Vlastní transformující funkce je napsána následujícím způsobem: a) Test úspěšného zapsání naposled vypočítané řádky - v případě úspěchu se pokračuje na dalším, v opačném případě vydá hodnotu **OUTPUTFULL** a při dalším vyvolání se tento řádek počítá znovu.
b) V případě dokončení celé oblasti načtení nové a následující test úspěšnosti této operace. V případě neúspěchu vydá hodnotu **INPUTEMPTY** a ukončí práci.
c) V případě úspěšného provedení všech operací vrací hodnotu **CONTINUE**.

Implementace

Systém ReSt byl vytvořen skupinou 6 studentů pod vedením dr. Pelikána jako softwarový projekt MFF UK Praha. Pro implementaci celého projektu byl použit jazyk C++, tedy objektové rozšíření populárního jazyka C. Byla vytvořena základní "kostra" volně rozšiřitelného systému, tj. navrhnut způsob řízení výpočtu tokem dat a implementována sdílená datová struktura DataBase. Z jednotlivých modulů byly naprogramovány následující: čtení souborů s popisem třírozměrné scény (formáty DXF, EXP a 3D), projekce scény do jednotlivých pohledů, čárová viditelnost (Appelův algoritmus), plošná viditelnost (Z-buffer), stínování (konstantní, Gourardovo i Phongovo), výstup vygenerovaného obrázku na obrazovku, tiskárnu (PostScript) a do souborů (GIF, PCX, oktalové stromy...).

Celý projekt v současné době obsahuje asi 10.000 řádků zdrojového textu. Systém ReSt je volně šiřitelný a je možné jej získat na výše uvedených adresách autorů.

Závěr

Cílem projektu nebylo vytvoření konkrétní aplikace, ale vůbec návrh jednoduše rozšiřitelného a modifikovatelného systému pro zobrazování třírozměrných scén. Tento úkol se použitím sdílené databáze scény a řízením výpočetního procesu tokem dat podařilo dostatečně uspokojivě splnit. Koncepce celého projektu nabízí mnoho možností dalšího rozšiřování a "vylepšování", ať již o klasické nebo i nové algoritmy a metody používané v třírozměrné počítačové grafice. Jako příklad uveďme např. zavedení kvalitnější reprezentace povrchů pomocí Beziérových a spline ploch, použití objemové reprezentace pomocí CSG modelu, antialiasing pro vylepšení kvality výsledných obrázků, výstup na plotter pomocí jazyku HPGL či zobrazení scény pomocí ray-tracingu nebo radiačními metodami.

Geometrické modelování tvarově složitých objektů

František JEŽEK
OI-ARC ZČU, Americká 42
306 14 PLZEŇ
e-mail: JEZEK@JONAS.ZCU.CS

1 Slovník pojmů, terminologie

Souřadnice

- kartézské
- homogenní – bodu (x,y) se přiřazují homogenní souřadnice $(\beta x, \beta y, \beta)$, vektoru [x,y] souřadnice [x,y,0].
- barycentrické – jedná se o souřadnice "na trojúhelníku". Označme $\mathbf{b}_i, i = 1,2,3$ vrcholy trojúhelníka, pak bod $\mathbf{p}$ má barycentrické souřadnice (a_1, a_2, a_3), pro něž

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

Afinní invariantnost – objekt má stejnou vlastnost před i po provedení afinní transformace (tj. násobení souřadnic regulární maticí).

Fergusonova kubika – uplatnění Hermitovy interpolace na křivky. Je určena počátečním a koncovým bodem a **tečnými vektory** v těchto bodech.

Spline – matematický model chování pružného laťkového křivítka. Kubický spline – po částech polynomická funkce (3. stupně) se spojitými derivacemi až do druhého řádu.

Parametrizace křivky – "časový režim" pohybu po křivce.

- přirozená – parametrem je délka oblouku,
- uniformní – každému oblouku "je přiděleno stejné časové kvantum",
- neuniformní
  - chordálová

$$t_{i+1} - t_i = c|\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i|$$

Epstein (87) dokázal, že v opěrných bodech nemůže vzniknout singularita.

