

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

**Numerické modelování vedení tepla
v palivovém článku jaderného
reaktoru**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce

Ing. Hana Kopincová, Ph.D.

Vypracoval

Miroslav Chyla

květen 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Numerické modelování vedení tepla v palivovém článku jaderného reaktoru jsem vypracoval samostatně pouze za odborného dohledu Ing. Hany Kopincové, Ph.D. a s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Plzni

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucí své bakalářské práce Ing. Haně Kopincové, Ph.D. za poskytnutí odborných rad, věcných připomínek, trpělivost, ochotu, vstřícný přístup během zpracování této práce a čas strávený při pečlivém pročitání a konzultacích, které mi velmi pomohly při jejím vypracování.

Velké poděkování také patří mé rodině za podporu, trpělivost a povzbuzování po dobu mého studia.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je numerická simulace vedení tepla v palivovém článku jaderného reaktoru, které lze popsat obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu. Pro výpočet byla zvolena metoda konečných diferencí, která byla podrobně rozebrána a aplikována na rovnici vedení tepla. Pomocí této metody byly provedeny numerické experimenty v programovém prostředí MATLAB a výsledky porovnány s výsledky z jiných metod.

Klíčová slova: Rovnice vedení tepla, palivový proutek, metoda konečných diferencí, obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.

Abstract

Aim of this bachelor's thesis is the numerical simulation of heat conduction in the fuel elements reactor, which can be described by second order ordinary differential equations. Finite difference method was chosen for the calculation, which has been described in detail and applied to the equation of heat conduction. This method was implemented in Matlab and the results were compared with results from other methods.

Key words: Heat conduction equation, fuel rod, finite difference method, second order ordinary differential equations.

Obsah

1	Úvod	8
2	Teorie	10
2.1	Palivová tyč	10
2.2	Obyčejné diferenciální rovnice	12
2.2.1	Homogenní diferenciální rovnice druhého řádu	12
2.2.2	Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	13
3	Numerické metody	16
3.1	Metoda konečných diferencí	16
3.1.1	Aproximace derivací prvního a druhého řádu	16
3.1.2	Metoda konečných diferencí pro diferenciální rovnice	19
3.2	Vedení tepla	20
3.2.1	Stacionární rovnice vedení tepla (bez centrálního otvoru)	20
3.2.2	Numerické řešení rovnice vedení tepla (bez centrálního otvoru)	21
3.2.3	Stacionární rovnice vedení tepla (s centrálním otvorem)	23
3.2.4	Numerické řešení rovnice vedení tepla (s centrálním otvorem)	24
4	Numerické experimenty	25
4.1	Experiment 1	27
4.1.1	Experiment 1a	27
4.1.2	Experiment 1b	28
4.2	Experiment 2	29
4.2.1	Experiment 2a	29
4.2.2	Experiment 2b	30
4.3	Experiment 3	31
4.4	Závěr k experimentům	33
5	Závěr	34

A Palivový proutek	35
B Matice rovnic pro popis stacionárního vedení tepla	36
C Obsah CD	37

Kapitola 1

Úvod

Je lidskou přirozeností testovat, pozorovat a snít. Jaderná energie je příběh století dlouhého snu, který se stává realitou.

Starořeční filozofové jako první rozvíjeli myšlenku, že všechno je složeno z neviditelných částic, které nazývali atomy. Slovo atom pochází z řeckého slova - atomos - což znamená neviditelný. Vědci v 18. a 19. století revidovali celou koncepci na základě svých experimentů. V roce 1900 již fyzici věděli, že atom obsahuje velké množství energie. Britský fyzik Ernest Rutherford byl nazýván otcem jaderné vědy, neboť velmi přispěl k teorii atomové struktury. V roce 1904 napsal:

„Pokud by vůbec bylo možné řídit rychlost rozpadu radioaktivních prvků, pak by bylo možné získat obrovské množství energie z malého množství hmoty.“[1]

Albert Einstein vyvinul svou teorii o vztahu mezi hmotností a energií o rok později.

V Římě roku 1934 fyzik Enrico Fermi prováděl řadu experimentů. Samotný Fermi byl výsledky svých experimentů překvapen. Když nechával bombardovat uran neutrony, nezískal prvky, které očekával. Prvky, které vznikly, byly mnohem lehčí než uran.

Na podzim roku 1938 němečtí vědci Otto Hahn a Fritz Strassman vystřelili do uranu neutrony ze zdroje obsahujícího radium a berylium. Byli překvapeni, že ve zbylých materiálech našli prvky lehčí, než je baryum. Tyto prvky měly polovinu atomové hmotnosti uranu.

Fermi a jeho kolega, Leo Szilard, v roce 1941 navrhuje možné řešení uranového řetězového reaktoru. Jejich model se skládal z uranu umístěného v krychli vyrobené z grafitu. Roku 1942 se skupina vědců, v čele s Fermim, sešla na univerzitě v Chicagu, kde rozvíjeli své teorie. V listopadu roku 1942 byli připraveni zahájit stavbu prvního jaderného reaktoru, který nesl označení Chicago Pile-1. Tento reaktor kromě uranu a grafitu obsahoval také řídicí tyče vyrobené z kadmia, kterými dokázali řídit rychlost štěpení.

Dne 2. prosince 1942, byli vědci připraveni zahájit demonstrační provoz Chicago Pile-1. Fermi nařídil, aby řídicí tyče byly během několika příštích hodin pár centimetrů spuštěny do reaktoru. V 15:25 chicagského času se jaderná reakce stala soběstačnou. Fermi se svou skupinou úspěšně převedl vědeckou teorii do technologické praxe. Svět tímto okamžikem

vstoupil do jaderného věku.

Vytvoření prvního jaderného reaktoru byl pouze začátek. Brzy nato byla většina atomového výzkumu směřována na rozvoj zbraní použitelných ve druhé světové válce. Výzkum byl prováděn pod krycím názvem Manhattanský projekt. Po válce vláda Spojených států podporuje rozvoj jaderné energie pro mírové civilní účely. Roku 1946 Americký kongres vytváří Kongres pro atomou energii (AEC). AEC povoluje výstavbu experimentálního množivého jaderného reaktoru I v Idahu. 20. prosince roku 1951 tento reaktor vyrábí elektrickou energii.

Hlavním cílem jaderného výzkumu v polovině roku 1950 bylo ukázat, že elektřina z jaderné energie by mohla být vyráběna pro komerční využití. První komerční závod vyrábějící elektřinu z jaderné energie byl postaven v Shippingportu v Pennsylvánii, svého plného výkonu dosahuje roku 1957. V USA nukleární průmysl roste nejrychleji v roce 1960.

Na konci roku 1991 byly jaderné elektrárny v komerčním provozu nebo ve výstavě již v dalších 31 zemích.

Americké ministerstvo pro energie ve spolupráci s jaderným průmyslem vyvinulo novou generaci jaderných pohonných jednotek. Tato zařízení jsou navržena tak, aby byla bezpečnější a efektivnější. Dále se snažili o to, aby bylo jednodušší stavět jaderné elektrárny, proto standardizovali jejich design a snižovali požadavky na udělování licencí bez snížení bezpečnostních norem.

Výzkum v dalších jaderných oblastech pokračuje v roce 1990. Jaderná technologie hraje důležitou roli v medicíně, průmyslu a vědě. Z jaderného výzkumu těží lidstvo v mnoha směrech. Ale v dnešní době jaderný průmysl čelí velkým, složitým problémům. Jak můžeme minimalizovat riziko? Co budeme dělat s odpadem? Budoucnost bude záviset na pokročilých technologiích a vědeckém výzkumu.

Více o historii jaderné energie lze najít v [1].

V této práci se budeme zabývat šířením tepla v palivovém článku jaderného tlakovodního reaktoru. Dojde-li v typickém jaderném reaktoru ke štěpení jádra atomu uranu, pak se převážná část energie uvolní v bezprostřední blízkosti tohoto místa. Následně se teplo z tohoto místa šíří přes palivo, plynovou mezerou mezi palivem a pokrytím, přes vrstvu pokrytí do chladiva, které ho odvádí. Šíření tepla lze popsat obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu, které se budeme posléze věnovat.

V této práci nejdříve ve stručnosti popíšeme palivovou tyč, poté se budeme zabývat obyčejnými diferenciální rovnicemi. Následně bude rozebrána numerická metoda konečných diferencí a její aplikace na rovnici šíření tepla. V závěru této práce budou ukázány výsledky numerických experimentů.

