provedené numerické experimenty by bylo možno rozšířit na všechny parametry systému tak, aby nebyly zadány konstantou, ale vhodně zvolenou funkcí. Dále by šlo pracovat s počátečními podmínkami a věnovat se situacím, ve kterých by vývoj systému nevedl k chaotickému chování, ale k jinému trendu, ať už lineárnímu či nelineárnímu. Jinou oblastí studia by mohla být práce s časem, ve kterém se systém vyvíjí, mohlo by být zajímavé analyzovat rozdíly mezi kratšími a delšími obdobími.

## 5 Seznam obrázků

<b>Obr. 1:</b> Kochova vločka .....	12
<b>Obr. 2:</b> Mandelbrotova množina .....	13
<b>Obr. 3:</b> Trajektorie Uedova atraktoru ve stavovém prostoru .....	24
<b>Obr. 4:</b> Trajektorie systému ve stav. prostoru s využitím originálních dat.....	42
<b>Obr. 5:</b> Trajektorie ve stavovém prostoru s upravenými poč. daty.....	43
<b>Obr. 6:</b> Trajektorie ve stav. prostoru s nulovými poč. hodnotami .....	44
<b>Obr. 7:</b> Trajektorie ve stav. prostoru multiplikované pulzační funkce .....	46
<b>Obr. 8:</b> Trajektorie ve stav. prostoru pulzační fce s dvojnásobným multiplifikátorem....	46
<b>Obr. 9:</b> Trajektorie ve stav. prostoru pulzační fce s trojnásobným multiplifikátorem .....	47
<b>Obr. 10:</b> Trajektorie ve stav. prostoru s náhodně generovanými veličinami .....	49

## 6 Seznam použitých symbolů

$\alpha$ ... parametr funkce

$\beta$ ... parametr funkce

$\gamma$ ... parametr funkce

$\sigma$ ... směrodatná odchylka

$\sigma^2$ ... rozptyl

$\mu$ ... průměr

$\dot{x}$ ... první derivace funkce x

$\ddot{x}$ ... druhá derivace funkce x

$\dot{y}$ ... první derivace funkce y

$\dot{z}$ ... první derivace funkce z

## 7 Seznam použité literatury

ARONOV, Dmitrij, Radomyselskij, Mikhail a Po, Ming Jack. Types of Fractals - Strange Attractors. *ORACLE ThinkQuest*. [Online] [Cit. 2013-17-3.] Dostupne z www: <<http://library.thinkquest.org/26242/full/types/ch14.html>>.

CIPRA, Tomáš. *Finanční a pojistné vzorce*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2006. stránky 130 - 131. [cit. 2013-3-3]. ISBN 80-247-1633-X.

CHEN, Wei-Ching. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system. *Chaos Solitons & Fractals*. 36 (2008), stránky 1305 - 1314. [cit. 2013-15-4]. Dostupne z www: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077906007946>>.

JONES, Christopher S. Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term. *The Review of Financial Studies*. 3 (2003), stránky 793 - 843. [cit. 2013-3-3]. Dostupne z www: <<http://rfs.oxfordjournals.org/content/16/3/793.full.pdf+html>>.

KESRIYELI, Mehtap, OSBORN, Denise R. a SENSIER, Marianne. Nonlinearity and Structural Change in Interest Rate Reaction Functions for the US, UK and Germany. *Říjen* 044 (2004). [cit. 2013-25-2]. Dostupne z www: <<http://www.tcmb.gov.tr/research/discus/WP0414ENG.pdf>>.

MA, Jun-hai a CHEN, Yu-shu. STUDY FOR THE BIFURCATION TOPOLOGICAL STRUCTURE AND THE GLOBAL COMPLICATED CHARACTER OF A KIND OF NONLINEAR FINANCE SYSTEM (I). *Applied Mathematics and Mechanics*. November 2001, stránky 1240 - 1251. [cit 2013-20-3]. Dostupne z www: <<http://166.111.121.20:9080/mathjournal/YYSL200111/yysl200111001.caj.pdf>>.

MANDELBROT, Benoit. *Fraktály: tvar, náhoda a dimenze*. Praha: Mladá Fronta, 2003. ISBN 80-204-1009-0.