  - Leeova (dostředivá) – minimalizuje dostředivé síly

$$t_{i+1} - t_i = \sqrt{c|\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i|}$$

– Nielsenova – afinně invariantní
– uživatelská

Bézierovy křivky a plochy – základem jsou Bersteinovy polynomy (prvně použity v roce 1912 při důkazu Weierstassovy věty o nejlepší aproximaci):

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Bézirova křivka se definuje vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Spojitost

- třídy C_n – rovnost derivací ve společném bodě
- třídy GC_n – shoda geometrických vlastností (tečny, křivosti). Platí: *Je-li křivka* $\mathbf{u}(t)$ *třídy* GC_n*, pak existuje regulární změna parametrizace* $t = t(t^*)$ *tak, že, že křivka* $\mathbf{u}(t(t^*))$ *je třídy* C_n.

Racionální specializace – použití předpisu v projektivním rozšíření eukleidovského prostoru, tj. užití homogenních souřadnic. Invariance k projektivním transformacím.

Twist - zkrut – druhá smíšená parciální derivace vektorové funkce $f(u, v)$.

2 Historický přehled

1959 P. de Casteljau – trojúhelníkové pláty

1959-1962 P. de Casteljau a P. Bézier – zavedení Bézierových křivek

1963 J. Ferguson – parametrický spline

1963-1964 P. de Casteljau a J. Ferguson – tenzorový součin křivek jako popis ploch

1965 D. Shephard – interpolace pro plochu popsanou libovolně rozmístěnými body

1967 S.A. Coons – plochy určené křivočarým čtyřúhelníkem

1967 S.A. Coons – racionální křivky jako prostředek k popisu kuželoseček

1970 R. Forrest – napojování Bézierových segmentů

1972 C. de Boor – zavedení B-spline teorie

1973 W. Gordon a R.E. Riesenfeld – završení teorie B-spline a vztah k Bézierovým křivkám

1977 M.A. Sabin – Bernsteinův tvar B-splinů nad trojúhelníkem

1979 G.E. Farin – napojování trojúhelníkových plátů

1983 B.A. Barsky – geometrická spojitost – β-spline

...– osobnosti posledních 10 let: W. Böhm, G.E. Farin, J. Hoschek, D. Lasser

3 Klasické interpolační metody

3.1 Rovnice křivek

Křivku můžeme vyjádřit vektorovou rovnicí

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t),\ t \in (a, b).$$

Vektorová funkce $\mathbf{P}(t)$ je určena svými složkami $x(t), y(t), z(t)$, což zapisujeme

$$\mathbf{P}(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

<u>Kružnice</u>

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{H}_1 \cos t + \mathbf{H}_2 \sin t,\quad t \in < 0, 2\pi >$$

$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = 0$ a $|\mathbf{H}_1| = |\mathbf{H}_2|$.

<u>Elipsa</u>

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{H}_1 \cos t + \mathbf{H}_2 \sin t,\quad t \in < 0, 2\pi >$$

<u>Hyperbola</u>

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{H}_1 \cosh t \pm \mathbf{H}_2 \sinh t,\quad t \in R$$

<u>Parabola</u>

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{H}_1 t + \mathbf{H}_2 t^2,\quad t \in R$$

3.2 Spline funkce

Nechť je dáno $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ a funkční hodnoty $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Kubickou splajn funkcí rozumíme funkci $f(x)$, pro niž:

1. $f(x_i) = y_i,\ i = 0, \ldots, n,$
2. na intervalu (x_i, x_{i+1}) platí $f(x) = f_i(x)$, kde $f_i(x)$ je polynom nejvýše třetího stupně $(i = 0, \ldots, n-1)$.

3. funkce f i její derivace f' a f'' jsou spojité na intervalu $< x_0, x_n >$.

Nejčastěji se užívá okrajových podmínek (jedné z těchto možností):

- Zadání y_0 a y_n,
- zadání y''_0 a y''_n.