Kapitola 2

Teorie

2.1 Palivová tyč

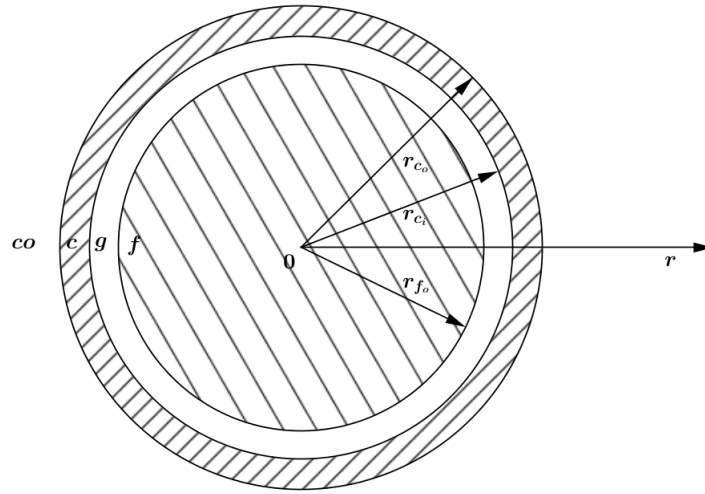
Jaderné reaktory slouží k přeměně jaderné energie na jinou formu energie, zejména elektrickou. Dojde-li v typickém jaderném reaktoru ke štěpení jádra atomu uranu, pak se převážná část energie uvolňuje v bezprostřední blízkosti tohoto místa. Následně se teplo z tohoto místa odvádí přes palivo, plynovou mezerou mezi palivem a pokrytím, přes vrstvu pokrytí do chladiva. Proudící chladivo poté odvádí přijaté teplo do dalších částí jaderné elektrárny.

Aktivní zóna je tvořena palivovými kazetami a distančními mřížkami. Každá kazeta je složena z palivových tyčí (rovněž označovány jako palivové články). Palivovou tyč tvoří palivové tablety UO_2 , které jsou hermeticky uzavřeny ve válcovém pokrytí slitiny zirkonu (viz. Obrázek 2.1). Mezi palivem a pokrytím je mezera naplněná plynem. Jak vypadá palivový proutek, je možné vidět v příloze A.

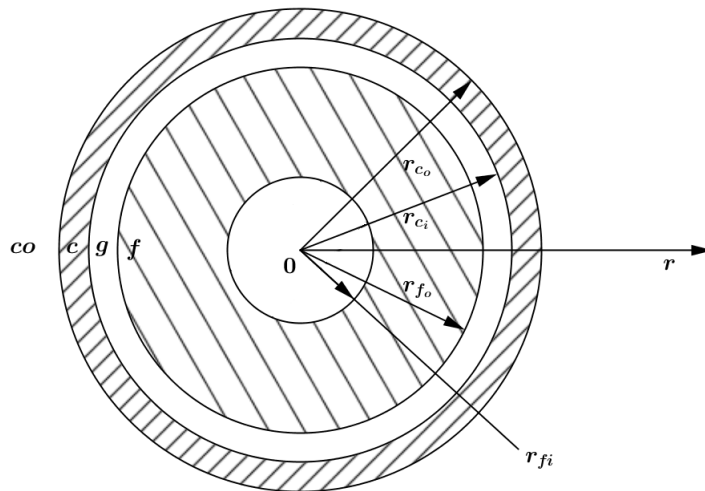
Další používaná geometrie palivového proutku je podobná výše zmíněné, pouze středem palivových tablet je veden kruhový otvor, který je nazýván centrální (viz. Obrázek 2.2). Výhoda palivových proutků, kde ve středu paliva je centrální otvor, spočívá v tom, že do tohoto otvoru unikají plyny z uranu, které vznikají štěpnou reakcí. Dále je odbourán teplotní extrém uprostřed tablety bez centrálního otvoru.

Díky tomu, že si palivovou tyč můžeme představit jako složenou válcovou stěnu, můžeme uvažovat o zjednodušení modelu. Jelikož poměr průměru palivové tyče a její délky je značný, zanedbáme proudění tepla ve směru svislé osy. Rovněž budeme uvažovat stacionární stav a šíření tepla bude osově symetrické. Dále zanedbáme změny rozměrů paliva a pokrytí vlivem tepelných změn a růst paliva vlivem ozáření. Předpokládáme rovnoměrné obtékání chladiva kolem pokrytí, konstantní teplotu chladiva a že přestup tepla z pokrytí do chladiva je po celé ploše povrchu rovnoměrný.

Vzhledem k těmto zjednodušením můžeme šíření tepla v palivovém proutku popsat obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu a to pouze v jednom rozměru. Potom pro kon-



Obrázek 2.1: Horizontální řez palivovou tyčí tlakovodního reaktoru: část *co* - chladiivo (coolant), část *c* - povlak (cladding), část *g* - plynová mezera (gas), část *f* - palivová tableta (fuel), r_{fo} - vnější poloměr palivové tablety, r_{ci} - vnitřní poloměr pokrytí, r_{co} - vnější poloměr pokrytí



Obrázek 2.2: Horizontální řez palivovou tyčí tlakovodního reaktoru: část *co* - chladiivo (coolant), část *c* - povlak (cladding), část *g* - plynová mezera (gas), část *f* - palivová tableta (fuel), r_{fi} - vnitřní poloměr palivové tablety, r_{fo} - vnější poloměr palivové tablety, r_{ci} - vnitřní poloměr pokrytí, r_{co} - vnější poloměr pokrytí

stantní λ zapisujeme obyčejnou diferenciální rovnicí:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda} = 0, \quad (2.1)$$

nebo pro nekonzstantní λ :

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\lambda r \frac{dT}{dr} \right) = q''', \quad (2.2)$$

kde $T = T(r)[^\circ C]$ je teplota, $\lambda = \lambda(T)[Wm^{-1}^\circ C^{-1}]$ je měrná tepelná vodivost (pro palivo a pro pokrytí), $q''' = q'''(r)[Wm^{-3}]$ je objemová hustota vývinu tepla (pro palivo a pro pokrytí).

2.2 Obyčejné diferenciální rovnice

Rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí, se nazývají diferenciální. Pomocí diferenciálních rovnic lze popsat celou řadu zákonitostí, které se objevují v přírodních a společenských vědách.

Řešením diferenciálních rovnic jsou funkce, které popisují vlastnosti zkoumaných jevů. Dokážeme-li efektivně vyřešit diferenciální rovnice, pak budeme lépe rozumět okolnímu světu, řídit různé technologické a společenské procesy a ovlivňovat naši budoucnost.

2.2.1 Homogenní diferenciální rovnice druhého řádu

Definice 2.2.1. Homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu nazveme rovnici ve tvaru:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + a_1(x) \frac{du}{dx}(x) + a_2(x)u(x) = 0, \quad (2.3)$$

kde I je nějaký interval $\langle a, b \rangle$, funkce $a_1, a_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, $x \in \langle a, b \rangle$ a $u(x)$ je hledaná funkce.

Podrobnější informace lze nalézt v [2].

Věta 2.2.1. *Nechť p je primitivní funkce k a_1 na I ; položme $p(x) = e^{\beta(x)}$ pro $x \in I$, $q(x) = p(x)a_2(x)$. Je-li interval $J \subset I$ a má-li funkce $u: J \rightarrow \mathbb{R}$ spojité derivace prvního a druhého řádu, potom platí:*

$$\begin{aligned} p(x) \left[\frac{d^2u}{dx^2}(x) + a_1(x) \frac{du}{dx}(x) + a_2(x)u(x) \right] &= \\ = p(x) \frac{d^2u}{dx^2}(x) + p(x)a_1(x) \frac{du}{dx}(x) + q(x)u(x) &= \frac{d}{dx} \left[p \frac{du}{dx} \right](x) + q(x)u(x). \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že pokud $u(x)$ je řešením rovnice (2.3), pak je také řešením rovnice

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{du}{dx} \right] (x) + q(x)u(x). \quad (2.4)$$

Je-li $u(x)$ obráceně řešením rovnice (2.4), pak je také řešením (2.3).

Rovnici (2.4) rovněž označujeme jako lineární diferenciální rovnici druhého řádu v samoadjungovaném tvaru.

Definice 2.2.2. Řešením lineární diferenciální rovnice druhého řádu (2.4) nazýváme funkci $u(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, je-li $J \subset I$ a má-li $u(x)$ spojitou derivaci $u'(x)$, má-li funkce $p(x)u'(x)$ spojitou derivaci a platí-li (2.4) v každém bodě $x \in J$.

