

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE
Stabilizace jednohého robota

PLZEŇ, 2014

MATĚJ KOVÁŘÍK

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je součástí.

V Plzni dne

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu diplomové práce panu Prof. Ing. Miloši Schlegelovi CSc. Moje poděkování mu patří především za jeho trpělivost, za vedení práce a čas věnovaný konzultacím diplomové práce. Dále děkuji slečně Mgr. Janě Königsmarkové za pomoc při optimalizaci zpětné vazby a zkoumání prototypu.

Abstrakt

Stabilizace jednonohého robota

Tato diplomová práce se zabývá modelováním prototypu a návrhem zpětnovazebního řízení pro prototyp jednonohého robota s dvouosým náklonoměrem a třemi nezávislými lineárními voice coil aktuátory. Pro prototyp robota navrhujeme lineární řízení takové, aby bylo dosaženo stabilizace těla robotu ve svislé poloze. Stabilizace by měla být dosažena vhodným posunem magnetických závaží voice coil aktuátorů tak, aby těžiště a bod styku nohy robota s podložkou byly ve svislé ose. Předpokládáme, že prototyp robota je vstupně symetrický. V práci zkoumáme vstupní symetrii systému a návrh symetrického řízení. Pro prototyp jsou vytvořeny matematické modely Newton-Eulerovou a Lagrangeovou metodou. Pro tyto lineární modely navrhujeme stavovou a výstupní zpětnou vazbu. V práci je vytvořen také model robotu a řídicího systému v programovém prostředí Matlab/Simulink/SimMechanic. Navržené řízení je aplikováno na prototyp robota.

Klíčová slova

Jednonohý robot, Lagrangeova a Newton-Eulerova metoda modelování systémů, vstupní symetrie systému, symetrická zpětná vazba, návrh stavové a výstupní zpětné vazby, metoda LQR, metoda přiřazení Jordanovi formy, modelování v SimMechanics

Abstract

Stabilization of one-legged robot

This thesis deals with modeling of prototype and with design of feedback control for a one-legged robot prototype with biaxial incliner and three independent linear voice coil actuators. For the prototype of robot is proposed a linear control such as to achieve stabilization of the body of robot in a vertical position. Stabilization should be achieved by an appropriate shift of magnetic weights of voice coil actuators that the center of gravity and point of contact of the robot legs with ground should be in the vertical axis. We presume that the prototype of robot is symmetrical in inputs. In this thesis we investigate the symmetry of the system input and design of symmetric control. For the prototype is built mathematical models by Newton-Euler and Lagrange method. For these linearized models we design the state and output feedback. In the thesis is also created a model of the robot and the control system in programming environment Matlab/Simulink/SimMechanic. The proposed control is applied to a prototype of robot.

Key words

One-legged robot, Lagrange and Newton-Euler method of system modeling, symmetry of system's inputs, symmetrical feedback, the proposal of state and output feedback, LQR method, Jordan form assignment method, modeling in SimMechanics