Speciálně se užívá volby $y_0 = y_n = 0$, pak mluvíme o přirozené kubické splajn funkci.

4 Coonsovy pláty

Přehled typů Coonsových plátu:

- přechodová (přímková) plocha - dány dvě křivky
- bilineární plát - dán křivočarý čtyřúhelník
- bikubický plát - dán křivočarý čtyřúhelník - zajišťuje plátování
- Fergusonův plát - dáno 12 vektorů
- šestnáctivektorový plát - viz Fergusonův plát, navíc 4 twisty v rozích plátu
- obecný plát - křivočarý čtyřúhelník, příčné derivace podle hranice, twisty v rozích - plátování k plochám, které nejsou Coonsovy
- troj-, dvoj-, jedno- a nulaúhelníkové pláty

5 NURBS

V tomto odstavci shrneme poznatky z teorie B-spline funkcí, vysvětlíme pojem NURBS a uvedeme poznámky k NURBS reprezentaci některých křivek a ploch.

5.1 B-spline baze

Základem pro teorii Bézierových křivek a ploch byly Bernsteinovy polynomy. Pro B-spline křivky je použito definování bázových funkcí po částech s tím, že tyto funkce jsou spline funkcemi, tj. jsou to po částech polynomické funkce se "spojitou derivací co do nejvyššího řádu".

Označme $\mathbf{T} = (t_0, \ldots, t_m)$ tzv. *vektor parametrizace.* Platí

$$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m.$$

B-spline baze je tvořena funkcemi (polynomy) N_{ik} řádu k definovanými předpisem:

- pro $k = 1$

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- pro $k > 1$

$$N_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \tag{1}$$

Je nutné vzít v úvahu, že v tomto výrazu mohou vzniknout výrazy typu $\frac{a}{0}$, které definitoricky položíme rovny nule.

B-spline baze je tedy chakterizována:

- řádem k polynomů (polynomy jsou stupně $k - 1$)
- vektorem parametrizace, tj.
  - číslem m - počet složek vektoru parametrizace je $m + 1$
  - složkami $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m$
- číslem j - počet funkcí tvořící bazi je $j + 1$.

Mezi uvedenými charakteristikami musí být, jak plyne ze vztahu (1), jistá vazba: Ke stanovení funkce N_{in} musí být v parametrickém vektoru k dispozici až složka t_{i+n}. Jelikož hodnota i pro $n = k$ nabývá maximální hodnoty j, musí platit $m \geq k + j$. Stačí však volit $m = k + j$, tj. počet složek parametrického vektoru je o jedna větší než součet řádu B-spline baze a počtu funkcí baze.

Ukážeme nyní, že Bernsteinovy polynomy jsou speciální B-spline bazí. Pro Bernsteinovy polynomy stupně n platí: $j = n + 1$ a $k = n + 1$. Proto pro počet m složek parametrického vektoru platí $m = 2(n + 1)$. Pro Bernsteinův polynom platí $t \in < 0, 1 >$, proto volíme

$$t_0 = t_1 = \ldots = t_n = 0 \;\text{ a }\; t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{2n+2} = 1$$

Matematickou indukcí podle stupně polynomu provedeme pro takto sestavený parametrický vektor důkaz, že B-spline baze splyne se systémem Bernsteinových polynomů:

1. Nechť $k = 2$, pak parametrický vektor $\mathbf{T} = (0, 0, 1, 1)$ a

$$N_{02}(t) = \frac{t\, N_{01}(t)}{0} + \frac{(1 - t) N_{11}(t)}{1 - 0} = (1 - t) N_{11}(t),$$

tj. na intervalu $< 0, 1 >$ je $N_{02}(t) = (1 - t) = B_0^1(t)$. Podobně zjistíme, že $N_{12}(t) = t = B_1^1(t)$.

2. Nechť nyní tvrzení platí pro $k = n_0$, tj. máme

$$N_{i,n_0+1}(t) = \frac{(t-t_i)B_i^{n_0-2}(t)}{t_{i+n_0}-t_i} + \frac{(t_{i+n_0+1}-t)B_{i+1}^{n_0-2}(t)}{t_{i+n_0+1}-t_{i+1}},$$

a ukážeme, že platí i pro $k = n_0 + 1$.