Numerical Solution of Differential Equations — Wolfram Mathematica 9 Documentation. *Wolfram Mathematica 9 Documentation*. [Online] [Cit. 2013-10-4.] Dostupne z www: <<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html>>.

Parametric Plots — Wolfram Mathematica 9 Documentation. *Wolfram Mathematica 9 Documentation*. [Online] [Cit. 2013-11-4.] Dostupne z [www:<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/ParametricPlots.html>](http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/ParametricPlots.html)

ROSE, Peter S. *Peněžní a Kapitálové Trhy*. Brno : Victoria Publishing a.s., 1994. stránky 225 - 255. ISBN 80-85605-52-X.

TERREGROSSA, Ralph A. Capital Depreciation and Investment Demand. *The Quarterly Review of Economics and Finance*. 37 (1997), stránky 79 - 95. [cit. 2013-03-14]. Dostupné z [www:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062976997900594>](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062976997900594).

TIŠNOVSKÝ, Pavel. Fraktály. *Fraktály*. [Online] 1999. [cit. 2013-20-3.] Dostupne z [www: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/1.htm>](http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/1.htm).

ZELINKA, Ivan, VČELAŘ, František a ČANDÍK, Marek. *Fraktální geometrie - principy a aplikace*. Praha : BEN - technická literatura, 2006. ISBN 80-7300-193-4.

ZHANG, Wei-Bin. *Differential Equations, Bifurcations, And Chaos In Economics*. místo neznámé : World Scientific Publishing Company, 2005. stránky 1 - . ISBN 978-981-256-333-0.

## Příloha A:

```
(*=== BP_KEM _BeranekJ~130415.nb

BeranekJan K09B0454P,

BP tema: "Modelovani ekonomickych systemu pomoci fraktalu",
ved.BP: doc.RNDR.Ing. L.Lukas, CSc. ===*)(*--- ref.> paper>
Wei-Ching Chen: Nonlinear dynamics and chaos in fractional-
order financial system.

Chaos, Solitons and Fractals 36(2008) 1305-1314 *)

(* input data *)

(*=== Blk .01 ===*)

(*--- Vykresleni trajektorie ve stav.prostoru - data - viz.
ref.pAper ---*)

Clear[xyz];

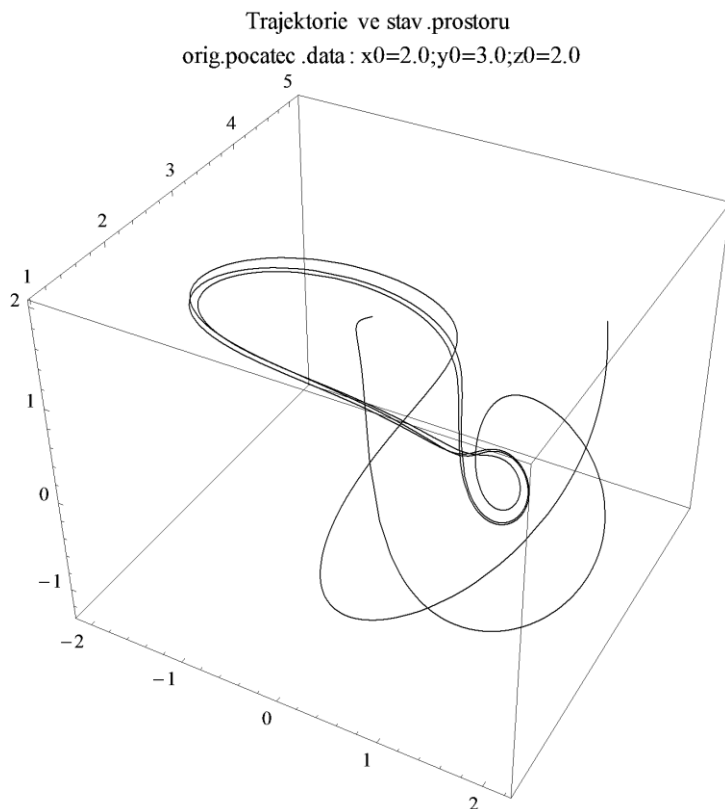
aa=3;bb=.1;cc=1;

x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;

xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-bb y[t]-
(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ01=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,
0,50},PlotLabel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n
orig.pocatec.data: x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0"]

Export["bpBJ01trajektorieOrigData.jpeg",bpBJ01]
```



bpBJ01trajektorieOrigData.jpeg

(\*--- Pocatec.podminky data02: x0=5.0;y0=1.0;z0=5.0; ---\*)