Věta 2.2.2. *Necht' platí, že funkce $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, $p(x) > 0$ pro $x \in I$. Necht' je $x_0 \in I$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Potom existuje řešení $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (2.4) takové, že je $u(x_0) = u_1$, $u'(x_0) = u_2$. Je-li $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ řešení rovnice (2.4), pro které $v(x_0) = u_1$, $v'(x_0) = u_2$, potom $v = u$ (tedy u je určeno jednoznačně).*

2.2.2 Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Zaměříme se nyní na homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu, kde $a_1(x) \equiv a$, $a_2(x) \equiv b$ jsou konstantní koeficienty, tj.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + bu = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru $u = e^{\lambda x}$. Hodnotu λ nalezneme dosazením u do (2.5):

$$L = \frac{d^2u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + bu = (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + b(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x}.$$

Dostali jsme se k rovnici

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0,$$

kde $e^{\lambda x}$ je vždy kladné, proto všechna řešení jsou ukryta v rovnici $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Definice 2.2.3. Algebraickou rovnicí

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.6)$$

nazýváme charakteristickou rovnicí homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Věta 2.2.3. *Mějme rovnici (2.5) a λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice (2.6).*

1. *Jsou-li λ_1 i λ_2 dvě navzájem různá reálná čísla, potom fundamentální systém řešení (2.5) je tvořen funkcemi $u_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $u_2 = e^{\lambda_2 x}$. Obecné řešení tedy můžeme psát ve tvaru $u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.*
2. *Jsou-li λ_1 i λ_2 dvě stejná reálná čísla, pak fundamentální systém (2.5) je tvořen funkcemi $u_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $u_2 = x e^{\lambda_1 x}$. Potom obecné řešení píšeme ve tvaru $u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x)$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.*
3. *Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\beta \neq 0$), dvě komplexně sdružená čísla, potom fundamentální systém řešení (2.5) je tvořen funkcemi $u_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ a $u_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$. Obecné řešení (2.5) můžeme psát ve tvaru $u = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.*

Více informací o řešení homogenních obyčejných diferenciálních rovnicích druhého řádu je možné najít například v [3].

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice 2.2.4. Nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu nazveme rovnicí ve tvaru:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_2(x) u = a_3(x), \quad (2.7)$$

kde I je nějaký interval $\langle a, b \rangle$, $x \in I$, funkce $a_1, a_2, a_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a $u(x)$ je hledaná funkce.

Mějme rovnici ve tvaru (2.7). Při označení

$$L(u) := \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_2(x) u, \quad (2.8)$$

můžeme zkráceně (2.7) zapsat:

$$L(u) = a_3(x). \quad (2.9)$$

K rovnici (2.7) přiřadíme příslušnou homogenní rovnici. Můžeme zkráceně zapsat:

$$L(u) = 0. \quad (2.10)$$

Věta 2.2.4. *Je-li U partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu a \bar{u} řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, pak*

$$u = \bar{u} + U \quad (2.11)$$

je obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Podrobnější informace o obyčejných diferenciálních rovnicích druhého řádu lze najít např. v [3].

Kapitola 3

Numerické metody

3.1 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí je obecný nástroj pro řešení inženýrských problémů, které vyžadují provádět výpočty v inženýrských disciplínách jako je pružnost, pevnost, termomechanika atp.

Naším cílem je najít aproximaci řešení diferenciální rovnice, to je najít funkci (nebo diskrétní aproximaci této funkce), která splňuje diferenciální rovnici na dané oblasti a prostoru, společně s okrajovými podmínkami na hranicích této oblasti. Metoda konečných diferencí nahrazuje derivaci v diferenciálních rovnicích pomocí konečných diferenciálních aproximací. Tím získáváme soustavu algebraických rovnic, která je řešitelná na PC pomocí implementovaných řešičů v matematických softwarech.

Nejprve zvažme otázku, jak můžeme aproximovat derivace známé funkce pomocí vzorců pro konečné diference, které jsou založeny na hodnotách funkce v samotných diskrétních bodech.

3.1.1 Aproximace derivací prvního a druhého řádu

Nechť $u(x)$ je funkce jedné prostorové proměnné. Budeme uvažovat, že se jedná o funkci hladkou a každá její derivace je definována a omezena na intervalu, který obsahuje bod zájmu \bar{x} .

Předpokládejme, že aproximujeme $u'(\bar{x})$ pomocí konečné diference pouze na základě hodnoty u v bodě \bar{x} a pomocí konečného počtu blízkých bodů \bar{x} . Jednou volbou je:

$$D_+u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \quad (3.1)$$

pro malou hodnotu h . Aproximace je odvozena pomocí Taylorova rozvoje a je uvedena v [4, str. 90]. Poznamenejme, že $D_+(\bar{x})$ je sklon přímky interpolované v bodech \bar{x} a $\bar{x} + h$

(naznačeno na obrázku 3.1).

Výraz (3.1) se nazývá pravostranná diference, která aproximuje $u'(\bar{x})$, protože u je vyhodnocena pro $x \geq \bar{x}$.

Levostranná diference pak je

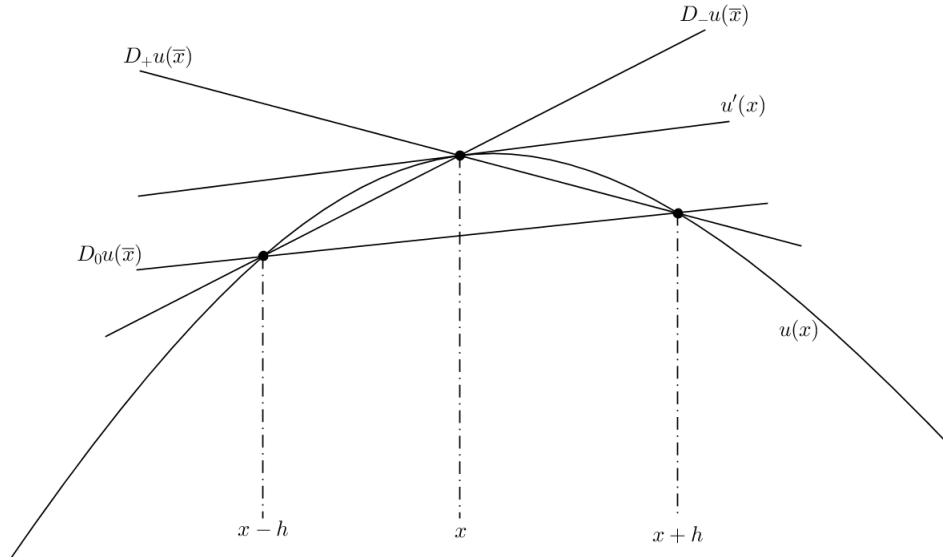
$$D_-u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}. \quad (3.2)$$

Obě tyto jednostranné diference mají první řád přesnosti, což znamená, že velikost chyby je zhruba úměrná samotnému kroku h .

Jinou možností je použití centrální diference:

$$D_0u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h} = \frac{1}{2}(D_+u(\bar{x}) + D_-u(\bar{x})). \quad (3.3)$$

To je sklon přímky interpolované na $\bar{x} - h$ a $\bar{x} + h$. Je to tedy algebraický průměr dvou jednostranných diferencí, které jsou uvedeny výše. Z obrázku 3.1 je patrné, že u $D_0u(\bar{x})$ můžeme očekávat lepší aproximace než z jednostranných diferencí. Centrální diference pak má přesnost druhého řádu - chyba je úměrná h^2 .



Obrázek 3.1: Různé aproximace $u'(\bar{x})$ interpretovaných jako sklon sečen

Derivace druhého řádu je možné získat obdobným způsobem. Standardní centrální diference druhého řádu je dána vztahem:

$$\begin{aligned} D^2u(\bar{x}) &= \frac{1}{h^2}[u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)] \\ &= u''(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u'''(\bar{x}) + o(h^4). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Protože se jedná o symetrickou středovou aproximaci, nebude obsahovat žádné liché řády. Tato diference může být získána metodou neurčitých koeficientů, nebo alternativně, pomocí výpočtu ze druhých derivací kvadratického polynomu interpolací v $\bar{x} - h$ a $\bar{x} + h$.