Jelikož pro $i \le n_0 - 2$ je $t_i = t_{i+1} = 0$ a $t_{i+n_0} = t_{i+n_0+1} = 1$, platí

$$N_{i,n_0+1}(t) = tB_i^{n_0-2}(t) + (1-t)B_{i+1}^{n_0-2}(t) = B_i^{n_0}(t)$$

a tvrzení je dokázáno.

5.2 B-spline křivky a plochy

B-spline křivku řádu k pro řídící polygon $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_j$, $k \le j+1$, a vektor parametrizace $\mathbf{T} = (t_0, \ldots, t_m)$ definujeme předpisem

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{j} \mathbf{b}_i N_{ik}(t)$$

B-spline plocha se definuje jako *tenzorový produkt* (indexem rozlišujeme jednotlivé komponenty), tj.

$$\mathbf{x}(t_1,t_2) = \sum_{i_1=0}^{j_1}\sum_{i_2=0}^{j_2} \mathbf{b}_{i_1i_2} N_{i_1k_1}(t_1)N_{i_2k_2}(t_2).$$

V dalším textu se budeme věnovat vlastnostem křivek.

1. **Volba vektoru parametrizace**
   Pro *otevřené křivky* se nejčastěji používá parametrizace ve tvaru

$$t_0 = \ldots = t_{k-1} = 0,$$

$$t_k = 1, \ldots, t_{k+s} = s+1, \ldots t_{j+1} = \ldots = t_{k+j} = j+2-k.$$

   Pro *uzavřené křivky* je nutné indexy vrcholů polygonu, resp. složek vektoru parametrizace použít cyklicky, tj. modulo $(j+1)$, resp. $(m+1)$ a $t_s = s+1-k, s = 0, \ldots, m$. Uvedené parametrizace jsou příkladem *uniformní parametrizace. Neuniformní parametrizace* může ve vektoru parametrizace respektovat např. poměry délek stran řídícího polygonu a tím se aspoň částečně blížit k ideálu *přirozené parametrizace.*

2. **Lokalizace změn**
   Poloha bodu $\mathbf{b}_s$ ovlivňuje tvar křivky pro parametr t v intervalu $< t_s, t_{s+k} >$. Vliv změny polohy řídících bodů je tedy *lokalizován*, tj. obecně nedochází ke změně celé křivky.

3. **Hladkost**
   B-spline křivka je spline křivkou, tj. je třídy C_{k-2}. Speciální konstrukcí vektoru parametrizace (uvedením násobných hodnot) lze vytvářet na křivce singulární body, resp. snížit v odpovídajícím bodě třídu spojitosti.

4. **Podmínka konvexního obalu**
   Podmínka konvexního obalu je lokalizována vždy na k po sobě jdoucích vrcholů.

5. **de Boorův algoritmus**
   Algoritmus de Casteljau, který jsme používali v případě Bézierových křivek a ploch, má pro B-spline a NURBS křivky a plochy obdobu v podobě de Boorova algoritmu. Oba algoritmy se liší tí, že v případě algoritmu de Casteljau se dělení stran řídícího polygonu provádí v konstantním poměru. V případě neuniformního B-splinu je poměr dělení proměnný a závisí na rozdílech složek vektoru parametrizace.

5.3 NURBS křivky a plochy

Podobně jako v případě Bézierových křivek je i pro B-spline křivky možné definovat *racionální specializaci*, tj. NURBS, a tím rozšířit další možnosti popisu tvarově složitých objektů.

Pro některé křivky a plochy, které jsou často používány v CAD systémech, uvedeme jejich popis ve smyslu NURBS teorie.

5.3.1 Lomená čára

Otevřenou lomenou čáru lze popsat vždy jako NURBS (dokonce jako B-spline). Stačí volit danou lomenou čáru jako řídící polygon, $k = 2$, váhy $\beta_i = 1$ a vektor parametrizace $\mathbf{T} = (0,0,1,\ldots,j-2,j-1,j-1)$.