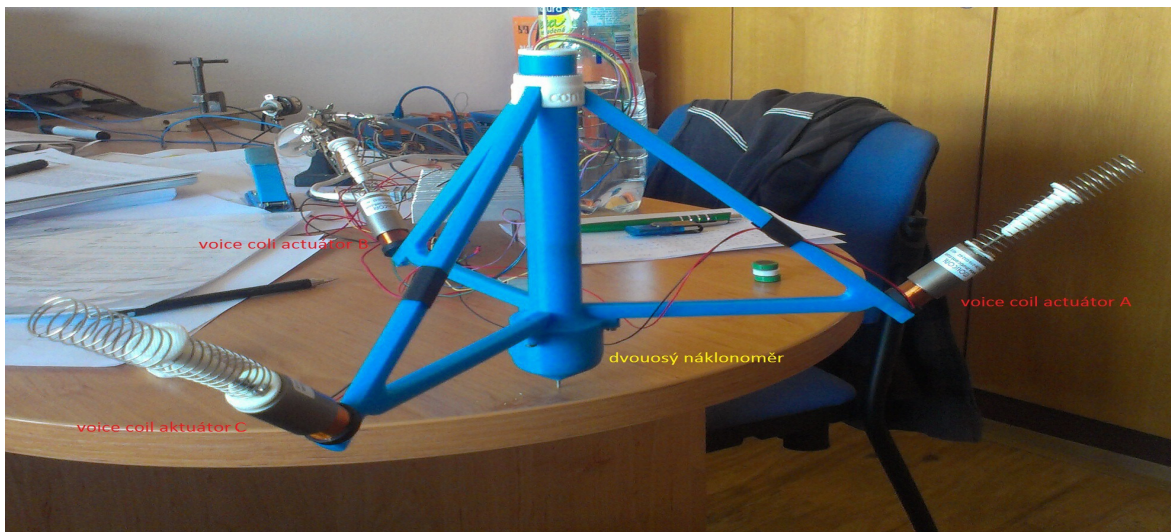
Obsah

1	Úvod	6
2	Odvození matematického modelu	8
2.1	Těžiště soustavy hmotných bodů	8
2.2	Antisymetrická matice	8
2.3	Newton-Eulerovy pohybové rovnice	9
2.4	Matematický model sestavený Newton-Eulerovou metodou	10
2.4.1	Tvorba modelu konstrukce robota	11
2.4.2	Sestavení pohybových rovnic	12
2.5	Stavová reprezentace 4-bodového modelu	16
2.5.1	Lineární stavový popis 4-bodového modelu	16
2.6	Lagrangeova metoda	17
2.7	Parametry robotu	17
2.8	Odvození Lagrangeova modelu robota	19
2.8.1	Popis polohy v soustavě souřadnic	19
2.8.2	Sestavení Lagrangianu	21
2.8.3	Sestavení Lagrangeových rovnic	23
2.9	Stavová reprezentace L-modelu	24
2.9.1	Lineární stavový popis L-modelu	24
3	Návrh řídicího systému	26
3.1	Linerární kvadratický regulátor (LQR)	26
3.1.1	Zpětnovazební matice podezřelé z extrému	27
3.1.2	Řešení problému LQR	28
3.2	Metoda přiřazení Jordanovi formy (JFA)	28
3.2.1	JFA pro stavovou zpětnou vazbu	28
3.2.2	Explicitní parametrizace stavové zpětné vazby	29
3.2.3	JFA pro výstupní zpětnou vazbu	31
3.3	Robustnost zpětnovazebního systému	32
3.3.1	Kritéria robustnosti	32
4	Symetrie systému	34
4.1	Definice symetrie	34
4.2	Podmínky symetrie systému	34
4.3	Podmínky zpětnovazební symetrie	35
4.3.1	Nutná a postačující podmínka zpětnovazební symetrie	36

4.4	Test symetrie systému	36
4.5	Symetrie zpětné vazby	38
5	Model prototypu v SimMechanics	40
5.1	Tvorba modelu	41
5.2	Řídicí systém v SimMechanics	43
6	Simulace	47
6.1	Zpětnovazební systém 4-bodového modelu	47
6.1.1	LQR úloha	47
6.1.2	JFA metoda	50
7	Návrh řízení pro prototyp	54
7.1	Aplikace řízení v REXU	58
7.2	Tření u aktuátoru	60
8	Závěr	62
9	Literatura	63

