

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

## **Optimalizace akustického pole**

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 28. května 2013

Zdeněk Novotný

# Poděkování

Při této příležitosti bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce Prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi, DrSc. za motivaci ke studiu a vedení práce a Ing. Vladimíru Lukešovi, Ph.D. za všechny cenné rady a věnovaný čas.

## Abstrakt

Hlavním cílem této práce je provedení tvarové optimalizace akustického pole popsaného omezenou 2D oblastí  $\Omega$ . Nejdříve se odvodily rovnice akustiky potřebné k získání vlnové rovnice pro tekutiny. Z těchto rovnic se určila vlnová rovnice. Hledáním jednofrekvenčního řešení se z ní odvodila Helmholtzova rovnice. Pak se zde ukázaly možné přístupy k řešení vlnové a Helmholtzovy rovnice pro 1D kontinuum, kde se využilo Fourierovy metody. Z úvah o šíření akustických vln se odvodily okrajové podmínky na hranici  $\partial\Omega$ . Naformulovala se úloha tvarové optimalizace. Jako stavovou rovnici se využila slabá formulace Helmholtzovy rovnice. Provedla se citlivostní analýza. Zparametrizoval se design oblasti  $\Omega$  parametry  $\alpha$  pomocí spline-boxu. Optimalizační úloze se přiřadila Lagrangeova funkce a posléze se přešlo k úloze adjungované. Touto cestou se získá celková derivace neboli citlivost účelové funkce  $\Phi$  na změnu parametrů  $\alpha$ . Dále jsou porovnány pro kontrolu výsledky citlivostní analýzy a konečných diferencí. Pomocí softwaru SfePy a Matlabu jsme provedli několik optimalizačních výpočtů ve 2D. Výsledky se zobrazily programem ParaView a následně vyhodnotily.

## Abstract

The main objective of this study is to implement shape optimization of an acoustic field described by 2D domain  $\Omega$ . The very first step was the familiarization with derivation of acoustic equations necessary to obtain wave equation for fluids. From these equations, the wave equation was derived. By searching for a single-frequency solution, the Helmholtz equation was found. Possible approach in solving wave and Helmholtz equation for 1D continuum, where Fourier method was used, was shown. From our knowledge about acoustic propagation boundary conditions at boundary  $\partial\Omega$  were derived. A problem of shape optimization was defined. As a state equation weak formulation of Helmholtz equation was applied. Then the sensitive analysis was performed. Design of  $\Omega$  domain was parameterized by parameters  $\alpha$  using spline-box. Lagrange equation was assigned to the optimization problem. Consecutively, there was a proceeding to solve an adjugate problem. This way allowed to obtain a total derivation of objective function that is a sensitivity of objective function to the change of parameters  $\alpha$ . Furthermore, there were compared results from sensitive analysis and finite differences. Using software SfePy and Matlab we performed a few optimization calculations in 2D. At the end the results were displayed with software ParaView and also appraised.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Odvození rovnic akustiky</b>	<b>3</b>
2.1	Úvodem . . . . .	3
2.2	Eulerova rovnice . . . . .	3
2.3	Rovnice kontinuity . . . . .	6
2.4	Stavová rovnice . . . . .	7
2.5	Vlnová rovnice v kartézských souřadnicích . . . . .	8
2.6	Helmholtzova rovnice . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Řešení úloh pro 1D kontinuum</b>	<b>11</b>
3.1	Vlnová rovnice . . . . .	11
3.2	Helmholtzova rovnice . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Form. úloh akust. pro danou frekv. ve 3D</b>	<b>21</b>
4.1	Okrajová úloha . . . . .	21
4.2	Slabé řešení . . . . .	22
4.3	Numerické řešení MKP . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Formulace úloh tvarové optimalizace</b>	<b>27</b>
5.1	Úvod . . . . .	27
5.2	Citlivostní analýza . . . . .	28
5.2.1	Metoda adjungované proměnné . . . . .	28
5.2.2	Výpočet citlivosti pomocí materiálové derivace . . . . .	30
5.3	Implementace . . . . .	31
5.3.1	Adjungovaná úloha . . . . .	31
5.3.2	Příprava oblasti $\Omega$ . . . . .	32
5.3.3	Spline-box . . . . .	32
5.3.4	Porovnání konečných diferencí a citlivostní analýzy . . . . .	34
5.3.5	Optimalizace . . . . .	35
5.4	Optimalizační výpočty . . . . .	35
5.4.1	Úvodem . . . . .	35
5.4.2	Vlastní výpočty . . . . .	36

**6 Závěr**

**40**

# 1 Úvod

Řešení problémů akustiky, například tvarovou optimalizací, má potencionální aplikace v mnoha oblastech mechaniky. Například při optimalizaci částí strojů a mechanických zařízení, která svým chodem způsobují přílišnou hlučnost. Pak je nutné tyto hlukové emise snížit. Nicméně tato práce není vázána na konkrétní úlohu nebo aplikaci, ale zabývá se optimalizací spíše teoreticky.

V druhé kapitole se seznámíme s odvozením rovnic potřebných k získání vlnové rovnice pro tekutiny. Tyto rovnice odvodíme s předpokladem, že prostředí je stlačitelné, spojité, homogenní, izotropní a neviskózní. Akustické pole budeme předpokládat za nevírové. Odvodíme si Eulerovu pohybovou rovnici pro proudění, která zanedbává tření a vazkost. Rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmoty. Poslední stavová rovnice vychází z popsání termodynamického chování plynu při šíření zvukové vlny. Za dalších předpokladů těchto rovnic určíme tvar vlnové rovnice v kartézských souřadnicích pro neznámou rychlostní potenciál  $\phi$  a akustický tlak  $P$ . Při hledání jednofrekvenčního řešení vlnové rovnice pro frekvenci  $\omega$  z ní odvodíme Helmholtzovu rovnici, která popisuje stojaté vlnění. Zde čerpáme zejména z [Škvor(2001)].

V třetí kapitole si ukážeme některé přístupy k analytickému řešení vlnové a Helmholtzovy rovnice v jednorozměrných případech, kde použijeme Fourierovu metodu řešení parciálních diferenciálních rovnic, viz [Míka(1983)] a [Škvor(2001)]. Budeme uvažovat šíření zvukových vln mezi dvěma rovnoběžnými dokonale odrazivými deskami. Z toho vyplynou okrajové a počáteční podmínky. Pomocí Matlabu si zobrazíme některá řešení.

Ve čtvrté kapitole formulujeme úlohu akustiky pro danou frekvenci  $\omega$ . Budeme tedy řešit slabou formulaci, viz [Míka(2007)], Helmholtzovy rovnice. Zavedeme si oblast  $\Omega$ . V softwaru MSC.Marc Mentat si vygenerujeme její MKP síť. Z úvah o šíření akustických vln si odvodíme okrajové podmínky na hranici  $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$ , viz , viz [E. Bängtsson(2002)]. Pomocí MKP provedeme řešení v systému SfePy. Na dané oblasti vyzkoušíme různé frekvence  $\omega$  incidentní vlny. Výslednou mapu řešení na oblasti si zobrazíme v programu ParaView.

Ve páté kapitole formulujeme úlohu tvarové optimalizace pro akustické pole. Uvažujeme oblast  $\Omega$  a rozdělíme ji na dvě podoblasti, designovou  $\Omega_D$  a zbylou  $\Omega_C$ . MKP síť oblasti vygenerujeme v MSC.Marc Mentat. Podél oblasti  $\Omega_D$  zavedeme hranici  $\Gamma_D \subset \Gamma_0$ . Úvaha byla taková, že změnou tvaru hranice  $\Gamma_D$ , zprostředkovanou změnou parametrů  $\alpha$ , se nám bude měnit řešení  $p$  v celé oblasti. Změna se nám projeví i na účelové funkci  $\Phi$ . Definujeme optimalizační úlohu, kde jako stavovou rovnici využijeme Helmholtzovu rovnici a její slabou formulaci. Provedeme citlivostní analýzu, viz [Rohan(2012)]. Tím se rozumí výpočet citlivosti změny účelové funkce v závislosti na změně optimalizačních parametrů, když na nich závisí nepřímo prostřednictvím stavové proměnné. Zparametrizu-

jeme design pomocí spline-boxu, viz [Rohan(2007)]. Zavedeme pole designových rychlostí. Optimalizační úloze přiřadíme Lagrangeovu funkci a posléze přejdeme k řešení adjungované úlohy. Touto cestou, počítanou v systému SfePy, získáme celkovou derivaci neboli citlivost účelové funkce  $\Phi$  na změnu parametrů  $\alpha$ . Následně porovnáme pro kontrolu výsledky citlivostní analýzy a konečných diferencí. Další zdroje v této kapitole byly [E. Bängtsson(2002)], [B. Engquist(1977)], [Rohan(2007)], [D. Cioranescu(2008)], [J. Haslinger(1996)], [E. Rohan(2011b)], [E. Rohan(2006)], [E. Rohan(2011a)].

Na závěr provedeme několik optimalizačních výpočtů pro 2D oblast  $\Omega$ . Optimalizováním tvaru hranice  $\Gamma_D$  budeme hledat minimum dvou účelových funkcí  $\Phi_{I,II}$ . Výpočet provedeme pomocí Matlabu a SfePy. Výsledky zobrazíme v ParaView a zhodnotíme.



## 2 Odvození rovnic akustiky

### 2.1 Úvodem

V tekutém prostředí je zvuk vyvolán změnami, které v čase a prostoru způsobí změny tlaku, hustoty a kmitání jednotlivých částic prostředí s lokálními výchylkami  $\vec{\xi} = (x, y, z)$  a rychlostmi  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . O prostředí předpokládáme, že je stlačitelné, spojitě, homogenní, izotropní a neviskózní. Výchylky částic podle našeho předpokladu jsou malé a všechny sledované jevy budeme považovat za lineární. (Při zpracování této kapitoly se vychází vesměs z knihy [Škvor(2001)] a z [Linhart(2009)].)

V nepohybujícím se prostředí je akustické pole popsáno vektory akustických rychlostí jednotlivých částic prostředí. V prostředí s uvažováním pohybu částic je vyjádření složitější o složku proudění a pohyb popisujeme Lagrangeovými nebo Eulerovými proměnnými. Zde nebudeme dále proudění částic uvažovat.

Akustické pole pokládáme na nevírové, a tak se tedy předpokládá, že

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.1)$$

Výjimku tvoří případy velkých rychlostí u reálných plynů a kapalin, kdy se uplatňuje vliv viskozity. Vektorové pole lze rozdělit na dvě složky, na složku nevírovou  $\vec{v}_n$  a vírovou (rotační)  $\vec{v}_r$ .

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_r \quad (2.2)$$

Pro nevírovou složku platí  $\text{rot} \vec{v}_n = 0$  a  $\text{div} \vec{v}_n \neq 0$ . Na základě toho zavedeme skalární fci  $\phi$  [ $m^2 s^{-1}$ ]. Nazveme ji *rychlostním potenciálem*, jehož gradient je roven rychlosti  $\vec{v}_n$  [ $ms^{-1}$ ]

$$\text{grad } \phi = \vec{v}_n. \quad (2.3)$$

Podle předpokladu je pole rychlostí nevírové, a bude tedy platit

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_n = \text{grad } \phi \\ \text{div } \vec{v} &= \text{div } \vec{v}_n \neq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Při odvození vlnové rovnice vyjdeme z pohybové (Eulerovy) rovnice, rovnice kontinuity (spojitosti) a stavové rovnice.

### 2.2 Eulerova rovnice

Eulerova rovnice je pohybová rovnice pro proudění, která zanedbává tření a vazkost. Odvození je provedeno pro elementární krychli  $dx dy dz$ . Vyjdeme ze známého D'Alembertova

principu, který říká, že v každém okamžiku je soustava vnitřních a vnějších sil v rovnováze

$$dm \vec{a} = \sum_i d\vec{F}_i,$$

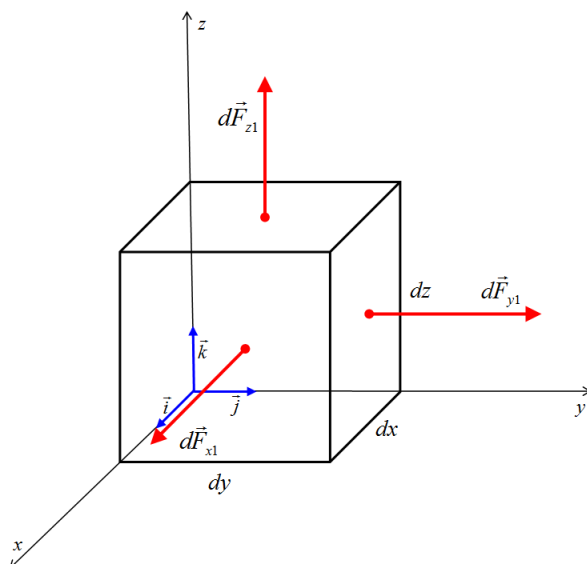
kde levá strana reprezentuje vnitřní (setrvačné) síly a pravá vnější síly působící na element. Pro zrychlení  $\vec{a}$  [ $ms^{-2}$ ] platí

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right), \quad (2.5)$$

kde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  a  $\vec{k}$  jsou jednotkové vektory orientovány v kladném smyslu ve směrech os  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Elementární krychle má hmotnost  $dm$  a tekutina v ní hustotu  $\rho$  [ $kg m^{-3}$ ]

$$dm = \rho dV = dx dy dz.$$

Setrvačná síla působící na elementární krychli ve směrech os  $x$ ,  $y$  a  $z$  je