Pro *uzavřenou lomenou čáru* se změní vektor parametrizace: $\mathbf{T} = (0,1,\ldots,j-1,j)$.

5.3.2 Kružnice a elipsa

Pomocí NURBS můžeme popsat *celou kružnici* (střed v počátku, poloměr r a kružnice leží v rovině xy: volíme (v homogenních souřadnicích)

$$\mathbf{b}_0 = (r,0,0,1),\ \mathbf{b}_1 = (0,r,0,0),\ \mathbf{b}_2 = (-r,0,0,1),$$

$$\mathbf{b}_3 = (0,-r,0,0), k = 2, \mathbf{T} = (0,1,1,2,2).$$

Afinní transformací snadno získáme *vyjádření elipsy* (poloosy a, b, osy elipsy leží na osách x a y):

$$\mathbf{b}_0 = (a,0,0,1),\ \mathbf{b}_1 = (0,b,0,0),\ \mathbf{b}_2 = (-a,0,0,1),$$

$$b_3 = (0, -b, 0, 0), k = 2, \mathbf{T} = (0, 1, 1, 2, 2).$$

Pro kružnici a elipsu i pro jejich oblouky lze odvodit i vyjádření, v němž není použito nevlastních bodů.

5.3.3 Přehled popisu ploch

Pomocí NURBS ploch lze popsat:

- **Translační plochy**, u nichž je tvořící křivkou NURBS křivka a je zadán vektor posunutí h.
- **Rotační plochy** dané meridiánem, který je popsán jako NURBS.
- **Přechodovou plochu mezi dvěma profily**, tj. pro dvě NURBS křivky popsat přímkovou plochu obsahující dané křivky. Zde je nutné nejprve dosáhnout toho, aby obě zadávající křivky byly vyjádřeny pomocí polygonu se stejným počtem vrcholů a aby měly stejné vektory parametrizace.
- **Obecný "sweep"**, tj. plochu, který vzniká "vedením" měnící se křivky po prostorové křivce. Vkládané profily jsou umisťovány do normálové roviny prostorové křivky.

Literatura

[BAR88] Barsky,A.B.: Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-splines. Springer Verlag, Berlin, 1988.

[BOO78] de Boor,C.: A Practical Guide to Splines. Springer Verlag, Berlin, 1978.

[BOE83] Böhm,W.-Farin,G.-Kahmann,J.: A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD. Computer Aided Geometric Design 1(1984), p. 1-60.

[BAU74] Baumgart,B.G.: Geometric Modeling for Computer Vision [dizertační práce]. Stanford University, 1974.

[DRS89] Drs,L.-Ježek,F.-Novák,J.: Počítačová grafika [skriptum]. ČVUT, fakulta strojní, Praha, 1989.

[DRS91] Drs,L. - Ježek,F.: Geometrické modelování v CAD. SNTL, Praha, 1991 (nevydáno).

[FAR88] Farin,G.: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press.Inc.1989.

[GRA80] Granát,L. - Sechovský,H.: Počítačová grafika. SNTL. Praha. 1980.

[HOS89] Hoschek,J. - Lasser,D.: Grundlagen der geometrischen Dateverarbeitung. Springer Verlag, Heidelberg, 1989.

[MAN88] Mantyla,M.: An Introduction to Solid Modeling. Library of Congress Cataloging in Publication Data, Computer Science Press, 1988.

[NEW86] Newman,W.M.-Sproul,R.F.: Grundzuege der interaktiven Computergrafik. 5. vydání, německý překlad. McGraw-Hill Book Company, 1986.

[POL92] Poláček,J.-Ježek,F.-Kopincová,E.: Počítačová grafika [skriptum]. ČVUT, fakulta strojní, Praha, 1992.

[ROG85] Rogers,D.F.: Procedural Elements for Computer Graphics. McGraw-Hill, New York, 1985 (druhé doplněné vydání 1991).