1 Úvod

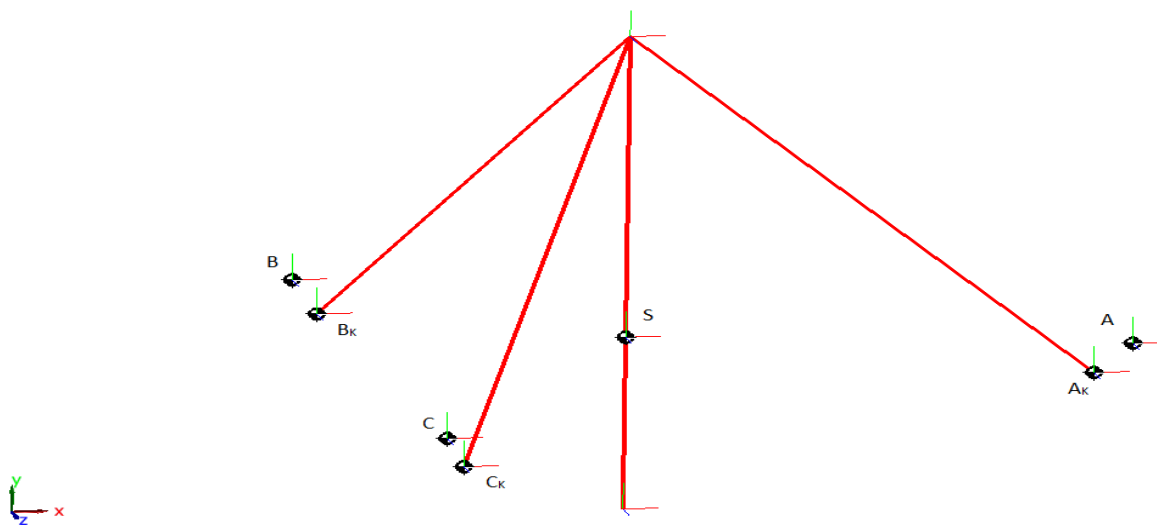
První problém, který se vyskytne při návrhu zpětnovazebního řízení, je jakým způsobem identifikovat reálný systém. Každý reálný systém je obecně nelineární systém. Pokud je to možné, snažíme se popsat dynamické chování a strukturu reálného systému matematicky. Pokud známe fyzikální vztahy, které pro systém platí, lze jako nástroj pro tvorbu matematického popisu mechanických systémů použít Newton-Eulerovu nebo Lagrangeovu metodu. Využitím těchto metod dostáváme obecně soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Teorie automatického řízení se však zabývá především návrhem regulátorů pro lineární systémy. Pro návrh lineárního řízení je potřeba převést popis nelineárního systému na popis lineárního systému. Soustavu diferenciálních rovnic převedeme na nelineární stavový popis a pro konkrétní pracovní bod stavového prostoru provedeme linearizaci. Dostaneme tedy lineární stavový popis, pro který navrhujeme regulátor. Tento obecný postup aplikujeme na systém prototypu jednohého robota.



Obrázek 1.1: Prototyp jednohého robota se 3 nezávislými lineárními voice coil aktuátory a dvouosým náklonoměrem

Prototyp jednohého robota budeme modelovat pro Newton-Eulerovu metodu jako systém 4. řádu, kde zanedbáme dynamiku aktuátorů a budeme v místě aktuátorů uvažovat pouze silové působení na konstrukci. Pro tento nejjednodušší model ověříme vstupní symetrii systému a také navrhne symetrickou stavovou zpětnou vazbu.

Dále se v práci zabýváme tvorbou modelu v programovém prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics. Tento přístup má výhodu v tom, že během simulace máme k dispozici vizualizaci modelu a dokážeme si lépe představit, jak se model chová. Vizualizace je velmi jednoduchá, ale poměrně dobře odpovídá prototypu.



Obrázek 1.2: Animace v SimMechanics

Pro prototyp budeme navrhovat zpětnou vazbu s využitím modelu 10. řádu vytvořený Lagrangeovou metodou. Protože při tvorbě Lagrangeova modelu popisujeme systém robota matematicky, známe dobře vnitřní strukturu a označení jednotlivých stavů, vstupů a výstupů systému. Pro model v SimMechanics je nám struktura modelu skryta.

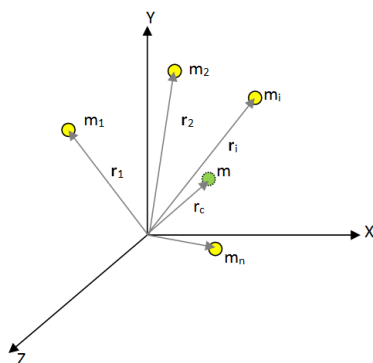
Prototyp jednohého robota chceme řídit pouze za pomoci znalosti náklonu a úhlových rychlostí konstrukce robota. Ke stabilizaci robota ve svislé poloze je tedy potřeba navrhovnout výstupní zpětnou vazbu.