Clear[xyz];

aa=3;bb=.1;cc=1;

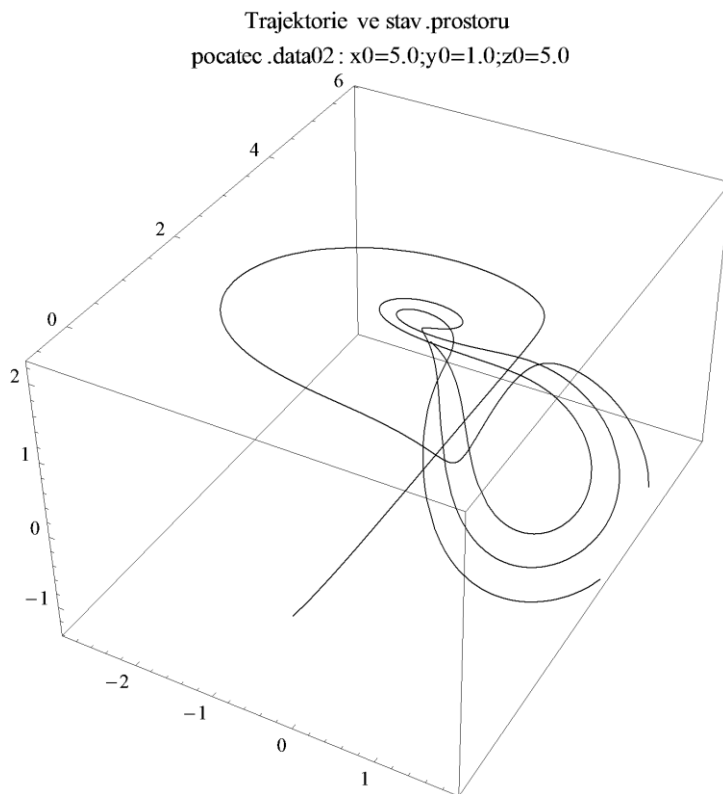
x0=5.0;y0=1.0;z0=5.0;

xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-bb y[t]-  
(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ02=

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,0,50},PlotLa  
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n pocatec.data02:  
x0=5.0;y0=1.0;z0=5.0"]

Export["bpBJ02trajektorieData02.jpeg",bpBJ02]



bpBJ02trajektorieData02.jpeg

(\*--- Pocatec.podminky data03: x0=.0;y0=.0;z0=.0; ---\*)

Clear[xyz];

aa=3;bb=.1;cc=1;

x0=.0;y0=.0;z0=.0;

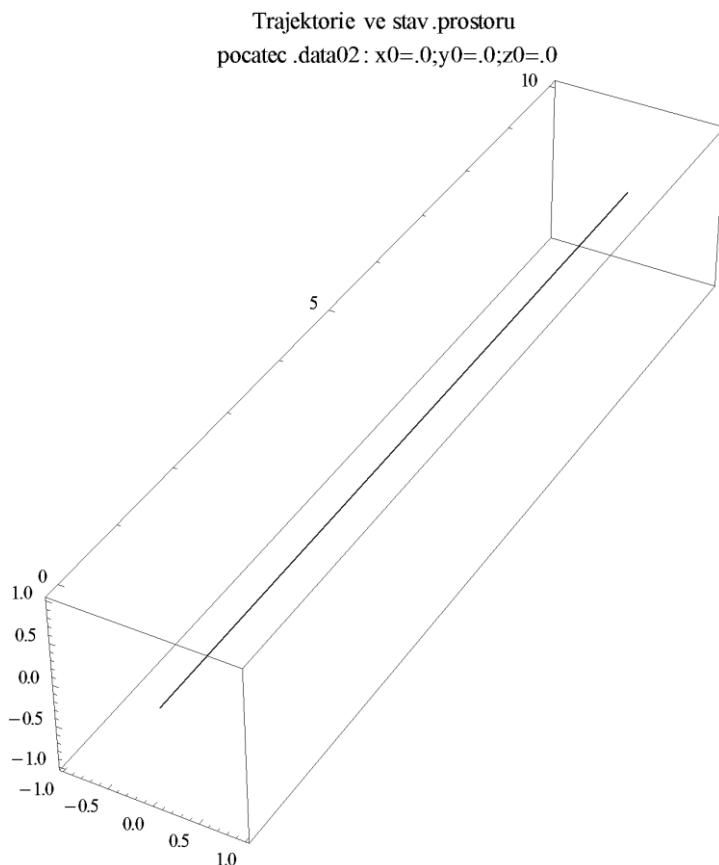
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-bb y[t]-  
(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ03=