Dalším způsobem, jak odvodit aproximace derivací vyšších řádů, je opakovaným použitím aproximace derivace prvního řádu. Pak $D^2u(\bar{x})$ můžeme zapsat jako rozdíl prvních diferencí

$$D^2u(\bar{x}) = D_+D_-u(\bar{x}),$$

poněvadž

$$\begin{aligned} D_+(D_-u(\bar{x})) &= \frac{1}{h}[D_-u(\bar{x} + h) - D_-u(\bar{x})] \\ &= \frac{1}{h}\left[\left(\frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h}\right) - \left(\frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}\right)\right] \\ &= D^2u(\bar{x}). \end{aligned}$$

Obdobně lze odvodit pro $D^2(\bar{x}) = D_-D_+u(\bar{x})$. Dále také může být chápána jako středová diference středových diferencí, pokud je použita velikost kroku $h = 2$ v každém středu aproximace první derivace. Pokud definujeme

$$D_0u(x) = \frac{1}{h}(u(x + h/2) - u(x - h/2)),$$

potom

$$D_0(D_0u(\bar{x})) = \frac{1}{h}\left(\left(\frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h}\right) - \left(\frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}\right)\right) = D^2u(\bar{x}).$$

Další možnosti aproximace derivace prvního a druhého řádu jsou uvedeny v [5] nebo v [6, str. 59].

Aproximace derivací vyšších řádů dostupné v [7].

3.1.2 Metoda konečných diferencí pro diferenciální rovnice

Jako první příklad pro aplikaci metody konečných diferencí pro řešení diferenciální rovnice uvažujme diferenciální rovnici druhého řádu

$$u''(x) = f(x), \text{ pro } 0 < x < 1 \quad (3.5)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \quad (3.6)$$

Funkce $f(x)$ je dána a chceme vyjádřit $u(x)$ na intervalu $0 < x < 1$. Tento problém se nazývá problém dvoubodové okrajové hodnoty, protože okrajové podmínky jsou uvedeny ve dvou různých bodech. Tento příklad je jednoduchý a může být vyřešen explicitně (dvojnásobným integrováním $f(x)$ a výběrem dvou integrálních konstant tak, aby byly splněny okrajové podmínky), ale aplikace metody konečných diferencí na tomto jednoduchém příkladu ukáže některé základní vlastnosti zvolené metody.

Pokusíme se vypočítat síťovou funkci skládající se z hodnot $U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N$, kde U_i jsou naše aproximace řešení $U(x_i) \approx u(x_i)$. Body x_0 a x_N budeme nazývat hraniční uzly. Bodům x_1, x_2, \dots, x_{N-1} řekneme vnitřní uzly. Čísla $h_i = x_i - x_{i-1}$ nazýváme kroky sítě. Budeme-li volit $h_i \equiv h = 1/N$, pak budeme hovořit o rovnoměrné nebo-li ekvidistantní síti a budeme značit

$$\begin{aligned} S_i &= \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}, \\ \bar{S}_i &= \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Z okrajových podmínek známe $U_0 = \alpha$ a $U_N = \beta$ a zbývá nám vypočítat N neznámých hodnot U_1, U_2, \dots, U_{N-1} . Pokud nahradíme $u''(x)$ v rovnici (3.5) centrální diferencí

$$D^2U_i = \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}),$$

potom získáme soustavu algebraických rovnic

$$\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = f(x_i), \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.7)$$

Poznamenejme, že první rovnice ($i = 1$) zahrnuje hodnotu $U_0 = \alpha$ a poslední rovnice ($i = N-1$) zahrnuje hodnotu $U_N = \beta$. Nyní máme systém $N-1$ lineárních rovnic pro $N-1$ neznámých, které mohou být zapsány ve tvaru

$$AU = F, \quad (3.8)$$

kde U je vektor neznámých $U = [U_1, U_2, \dots, U_{N-1}]^T$ a

Mějme palivovou tyč chlazenou paralelně tekoucím chladivem. Vzhledem k tomu, že poměr délky a průměru palivové tyče je velký, můžeme zanedbat vedení tepla ve směru svislé osy. Dále uvažujme stacionární stav a šíření tepla osově symetrické (více viz. [8]). Potom můžeme psát

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda} = 0, \quad (3.13)$$

nebo pro nekonzstantní λ ve tvaru

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\lambda r \frac{dT}{dr} \right) = q''', \quad (3.14)$$

kde $T = T(r)[^\circ C]$ je teplota, $\lambda = \lambda(T)[Wm^{-1}^\circ C^{-1}]$ je měrná tepelná vodivost (pro palivo a pro pokrytí), $q''' = q'''(r)[Wm^{-3}]$ je objemová hustota vývinu tepla (pro palivo a pro pokrytí).

Rovnici doplníme o okrajovou podmínku ve středu palivové tyče $r = 0$

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (3.15)$$

dále pak o podmínku pro přestup tepla z paliva do pokrytí

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{fo}} = \alpha_g(T_{fo} - T_{ci}), \quad (3.16)$$

kde T_{ci} je teplota na vnitřní straně pokrytí, T_{fo} je teplota na vnější straně palivové tablety a konstanta úměrnosti $\alpha_g[Wm^{-2}^\circ C^{-1}]$ je součinitel přestupu tepla v plynové mezeře. Jako poslední připojíme druhou okrajovou podmínku, pro přestup tepla mezi pokrytím a chladivem, ve tvaru

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{co}} = \alpha_c(T_{co} - T_c), \quad (3.17)$$

kde konstanta úměrnosti $\alpha_c[Wm^{-2}^\circ C^{-1}]$ je součinitel přestupu tepla mezi vnější stranou pokrytí a chladivem, T_{co} je teplota na vnější straně pokrytí a T_c je teplota ve středu proudu chladiva.

Pro řešení této úlohy použijme metodu konečných diferencí.

3.2.2 Numerické řešení rovnice vedení tepla (bez centrálního otvoru)

Jak bylo popsáno výše, budeme nahrazovat derivaci v diferenciálních rovnicích pomocí konečných diferencí v jednotlivých uzlech sítě.

Zavedeme diskretizaci sítě $\bar{S}_i = \{x_i = i\Delta r, i = 0, 1, \dots, N\}$, kde poloměr r_0 označuje střed palivové tablety a poloměr r_N označuje vnější poloměr pokrytí. Potom označíme $T_i \approx T(r_i)$, $q_i''' \approx q'''(r_i)$ a jako krok $\Delta r = r_{i+1} - r_i$. Uvažujme rovnici (3.13) a λ konstantní. Derivace nahradíme diferencemi (3.3) a (3.4). Použitím těchto diferencí a postupnými úpravami získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta r^2}(T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}) + \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r}(T_{i+1} - T_{i-1}) &= \frac{q_i'''}{\lambda}, \\ T_{i-1} - \frac{1}{r_i} \frac{\Delta r}{2} T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} + \frac{1}{r_i} \frac{\Delta r}{2} T_{i+1} &= \frac{-q_i'''}{\lambda} \Delta r^2, \\ (1 - \frac{1}{r_i} \frac{\Delta r}{2}) T_{i-1} - 2T_i + (1 + \frac{1}{r_i} \frac{\Delta r}{2}) T_{i+1} &= \frac{-q_i'''}{\lambda} \Delta r^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tímto získáváme soustavu lineárních algebraických rovnic, které zapíšeme maticově

$$\mathbf{AT} = \mathbf{Q} \quad (3.19)$$

s třídiagonální maticí \mathbf{A} , kterou sestavíme následujícím způsobem

Palivová tableta, λ konstantní

Budeme-li součinitel tepelné vodivosti považovat za konstantní, pak do rovnice (3.18) doplníme poloměry $r_0 = 0 \leq r_f \leq r_{i-1} = r_{fo} - \Delta r$, kde r_i je vnější poloměr palivové tablety r_{fo} a doplníme příslušné materiálové konstanty pro palivové tablety, a tak získáme členy matice \mathbf{A} a hodnoty pravé strany.