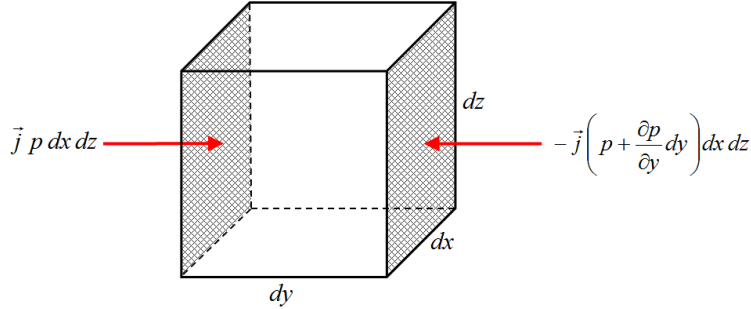
Obrázek 2.1: Síly působící na elementární krychli

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{x1} &= \vec{i} dm \frac{dv_x}{dt}, \\ d\vec{F}_{y1} &= \vec{j} dm \frac{dv_y}{dt}, \\ d\vec{F}_{z1} &= \vec{k} dm \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Výsledná setrvačná síla bude tedy rovna součtu jednotlivých setrvačných sil (2.6)

$$d\vec{F}_s = d\vec{F}_{x1} + d\vec{F}_{y1} + d\vec{F}_{z1} = dm \left( \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} \right) = dm \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.7)$$

V kartézských souřadnicích je akustický tlak  $p$  [Pa] funkcí času a prostorových proměnných  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Takže  $p = p(t, x, y, z)$ . Přepokládejme podle obr.(2.2), že na protilehlých ploškách elementární krychle kolmých na osu  $y$  působí akustické tlaky  $p$  a proti  $p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$ . Tlakové



Obrázek 2.2: Tlak na elementární krychli

síly působící na elementární plošku  $dx dz$  představují účinek okolní tekutiny nacházející se vně elementární krychle. Výsledná složka síly  $\vec{j} dF_{y1}$  ve směru osy  $y$  bude rovna výslednici povrchových sil působících na protilehlých stěnách

$$\begin{aligned} \vec{j} dF_{y2} &= \vec{j} \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dy \\ d\vec{F}_{y2} &= -\vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podobně se odvodí

$$d\vec{F}_{x2} = -\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz , \quad d\vec{F}_{z2} = -\vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} dz dy dx . \quad (2.9)$$

Výsledná síla  $d\vec{F}_v$  se rovná

$$d\vec{F}_v = -\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz - \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz - \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} dz dy dx . \quad (2.10)$$

Z D'Alembertova principu musí platit  $d\vec{F}_v = d\vec{F}_s$ . Dosadíme tedy z (2.10) a (2.7)

$$\begin{aligned} -\left( \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} , \\ -\text{grad } p &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Rovnice (2.11) je *Eulerova rovnice dynamiky ideální tekutiny* bez přihlížení k jejímu proudění a působení vnějších sil z jejího okolí.

### 2.3 Rovnice kontinuity

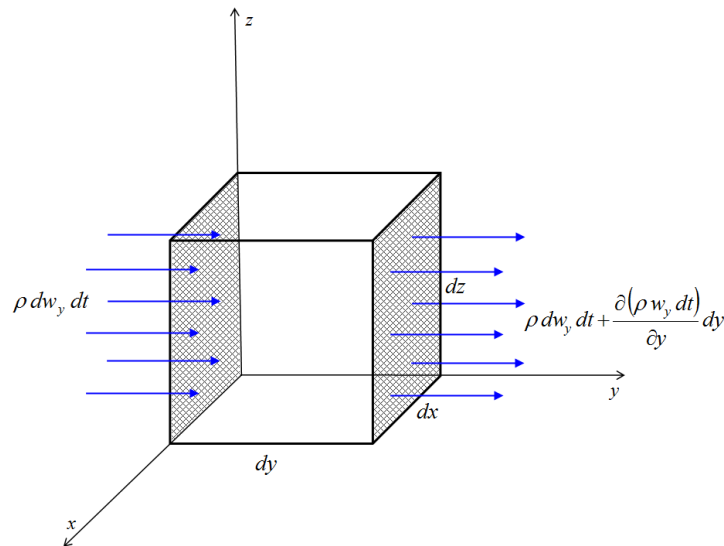
Další z rovnic je rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování hmoty. Budeme uvažovat podle obr.(4.4) elementární objem. Předpokládejme, že podél osy  $y$  v kladném smyslu vtéká a vytéká tekutina ploškami  $dx, dz$ . Hmotnost přitékající tekutiny za  $dt$  je

$$\rho v_y dx dz dt = \rho dw_y dt . \quad (2.12)$$

kde  $w_y [m^3s^{-1}]$  je průtoková rychlost ve směru osy  $y$ . Hmotnost vytékající tekutiny za  $dt$  je

$$\rho dw_y dt + \frac{\partial(\rho dw_y dt)}{\partial y} dy . \quad (2.13)$$

Je vidět, že vyteče z elementární krychle o hmotnost  $\frac{\partial(\rho dw_y dt)}{\partial y} dy$  více než vteklo. Obdobně



Obrázek 2.3: Průtok elementární krychlí

tento rozdíl určíme pro proudění podél zbylých os  $x$  a  $z$ . Celkem tedy

$$\frac{\partial(\rho dw_x dt)}{\partial x} dx , \quad \frac{\partial(\rho dw_y dt)}{\partial y} dy , \quad \frac{\partial(\rho dw_z dt)}{\partial z} dz . \quad (2.14)$$

Fakt, že víc hmotnosti odeče než vteče, se musí projevit poklesem hustoty v elementárním objemu. Čas  $dt$  a elementární objemy  $dx dy dz$  se zkrátí

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho dw_x dt)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho dw_y dt)}{\partial y} dy + \frac{\partial(\rho dw_z dt)}{\partial z} dz &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} dt dx dy dz \\ \frac{\partial(\rho dv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho dv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho dv_z)}{\partial z} &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} \\ \text{div}(\rho \vec{v}) &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

V lineární akustice uvažujeme v celém objemu tekutiny ve stejném čase přibližně stejnou hustotu  $\rho = \rho_0 + \rho'$ . Odchyly  $\rho'$  od počáteční hustoty  $\rho_0$  jsou velmi malé. Proto mohu celou rovnici vydělit  $\rho_0$  a získám tím *rovnici kontinuity* ve zjednodušeném tvaru

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.16)$$

## 2.4 Stavová rovnice

Termodynamické chování plynu je popsáno vzájemnou souvislostí tlaku  $p$  [Pa], hustoty  $\rho$  [ $kg\ m^{-3}$ ] a teploty  $T$  [K]. Stavová rovnice ideálního plynu má tvar

$$p = \rho r T, \quad (2.17)$$

kde  $r$  [ $Jkg^{-1}K^{-1}$ ] je měrná plynová konstanta. Jevy probíhající v akustice jsou zpravidla tak rychlé, že nedochází ke sdílení tepla, neboli  $dQ = 0$ , a děje se stávají adiabatickými. Při nízkých kmitočtech jsou změny pomalé a termodynamické chování plynu se blíží izotermickému ději, tedy ději, který probíhá při  $T = konst$ . V těchto případech je hustota plynu pouze funkcí tlaku  $\rho = \rho(p)$  a hovoříme o barotropním ději.

Pro izotermickou stavovou změnu platí podle Boyleova-Mariottova zákona

$$\frac{p}{\rho} = konst. \quad (2.18)$$

Pro adiabatickou stavovou změnu platí Poissonova rovnice pro tlak a objem

$$p V^\kappa = konst. \quad (2.19)$$

Objem je tedy přibližně nepřímo úměrný hustotě  $V \sim \rho^{-1}$ . Pak můžeme zapsat

$$p \rho^{-\kappa} = konst, \quad (2.20)$$

kde konstanta  $\kappa$  je poměr měrné tepelné kapacity plynu při stálém tlaku  $c_p$  a stálém objemu  $c_v$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad (2.21)$$

Podle adiabatického děje popsaného v (2.20) jsou hustota  $\rho$  a tlak  $p$  v určitém místě závislé na čase, a tak lze stanovit závislost časové změny tlaku na změně hustoty

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \rho^{-\kappa} - \kappa p \rho^{-\kappa-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\kappa p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Když budeme uvažovat tlak  $p$  a hustotu  $\rho$  jako superpozici klidových hodnot  $p_0, \rho_0$  a změn  $p', \rho'$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'. \quad (2.23)$$

A předpokládáme  $p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0$ . Potom bude mít rovnice (2.22) tvar

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.24)$$

## 2.5 Vlnová rovnice v kartézských souřadnicích

V předchozích odstavcích jsme odvodili tři rovnice, které využijeme ke stanovení vlnové rovnice. Jde o Eulerovo pohybovou rovnici (2.11), rovnici kontinuity (2.16) a stavovou rovnici (2.24)

$$-\text{grad } p = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Podle dřívějšího předpokladu je  $\text{rot } \vec{v} = 0$  a místo rychlosti  $\vec{v}$  zavedeme rychlostní potenciál  $\phi$ . Do rovnice (2.11) dosadíme rychlostní potenciál a dostaneme

$$\text{grad } p = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) = -\rho_0 \text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.25)$$

a dále po úpravě

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{konst}. \quad (2.26)$$

V rovnici (2.16) také přejdeme k rychlostnímu potenciálu a dostaneme

$$\text{div grad } \phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Zavedeme Laplaceův operátor

$$\text{div grad } \phi = \Delta \phi,$$

pak rovnice dostane tvar

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Rovnici (2.26) zderivujeme podle času

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

a pak dáme v rovnost pravou stranu (2.29) s pravou stranou z (2.24)

$$\begin{aligned}\frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Do (2.30) dosadíme z (2.28) a konečně získáme *vlnovou rovnici pro rychlostní potenciál*  $\phi$

$$\Delta \phi = \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Dále využijeme toho, že známe vzorec pro výpočet rychlosti zvuku

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}.$$

Rovnice (2.31) po dosazení za rychlost zvuku bude vypadat takto

$$\Delta \phi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2.32)$$

nebo po rozepsání Laplaceova operátoru do kartézských souřadnic na jednotlivé složky

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

Uvedeným způsobem můžeme ze tří základních rovnic stanovit též *vlnovou rovnici pro akustický tlak*. Vztah (2.11) zdivergujeme

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v}$$

a dosadíme z (2.16)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \quad \Delta p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Z rovnice (2.24) určíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{\rho_0}{\kappa p_0} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení z předchozí rovnice dostaneme *vlnovou rovnici pro akustický tlak*, kde ještě použijeme opět vztahu pro rychlost zvuku

$$\Delta p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.34)$$

## 2.6 Helmholtzova rovnice

Při odvození Helmholtzovy rovnice (HR) uvažujeme jednofrekvenční časově harmonické řešení pro jednu frekvenci  $\omega$ . Celkové řešení vlnové rovnice 2.32 pro tři prostorové proměnné  $x, y, z$  a proměnnou čas  $t$  budeme předpokládat ve tvaru

$$\phi(x, y, z, t) = p(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad (2.35)$$

To dosadíme do (2.20). Po zkrácení  $e^{i\omega t}$  dostaneme

$$\begin{aligned} \omega^2 p + c^2 \nabla^2 p &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{p} + \kappa^2 \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde  $\kappa = \frac{\omega}{c}$ . Tím jsme získali *Helmholtzovu rovnici*, která popisuje šíření vlnění ve třech dimenzích. Zápis pro HR s jednou prostorovou proměnnou  $x$  bude vypadat

$$p''(x) + \kappa^2 p(x) = 0. \quad (2.37)$$



# 3 Řešení úloh pro 1D kontinuum

## 3.1 Vlnová rovnice

Vlnová rovnice (2.32) je parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu, jejíž řešení popisuje šíření akustického potenciálu. Pro jednoduchost ji budeme řešit v 1D pro jednu proměnnou  $x$  viz (3.1), viz [Míka(1983)] a [Škvor(2001)].

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Při řešení rovnice (3.1) využijeme Fourierovy metody neboli metody oddělení (separace) proměnných. Tato metoda nahradí parciální derivace obyčejnými. U úloh s pevně stanovenými okrajovými podmínkami, se hledá řešení ve tvaru součinu více funkcí, kde každá z nich je funkcí jedné nezávisle proměnné. Tato metoda se používá hlavně k řešení počátečně-okrajových úloh pro hyperbolické i parabolické rovnice. Zde budeme rychlostní potenciál  $\phi(x, t)$  předpokládat jako součin dvou funkcí, funkce  $X(x)$ , která je funkcí jedné nezávisle proměnné  $x$ , a funkce  $T(t)$ , která je funkcí jedné nezávisle proměnné  $t$ . Řešení lze tedy zapsat ve tvaru

$$\phi(x, t) = T(t) X(x) . \quad (3.2)$$

Po dosazení do rovnice (3.1) získáme

$$c^2 \cdot \frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} . \quad (3.3)$$

Má-li platit rovnice (3.3) , tak musí být obě její strany rovny jedné konstantě

$$- \lambda = -\kappa^2 ,$$

kde  $\kappa$  je vlnové číslo a uvažujeme  $\lambda \geq 0$ . Zavedli jsme zápornou konstantu, protože kladná by vedla na hyperbolické funkce. Předpokládáme, že ani jedna z funkcí, nebo její druhá derivace, není v uvažovaném oboru rovna nule. Z (3.3) získáme soustavu dvou obyčejných homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$c^2 X'' + \lambda X = 0 , \quad (3.4)$$

$$\ddot{T} + \lambda T = 0 . \quad (3.5)$$

Vyřešením soustavy bychom měli získat systém  $(\phi_1(x, t), \phi_2(x, t), \dots, \phi_k(x, t))$  řešení původní vlnové rovnice. Jako celkové řešení musíme volit vhodnou kombinaci funkcí

$$\phi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \phi_k(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k X_k(x) T_k(t),$$

kde konstantní koeficienty  $D_k$  se volí tak, aby řešení  $\phi(x, t)$  vyhovovalo okrajovým i počátečním podmínkám.