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,0,50},PlotLa  
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n pocatec.data02:  
x0=.0;y0=.0;z0=.0"]

Export["bpBJ03trajektorieData03.jpeg",bpBJ03]





bpBJ03trajektorieData03.jpeg

(\*== Modifikace ~ místo parametru  $\beta$  uvažujeme pulzní fci  
Abs[Sin[ $\beta$ \*t+ $\gamma$ ]] ==\*)

(\*== Blk .02 ==\*)

(\*--- a) Volba multiplikátoru pulzac.fce b1=.1 ---\*)

Clear[xyz,aa,bb,b1,b2,b3,cc];

aa=3;bb=.1;b1=.1;b2=5;b3=3;cc=1; (\* b1=1,.1,.2,.3,.5, ;  
b2=.1,1,5,10, ; b3=0,3, \*)

x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;

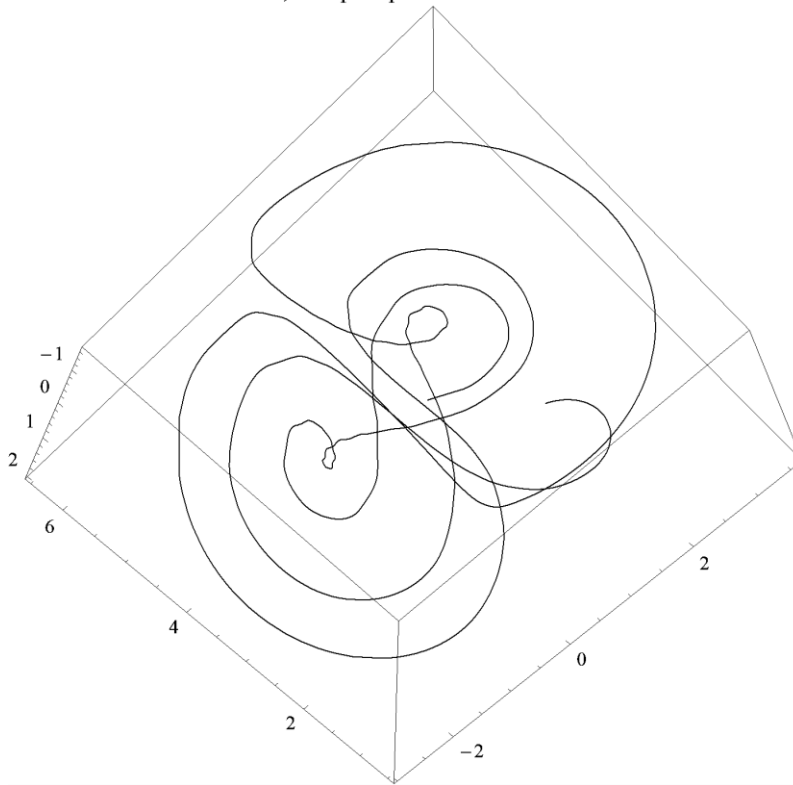
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-b1 Abs[Sin[b2  
t+b3]]y[t]-(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ04=

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz],{t,0,50},PlotLa  
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n a) multiplik.pulzac.fce  
b1=0.1"]

Export["bpBJ04trajektorie\_bla.jpeg",bpBJ04]

Trajektorie ve stav. prostoru  
a) multiplik .pulzac .fce b1=0.1



bpBJ04trajektorie\_b1a.jpeg

(\*--- b) Volba multiplikatoru pulzac.fce b1=.2 ---\*)

```
Clear[xyz,aa,bb,b1,b2,b3,cc];
```

```
aa=3;bb=.1;b1=.2;b2=5;b3=3;cc=1; (* b1=1,.1,.2,.3,.5, ;  
b2=.1,1,5,10, ; b3=0,3, *)
```