Vedení tepla v mezeře mezi palivem a povlakem

Jelikož v přenosu tepla přes plynovou mezeru hraje roli vnější strana paliva i vnitřní strana pokrytí, je nutné využít podmínku (3.16) dvakrát. Jednou k určení poslední rovnice pro rozložení teplot v palivu, podruhé k popsání první rovnice pro výpočet teplotního rozložení v pokrytí. Nejdříve se zaměříme na poslední rovnici pro palivo. První derivaci v rovnici (3.14) nahradíme levostrannou diferencí (3.2) a poloměr r_i označíme jako r_{fo} . Potom získáme

$$\lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_i} - \lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{i-1}} = -q_i''' r_i \Delta r. \quad (3.20)$$

Využitím podmínky (3.16) a použitím pravostranné aproximace (3.1) dostaneme

$$-r_i \alpha_g (T_i - T_{i+1}) - \lambda \frac{r_{i-1}}{\Delta r} (T_i - T_{i-1}) = -q_i''' r_i \Delta r. \quad (3.21)$$

Závěrečnou jednoduchou úpravou získáme poslední rovnici soustavy pro palivo

$$\lambda \frac{r_{i-1}}{\Delta r} T_{i-1} - (r_i \alpha_g + \lambda \frac{r_{i-1}}{\Delta r}) T_i + r_i \alpha_g T_{i+1} = -q_i''' r_i \Delta r. \quad (3.22)$$

Podobným způsobem získáme první rovnici pro pokrytí. Opět budeme vycházet z rovnice (3.14), kde nahradíme první derivaci pravostrannou diferencí (3.1) a poloměr r_{i+1} označíme jako r_{ci}

$$\lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{i+1}} - \lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_i} = -q''' r_{i+1} \Delta r. \quad (3.23)$$

Následně použitím podmínky (3.16) a využitím levostranné difference (3.2) získáme

$$\lambda \frac{r_{i+1}}{\Delta r} (T_{i+2} - T_{i+1}) + r_i \alpha_g (T_i - T_{i+1}) = -q'''_{i+1} r_{i+1} \Delta r \quad (3.24)$$

a drobnou úpravou dostaneme první rovnici soustavy pro rozložení teplot v pokrytí

$$r_i \alpha_g T_i - \left(\lambda \frac{r_{i+1}}{\Delta r} + r_i \alpha_g \right) T_{i+1} + \lambda \frac{r_{i+1}}{\Delta r} T_{i+2} = -q'''_{i+1} r_{i+1} \Delta r. \quad (3.25)$$

Rozložení teplot uvnitř pokrytí

Do (3.18) dosadíme příslušné poloměry $r_{i+1} \leq r \leq r_{N-1} = r_{co} - \Delta r$ a dosazením materiálových konstant získáme koeficienty matice \mathbf{A} a hodnoty pravé strany.

Přenos tepla z pokrytí do chladiva

Vycházíme z (3.14) kde derivaci nahradíme levostrannou diferencí (3.2) pro poslední uzel sítě r_N , který označíme jako r_{co}

$$\lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_N} - \lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{N-1}} = -q'''_N r_N \Delta r. \quad (3.26)$$

Využitím okrajové podmínky (3.17) získáváme

$$-r_N \alpha_c (T_N - T_c) - \lambda \frac{r_{N-1}}{\Delta r} (T_N - T_{N-1}) = -q'''_N r_N \Delta r \quad (3.27)$$

a drobnou úpravou získáváme poslední rovnici soustavy pro rozložení teplot v pokrytí

$$\frac{\lambda}{\Delta r} r_{N-1} T_{N-1} - \left(r_N \alpha_c + \frac{\lambda}{\Delta r} r_{N-1} \right) T_N = -q'''_N r_N \Delta r - r_N \alpha_c T_c. \quad (3.28)$$

Pak vztah (3.19) můžeme rozepsat viz. příloha B.

3.2.3 Stacionární rovnice vedení tepla (s centrálním otvorem)

Pokud uvažujeme palivový prutek, kde palivová tabletky má centrální otvor, můžeme vedení tepla popisovat stejnou rovnicí jako pro palivový prutek bez centrálního otvoru. Dále předpokládáme, že z tohoto dutého palivového elementu je odváděno teplo pouze z vnějšího povrchu. Zbývající povrch je tepelně izolován. Jelikož máme dutou palivovou

tabletu, uvažujeme všechny okrajové podmínky, které byly dříve zmíněny, kromě okrajové podmínky (3.15). Zde pouze nahradíme střed tablety (poloměr roven 0) za poloměr vnitřní strany paliva r_{fo} , tedy získáme podmínku:

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_{fo}} = 0. \quad (3.29)$$

Pro řešení opět použijeme zmíněnou metodu konečných diferencí.

3.2.4 Numerické řešení rovnice vedení tepla (s centrálním otvorem)

Jak bylo popsáno v části 3.2.1, potřebujeme sestavit matici \mathbf{A} . Jelikož se jedná o totožné rovnice a okrajové podmínky, vyjma okrajové podmínky (3.29), nebudeme popisovat odvozování rovnic znovu, ale přejmeme je z uvedené části, pouze odvodíme první rovnici soustavy.

Vycházíme z rovnice (3.14), kde nahradíme první derivaci pravostrannou aproximací (3.1) a poloměr r_{fi} označíme jako r_0 , tím získáme:

$$\lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} - \lambda r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_0} = -q''' r_0 \Delta r. \quad (3.30)$$

Použitím podmínky (3.29) a levostranné difference (3.2) získáme

$$\frac{\lambda r_1}{\Delta r} (T_1 - T_0) = -q''' r_0 \Delta r \quad (3.31)$$

a drobnou úpravou získáme rovnici ve tvaru

$$T_1 - T_0 = -\frac{q''' r_0 \Delta r^2}{\lambda r_1}. \quad (3.32)$$

V soustavě rovnic, která byla odvozena v části 3.2.1 pouze nahradíme první rovnici rovnicí (3.32), kterou jsme nyní odvodili. Výsledná matice \mathbf{A} je shodná s maticí v příloze C a vektor pravých stran \mathbf{Q} je shodný s vektorem pravých stran v příloze C, kromě první rovnice a prvního prvku vektoru pravých stran.

Kapitola 4

Numerické experimenty

Abychom mohli provést numerické experimenty, musíme získat příslušné materiálové konstanty palivového proutku.

Součinitel tepla mezi vnější stranou pokrytí a chladičem: pro výpočet přestupu tepla vycházíme ze Dittusova-Boelterova vztahu:

$$\alpha_g = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \cdot \frac{\lambda_{CO}}{d_h},$$

kde Re je Reynoldsovo číslo, Pr je Prandtlovo číslo, λ_{CO} je součinitel tepelné vodivosti chladiča a d_h je hydraulický průměr. Podrobnější informace pro výpočet součinitele přestupu tepla v [8, Str. 167].

Součinitel přestupu tepla v plynové mezeře: hodnotu součinitele přestupu tepla vypočteme ze vztahu

$$\alpha_g = \frac{\lambda_g}{\delta + \delta_0},$$

kde λ_g je součinitel vedení tepla v plynu, δ je šířka mezi palivovou tabletou a povlakovou trubkou a δ_0 je ekvivalentní šířka charakterizující vedení tepla plynovou náplní, při $\delta = 0$. Více podrobností o tomto vztahu je možné nalézt v [8, Str. 141].

Součinitel tepelné vodivosti pro palivové tablety: pro výpočet tepelné vodivosti se používá několik vztahů. Pro výpočet je použit vztah Koljadina a kol., který je možné najít v [8, Str. 105].

Součinitel tepelné vodivosti v pokrytí: jelikož uvažujeme λ_c konstantní, je možné jej vypočítat ze vztahu

$$\lambda_c = \frac{\vartheta_{ci} - \vartheta_{co}}{T_{ci} - T_{co}},$$

kde $\vartheta_{ci} \equiv \vartheta(T_{ci})$, $\vartheta_{co} \equiv \vartheta(T_{co})$ je příslušná integrální tepelná vodivost a $T_{ci} \equiv T(r_{ci})$ a $T_{co} \equiv T(r_{co})$. Podrobnější informace je možné najít v [8, Str. 134].