2 Odvození matematického modelu

2.1 Těžiště soustavy hmotných bodů

Tuhé těleso tvoří soustava pevně vázaných hmotných bodů. Těžiště tuhého tělesa je působištěm tíhové síly. V těžišti můžeme umístit celkovou hmotnost soustavy hmotných bodů. Celková hmotnost je dána součtem hmotností všech hmotných bodů soustavy. Polohový vektor resp. průvodič těžiště určíme takto:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^n m_i \\ \mathbf{r}_c &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot m_i \end{aligned} \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Soustava hmotných bodů

2.2 Antisymetrická matice

Antisymetrická matice S (Skew Symetric Marix) je taková matice $n \times n$, pro kterou platí:

$$S^T + S = 0 \quad (2.2)$$

tedy každá taková matice 3×3 má tuto formu:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Pro každé dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ platí:

$$S(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.4)$$

kde $S(\mathbf{a})$ je antisymetrická matice sestavená z prvků vektoru \mathbf{a} .

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.3 Newton-Eulerovy pohybové rovnice

Pohyb tuhého tělesa o hmotnosti \mathbf{m} je popsán Newtonovou dynamickou rovnicí sestavenou k těžišti tělesa. Tedy pro výslednici všech sil \mathbf{F}_V působící na těžiště tělesa platí (2. Newtonův zákon):

$$\mathbf{F}_V = m\mathbf{a}_T \quad (2.6)$$

kde a_T je okamžité zrychlení pohybu těžiště tělesa.

Okamžité zrychlení hmotného bodu je časovou derivací jeho okamžité rychlosti. Uvažujeme-li (pohyb po kružnici) rotaci, pak pro okamžité zrychlení hmotného bodu platí:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} \quad (2.7)$$

kde ω je vektor úhlové rychlosti a \mathbf{r} je polohový vektor hmotného bodu.

Hybnost hmotného bodu je definována jako skalární součin hmotnosti a okamžité rychlosti hmotného bodu.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (2.8)$$

Dále je pohyb tělesa popsán Eulerovou dynamickou rovnicí (2.11), kterou lze odvodit z 1. impulsové věty:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.9)$$

tak, že tuto rovnici vektorově vynásobíme polohovým vektorem \mathbf{r} . Potom tedy dostaneme rovnici,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.10)$$

kterou lze napsat ve tvaru:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M} \quad (2.11)$$

Vztah (2.11) je matematickým vyjádřením 2. impulsové věty. Kde \mathbf{M} je moment vnějších sil a \mathbf{H} je moment hybnosti. Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic je definován jako vektorový součin průvodiče a vektoru hybnosti bodu. Platí:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.12)$$

Uvažujeme-li čistou rotaci hmotného bodu můžeme vektor hybnosti upravit na tvar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\
&= -m[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})] = \underbrace{-mS(\mathbf{r})S(\mathbf{r})}_{I} \boldsymbol{\omega} \\
\mathbf{H} &= I\boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

kde $S(\mathbf{r})$ je antisymetrická matice sestavená podle vztahu (2.5), m je hmotnost hmotného bodu, $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost, \mathbf{r} je průvodič a I je matice:

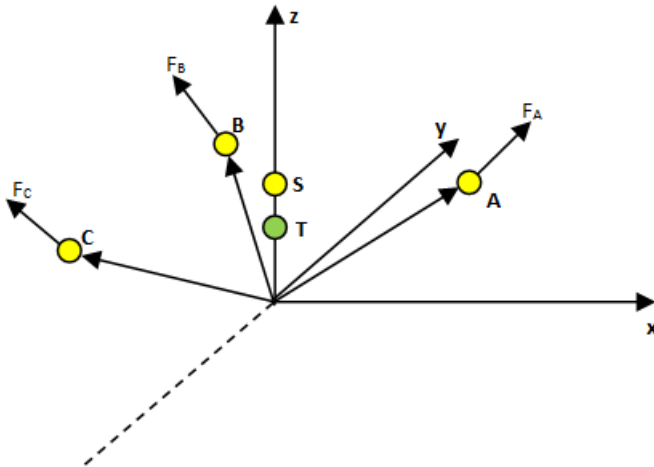
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$I = -mS(\mathbf{r})S(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} m(z^2 + y^2) & -mxy & -mzx \\ -mxy & m(z^2 + x^2) & -mzy \\ -mzx & -mzy & m(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Matici I nazýváme tenzor setrvačnosti.