Dále budeme řešit soustavu diferenciálních rovnic jako vyšetřování kmitů mezi dvěma dokonale odrazivými plochami. Jedna bude umístěna v počátku  $x = 0$  a druhá ve vzdálenosti  $x = l$ . Vyjdeme z předpokladu, že akustická rychlost je na obou plochách nulová. Pro akustickou rychlost  $v$  platí vztah (2.3). V 1D pro jedinou prostorovou proměnnou  $x$  postačuje  $v = \frac{\partial}{\partial x}\phi$ . Použijeme tyto okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\phi(0, t) &= X'(0) T(t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\phi(l, t) &= X'(l) T(t) = 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Jako počáteční podmínky uvažujeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= g(x),\end{aligned}\tag{3.7}$$

kde  $g(x)$  popisuje rozložení akustické rychlosti mezi dvěma deskami v čase  $t = 0$ .

Nyní budeme řešit (3.4) s okrajovými podmínkami. Řešení povede k úloze na vlastní čísla a vlastní funkce.

$$\begin{aligned}c^2 X'' + \lambda X &= 0, \\ X'(0) &= 0, \\ X'(l) &= 0.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Hledáme netriviální řešení ve tvaru

$$X(x) = A e^{\alpha x}.\tag{3.9}$$

Po dosazení (3.9) do (3.8) získáme

$$\begin{aligned}c^2 \alpha^2 e^{\alpha x} &= \lambda e^{\alpha x} \\ \alpha^2 &= -\frac{\lambda}{c^2} \\ \alpha &= \pm \frac{1}{c} \sqrt{-\lambda} \\ \alpha &= \pm i \frac{1}{c} \sqrt{\lambda}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Po dosazení  $\alpha$  do (3.9)

$$X(x) = A \cdot e^{\pm i \frac{1}{c} \sqrt{\lambda} x} = B \cdot \cos\left(\frac{1}{c} \sqrt{\lambda} x\right) + C \cdot \sin\left(\frac{1}{c} \sqrt{\lambda} x\right).\tag{3.11}$$

Nyní s použitím okrajových podmínek určíme konstanty  $B$  a  $C$ . Najdeme první derivaci  $X'(x)$

$$X'(x) = -B \cdot \sin\left(\frac{1}{c}\sqrt{\lambda}x\right) \cdot \frac{1}{c}\sqrt{\lambda} + C \cdot \cos\left(\frac{1}{c}\sqrt{\lambda}x\right) \cdot \frac{1}{c}\sqrt{\lambda}. \quad (3.12)$$

Tedy dosadíme první okrajovou podmínku z (3.6)

$$0 = C \cdot \cos(0) \cdot \frac{1}{c}\sqrt{\lambda}. \quad (3.13)$$

Konstanta  $C$  musí tedy být rovna nule. Dále využijeme druhou okrajovou podmínku z (3.6)

$$0 = -B \cdot \sin\left(\frac{1}{c}\sqrt{\lambda}l\right) \cdot \frac{1}{c}\sqrt{\lambda}. \quad (3.14)$$

Z (3.14) vyplývají dvě možnosti řešení. Řešení pro  $B \neq 0$  vyhovuje (3.14), jestliže  $\sin\left(\frac{1}{c}\sqrt{\lambda}l\right) = 0$ . Odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\sqrt{\lambda_k}l &= k\pi \\ \lambda_k &= \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nyní již známe systém vlastních fcí  $X_k(x)$  a vlastních čísel  $\lambda_k$

$$X_k(x) = \cos\left(k\frac{\pi x}{l}\right), \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 \quad ; \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Vypočteme si normu vlastních funkcí pro  $k > 0$  a  $k = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^l \left| \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right|^2 dx &= \frac{l}{2} \\ \left\| \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right\| &= \sqrt{\frac{l}{2}} \quad , \quad k > 0 \\ \int_0^l |\cos(0)|^2 dx &= l \\ \|\cos(0)\| &= \sqrt{l} \quad , \quad k = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Normovaná vlastní funkce nabude tvaru

$$\begin{aligned} X_k(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad k > 0, \\ X_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{l}} \quad k = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Obecné řešení rovnice (3.4) má tvar

$$X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k X_k(x), \quad (3.19)$$

kde  $B_k$  jsou neznámé koeficienty.

Pro známé koeficienty  $\lambda_k$  lze nyní řešit rovnici (3.5) s počátečními podmínkami (3.7)

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \lambda_k T &= 0, \\ \dot{\phi}(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Uvažujeme její řešení ve tvaru

$$T_k(t) = C e^{i\omega_k t}. \quad (3.21)$$

Dosadíme (3.21) do (3.20), odkud získáme

$$\begin{aligned} \omega_k^2 &= \lambda_k \\ \omega_k &= \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm\frac{k\pi c}{l}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nyní můžeme vyjádřit řešení pro  $k$  – tou funkci  $T_k$

$$T_k(t) = D_k \cos(\omega_k t) + E_k \sin(\omega_k t),$$

kde  $D_k$  a  $E_k$  jsou neznámé konstanty. Potom celkové řešení

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k X_k(x) T_k(t) \\ \phi(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k [D_k \cos(\omega_k t) + E_k \sin(\omega_k t)] X_k(x). \end{aligned}$$

Dále přeznačíme konstanty a budeme uvažovat  $D_k = B_k \cdot D_k$  a  $E_k = B_k \cdot E_k$ . Vyjádříme první derivaci

$$\dot{\phi}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [-D_k \omega_k \sin(\omega_k t) + E_k \omega_k \cos(\omega_k t)] X_k(x).$$

Řešení musí splňovat počáteční podmínky z (3.20). Použijeme první z nich

$$\dot{\phi}(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (0 + E_k \omega_k) X_k(x) = 0.$$

Z toho vyplývá, že  $E_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , a tedy platí

$$\phi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k T_k(t) X_k(x) = 0, \quad (3.23)$$

kde zbývá určit koeficienty  $D_k$ . U druhé podmínky z (3.20) zvolíme fci  $g(x)$  jako nekonečnou řadu vlastních fci, kde  $g_k$  jsou konstantní koeficienty vlastních funkcí  $X_k(x)$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k X_k(x) .$$

Celou rovnost vynásobíme  $j$ -tou vlastní funkcí a zintegrujeme v intervalu  $[0, l]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^l g(x) X_j(x) dx &= \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} g_k X_k(x) X_j(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \int_0^l X_k(x) X_j(x) dx . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Víme, že systém vlastních funkcí je ortonormální. Pro skalární součin  $j$ -té a  $k$ -té vlastní funkce potom platí, když  $j \neq k$ , že

$$\int_0^l X_k(x) X_j(x) dx = 0$$

a když  $j = k$

$$\int_0^l X_k(x) X_k(x) dx = 1 .$$

Na pravé straně (3.24) zbude jediný člen řady, kdy  $k = j$ , a dostaneme předpis pro koeficienty  $g_j$  řady zastupující funkci  $g(x)$

$$g_j = \int_0^l g(x) X_j(x) dx .$$

Nyní můžeme  $g(x)$  zapsat

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^l g(x) X_k(x) dx X_k(x) . \quad (3.25)$$

Aplikujeme druhou počáteční podmínku z (3.20) na (3.23)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g_k X_k(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(0) X_k(x) \\ g_k X_k(x) &= D_k X_k(x) \\ D_k &= g_k = \int_0^l g(x) X_k(x) dx = \int_0^l g(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(\kappa x) dx , \\ D_0 &= \int_0^l g(x) X_0(x) dx = \int_0^l g(x) \sqrt{\frac{1}{l}} dx , \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde  $\sqrt{\frac{l}{2}}$  je norma vlastní fce. Celkové řešení rovnice (3.1) bude tedy mít tento tvar

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \cos(\omega_k t) \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(\kappa x) \right] \\ \phi(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \left[ g_k \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \right].\end{aligned}\quad (3.27)$$

Pokud chceme nyní volit funkci  $g(x)$ , tak musí splňovat okrajové podmínky (3.6). Když si zvolíme třeba  $g(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$ , kde víme, že jde vlastní funkci pro  $k = 3$ . Z kolmosti vlastních funkcí  $X_k(x)$  a z (3.26) vyplývá, že jen pro  $k = 3$  bude  $D_k$  nenulové

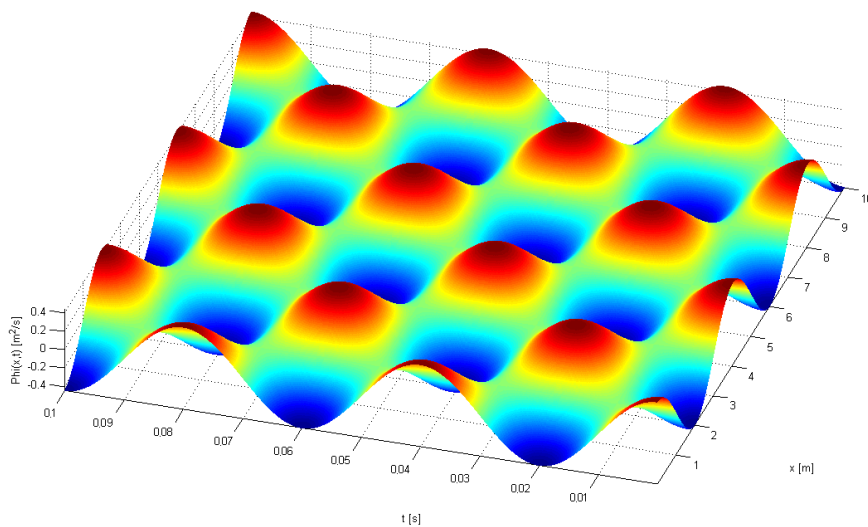
$$\begin{aligned}D_3 &= \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)^2 dx \\ D_3 &= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{l}{2}}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Celkové řešení tedy nabude tvaru

$$\phi(x, t) = D_3 \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right). \quad (3.29)$$

Řešení si zobrazíme pomocí Matlabu viz obr.(3.1) pro následující hodnoty parametrů

$$\begin{aligned}l &= 10 \text{ [m]}, \\ c &= 100 \text{ [m/s]}.\end{aligned}\quad (3.30)$$



Obrázek 3.1: Řešení vlnové rovnice pro 1D případ

Z obr.(3.1) je vidět, jak zvolená funkce  $g(x)$  splňuje z okrajových podmínek (3.6) nulové derivace.

## 3.2 Helmholtzova rovnice

Uvažujeme jednofrekvenční časově harmonické řešení pro úhlovou frekvenci  $\omega$ . Již dříve odvozenou HR (2.36) budeme řešit pro jednu prostorovou neznámou  $x$ . HR nabude tvaru

$$\begin{aligned}\omega^2 p(x) + c^2 p''(x) &= 0 \\ p''(x) + \kappa^2 p(x) &= 0 .\end{aligned}\tag{3.31}$$

Řešíme opět 1D úlohu, kterou si lze představit jako vlnění mezi dvěma deskami. První deska v  $x = 0$  bude kmitat frekvencí  $\omega$  s amplitudou  $p_A$ . Půjde tedy o případ vibroakustiky. Druhá deska bude nehybnou dokonale odrazivou překážkou, takže akustická rychlost zde musí být nulová.

$$\begin{aligned}p'(l) &= 0 , \\ p'(0) &= i\omega p_A .\end{aligned}\tag{3.32}$$

Dále si  $p(x)$  zvolíme jako součet dvou funkcí

$$p(x) = q(x) + \bar{q}(x) .\tag{3.33}$$

Pro funkce  $q(x)$  a  $\bar{q}(x)$  volíme okrajové podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned}\bar{q}'(0) &= i\omega p_A , \\ \bar{q}'(l) &= 0 , \\ q'(0) &= 0 , \\ q'(l) &= 0 .\end{aligned}\tag{3.34}$$

Funkci  $\bar{q}(x)$  zvolíme tak, aby splňovala výše uvedené okrajové podmínky

$$\bar{q}(x) = i\omega p_A \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) .\tag{3.35}$$

A funkci  $q(x)$  budeme uvažovat jako lineární kombinaci  $k$  vlastních funkcí určených Fourierovou metodou (3.18) s konstantními koeficienty  $H_k$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k X_k(x) .\tag{3.36}$$

Když dosadíme za  $p(x)$  funkce  $q(x)$  a  $\bar{q}(x)$ , tak rovnice (3.31) dostane tvar

$$\begin{aligned}\omega^2 q(x) + \omega^2 \bar{q}(x) + c^2 q''(x) + c^2 \bar{q}''(x) &= 0 \\ \omega^2 q(x) + c^2 q''(x) &= -(\omega^2 \bar{q}(x) + c^2 \bar{q}''(x)) .\end{aligned}\tag{3.37}$$

Pravou stranu (3.31) označíme  $f(x)$  a zvolíme zase jako nekonečnou řadu vlastních funkcí s konstantami  $f_k$

$$f(x) = -(\omega^2 \bar{q}(x) + c^2 \bar{q}''(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x). \quad (3.38)$$

Koeficienty  $f_k$  budeme uvažovat ve tvaru

$$f_k = \int_0^l f(x) X_k(x) dx. \quad (3.39)$$

Po dosažení za pravou stranu můžeme celou rovnici vynásobit  $j$ -tou vlastní fci a integrovat přes interval  $[0, l]$

$$\omega^2 q(x) + c^2 q''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x) \quad (3.40)$$

$$\omega^2 \int_0^l q(x) X_j(x) dx + c^2 \int_0^l q''(x) X_j(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^l f_k X_k(x) X_j(x) dx. \quad (3.41)$$

Víme, že vlastní fce jsou ortonormální, takže integrál ze součinu dvou vlastních fcí,  $k$ -té a  $j$ -té, je roven nule, pokud  $j \neq k$ . Pokud platí  $j = k$ , skalární součin je roven jedné. Na pravé straně zůstane tedy  $f_j$ . Na levé dosadíme za  $q(x)$  a  $q''(x)$ .

$$\omega^2 \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} H_k X_k(x) X_j(x) dx + c^2 \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} H_k X_k''(x) X_j(x) dx = f_j \quad (3.42)$$