Pro ověření námi zvolené numerické metody pro výpočet rozdělení teplot v palivovém článku jaderného reaktoru porovnáme výsledky experimentů s výsledky z [9]. Z tohoto důvodu převezmeme charakteristiky pro palivový článek ze zmíněné práce:

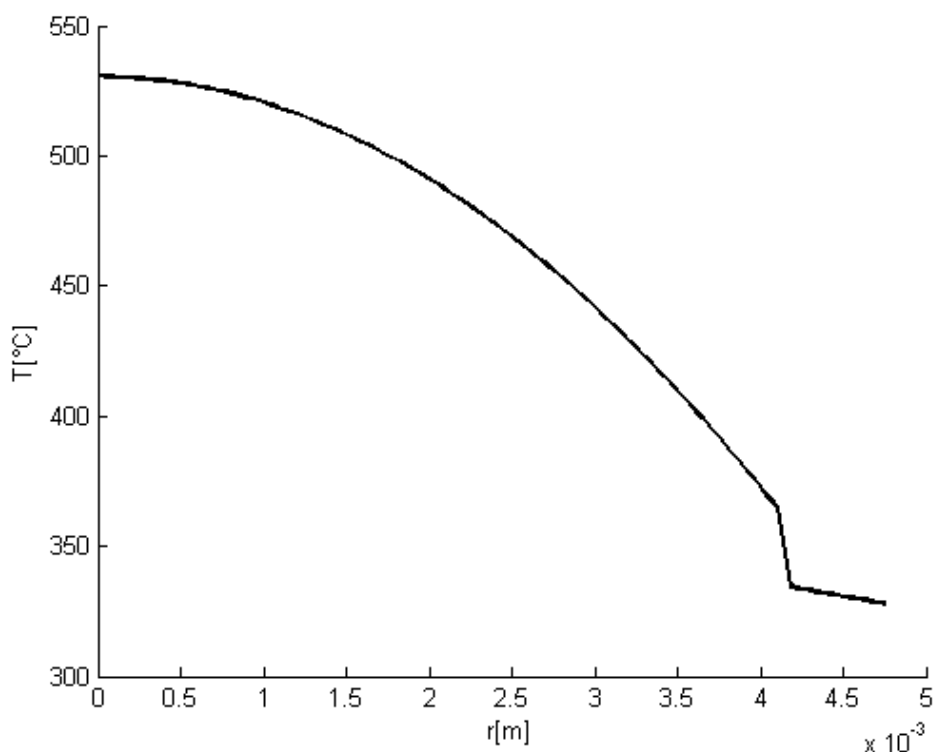
- $r_{co} = 4.75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. . . vnější poloměr pokrytí,
- $r_{ci} = 4.18 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. . . vnitřní poloměr pokrytí,
- $r_{fo} = 4.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. . . vnější poloměr palivové tablety,
- $\alpha_C = 34 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$. . . součinitel přestupu tepla mezi vnější stranou pokrytí a chladičem,
- $\alpha_g = 5.7 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$. . . součinitel přestupu tepla v plynové mezeře,
- $\lambda_f = 2.163 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$. . . součinitel tepelné vodivosti pro palivové tablety,
- $\lambda_f = 13.85 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$. . . součinitel tepelné vodivosti pro pokrytí,
- $q'(z) = 31.1 \cdot \cos\left(\pi \frac{z - \frac{L}{2}}{L_e}\right) \frac{\text{kW}}{\text{m}}$. . . lineární výkon palivového proutku,
- $T_C [^\circ\text{C}]$. . . teplota chladiwa.

4.1 Experiment 1

Uvažujme teplotu chladiva $T_C = 323.5468 \text{ }^\circ\text{C}$ a lineární výkon palivového proutku $q' = 4.5029 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}}$.

4.1.1 Experiment 1a

Pro tento experiment budeme uvažovat síť rozdělenou na 122 dílků. Na obrázku 4.1 je zobrazen průběh teploty vypočtený pomocí metody konečných diferencí.



Obrázek 4.1: Experiment 1a: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí

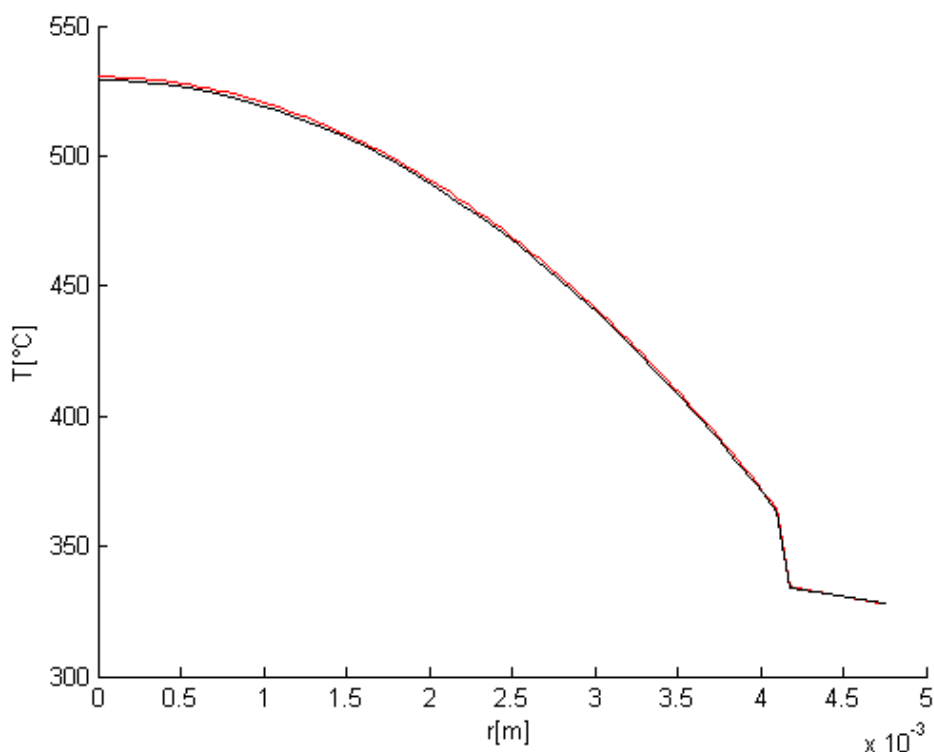
Závěr k experimentu 1a

Pokud porovnáme naše výsledky, získané pomocí námi zvolené metody konečných diferencí, s výsledky z práce [9], kde byla zvolena semi-analitická metoda a metoda konečných objemů, zjistíme, že výsledky se liší maximálně o 1°C . Jelikož se pohybujeme ve vysokých teplotách, lze říci, že rozdíl 1°C je zanedbatelný rozdíl, tudíž lze říci, že naše metoda je přesná.

4.1.2 Experiment 1b

Jelikož výpočet vedení tepla v palivovém reaktoru je dílčím krokem celého systému výpočtů, požaduje se, aby výpočet byl rychlý, ale přesto co nejpřesnější. Proto provedeme nad stejnými daty výpočet ještě jednou s řidší diskretizací sítě, následně porovnáme výsledky a časy výpočtu.

Diskretizujme síť pouze na 40 dílků.



Obrázek 4.2: Experiment 1b: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí, červená - 122 dílků, černá - 40 dílků

Závěr experimentu 1b

Oba výpočty byly prováděny na stejném osobním počítači. Jak můžeme vidět v tabulce 4.1, v obou případech proběhne výpočet velmi rychle. Rozdíl časů výpočtů se pohybuje v řádu desetitícín vteřiny. Za cenu urychlení výpočtu o necelé dvě desetitísíciny vteřiny vyjde rozdíl teplot ve středu palivového proutku o 1.5°C . Jelikož se pohybujeme ve velmi krátkých časech výpočtu a rozdíl teplot je minimální, můžeme zvolit řidší síť.

dělení	čas	$T(r_{co})[^{\circ}C]$	$T(r_{ci})[^{\circ}C]$	$T(r_{fo})[^{\circ}C]$	$T(r_o)[^{\circ}C]$
122	$3.3328 \cdot 10^{-4}$	327.9	334.5	364.7	530.3
40	$1.4899 \cdot 10^{-4}$	327.8	334.2	363.5	528.8
rozdíl (absolutní hodnota)	$1.8429 \cdot 10^{-4}$	0.1	0.3	1.2	1.5

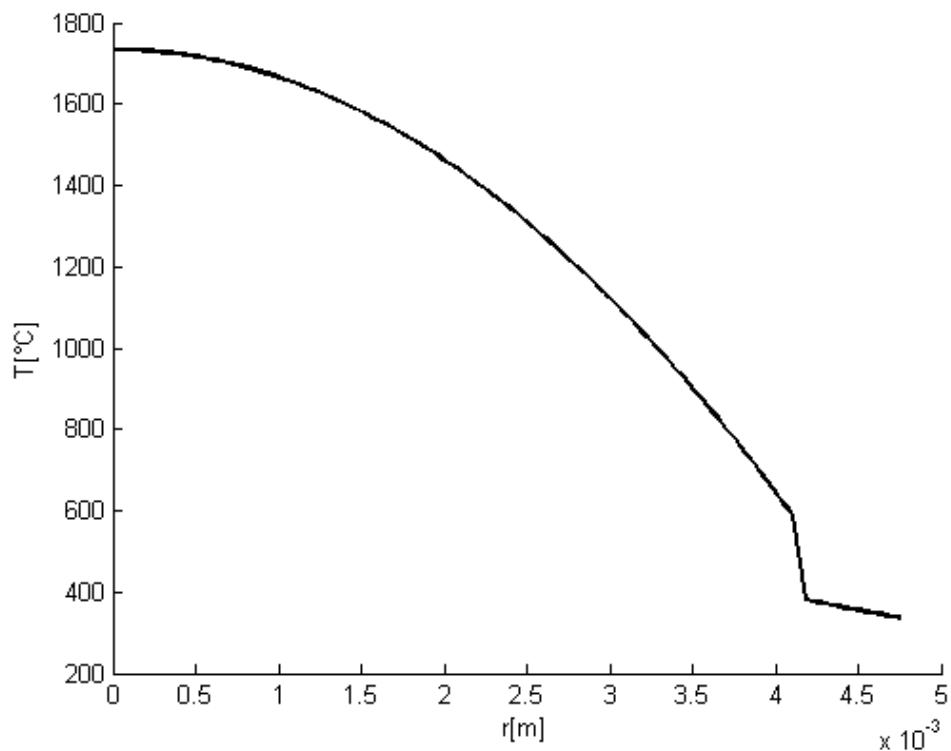
Tabulka 4.1: Výsledky experimentů

4.2 Experiment 2

Uvažujme teplotu chladiva $T_C = 305.6794 \text{ }^{\circ}C$ a lineární výkon palivového proutku $q' = 3.1098 \cdot 10^4 \frac{W}{m}$.