2.4 Matematický model sestavený Newton-Eulerovou metodou

Konstrukci jednohého robota lze při tvorbě modelu považovat za tuhé těleso. Tuhé těleso nahradíme soustavou čtyř pevně vázaných hmotných bodů umístěných v pravotočivé soustavě souřadnic viz. Obrázek 2.2. Body A,B,C,S jsou hmotné body konstrukce robota a bod T je těžiště.



Obrázek 2.2: Soustava hmotných bodů reprezentující robota

2.4.1 Tvorba modelu konstrukce robota

Jednonohý robot se skládá z těla a tří stejně dlouhých ramen. Na koncích ramen jsou voice coil aktuátory. Ramena svírají s tělem robotu úhel 45° , zároveň ramena mezi sebou svírají úhel 120° . Při tvorbě modelu chceme zachovat dynamiku systému a zároveň chceme, aby model robotu byl co nejjednodušší. Nahradíme tedy konstrukci čtyřmi hmotnými body (A,B,C,S) viz. Obrázek 2.2 a voice coil aktuátory nahradíme působícími silami ($\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}_C$) v bodech A,B,C, které mají hmotnost \mathbf{m} . Bod S má hmotnost \mathbf{M} a pro hmotnost těžiště T tedy platí:

$$\mu = M + 3m$$

Nyní určíme polohové vektory jednotlivých bodů v pravotočivé Kartézské soustavě souřadnic. Bod S leží na ose \mathbf{z} , proto bude mít jeho polohový vektor \mathbf{r}_S x-ovou a y-ovou souřadnici nulovou. Bod A leží v rovině XZ, proto bude mít jeho polohový vektor \mathbf{r}_A y-ovou souřadnici také nulovou. Polohové vektory:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ r \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Polohové vektory bodů B a C určíme ze znalosti konstrukce tak, že provedeme rotaci polohového vektoru \mathbf{r}_A kolem osy \mathbf{z} o úhel $\delta = \pm 120^\circ$. Rotace v ose \mathbf{z} proti směru hodinových ručiček je charakterizována maticí rotace:

$$R_\delta = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

tedy pro polohové vektory platí:

$$\mathbf{r}_B = R_{120^\circ} \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ h \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_C = R_{-120^\circ} \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r \\ h \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Pro určení polohového vektoru využijeme vzorec (2.1), do kterého dosadíme příslušné hmotnosti a polohové vektory:

$$\mathbf{r}_T = \frac{m(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C) + M\mathbf{r}_S}{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3mh + Ml}{3m + M} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

V bodě A má působit síla \mathbf{F}_A , která působí kolmo na rameno robotu v rovině XZ. Pro sílu F_A působící na bod A vyjádříme směrový vektor \mathbf{F}_A :

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

V bodě B má působit síla \mathbf{F}_B a v bodě C síla \mathbf{F}_C . Vektory těchto sil lze vyjádřit obdobně jako průvodiče r_B, r_C , provedeme rotaci vektoru síly \mathbf{F}_A o 120° .

$$\mathbf{F}_B = R_{120^\circ} \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{F}_C = R_{-120^\circ} \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