Víme, že

$$c^2 X_k''(x) = (-\lambda_k) X_k(x), \quad (3.43)$$

takže po dosažení (3.42) do (3.43)

$$\omega^2 \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} H_k X_k(x) X_j(x) dx + \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} H_k (-\lambda_k) X_k(x) X_j(x) dx = f_j \quad (3.44)$$

$$H_j (\omega^2 - \lambda_j) = f_j.$$

Vyjádríme konstanty  $H_j$  (dále už  $H_k$ )

$$H_k = \frac{f_k}{\omega^2 - \lambda_k} = \frac{\int_0^l f(x) X_k dx}{\omega^2 - \lambda_k} = \frac{\int_0^l (-\omega^2 \bar{q}(x) - c^2 \bar{q}''(x)) X_k dx}{\omega^2 - \lambda_k}. \quad (3.45)$$

Níže určíme druhou derivaci funkce  $\bar{q}(x)$

$$\bar{q}(x) = i\omega p_A \frac{2l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)$$

$$\bar{q}''(x) = -i\omega p_A \frac{\pi}{2l} \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right). \quad (3.46)$$



Dopočteme koeficienty  $f_k$

$$\begin{aligned}
 f_k &= \int_0^l (-i\omega p_A) \cdot \left( \frac{2\omega^2 l}{\pi} - \frac{c^2 \pi}{2l} \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} dx \\
 f_k &= -\mu \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = -\mu \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot I \\
 f_k &= -\mu \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{\pi \cdot (1 - 4k^2)} \quad k > 0 \\
 f_0 &= -\mu \sqrt{\frac{1}{l}} \frac{2l}{\pi} \quad k = 0,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

kde  $\mu$  je konstanta

$$i\omega p_A \left( \frac{2\omega^2 l}{\pi} - \frac{c^2 \pi}{2l} \right). \tag{3.48}$$

Výpočet integrálu  $I$  jsme provedli metodou Per partes

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^l \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \\
 &= \left[ \frac{l}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + \frac{l}{2\pi k^2} \cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^l + \\
 &\quad + \frac{1}{4k^2} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \\
 I \cdot \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) &= \frac{-l}{2\pi k^2} \\
 I &= \frac{2l}{\pi(1 - 4k^2)} \quad k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Konstatní koeficienty  $H_k$  mají tedy tvar

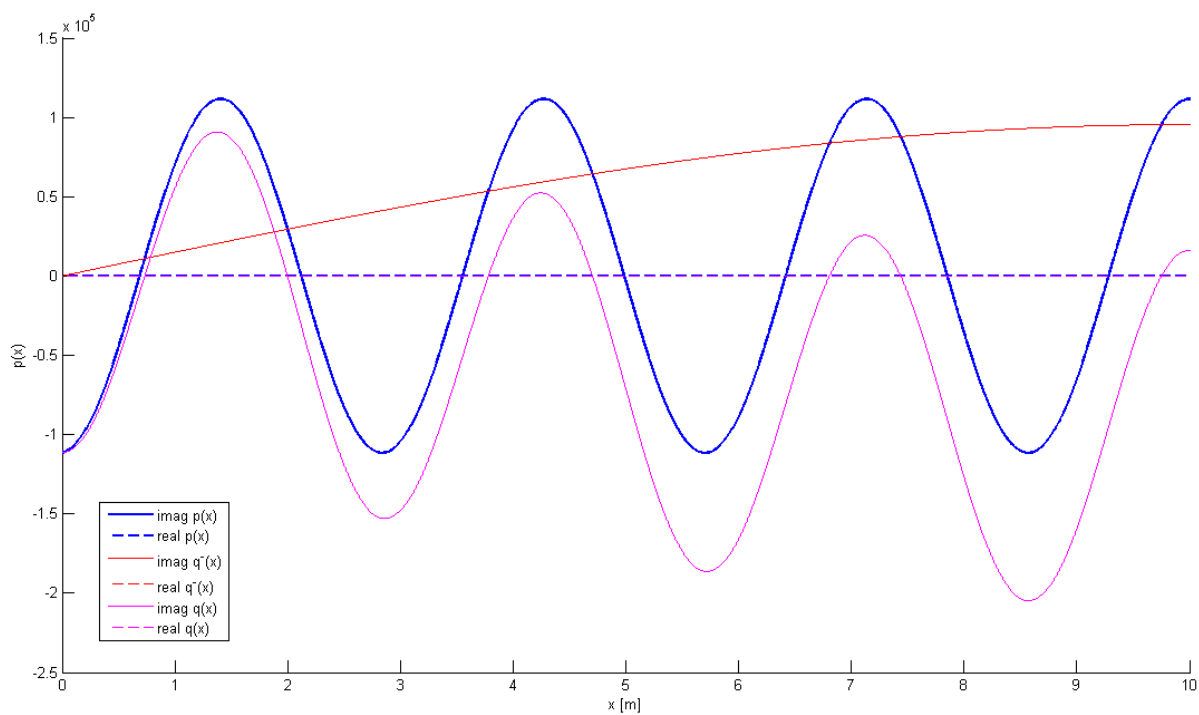
$$\begin{aligned}
 H_k &= \frac{f_k}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2} \quad k > 0 \\
 H_0 &= \frac{f_0}{\omega^2} \quad k = 0.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nyní již známe vše a můžeme vyjádřit hledané řešení HR (3.31)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= q(x) + \bar{q}(x) \\
 p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} H_k X_k(x) + i\omega p_A \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right).
 \end{aligned}$$

Na obr.(3.2) je zobrazeno řešení. Použili jsme tyto hodnoty parametrů

$$\begin{aligned}
 l &= 10 [m], \\
 \omega &= 750 [rad/s], \\
 c &= 342 [m/s], \\
 p_A &= 20 [m/rad].
 \end{aligned} \tag{3.51}$$



Obrázek 3.2: Řešení Helmholtzovy rovnice pro 1D případ

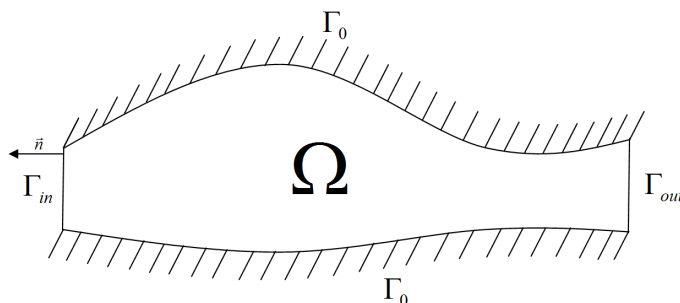
Je vidět, že všechny reálné části vychází nulové. Je to způsobeno tím, že jsme okrajovou podmínku z (3.32)<sub>2</sub>, neboli buzení, zvolili imaginární.

## 4 Formulace úloh akustiky pro danou frekvenci ve 3D

Pokud chceme řešit vlnovou rovnici pro akustický tlak (2.34) pro jednu danou frekvenci  $\omega$  (jednofrekvenční řešení), musíme vlastně řešit Helmholtzovu rovnici (2.36) s vhodnými okrajovými podmínkami jako okrajovou úlohu.

### 4.1 Okrajová úloha

K odvození okrajových podmínek využijeme oblast  $\Omega$  (obr.(4.1)). Hranici označíme  $\partial\Omega$ . Platí  $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$ , kde  $\Gamma_{in}$  je hranice vstupu incidenční vlny. Výstup z  $\Omega$  představuje  $\Gamma_{out}$ . Zbývající hranici označíme  $\Gamma_0$ . Půjde o pevnou dokonale odrazivou překážkou.  $\vec{n}$  je vnější jednotkový normálový vektor hranice  $\partial\Omega$ . (Zde vyjdeme hlavně z [E. Bängtsson(2002)].)



Obrázek 4.1: Obecná oblast  $\Omega$  se vstupní hranicí  $\Gamma_{in}$ , výstupní  $\Gamma_{out}$  a dokonale odrazivou  $\Gamma_0$

V praktických výpočtech je často dobré použít umělé okrajové podmínky, které omezí oblast výpočtu. Na  $\Gamma_{in}$ , kde vniká incidenční vlna do oblasti  $\Omega$ , by měla být určena její amplituda, zatímco odchozí, odražená vlna, by měla zůstat nepoznamenána. Necht'  $\vec{x}$  popisuje prostorové souřadnice. Předpokládáme, že jednofrekvenční rovinné vlny, procházející  $\Gamma_{in}$ , můžeme zapsat ve tvaru

$$P(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} + B e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} \quad , \quad A, B \in \mathbb{C} \quad , \quad (4.1)$$

kde první člen odpovídá incidenční vlně a druhý vlně odražené. Skalární součin vektorů

$\vec{x} \cdot \vec{n} = n$  je vlastně průmět  $\vec{x}$  do  $\vec{n}$ . Derivováním rovnice (4.1) dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial t} = Ai\omega e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} + Bi\omega e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = Ai\kappa e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} - Bi\kappa e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)}, \quad (4.3)$$

kde  $\frac{\partial P}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad}P$  popisuje derivaci ve směru vnější normály. Sečtením (4.2) a (4.3) vynásobenou  $c$  a využitím  $\omega = \kappa c$  získáme okrajovou podmínku na  $\Gamma_{in}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial n} = 2i\omega A e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)}. \quad (4.4)$$

Podmínka (4.4) je splněna pro každou vlnu typu (4.1) a může tedy být použita k nastavení amplitudy  $A$  incidentní vlny bez vlivu na amplitudu  $B$  vlny odražené. Vhodná absorbní okrajová podmínka na  $\Gamma_{out}$  je radiační podmínka prvního stupně [B. Engquist(1977)]. Nebo můžeme uvažovat, že na výstupu není žádná incidentní vlna a tedy  $A = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial n} = 0. \quad (4.5)$$

Tato podmínka nezpůsobí odraz vln na hranici  $\Gamma_{out}$  jdoucích přímo přesně ve směru normály. Na zbylých hranicích  $\Gamma_0$  předpokládáme akustický tvrdý materiál, takže budeme uvažovat podmínku

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0. \quad (4.6)$$

Pokud chceme řešit úlohu pro jednu frekvenci, uvažujeme řešení (2.35) jako v kapitole, kde jsme Helmholtzovu rovnici odvodili. Dosadíme do okrajových podmínek za  $P$ . Po zkrácení  $e^{i\omega t}$  a za předpokladu, že na  $\Gamma_{in}$  je v  $\vec{x} = 0$  získáme okrajové podmínky

$$\begin{aligned} c \frac{\partial p}{\partial n} + i\omega p &= 0 \quad \text{na } \Gamma_{out}, \\ c \frac{\partial p}{\partial n} + i\omega p &= 2i\omega A \quad \text{na } \Gamma_{in}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

## 4.2 Slabé řešení

Při odvození slabého řešení, viz [Míka(2007)], vyjdeme z HR (2.36) pro akustický tlak  $p = p(x)$ . Kde  $\kappa$  je vlnové číslo,  $\omega$  je úhlová frekvence a  $c$  je rychlost šíření vlny prostředím (v tomhle případě jde o rychlost ve vzduchu), pro které platí  $\kappa = \frac{\omega}{c}$ . HR celou vynásobíme

testovacím tlakem  $q$ , kde  $q \in Q$  a  $Q$  je množina všech přípustných tlaků, které vyhovují okrajovým podmínkám (4.7)

$$\nabla^2 p q + \kappa^2 p q = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (4.8)$$

Celou rovnici integrujeme přes oblast  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p q \, d\Omega + \int_{\Omega} \kappa^2 p q \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (4.9)$$

Využijeme následující Greenovy věty

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p q \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega. \quad (4.10)$$

Dosadíme (4.10) do (4.9) a dostaneme

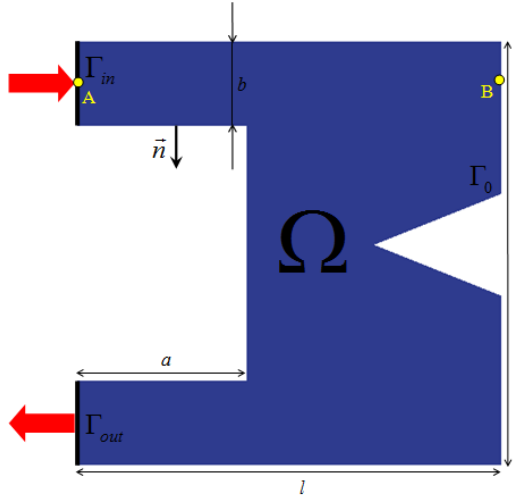
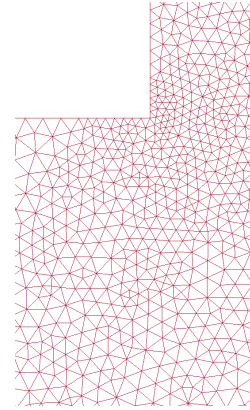
$$\int_{\Omega} \kappa^2 p q \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (4.11)$$

Po dosazení okrajových podmínek (4.7) do (4.11) dostaneme tento tvar slabého řešení

$$\int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega - \kappa^2 \int_{\Omega} p q \, d\Omega - \int_{\Gamma_{in}} (2i\kappa\tilde{u} - i\kappa p) q \, d\Gamma_{in} + \int_{\Gamma_{out}} i\kappa p q \, d\Gamma_{out} = 0 \quad \forall q \in Q \quad (4.12)$$

### 4.3 Numerické řešení MKP s různými okrajovými podmínkami

Výpočet budeme provádět v oblasti  $\Omega$  (obr.(4.2)), kde  $\partial\Omega$  bude její hranice. Platí  $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$ , kde  $\Gamma_{in}$  je hranice vstupu (červená linie), kde vzniká incidenční vlna.  $\Gamma_{out}$  představuje výstup z  $\Omega$  (modrá linie) a  $\Gamma_0$  je dokonalé odrazivá stěna.