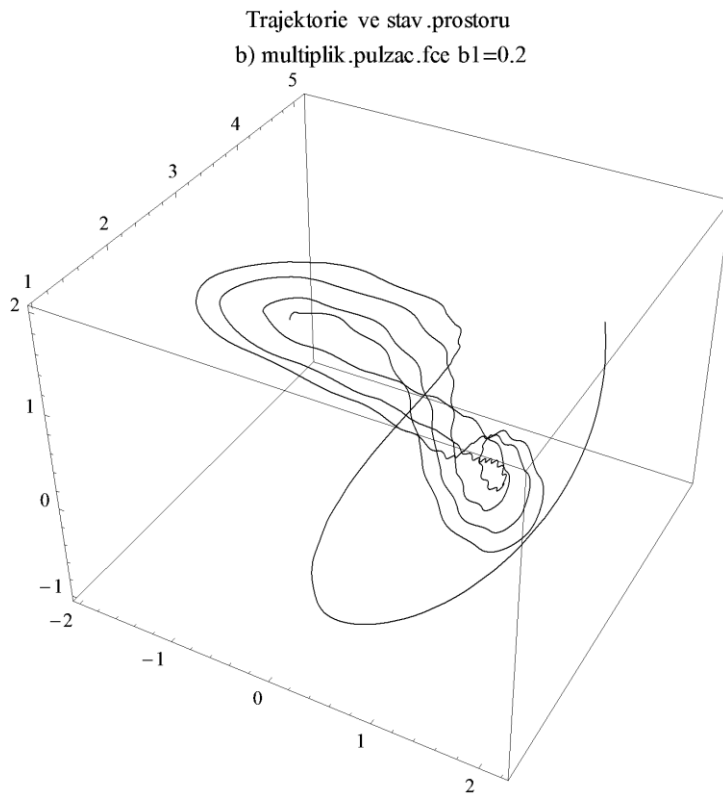
```
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;
```

```
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-b1 Abs[Sin[b2  
t+b3]]y[t]-(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];
```

```
bpBJ05=
```

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz},{t,0,50},PlotLa  
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n b) multiplik.pulzac.fce  
b1=0.2"]
```

```
Export["bpBJ05trajektorie_b1b.jpeg",bpBJ05]
```



bpBJ05trajektorie\_b1b.jpeg

(\*--- c) Volba multiplikatoru pulzac.fce b1=.3 ---\*)

```
Clear[xyz,aa,bb,b1,b2,b3,cc];
```

```
aa=3;bb=.1;b1=.3;b2=5;b3=3;cc=1; (* b1=1,.1,.2,.3,.5, ;  
b2=.1,1,5,10, ; b3=0,3, *)
```

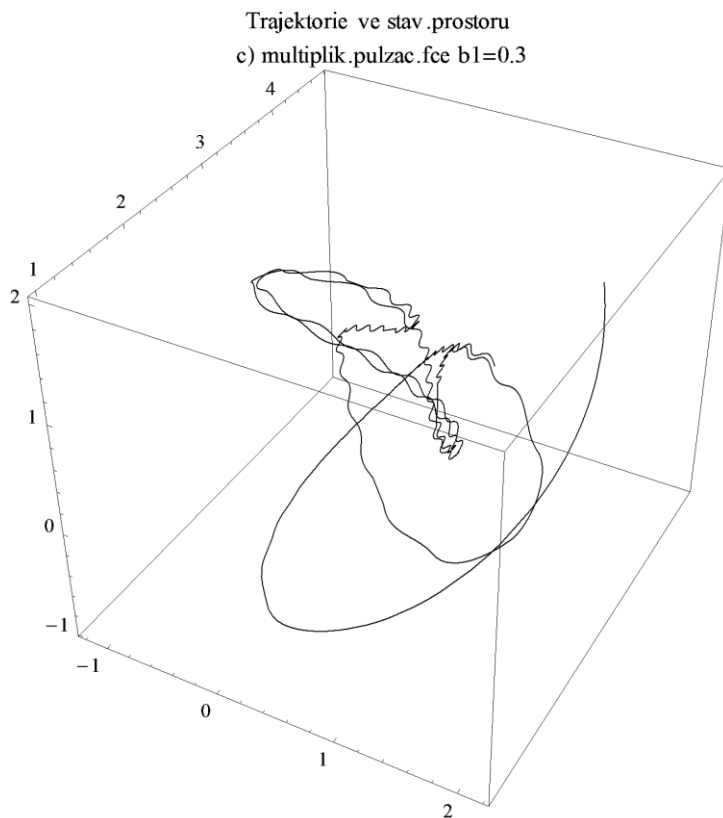
```
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;
```