2.4.2 Sestavení pohybových rovnic

Konstrukci robota jsme namodelovali pomocí hmotných bodů, vzájemné polohy hmotných bodů jsou časově neměnné. Poloha celé konstrukce se však v čase mění. Uvažujeme tedy vzájemný pohyb konstrukce robotu a podložky, který je charakterizován dvěma rotacemi. Dle volby souřadného systému na Obrázku 2.1 jsou to rotace kolem osy \mathbf{x} o úhel $\varphi(t)$ a rotace kolem osy \mathbf{y} o úhel $\psi(t)$. Složenou rotaci v obou osách bude charakterizovat matice rotace R_{xy} , která vznikla násobením matic elementárních rotací.

$$R_{xy} = R_\psi R_\varphi = \begin{bmatrix} c(\psi(t)) & 0 & s(\psi(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\psi(t)) & 0 & c(\psi(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\varphi(t)) & -s(\varphi(t)) \\ 0 & s(\varphi(t)) & c(\varphi(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\psi(t)) & s(\psi(t))s(\varphi(t)) & s(\psi(t))c(\varphi(t)) \\ 0 & c(\varphi(t)) & -s(\varphi(t)) \\ -s(\psi(t)) & c(\psi(t))s(\varphi(t)) & c(\psi(t))c(\varphi(t)) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

kde

$$\sin(x) = s(x) \quad \cos(x) = c(x)$$

Abychom vyjádřili časovou závislost polohových vektorů hmotných bodů a působících sil v bodech, vynásobíme vektory zleva maticí R_{xy} . Pro přehledný zápis uvažujeme následující označení funkcí sinus a cosinu:

$$\begin{aligned} \sin(\psi(t)) &= s_\psi & \sin(\varphi(t)) &= s_\varphi \\ \cos(\psi(t)) &= c_\psi & \cos(\varphi(t)) &= c_\varphi \end{aligned}$$

Pak tedy dostaneme vztahy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_A(t) &= R_{xy}\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} c_\psi r + s_\psi c_\varphi h \\ -s_\varphi h \\ -s_\psi r + c_\psi c_\varphi h \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_B(t) &= R_{xy}\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h \\ \frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_C(t) &= R_{xy}\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h \\ \frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_S(t) &= R_{xy}\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} s_\psi c_\varphi l \\ -s_\varphi l \\ c_\psi c_\varphi l \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_T(t) &= R_{xy}\mathbf{r}_T = \begin{bmatrix} \frac{s_\psi c_\varphi (3mh+Ml)}{3m+M} \\ -\frac{s_\varphi (3mh+Ml)}{3m+M} \\ \frac{c_\psi c_\varphi (3mh+Ml)}{3m+M} \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_A(t) &= R_{xy}\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_B(t) &= R_{xy}\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi + \frac{\sqrt{6}}{4}s_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi \\ \frac{\sqrt{6}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi \\ \frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi + \frac{\sqrt{6}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_C(t) &= R_{xy}\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi - \frac{\sqrt{6}}{4}s_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi \\ \frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi - \frac{\sqrt{6}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dále vyjádříme celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů \mathbf{H}_s pomocí aplikace vztahu (2.14). Celkový moment hybnosti SHB¹ odpovídá součtu součinů tenzorů setrvačnosti jednotlivých bodů a úhlové rychlosti konstrukce robotu ω .

$$\mathbf{H}_s = \sum I\omega = (I_A + I_B + I_C + I_S)\omega \tag{2.26}$$

¹Soustava Hmotných Bodů

kde

$$I_A = -mS(\mathbf{r}_A(t))S(\mathbf{r}_A(t)) \quad (2.27)$$

$$I_B = -mS(\mathbf{r}_B(t))S(\mathbf{r}_B(t)) \quad (2.28)$$

$$I_C = -mS(\mathbf{r}_C(t))S(\mathbf{r}_C(t)) \quad (2.29)$$

$$I_S = -MS(\mathbf{r}_S(t))S(\mathbf{r}_S(t)) \quad (2.30)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\varphi(t) \\ \frac{d}{dt}\psi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Vzhledem ke složitosti vztahů pro vektor momentu hybnosti \mathbf{H}_s jsme úplné matematické vyjádření uvedli v příloze.