Obrázek 4.2: Popsaná použitá oblast  $\Omega$ Obrázek 4.3: Detail MKP sítě oblasti  $\Omega$ 

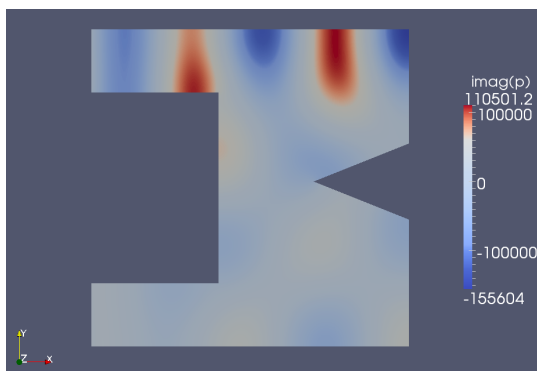
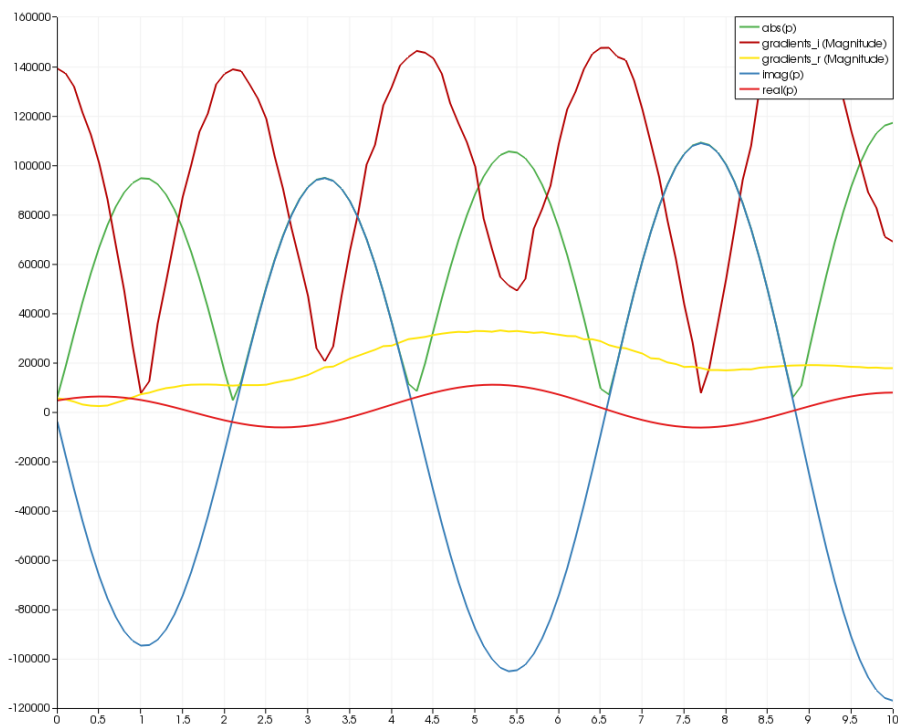
Na obr.(4.3) vidíme použitou síť MKP. Jako elementy jsme použili trojúhelníky. Celkem síť obsahuje 18724 uzlů a 36556 elementů, a tudíž má 56172 stupňů volnosti. Budící funkci označím jako  $\tilde{u}$ . Použijeme následující okrajovou podmínku na  $\Gamma_{in}$ . Budeme uvažovat buzení konstantou

$$\tilde{u} = u_A . \quad (4.13)$$

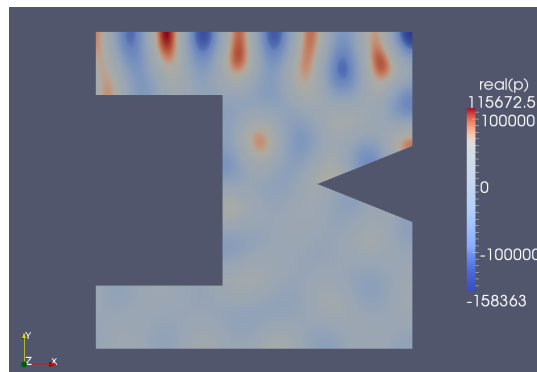
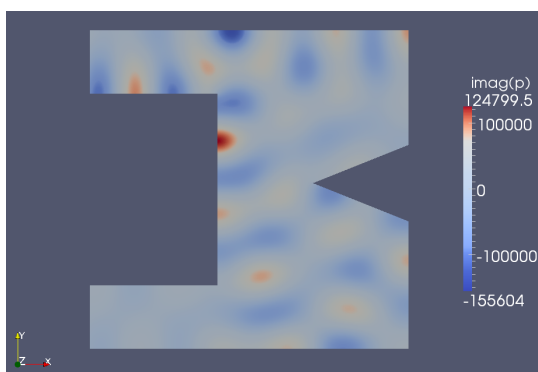
Buzení funkcí (4.13) interpretujeme jako kmitání desky v směru osy  $x$  s amplitudou  $u_A$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ . Parametry úlohy jsme si navolili

$$\begin{aligned} c &= 342 \text{ [m/s]} , \\ \omega &= 500, 1000 \text{ [rad/s]} , \\ \kappa &= \frac{\omega}{c} \text{ [rad/m]} , \\ u_A &= 50\,000 \text{ [-]} , \\ l &= 10 \text{ [m]} , \\ a &= 4 \text{ [m]} , \\ b &= 2 \text{ [m]} , \end{aligned} \quad (4.14)$$

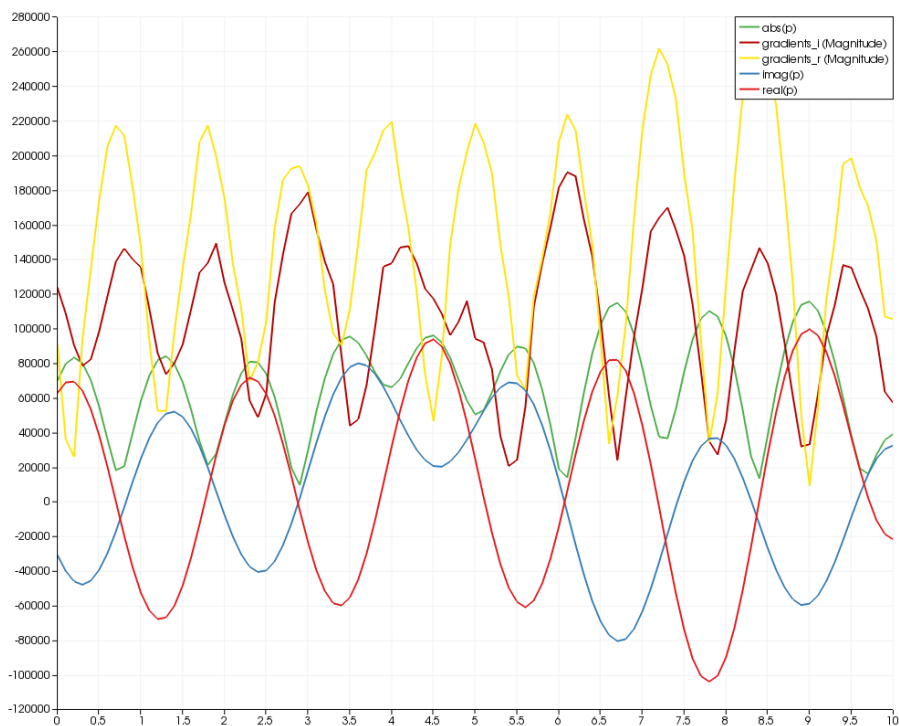
kde  $l$  je délka hrany oblasti  $\Omega$ ,  $b$  šířka zvukovodů,  $a$  délka zvukovodů,  $c$  rychlost šíření zvuku ve vzduchu,  $\omega$  úhlová frekvence a  $\kappa$  vlnové číslo. Pro úhlovou frekvenci  $\omega$  jsme volili dvě hodnoty. Výpočet jsme prováděli v systému SfePy a výsledky zobrazili v programu ParaView. Síť MKP (obr.(4.3)) jsme vygenerovali v MSC.Marc/Mentat. Pro buzení jsme provedli výpočty pro dvě různé hodnoty  $\omega$  viz (4.14).

Obrázek 4.4: Imaginární část  $p$ ;  
 $\omega = 500 [rad/s]$ ,  $\tilde{u} = u_A$ Obrázek 4.5: Reálná část  $p$ ;  
 $\omega = 500 [rad/s]$ ,  $\tilde{u} = u_A$ Obrázek 4.6: Graf znázorňující hodnoty podél přímky z A do B.  $\omega = 500 [rad/s]$ ,  $\tilde{u} = u_A$ 

Vyjdeme-li pro kontrolu ze vzorců  $T = \lambda/c$  a  $T = 2\pi/\omega$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka a  $T$  perioda, získáme vzorec pro  $\lambda$ :  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Po dosazení  $\omega = 500 [rad/s]$  a  $c = 342 [m/s]$  zjistíme, že  $\lambda = 4,298 [m]$ , což odpovídá obr.(4.4).



Obrázek 4.7: Imaginární část  $p$ ; Obrázek 4.8: Reálná část  $p$ ;  
 $\omega = 1000 \text{ [rad/s]}$ ,  $\tilde{u} = u_A$   $\omega = 1000 \text{ [rad/s]}$ ,  $\tilde{u} = u_A$



Obrázek 4.9: Graf znázorňující hodnoty podél přímky z bodu A do bodu B.  
 $\omega = 1000 \text{ [rad/s]}$ ,  $\tilde{u} = u_A$

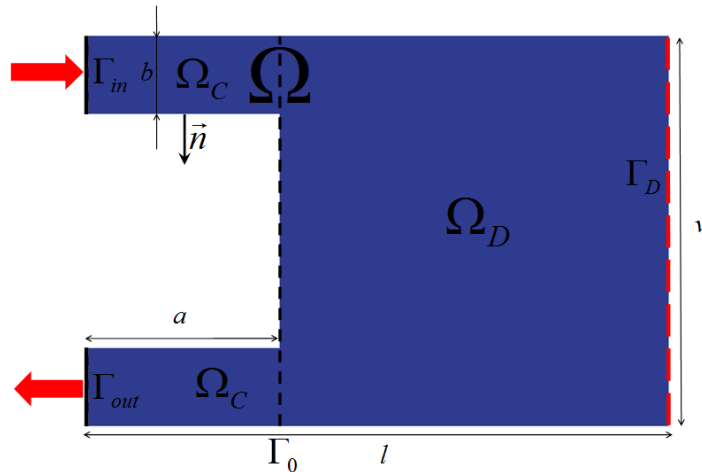
Na obr.(4.9) je už lépe vidět, jak se vlivem kratší vlnové délky mění hladkost zobrazení gradientů. Nedokonalost je způsobena nedostatečnou hustotou sítě oblasti.



# 5 Formulace úloh tvarové optimalizace

## 5.1 Úvod

V této kapitole formulujeme úlohu tvarové optimalizace pro akustické pole. Oblast  $\Omega$  (obr.(5.1)) je rozdělena na dvě disjunktní podoblasti: platí  $\Omega = \Omega_D \cup \Omega_C$ , kde  $\Omega_D$  představuje takzvanou designovou oblast, a pro  $\Omega_C$  platí:  $\Omega_C = \Omega \setminus \overline{\Omega_D}$ . Hranice  $\partial\Omega$  je rozdělena na dílčí hranice  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ . Na pravé hranici je designová hranice  $\Gamma_D \subset \Gamma_0 \subset \partial\Omega$ . Tato designová hranice bude optimalizací měnit tvar a to následně ovlivní síť MKP v  $\Omega_D$ , ale už ne v  $\Omega_C$ . Změnou tvaru hranice  $\Gamma_D$ , zprostředkovanou změnou parametrů  $\alpha$ , se bude měnit řešení  $p$  v celé oblasti. Změna se projeví také na účelové funkci  $\Phi$ , která se vyhodnocuje v  $\Omega_C$ .



Obrázek 5.1: Popsaná oblast  $\Omega$

Jako stavovou rovnici budeme uvažovat Hemholtzovu rovnici (2.36) pro akustický tlak  $p$ . Úlohu budeme řešit na  $\Omega$  a použijeme na její hranici  $\partial\Omega$  již odvozené okrajové podmínky (4.7). Dále zavedeme slabou formulaci úlohy (viz (4.12))

Pomocí bilineární formy zapíšeme naši stavovou úlohu jako

$$\underbrace{(\nabla p, \nabla q)_\Omega - \kappa^2(p, q)_\Omega + \langle i\kappa p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}}_{\Psi(p, q)} - \underbrace{\langle 2i\kappa \tilde{u}, q \rangle_{\Gamma_{in}}}_{f(q)} = 0, \quad (5.1)$$

kterou můžeme zapsat v abstraktní formě

$$\Psi(p, q) = f(q) \quad p, \forall q \in Q. \quad (5.2)$$

Uvažujeme následující optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} \Phi(p) , \\ & p \in Q : \Psi(p, q) = f(q) \quad \forall q \in Q , \\ & \alpha \in U , \\ & \gamma : \alpha \longrightarrow \Gamma_D , \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde  $p$  splňuje stavovou úlohu (5.2),  $\Phi$  je účelová funkce a  $U$  je množina přípustných parametrů  $\alpha$ .

Zvolíme účelovou funkci

$$\begin{aligned} \Phi_I(p) &= \int_{\Omega_c} |p|^2 = \|p\|_{\Omega_c}^2 [Pa^2m^2] , \\ \Phi_{II}(p) &= 20 \log \left( \frac{\|p\|_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_B}} \right) [dB] . \end{aligned} \tag{5.4}$$

## 5.2 Citlivostní analýza

Provedením citlivostní analýzy rozumíme výpočet citlivosti změny účelové funkce  $\Phi$  v závislosti na změně optimalizačních parametrů  $\alpha$ , když na nich závisí účelová funkce nepřímo prostřednictvím stavové proměnné  $p$ . Potřebujeme tedy vypočítat gradient funkce  $\Phi(\alpha, p(\alpha))$  podle jednotlivých optimalizačních parametrů  $\alpha$ . Máme zde tedy implicitní funkci  $p = p(\alpha)$ .