4.2.1 Experiment 2a

Necht' je síť rozdělena na 122 dílků, pak na obrázku 4.3 je zobrazen průběh teploty vypočtený pomocí metody konečných diferencí.



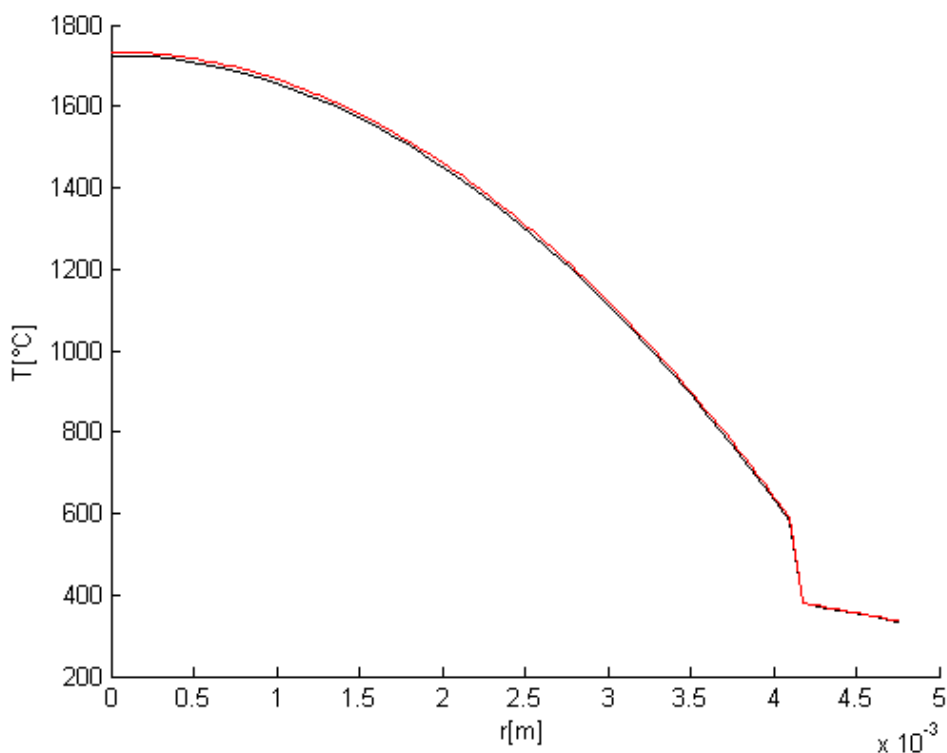
Obrázek 4.3: Experiment 2a: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí

Závěr k experimentu 2a

Porovnáme-li výsledek vypočtený námi zvolenou metodou s výsledky z práce [9], kde je použita semi-analytická metoda a metoda konečných objemů, zjistíme, že výsledky z těchto metod se liší maximálně o 1°C. Můžeme říci, že i v tomto experimentu dosáhla naše metoda konečných diferencí velmi přesného výsledku.

4.2.2 Experiment 2b

Jako v experimentu 1b rovněž porovnáme, jak se změní čas výpočtu při změně diskretizace sítě na 40 dílků a jak se v závislosti na této změně změní průběh teploty v palivovém proutku (viz obrázek 4.4).



Obrázek 4.4: Experiment 2b: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí, červená - 122 dílků, černá - 40 dílků

Závěr k experimentu 2b

Oba výpočty byly prováděny na stejném osobním počítači. Jak můžeme vidět v tabulce 4.2, v obou případech proběhne výpočet velmi rychle. Rozdíl časů výpočtů se pohybuje v řádu desetitisícin vteřiny. Za cenu urychlení výpočtu o necelé tři desetitisíciny vteřiny je

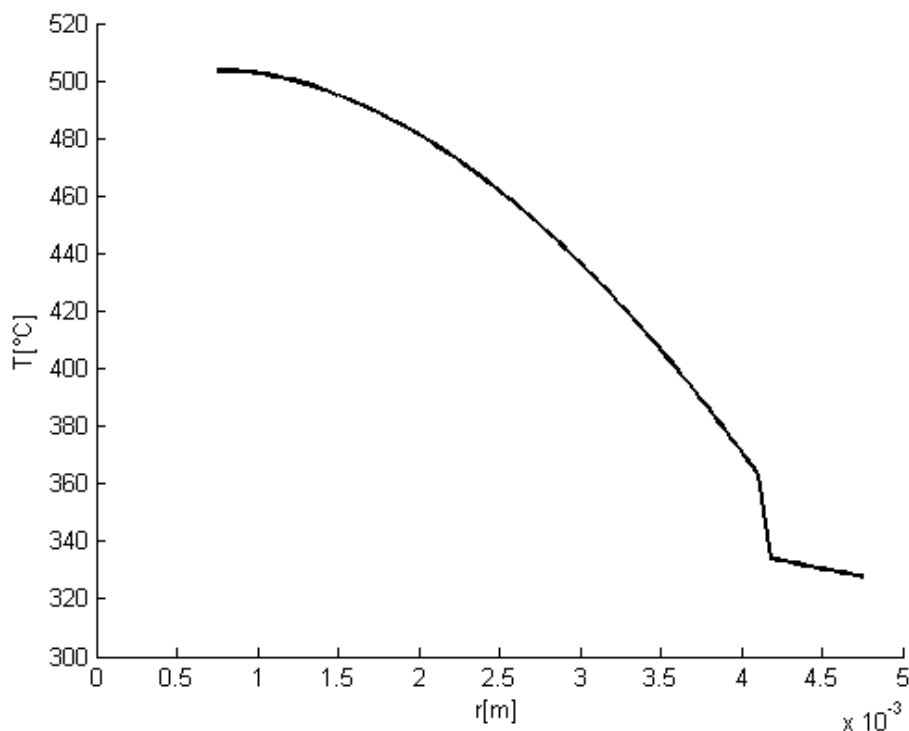
rozdíl teplot ve středu palivového proutku 11°C . Jelikož se pohybujeme ve velmi krátkých časech výpočtu, není efektivní vzhledem k rozdílu teplot používat jemnější síť.

dělení	čas	$T(r_{co})[^{\circ}\text{C}]$	$T(r_{ci})[^{\circ}\text{C}]$	$T(r_{fo})[^{\circ}\text{C}]$	$T(r_o)[^{\circ}\text{C}]$
122	$4.1879 \cdot 10^{-4}$	335.9	384.2	590	1734
40	$1.4010 \cdot 10^{-4}$	335	379.4	581.9	1723
rozdíl (absolutní hodnota)	$2.7869 \cdot 10^{-4}$	0.9	4.8	8.1	11

Tabulka 4.2: Výsledky experimentů

4.3 Experiment 3

Nyní provedeme numerický experiment s palivovým proutkem, který má centrální otvor. Předpokládáme, že teplota na vnitřní straně paliva bude o něco nižší než je teplota ve středu palivového proutku bez centrálního otvoru. Pro porovnání teplot uvnitř palivového proutku použijeme stejné materiálové charakteristiky, které byly použity v experimentu 1a. Budeme tedy uvažovat teplotu chladiva 323.5468°C a lineárním výkonem $q' = 4.5029 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}}$. Dále přidáme vnitřní poloměr palivové tablety $r_{fi} = 0.75 \cdot 10^{-3}\text{m}$. Síť budeme dělit na 102 dílků.