Na SHB aplikujeme 2.Impulsovou větu (2.11). Tedy časová derivace celkového momentu hybnosti SHB se rovná celkovému momentu \mathbf{M}_s působících na SHB.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_s = \mathbf{M}_s \quad (2.32)$$

kde celkový moment působící na SHB robotu \mathbf{M}_s je součtem momentu \mathbf{M}_G , který je způsoben tíhovou silou \mathbf{F}_G a momentu vstupu \mathbf{M}_u , který je způsoben silami $\mathbf{F}_A(t)$, $\mathbf{F}_B(t)$, $\mathbf{F}_C(t)$. Gravitační zrychlení působí ve směru **osy -z**.

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_u = \mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{F}_G + \mathbf{M}_u \quad (2.33)$$

kde

$$\mathbf{M}_u = u_1\mathbf{M}_A + u_2\mathbf{M}_B + u_3\mathbf{M}_C \quad (2.34)$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_A(t) \times \mathbf{F}_A(t) \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_B(t) \times \mathbf{F}_B(t) \quad \mathbf{M}_C = \mathbf{r}_C(t) \times \mathbf{F}_C(t) \quad (2.35)$$

$$F_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} s_\varphi(3mh + Ml)g \\ s_\psi c_\varphi(3mh + Ml)g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}(s_\psi r - c_\psi c_\varphi h)s_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi h(-s_\psi + c_\psi c_\varphi) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-s_\psi r + c_\psi c_\varphi h)(c_\psi + s_\psi c_\varphi) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-c_\psi r - s_\psi c_\varphi h)(-s_\psi + c_\psi c_\varphi) \\ s_\varphi h \frac{\sqrt{2}}{2}(c_\psi + s_\psi c_\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2}(c_\psi r + s_\psi c_\varphi h)s_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} M_B(1) \\ M_B(2) \\ M_B(3) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$M_B(1) = \left(-\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi\right)$$

$$M_B(2) = \left(\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}s_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi\right) + \left(\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi\right)$$

$$M_B(3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi + \frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi s_\varphi \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi\right) + \left(-\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi\right)$$

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} M_C(1) \\ M_C(2) \\ M_C(3) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$M_C(1) = \left(-\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi - \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi\right)$$

$$M_C(2) = \left(\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi - \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}s_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi\right) + \left(\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}s_\psi - \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\psi c_\varphi\right)$$

$$M_C(3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}c_\psi - \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}s_\psi s_\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\psi c_\varphi\right) + \left(-\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h\right)\left(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\varphi\right)$$

Budeme uvažovat, že moment vstupu \mathbf{M}_u budeme moci měnit pomocí vstupu \mathbf{u} . Model robotu je popsán vektorovou diferencilání rovnicí:

$$\mathbf{o} = \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_u - \frac{d}{dt}\mathbf{H}_s \quad (2.40)$$

kde $\mathbf{o} = [0 \ 0 \ 0]^T$ a $\mathbf{M}_G + \mathbf{M}_u - \frac{d}{dt}\mathbf{H}_s = E\mathbf{q} = [Eq_x \ Eq_y \ Eq_z]^T$

Z vektorové rovnice (2.40) dostaneme po složkách tři seperátní rovnice. Chceme vyřešit soustavu rovnic, kde neznámé jsou úhlové zrychlení $\frac{d^2}{dt^2}\varphi = \varepsilon_\varphi$, $\frac{d^2}{dt^2}\psi = \varepsilon_\psi$. Postačí nám proto uvažovat pouze x-ovou složku ($Eq_x = 0$) a y-ovou složku rovnice (2.40) ($Eq_y = 0$). Řešíme tedy lineární soustavu 2 rovnic pro dvě neznámé. Pro přehlednější zápis soustavy a jejího řešení zavedeme substituci. Soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} Eq_x &= a_1 + b_1\varepsilon_\varphi + c_1\varepsilon_\psi = 0 \\ Eq_y &= a_2 + b_2\varepsilon_\varphi + c_2\varepsilon_\psi = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

kde substituce za prvky $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ jsou uvedeny v příloze.