V oblasti  $\Omega$  definujeme vektorové pole  $\mathcal{V}$ , s pomocí Spline-boxu [Rohan(2007)].

### 5.2.1 Metoda adjungované proměnné

Zabývejme se nyní úlohou, kdy tvar hranice závisí na jediném parametru  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_D + \tau \{ \mathcal{V}(x) \}_{x \in \Gamma_D} , \tag{5.5}$$

kde  $x$  je prostorová souřadnice. Musí platit, že  $\mathcal{V}(x) = 0$  pro  $x \in \Omega_C$  a pro body na linii zvýrazněné černou přerušovanou čarou (viz obr.(5.1)). K problému (5.3)<sub>2</sub>, v němž je  $\alpha$  nahrazeno parametrem  $\tau$ , můžeme přiřadit Lagrangeovu funkci  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_{\tau}(p, q) = \Phi(p) + \Psi_{\tau}(p, q) - f(q) + \Psi_{\tau}^*(p^*, q^*) - f^*(q^*) , \tag{5.6}$$

kde  $q$  je Lagrangeovův multiplikátor vazby splnění stavové úlohy. Poznamenejme, že pokud platí (5.3)<sub>2</sub> pro  $\Psi(p, q) = f(q)$ , tak i pro  $\Psi^*(p^*, q) = f^*(q)$ , kde  $*$  značí komplexně

sduženou hodnotu.

Nyní formulujeme úlohu (5.3) jako úlohu sedlového bodu

$$\max_{q \in Q} \min_{\alpha \in U, p \in Q} \mathcal{L}(\alpha, p, q) . \quad (5.7)$$

Rovnici (5.6) zderivujeme podle řešení  $p$ . Gâteauxovu derivaci, viz [Drábek(1994)], podle  $p$  označíme  $\delta_p$  (derivace ve směru  $q$ )

$$\delta_p \mathcal{L}_\tau(p, q; \delta p) = \delta \Phi(p; \delta p) + \underbrace{\Psi_\tau(\delta p, q) + \Psi_\tau^*(\delta p^*, q^*)}_{2\text{Re}\{\Psi_\tau(\delta p, q)\}} . \quad (5.8)$$

Pro splnění podmínky optimality se musí (5.8) rovnat nule. Dostaneme se k řešení adjungované úlohy pro adjungovanou proměnnou  $q \in Q$

$$2\text{Re}\{\Psi_\tau(\delta p, q)\} \delta p \in Q = -\delta \Phi(p; \delta p) \quad \forall . \quad (5.9)$$

Adjungovanou úlohu můžeme řešit za předpokladu, že  $\Phi \in \mathbb{R}$ , pro  $p \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$ . Řešení adjungované úlohy je efektivní řešení nalezení gradientu účelové funkce. Účelovou funkci budeme vyhodnocovat na  $\Omega_C$ , tedy oblastí, která není ovlivněna změnou  $\Gamma_D$ . Účelovou funkci zderivujeme podle řešení  $p$

$$\delta \Phi(p; \delta p) = \int_{\Omega_C} [p(\delta p)^* + p^* \delta p] = 2\text{Re} \left\{ \int_{\Omega_C} (p^* \delta p) \right\} .$$

Proto můžeme (5.9) přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & (\nabla p, \nabla q)_\Omega - \kappa^2(p, q)_\Omega + \langle i\kappa p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} + \\ & + \langle \nabla p^*, \nabla q^* \rangle_\Omega - \kappa^2(p^*, q^*)_\Omega - \langle i\kappa p^*, q^* \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} = 2\text{Re} \{ \Psi(p, q) \} . \end{aligned}$$

Zapišeme adjungovanou úlohu takto pro účelovou funkci  $\Phi$  definovanou dle  $\Phi_I$ , viz (5.4),

$$\text{Re} \{ \Psi(\hat{p}, q) \} = -\text{Re} \left\{ \int_{\Omega_C} p^* q \right\} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_C} (pq^* + p^*q) \quad \forall q \in Q , \quad (5.10)$$

kde  $\hat{p}$  označuje odjungovanou proměnnou. Vypočteme-li adjungovanou proměnnou, využijeme ji dále v (5.6) jako Lagrangeův multiplikátor a provedeme totální derivaci rovnice (5.6) podle  $\tau$

$$\delta_\tau \mathcal{L}(p, \hat{p}) + \underbrace{\delta_p \mathcal{L}(p, \hat{p}; \delta p)}_{=0} = \delta_\tau \Phi(p) + \delta_\tau (\Psi_\tau(p, \hat{p}) - f(\hat{p})) + \delta_\tau (\Psi_\tau^*(p^*, \hat{p}^*) - f^*(\hat{p}^*)) . \quad (5.11)$$

Je-li splněna adjungovaná rovnice (5.9), tak druhý člen na levé straně (5.11) je roven nule a platí  $\delta \Phi = \delta \Psi$ .

## 5.2.2 Výpočet citlivosti pomocí materiálové derivace

V tomto odstavci vyjádříme členy v citlivostním vztahu (5.11) s využitím materiálové derivace známé z mechaniky kontinua, viz [Rohan(2012)], [E. Rohan(2012)], [E. Rohan(2010a)], [E. Rohan(2010b)]. Zavedeme zobrazení  $\mathcal{F}$  parametrizované pomocí  $\tau$

$$\mathcal{F}(\tau, \cdot) : \Omega \mapsto \Omega(\tau), \quad z(\tau) = \mathcal{F}(\tau, x), \quad (5.12)$$

kde

$$\begin{aligned} z &= x + \tau \mathcal{V}(x), \quad x \in \Omega, \quad z \in \Omega(\tau), \\ \Omega(\tau) &= \Omega + \tau \{ \mathcal{V}(x) \}_{x \in \Omega}, \quad J = \det(\partial_x \mathcal{F}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

kde  $\partial_x \mathcal{F}$  je Jacobiova matice zobrazení  $\mathcal{F}$ .

Platí, viz [Rohan(2012)]

$$\begin{aligned} (\nabla_z p, \nabla_z q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} \partial_i^z x_k \partial_k^x p \quad \partial_j^z x_l \partial_l^x q \delta_{ij} \quad J(\mathcal{F}), \\ (p, q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} pq J((F)) \end{aligned} \quad (5.14)$$

a odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} (\nabla_z p, \nabla_z q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p \partial_i q^*, \\ \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} (p, q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} pq \operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nyní označíme

$$\begin{aligned} a(p, q) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p \partial_i q^*, \\ m(p, q) &= \int_{\Omega} pq \operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Využili jsme těchto skutečností

$$(\partial_j \mathcal{F}_i)^\cdot = \left( \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\cdot = (\partial_j \mathcal{V}_i) = (\nabla \mathcal{V})_{ij} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial z_i} = \frac{\partial(z_k - \tau \mathcal{V}_k)}{z_i} = \delta_{ki} - \tau \frac{\partial \mathcal{V}_k}{\partial z_i},$$

$$F_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j},$$

$$FF^{-1} = I$$

$$\dot{F}F^{-1} + F(F^{-1})^\cdot = 0 \quad (5.18)$$

$$(F^{-1})^\cdot = -F^{-1} \dot{F} F^{-1}$$

$$\begin{aligned} (F^{-1})^\cdot \Big|_{\tau=0} &= -\dot{F} \Big|_{\tau=0} \\ &= -\nabla \mathcal{V}, \end{aligned}$$

$$\partial_k \mathcal{V}_j = \frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial x_k} . \quad (5.19)$$

S využitím vztahů (5.16) již můžeme dosadit do (5.11). Dostaneme totální derivaci  $\delta\Phi$  vyjadřující derivaci účelové funkce ve směru vektorového pole  $\mathcal{V}$

$$\delta\Phi = a(p^*, \hat{p}^*) - \kappa^2 m(p^*, \hat{p}^*) + a(p, \hat{p}) - \kappa^2 m(p, \hat{p}) , \quad (5.20)$$

kde

$$\begin{aligned} a(p^*, \hat{p}^*) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p^* \partial_i \hat{p}^* , \\ m(p^*, \hat{p}^*) &= \int_{\Omega} p^* \hat{p}^* \operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) , \\ a(p, \hat{p}) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p \partial_i \hat{p} , \\ m(p, \hat{p}) &= \int_{\Omega} p \hat{p} \operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Touto cestou získáme úplnou derivaci účelové funkce  $\Phi$  vůči  $\alpha$ , tj. její citlivost. V (5.20) derivace  $\delta\Phi$  ve skutečnosti znamená  $\frac{d}{d\tau} \Phi|_{\tau=0}$ , kde  $\Phi$  je implicitní funkce hranice  $\Gamma(\tau)$  parametrizované vztahem (5.5) a závisí tedy na vektorovém poli  $\mathcal{V}$ .

## 5.3 Implementace

### 5.3.1 Adjungovaná úloha

Výpočet citlivosti změny účelové funkce  $\Phi$  jsme provedli ve SfePy.

Řešení  $p$  a zkušební tlak  $q$  jsou komplexní hodnoty. Hvězdička znamená komplexně sdruženou hodnotu

$$\begin{aligned} q &= q_r + i q_i, & q^* &= q_r - i q_i , \\ p &= p_r + i p_i, & p^* &= p_r - i p_i . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Později využijeme těchto rovností

$$\begin{aligned} p^* q^* &= (pq)^* = ((p_r q_r - q_i p_i) + i(p_r q_i + p_i q_r))^* , \\ (\nabla p^*, \nabla q^*) &= (\nabla p, \nabla q)^* . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Reálné části v adjungované úloze (5.10) bude vhodné pro implementaci zapsat takto

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ (\nabla(p_r + i p_i), \nabla(q_r - i q_i))_{\Omega} \} &= (\nabla p_r, \nabla q_r)_{\Omega} + (\nabla p_i, \nabla q_i)_{\Omega} , \\ \operatorname{Re} \{ \kappa^2 (p, q)_{\Omega} \} &= \kappa^2 [(p_r, q_r)_{\Omega} + (p_i, q_i)_{\Omega}] , \\ \operatorname{Re} \{ (i \langle \kappa p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}) \} &= -\kappa [\langle p_r, -q_i \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} + \langle p_i, q_r \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}] . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Z účelové funkce  $\Phi_I$  také vybereme reálnou část

$$2\text{Re} \left\{ \int_{\Omega_C} p^* q \right\} = 2 \int_{\Omega_C} (p_r q_r + p_i q_i) . \quad (5.25)$$

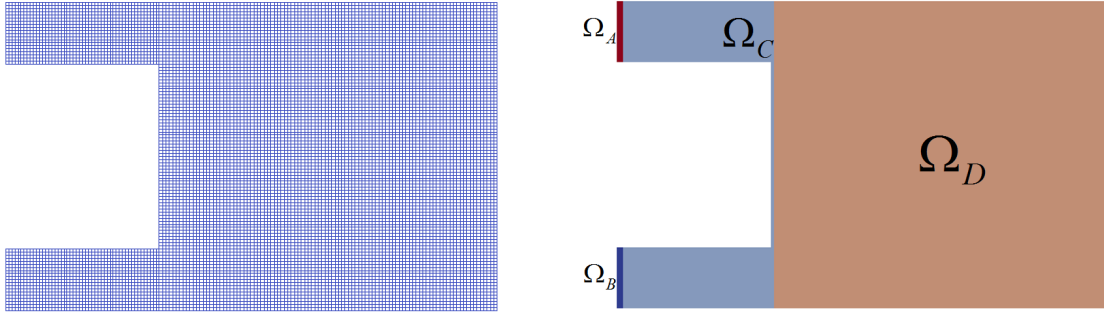
Využijeme (5.24), (5.25) a rozdělíme adjungovanou úlohu (5.10) na řešení zvlášt' reálné a imaginární části. Zapišeme maticově

$$(q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega & -\kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \\ \kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} & (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{p}_r \\ \hat{p}_i \end{pmatrix} = - (q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\cdot, p_r)_{\Omega_C} \\ (\cdot, p_i)_{\Omega_C} \end{pmatrix} , \quad (5.26)$$

což platí pro  $\forall (q_i, q_r) \in Q^2$ .

### 5.3.2 Příprava oblasti $\Omega$

V MSC.Marc/Mentat jsme vygenerovali MKP síť oblasti  $\Omega$  se čtvercovými elementy



Obrázek 5.2: Síť MKP oblasti  $\Omega$ ; 12301 uzlů; 12000 elementů; 36903 stupňů volnosti

Obrázek 5.3: Oblast  $\Omega$  s podoblastmi  $\Omega_C$ ,  $\Omega_D$ ,  $\Omega_A$  a  $\Omega_B$

V oblasti  $\Omega$  budeme uvažovat, jak již bylo zmíněno dříve, podoblasti  $\Omega_C$  a  $\Omega_D$ . V  $\Omega_C$  zavedeme ještě  $\Omega_A \subset \Omega_C$  a  $\Omega_B \subset \Omega_C$  obě o šířce jen dva elementy. Účelové funkce  $\Phi_I$  a  $\Phi_{II}$ , viz (5.4), budeme vyhodnocovat přes  $\Omega_A$  a  $\Omega_B$ .