```
xyz=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-aa)x[t],y'[t]==1-b1 Abs[Sin[b2  
t+b3]]y[t]-(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-cc  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];
```

bpBJ06=

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyz},{t,0,50},PlotLa  
bel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n c) multiplik.pulzac.fce  
b1=0.3"]
```

```
Export["bpBJ06trajektorie_b1c.jpeg",bpBJ06]
```



bpBJ06trajektorie\_b1c.jpeg

(\*== Parametry {aa,bb,cc} = { $\alpha,\beta,\gamma$ } - voleny z rovnomer.rozdeleni ==\*)

(\* coeff-s {aa, bb, cc} .e.{U[2,4], U[.05,.4], U[.1,5]} \*)

(\*== Blk .03 ==\*)

Clear[x,y,z,x0,y0,z0];

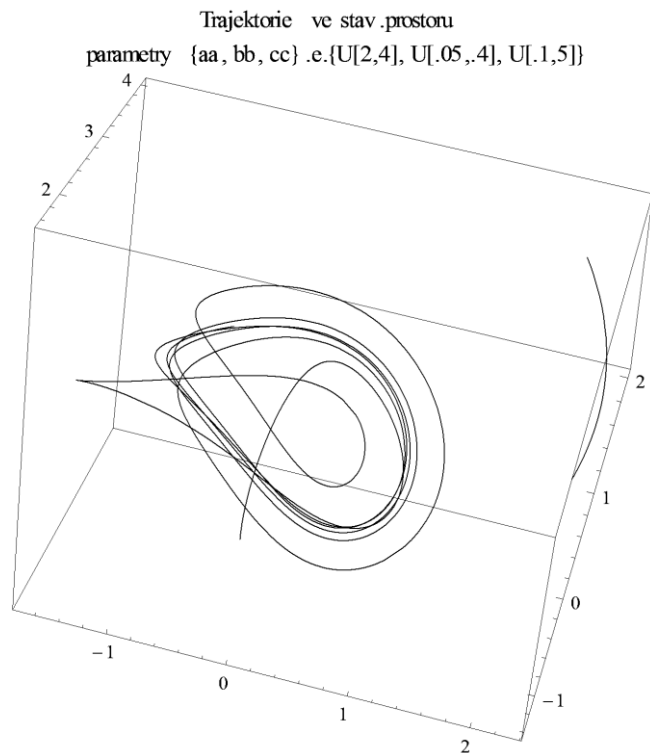
x0=2.0;y0=3.0;z0=2.0;

xyzU=NDSolve[{x'[t]==z[t]+(y[t]-RandomReal[{2,4}])x[t],y'[t]==1-  
RandomReal[ {.05,.4}] y[t]-(x[t])^2,z'[t]==-x[t]-  
RandomReal[ {.1,5}]  
z[t],x[0]==x0,y[0]==y0,z[0]==z0},{x,y,z},{t,0,50}];

bpBJ07=

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.xyzU],{t,0,50},PlotL  
abel->"Trajektorie ve stav.prostoru\n parametry {aa, bb, cc}  
.e.{U[2,4], U[.05,.4], U[.1,5]}"]

Export["bpBJ07trajektorieRandParam.jpeg",bpBJ07]



bpBJ07trajektorieRandParam.jpeg

(\* Ueda chaoticky atraktor \*)

(\*=== Blk .04 ===\*)

Clear[u,v,sol];

gg=.025;ff=7.5;

sol=NDSolve[{v'[t]==-2 gg v[t]-u[t]^3+ff Cos[t],u'[t]==  
v[t],u[0]==0,v[0]==1},{u,v},{t,0,100}];

(\*y1=y[1] /. sol \*)

(\* Eval. at a time t=10 \*)

(\* y1[10] /. sol \*)

(\* Plot the sol-s for several different values of the param a !  
\*)