Obrázek 4.5: Experiment 3: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí

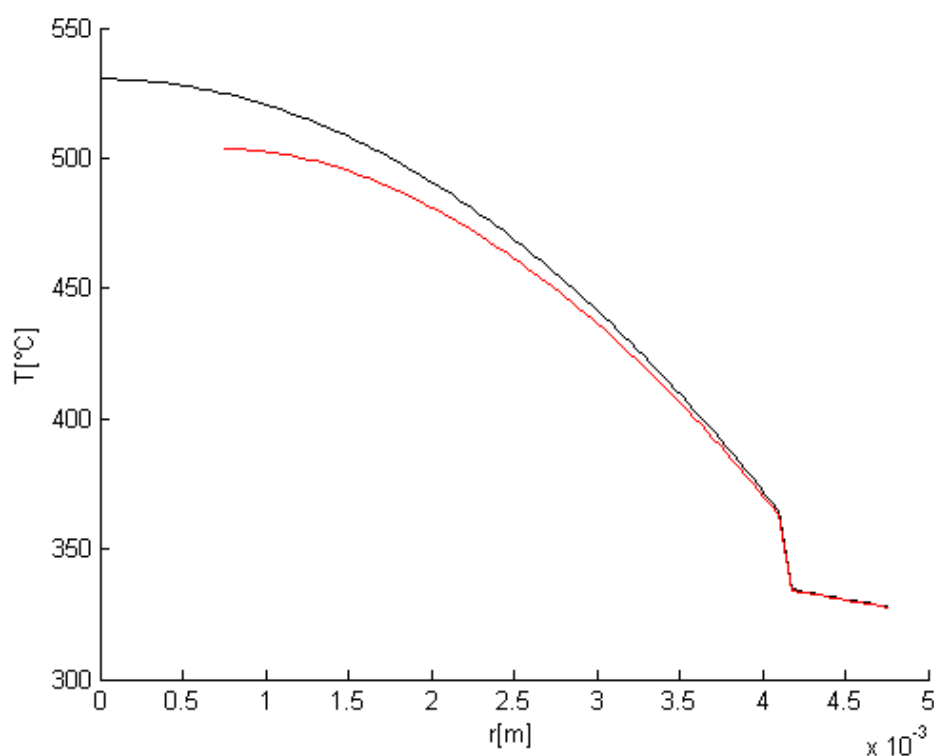
Závěr k experimentu 3

Jak můžeme vidět v tabulce 4.3, teplota na vnitřní straně paliva se, jak jsme předpokládali, snížila vůči maximální teplotě v palivovém článku bez centrálního otvoru. Dokonce je teplota na vnitřní straně paliva nižší než teplota v proutku bez centrálního otvoru ve stejné vzdálenosti od geometrického středu proutku. Celkové rozložení teplot uvnitř proutku pokleslo, jak je možné vidět na obrázku 4.6.

Vzhledem k tomu, že veřejnosti nejsou dostupné výsledky vedení tepla v palivovém článku s centrálním otvorem, není možné porovnat správnost našeho výsledku z námi zvolené metody.

	$T(r_{co})[^{\circ}C]$	$T(r_{ci})[^{\circ}C]$	$T(r_{fo})[^{\circ}C]$	$T(r_{fi})[^{\circ}C]$	max teplota [$^{\circ}C$]
s otvorem	327.8	334.1	363.2	503.5	503.5
bez otvoru	327.7	334.5	364.7	525.0	530.3

Tabulka 4.3: Výsledky experimentů



Obrázek 4.6: Experiment 3: průběh teploty vypočtený metodou konečných diferencí, červená - palivový proutek s centrálním otvorem, černá - palivový proutek bez centrálního otvoru

4.4 Závěr k experimentům

Jelikož mnoho informací o jaderných elektrárnách, včetně vedení tepla v palivovém článku, se považuje za citlivé informace, není veřejnosti mnoho výsledků z experimentů či z praxe dostupných. Pouze v omezené míře jsou dostupné benchmarky vydané agenturami jako jsou AEC (United States Atomic Energy Commission) a IAEA (International Atomic Energy Agency). Proto nebylo možné výsledek z tohoto experimentu porovnat s výsledky experimentálně naměřených hodnot.

Kapitola 5

Závěr

V této práci byl stručně popsán palivový proutek jaderného reaktoru. Byl vytvořen zjednodušený model, který předpokládá osově symetrické rozložení teploty. Rovněž pro zjednodušení byl uvažován rovnoměrný vývin tepla ve všech částech objemu paliva. Dalším zjednodušením bylo zanedbání změn rozměru paliva a pokrytí vlivem tepelných dilatací nebo postupný růst paliva vlivem ozáření. Pokrytí bylo chladivem obtékáno rovnoměrně. Chladivo mělo konstantní teplotu na počítaném úseku a přestup tepla z pokrytí do chladiva byl po celé ploše povrchu pokrytí rovnoměrný. Na základě těchto zjednodušení byla uvedena diferenciální rovnice druhého řádu, která popisovala vedení tepla v palivovém proutku.

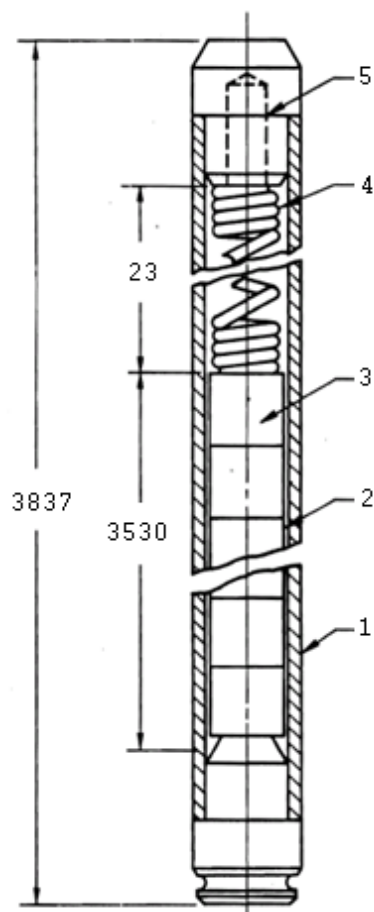
Následně byly popsány základní vlastnosti obyčejných diferenciálních rovnic a rozebrána metoda konečných diferencí, jakožto nástroj pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Poté byla tato metoda aplikována na rovnici vedení tepla a provedeny numerické experimenty v programovém prostředí MATLAB.

Porovnáním řešení námi zvolené metody s řešením z jiných metod můžeme říci, že námi zvolená metoda je vhodná a přesná. Dále jsme porovnávali rychlost výpočtu pro různé diskretizace sítě. Při testování doby výpočtu jsme zjistili, že doba potřebná pro výpočet se řeší jen v řádech desetitisícin vteřiny a teploty ve středu palivového proutku se nijak výrazně nemění v poměru k rozsahu teplot, ve kterých se pohybujeme.

Lze říci, že metoda konečných diferencí byla vhodně zvolena pro řešení diferenciální rovnice vedení tepla, protože i na běžném osobním počítači dosahuje správných výsledků za krátký čas.

Příloha A

Palivový proutek



Obrázek A.1: Palivový proutek: 1 - pokrytí, 2 - plynová mezera, 3 - palivové tablety, 4 - pružina, 5 - zátka

Příloha C

Obsah CD

- bakalářská práce (*.pdf)
- výsledné grafy (*.fig)
- zdrojové kódy (*.m)

Literatura

- [1] Science Office of Nuclear Energy and Technology. *The history of Nuclear Energy*. U.S. Department of Energy, Washington, D.C., 1987.
- [2] M. Brzezina, J. Veselý, and Technická univerzita v Liberci. Přírodovědně-humanitní a pedagogická fakulta. *Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy*. Technická univerzita v Liberci, 2012.
- [3] H. Vrbenská and J. Bělohávková. *Základy matematiky pro bakaláře II*. Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2003.
- [4] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 6th edition, 2010.
- [5] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.
- [6] S. Míka, P. Přikryl, and M. Brandner. *Speciální numerické metody*. Vydavatelský servis Plzeň, 2006.
- [7] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Differential Equations*. University of Washington, 1998.
- [8] Bedřich Heřmanský. *Termomechanika jaderných reaktorů*. Academia Praha, 1986.
- [9] M. Brandner, J. Egermaier, M. Hanuš, and H. Kopincová. Algoritmizace a implementace numerických modelů pro stanovení termohydraulických charakteristik AZ jaderných reaktorů, vytvoření příslušných modulů. Technical report, 2012.