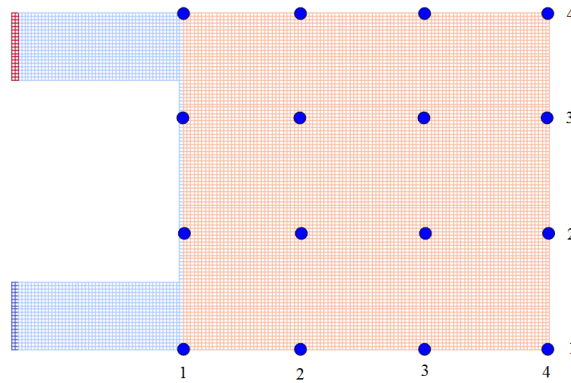
### 5.3.3 Spline-box

Spline-box pomáhá vytvářet geometrickou parametrizaci 2D i 3D oblastí. Použili jsme spline-box implementovaný v systému SfePy. Využijeme ho k vytvoření parametrizace tvaru hranice  $\Gamma_D$  při hledání jejího optimálního designu. Platí  $\Omega_D \subset \Omega$ , viz obr.(5.1), která je

tvořena 2D MKP sítí, viz obr.(5.2). Jako zdroj k tomuto tématu jsem využil [Rohan(2007)]. Uvažujeme oblast  $\Omega_D$ , viz obr.(5.1), a parametrizaci její hranice  $\Gamma_D$ , viz (5.5). Spline 2D reprezentaci pro nezměněnou  $\Omega_D^0$  zapíšeme

$$\vec{x}_0(\tau, s) = \sum_i^4 \sum_j^4 N_i(\tau) N_j(s) \vec{b}_{ij}^0, \quad (5.27)$$

kde  $N(\tau)$  je B-spline báze svislých splinů a  $N(s)$  vodorovných. Počáteční polohu řídicích bodů určuje  $\vec{b}_{ij}^0$ . Polohu uzlů nezdeformované sítě popisuje  $\vec{x}$ . Vytvořili jsem tedy nad  $\Omega_D^0$  2D Spline-box s 16 řídicími body, viz obr.(5.4)



Obrázek 5.4: Umístění řídicích bodů po vytvoření spline-boxu nad  $\Omega_D$

Změnu polohy řídicích bodů popíšeme

$$\vec{b}_{ij} = \vec{b}_{ij}^0 + \vec{d}_{ij} \alpha_{ij}. \quad (5.28)$$

Směr změny umístění (pohybu) řídicích bodů určují jednotkové vektory  $\vec{d}_{ij}$  a velikost této změny parametry  $\alpha_{ij}$ . Pro nenulové  $\alpha_{ij}$  platí

$$\vec{x}(\tau, s) = \sum_i^4 \sum_j^4 N_i(\tau) N_j(s) \vec{b}_{ij}. \quad (5.29)$$

Když zderivujeme (5.29) podle  $\alpha_{ij}$ , dostaneme

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha_{ij}} = N_i(\tau) N_j(s) \vec{d}_{ij}. \quad (5.30)$$

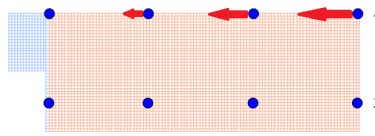
Získáme tedy v  $\Omega_D$  vektorové pole  $\mathcal{V}(\tau, s)^{ij}$  od parametru  $\alpha_{ij}$

$$\mathcal{V}(\tau, s)^{ij} = N_i(\tau) N_j(s) \vec{d}_{ij}. \quad (5.31)$$

V našem případě budeme měnit tvar jen hranice  $\Omega_D$ . Půjde tedy o 1D úlohu a budeme uvážovat jen 4 parametry  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ztotožníme parametry  $\alpha_i$  s  $\tau$ . Z toho vyplývá, že úplná derivace účelové funkce  $\Phi$  je vlastně derivací ve směru vektorového pole  $\mathcal{V}$ .

$$\delta_{\alpha_i} \Phi = \delta_{\tau} \Phi = \delta \Phi \circ \mathcal{V}^i . \quad (5.32)$$

S ohledem na obr.(5.4) budeme uvažovat posun řídicích bodů ve vodorovném směru. Parametr  $\alpha_i$  proporcionalně řekne, o kolik se posune  $i$ -tá řada řídicích bodů. Řídící body označím  $B_{i,j}$ . Když bod  $B_{4,4}$  posuneme o  $\alpha_4$  ve směru  $\vec{d}_{44} = (-1, 0)$ , tak  $B_{3,4}$  se posune o  $2/3\alpha_4$ ,  $B_{2,4}$  o  $1/3\alpha_4$  a  $B_{1,4}$  o 0, viz obr.(5.5).



Obrázek 5.5: Posun řady řídicích bodů pro  $\alpha_4$

### 5.3.4 Porovnání konečných diferencí a citlivostní analýzy

Získání citlivosti účelové funkce  $\Phi$  na parametrech  $\alpha$  znamená získání totální derivace  $\delta_{\tau} \Phi$ . To jde nejen pomocí citlivostní analýzy (CA), ale také numericky pomocí konečných diferencí (KD). Druhá možnost výpočtu je však v optimalizaci výpočetně náročnější a méně přesná. Porovnáme KD s CA a ověříme si tím správnost výpočtu citlivosti účelové funkce pomocí CA.

Při použití konečných diferencí budeme uvažovat velmi malou změnu  $d\tau$  na hranici  $\Gamma_D$ . Posuneme řídicí body, viz obr.(5.4), na  $\Gamma_D$  o  $d\tau$  nejdříve ve směru  $\vec{d}^+ = (1, 0)$  a poté  $\vec{d}^- = (-1, 0)$ .

$$\begin{aligned} \Omega_D^+ &= \Omega_D + d\tau \{ \mathcal{V}(x) \}_{x \in \Omega_D} , \\ \Omega_D^- &= \Omega_D - d\tau \{ \mathcal{V}(x) \}_{x \in \Omega_D} . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Postupně vyhodnotíme účelovou funkci (5.4)<sub>1</sub> v nových oblastech  $\Omega^+$  a  $\Omega^-$ . Získáme  $\Phi^+$  a  $\Phi^-$ . Provedeme centrální poměrnou diferenci, jejíž výsledkem bude hledaná citlivost

$$\delta_{\tau} \Phi = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{2d\tau} . \quad (5.34)$$

Přesnost závisí samozřejmě na volbě velikosti  $d\tau$ . Porovnali jsme výsledky citlivostní analýzy a konečných diferencí pro několik frekvencí  $\omega$  na oblasti obr.(5.3). Výsledné citlivosti a jejich rozdíly jsou v následující tabulce.



$d\tau$	$\omega[\text{rad s}^{-1}]$	Citlivostní analýza	Konečné diference	Rozdíl(CA-KD)
1e-6	200	-1813.56452583+0i	-1813.55618406+0i	-0.00834177+0i
	400	16562.4516291-8.73e-11i	16561.4799553+0i	0.97167380-8.73e-11i
	600	20675.4802695-5.82e-11i	20675.2863232+0i	0.19394625-5.82e-11i
	800	19822.959634-5.82e-11i	19822.8649024+0i	0.09473160-5.82e-11i
	1000	44579.6204201-1.75e-11i	44578.836579+0i	0.78384415-1.75e-11i

### 5.3.5 Optimalizace

Výpočet provedeme v softwaru SfePy a Matlab. SfePy bude vypočítávat citlivost účelové funkce na změnu parametrů  $\alpha$ . Citlivost se předá Matlabu, kde se využije knihovní optimalizační funkce *fmincon*, viz [MathWorks(2013)], která použije citlivost k optimalizaci. Matlab bude vracet nové hodnoty optimalizovaných parametrů  $\alpha$  do SfePy, kde začne další iterace.

## 5.4 Optimalizační výpočty

### 5.4.1 Úvodem

Výpočty budeme provádět na oblasti  $\Omega$  (obr.(5.1)), rozdělené na podoblasti (obr.(5.3)). Na hranici  $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$  použijeme okrajové podmínky (4.7). Zavedeme spline-box nad  $\Omega_D$ , viz obr.(5.4). Optimální tvar hranice  $\Gamma_D$  budeme hledat pro minimum účelových funkcí  $\Phi_I$  a  $\Phi_{II}$ , viz (5.4). Platí

$$\begin{aligned}\Phi_I(p) &= \int_{\Omega_A \cup \Omega_B} |p|^2 = \|p\|_{\Omega_A \cup \Omega_B}^2 [Pa^2m^2], \\ \Phi_{II}(p) &= T_{AB}(p) = 20 \log \left( \frac{\|p\|_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_B}} \right) [dB],\end{aligned}\tag{5.35}$$

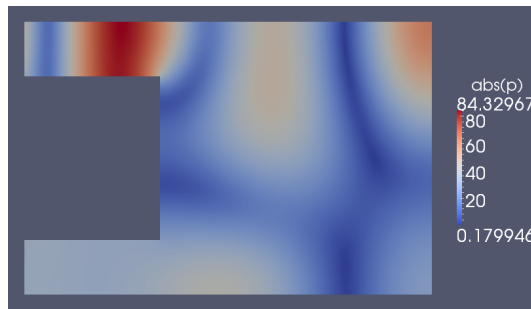
kde  $\Phi_{II}$  se rovná funkci transmisních ztrát  $T_{AB}$ , která říká, o kolik decibelů [dB] se utlumí ( $T_{AB} > 0$ ) nebo zesílí ( $T_{AB} < 0$ ) zvuková vlna jdoucí z  $\Omega_A$  do  $\Omega_B$ . Účelovou funkci  $\Phi_I$  budeme počítat přes  $\Omega_A \cup \Omega_B$  a  $\Phi_{II}$  dle (5.35)<sub>2</sub>. Výpočet provedeme pro tři úhlové frekvence  $\omega = 200, 600, 1000 [\text{rads}^{-1}]$ .

Parametry oblasti  $\Omega$  navolíme následovně

$$\begin{aligned}
 c &= 342 \text{ [m/s]} , \\
 \kappa &= \frac{\omega}{c} \text{ [rad/m]} , \\
 u_A &= 50 \text{ [-]} , \\
 l &= 15 \text{ [m]} , \\
 v &= 10 \text{ [m]} , \\
 a &= 5 \text{ [m]} , \\
 b &= 2 \text{ [m]} .
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

### 5.4.2 Vlastní výpočty

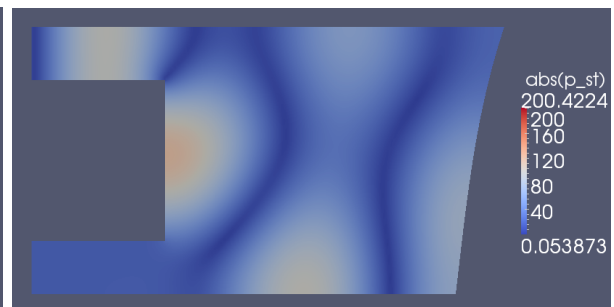
Nejprve vypočteme řešení  $|p|$  v neoptimalizované oblasti  $\Omega$  a získáme optimalizací neovlivněné hodnoty účelových funkcí  $\Phi_I^N$  a  $\Phi_{II}^N$ . Pak provedeme optimalizace pro  $\Phi_I$  a  $\Phi_{II}$ . Z optimalizované oblasti  $\Omega$  získáme optimalizované hodnoty účelových funkcí  $\Phi_I^O$  a  $\Phi_{II}^O$ . Zobrazíme závislost velikosti  $\Phi$  na iteračním kroku. Toto provedeme pro všechny tři  $\omega$ .



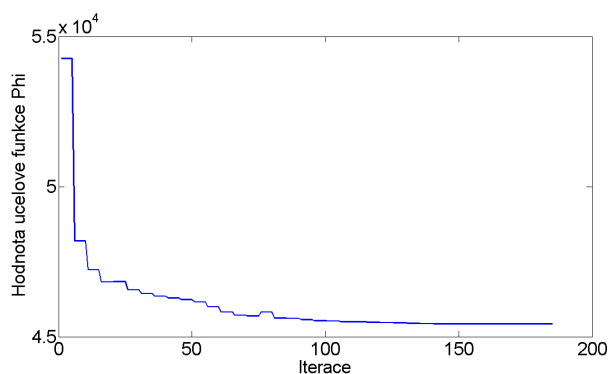
Obrázek 5.6: Zobrazeno  $|p|$  v neoptimalizované oblasti  $\Omega$ ;  $\omega = 200 \text{ [rads}^{-1}\text{]}$



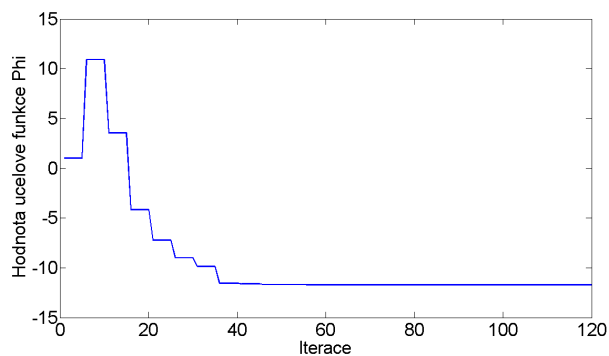
Obrázek 5.7: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_I$ ;  $\omega = 200 \text{ [rads}^{-1}\text{]}$



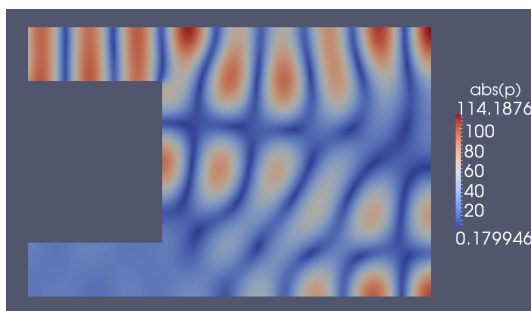
Obrázek 5.8: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_{II}$ ;  $\omega = 200 \text{ [rads}^{-1}\text{]}$



Obrázek 5.9: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_I$  na iteračním kroku optimalizace