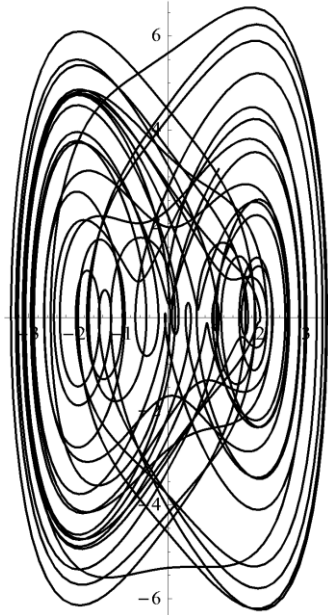
bpBJ08=ParametricPlot[Evaluate[{u[t],v[t]}/.sol],{t,0,100},PlotR  
ange->All,PlotLabel->"Ueda atraktor\n trajektorie ve stav.prostoru  
{u,v}, t.e.[0,100]"]

bpBJ09=Plot[Evaluate[v[t]/.sol],{t,0,100},PlotRange->All,PlotLabe  
l->"Ueda atraktor\n prubeh funkce v(t)=du(t)/dt, t.e.[0,100]"]

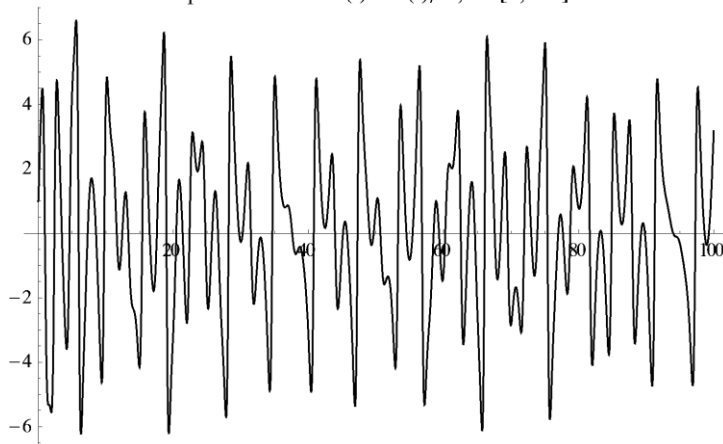
Export["bpBJ08trajektorieUeda.jpeg",bpBJ08]

Export["bpBJ09fce\_v\_Ueda.jpeg",bpBJ09]

Ueda atraktor  
ktoré ve stav .prostoru {u,v}, t.e.[0



Ueda atraktor  
prubeh funkce  $v(t)=du(t)/dt$ , t.e.[0,100]



bpBJ08trajektorieUeda.jpeg

bpBJ09fce\_v\_Ueda.jpeg

## **ABSTRAKT**

BERÁNEK, J. *Modelování ekonomických systémů pomocí fraktálů*. Bakalářská práce. Plzeň: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni, 54 s., 2013

**Klíčová slova:** chaos, fraktál, diferenciální rovnice, finanční model, úroková míra, dynamické systémy

Předložená práce je zaměřena na dynamický finanční model, ve kterém se vyskytuje deterministický chaos. V této práci je zpracován úvod do teorie fraktálů, dynamických systémů v ekonomii, diferenciálních rovnic, úrokových měr a investiční poptávky. Dále se tato práce věnuje programovému vyjádření modelu dynamického finančního systému pomocí SW Wolfram Mathematica a následné grafickému znázornění. Hlavním cílem předložené bakalářské práce bylo analyzovat chování představeného finančního systému, které bylo shledáno chaotickým za většiny podmínek. Možným rozšířením této práce by mohlo být širší studium chování v závislosti na čase, či na volbě parametrů systému.

## **ABSTRACT**

BERÁNEK, J. *Modelling of economic systems using fractals*. The bachelor thesis. Pilsen: The Faculty of Economics, The University of West Bohemia in Pilsen, 54 p., 2013

**Key words:** chaos, fractal, financial model, interest rate, dynamic systems, differential equations

This bachelor thesis deals with dynamic financial model yielding deterministic chaos. The thesis is based upon theories of fractals, dynamic systems in economics, differential equations, interest rates and investment demand. It studies possibilities of modelling dynamic financial models using Wolfram Mathematica, and their graphical representation. Main goal of submitted bachelor thesis was to analyse behaviour of studied financial system, which has been found to be chaotic in most conditions. Wider study of behaviour depending on time of the system, or selection of parameters could be next direction of study.