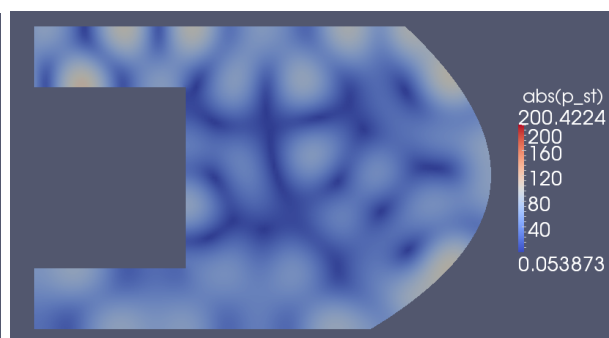
Obrázek 5.10: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_{II}$  na iteračním kroku optimalizace



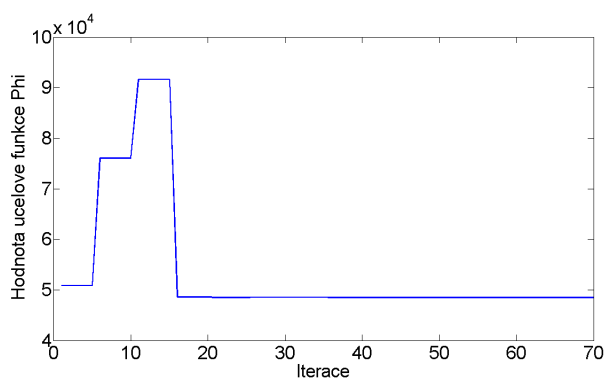
Obrázek 5.11: Zobrazeno  $|p|$  v neoptimalizované oblasti  $\Omega$ ;  $\omega = 600 [rads^{-1}]$



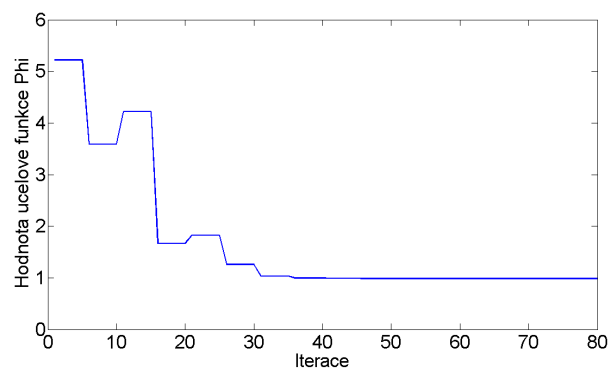
Obrázek 5.12: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_I$ ;  $\omega = 600 [rads^{-1}]$



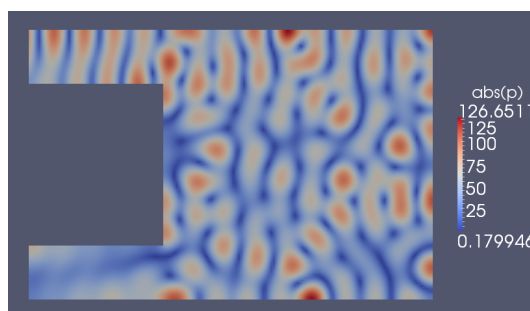
Obrázek 5.13: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_{II}$ ;  $\omega = 600 [rads^{-1}]$



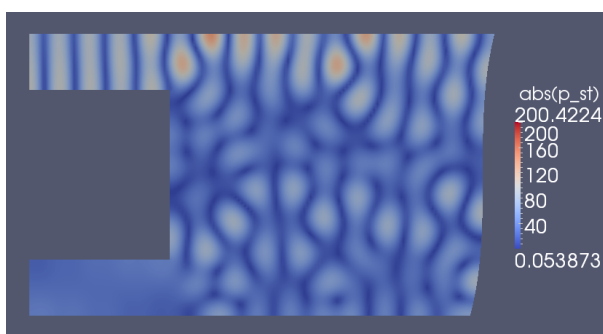
Obrázek 5.14: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_I$  na iteračním kroku optimalizace



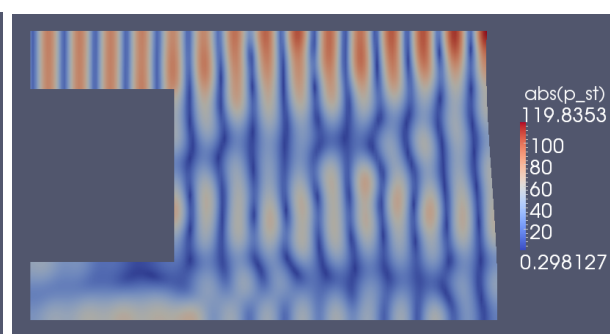
Obrázek 5.15: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_{II}$  na iteračním kroku optimalizace



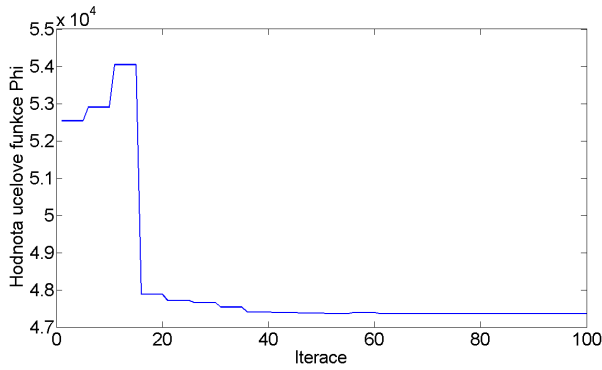
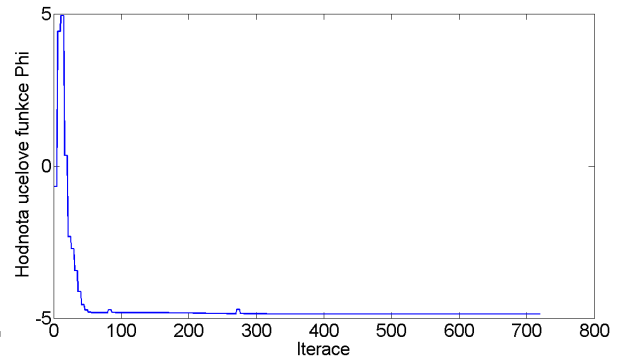
Obrázek 5.16: Zobrazeno  $|p|$  v neoptimalizované oblasti  $\Omega$ ;  $\omega = 1000 [rads^{-1}]$



Obrázek 5.17: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_I$ ;  $\omega = 1000 [rads^{-1}]$



Obrázek 5.18: Zobrazeno  $|p|$  v optimalizované oblasti  $\Omega$  pro  $\Phi_{II}$ ;  $\omega = 1000 [rads^{-1}]$

Obrázek 5.19: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_I$  na iteračním kroku optimalizaceObrázek 5.20: Graf závislosti hodnoty  $\Phi_{II}$  na iteračním kroku optimalizace

Níže vidíme tabulku, která ukazuje hodnoty účelových funkcí (5.35) před ( $\Phi^N$ ) a po ( $\Phi^O$ ) optimalizaci a jejich procentuální srovnání, které říká, o kolik procent se zvětšila či zmenšila hodnota  $\Phi$ .

$\omega$ [rad s <sup>-1</sup> ]	$\Phi_I^N$ [Pa <sup>2</sup> m <sup>2</sup> ]	$\Phi_I^O$ [Pa <sup>2</sup> m <sup>2</sup> ]	$\pm\%$	$\Phi_{II}^N$ [dB]	$\Phi_{II}^O$ [dB]	$\pm\%$
200	5.1383e+4	4.5426e+4	-11.92	0.921	-11.7089	-1371.32
600	5.1869e+4	4.85002e+4	-6.49	9.833	0.9845	-89.99
1000	5.2944e+4	4.7361e+4	-10.55	3.8986	-4.8617	-224.70

Podle tabulky vidíme, že optimalizace, podle očekávání, snížila hodnoty obou účelových funkcí pro všechny úhlové frekvence  $\omega$ . Postup minimalizování  $\Phi_{I,II}$  je vidět z grafů, viz obrázky (5.9), (5.10), (5.14), (5.15), (5.19) a (5.20). Na obrázcích (5.7), (5.8), (5.12), (5.13), (5.17) a (5.18) je viditelná změna geometrie designové hranice  $\Gamma_D$ , což zapříčinilo zřejmou změnu barevné mapy řešení. Některé výsledné optimalizované hodnoty  $\Phi_{II}$  jsou záporné, protože optimalizací se dosáhlo toho, že akustický tlak v  $\Omega_A$  je menší než v  $\Omega_B$  neboli  $\|p\|_{\Omega_A} < \|p\|_{\Omega_B}$ . Čímž nabývá logaritmus (5.35)<sub>2</sub> záporné hodnoty.

## 6 Závěr

V druhé kapitole jsme se seznámili s odvozením rovnic potřebných k získání vlnové rovnice pro tekutiny: Eulerovo pohybovou rovnicí, rovnicí kontinuity, stavovou rovnicí. Z nich jsme odvodili vlnovou rovnici a následně i Helmholtzovu rovnici pro stojaté vlnění.

V třetí kapitole jsme analyticky vyřešili vlnovou a Helmholtzovu rovnici v 1D pomocí Fourierovu metody a zobrazili některá řešení v Matlabu.

Ve čtvrté kapitole jsme řešili slabé formulace Helmholtzovy rovnice na oblasti  $\Omega$ . Z úvah o šíření akustických vln jsme si odvodili okrajové podmínky na hranici  $\partial\Omega$ , pomocí MKP provedli řešení v systému SfePy. Na dané oblasti jsme vyzkoušeli různé frekvence  $\omega$  incidentní vlny. Řešení jsme si zobrazili v programu ParaView.

V páté kapitole jsme naformulovali úlohu tvarové optimalizace pro akustické pole, zparametrizovali design pomocí spline-boxu. Zavedli pole designových rychlostí. Optimalizační úloze jsme přiřadili Lagrangeovu funkci a přešli k řešení adjungované úlohy. Porovnali jsme pro kontrolu výsledky citlivostní analýzy a konečných diferencí. Oba přístupy jsme implementovali ve SfePy. Ujistili jsme se, že výsledky citlivostní analýzy a konečných diferencí si celkem odpovídají. V závěru kapitoly jsme provedli několik optimalizačních výpočtů ve 2D oblasti  $\Omega$  v Matlabu a SfePy pro několik frekvencí  $\omega$ . Využili jsme dvě účelové funkce  $\Phi_{I,II}$ . Našli jsme několik optimálních tvarů designové hranice  $\Omega_D$ . Výsledky jsme zobrazili programem ParaView. Vykreslili jsme závislosti hodnot  $\Phi_{I,II}$  na iteraci optimalizace. Z grafů je vidět, že hodnoty správně klesly u všech výpočtů. Vypočetli jsme, o kolik procent klesly optimalizační hodnoty  $\Phi_{I,II}$ . Zprovoznili jsme tedy úspěšně tvarovou optimalizaci akustického pole.

Práce nemá zatím určitou konkrétní aplikaci. Jde v ní spíše jen o zprovoznění a vyzkoušení samotné optimalizace. Má určitě mnoho prostoru pro vylepšení a rozšíření. Třeba převedení na vícerozměrnou úlohu se složitější geometrií, kde se objeví více optimalizačních parametrů. Poté by se našla určitě nějaká potenciální aplikace pro tuto práci. Jednou z možností je optimalizace tvaru skříně nějakého stroje. Ve skříně bude zdroj vibrací (nějaká nevyvážená rotující hmotnost), které se budou konstrukcí přenášet na skříň, tím by vznikala emise hluku, kterou bychom chtěli regulovat. V tomto směru by mohla pokračovat má další práce.

# Literatura

- [B. Engquist(1977)] B. ENGQUIST, A. M. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. 1977. Dostupné z: <http://www.math.mcgill.ca/~gantumur/docs/down/Engquist77.pdf>.
- [D. Cioranescu(2008)] D. CIORANESCU, G. G. A. D. The periodic unfolding method in homogenization. 2008.
- [Drábek(1994)] DRÁBEK, P. *Úvod do funkcionální analýzy*. Plzeň : Západočeská univerzita v Pzni, 1994. ISBN 80-7082-124-8.
- [E. Bängtsson(2002)] E. BÄNGTSSON, M. B. D. N. Shape optimization of an acoustic horn. 2002. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782502006564>.
- [E. Rohan(2006)] E. ROHAN, B. M. Homogenization and shape sensitivity of microstructures for design of piezoelectric bio-materials. 2006.
- [E. Rohan(2012)] E. ROHAN, V. L. Sensitivity analysis for optimal design of perforated plates in vibro-acoustics: homogenization approach. 2012.
- [E. Rohan(2010a)] E. ROHAN, V. L. Homogenization of the acoustic transmission through perforated layer. 2010a.
- [E. Rohan(2010b)] E. ROHAN, V. L. Sensitivity analysis for acoustic waves propagating through homogenized thin perforated layer. 2010b.
- [E. Rohan(2011a)] E. ROHAN, V. L. Homogenized perforated interface in acoustic wave propagation – modeling and optimization. 2011a.
- [E. Rohan(2011b)] E. ROHAN, V. L. Homogenization of the vibro-acoustic transmission on perforated Reissner-Mindlin plate. 2011b.
- [J. Haslinger(1996)] J. HASLINGER, P. N. Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design. 1996.

- [Škvor(2001)] ŠKVOR, Z. *AKUSTIKA A ELEKTRO-AKUSTIKA*. Praha : Academia, 2001. ISBN 80-200-0461-0.
- [Linhart(2009)] LINHART, J. *Mechanika tekutin I*. Plzeň : Západočeská univerzita v Pzni, 2009. ISBN 978-80-7043-766-7.
- [MathWorks(2013)] MATHWORKS. *Constrained optimization - fmincon*, 2013.
- [Míka(1983)] MÍKA, S. *Parciální diferenciální rovnice I*. Praha : SNTL, 1983.
- [Míka(2007)] MÍKA, S. *Numerické metody řešení okrajových úloh pro ODR*. Plzeň : Západočeská univerzita v Pzni, 2007.
- [Rohan(2007)] ROHAN, E. *SPBOX*, 2007.
- [Rohan(2012)] ROHAN, E. *Citlivostní analýza pro optimalizaci v mechanice kontinua*, 2012.