Řešením soustavy 2.41 dostaneme úhlová zrychlení $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$, které dále využijeme pro popis systému ve stavové reprezentaci.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{-c_1a_2 + c_2a_1}{-c_1b_2 + c_2b_1} \quad \varepsilon_\psi = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{-c_1b_2 + c_2b_1} \quad (2.42)$$

2.5 Stavová reprezentace 4-bodového modelu

Chceme-li získat popis systému 4.řádu ve stavové reprezentaci, je nutné zvolit 4 stavové proměnné. Jako stavové proměnné zvolíme tedy úhly rotace φ , ψ a příslušné úhlové rychlosti ω_φ , ω_ψ . Převod diferenciálních rovnic na stavový popis provedeme metodou snižování řádu derivace. Stav systému $\mathbf{x}(t)$ a derivace stavu $\dot{\mathbf{x}}(t)$ mají tento tvar:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \omega_\varphi(t) \\ \omega_\psi(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\varphi(t) \\ \omega_\psi(t) \\ \varepsilon_\varphi(t) \\ \varepsilon_\psi(t) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Stavový popis nelineárního systému má tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}(t)) = I\mathbf{x}(t)$$

kde popis nelineárních funkcí $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $i=1,2,3,4$ je uveden v příloze a I je identická matice 4×4 .

2.5.1 Lineární stavový popis 4-bodového modelu

Lineární stavový popis má tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (2.45)$$

kde A je matice systému řádu 4×4 , B je matice vstupu řádu 4×3 . Matice A, B dostaneme z nelineárního stavového popisu provedeme-li linearizaci v pracovním bodě (x_0, u_0) . Linearizaci nelineárního systému provedeme pomocí Taylorova rozvoje při zanedbání vyšších derivací. Lineární model bude aproximovat chování nelineárního systému v blízkém okolí pracovního bodu. Matice A, B jsou určeny z Jacobiových matic po dosazení pracovního bodu (x_0, u_0) .

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (2.46)$$

$$B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u_3} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (2.47)$$

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad u_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

Prvky matic A,B závisí na parametrech robotu. Dosadíme-li za parametry robotu naměřené hodnoty vyrobeného prototypu, dostaneme číselně matice A,B.

$$M = 0.166 \quad g = 9.81 \quad h = 0.04 \quad l = 0.076 \quad m = 0.064 \quad r = 0.15 \quad (2.48)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 58.1152 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 58.1152 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.6616 & -19.6616 \\ -22.7032 & 11.3516 & 11.3516 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

2.6 Lagrangeova metoda

Lagrangeova metoda tvorby matematického modelu je alternativou k tvorbě matematického modelu pomocí Newton-Eulerových rovnic. K sestavení Lagrangeových rovnic není potřeba znát všechny působící síly na těleso, pouze musí být splněna podmínka, že silové pole, ve kterém se těleso nachází je konzervativní. Gravitační pole je konzervativní, protože pro těleso v gravitačním poli existuje potencilonální energie. Lagrangeovi rovnice mají tvar.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.50)$$

kde

$L \triangleq T - V$ je Lagrangian,

T je kinetická energie vzhledem k inerciální soustavě,

V je potencionální energie,

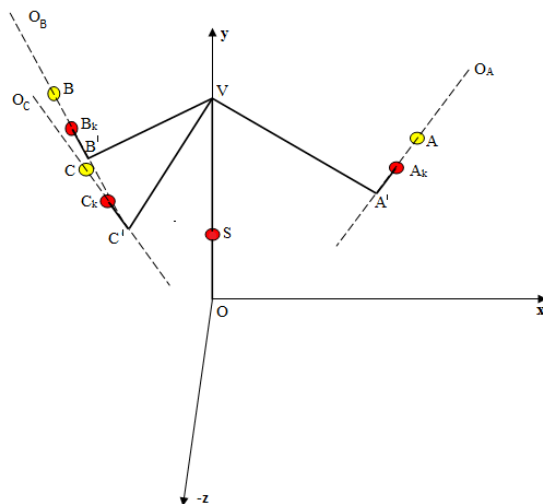
n je počet stupňů volnosti,

q_i $i=1,2,\dots,n$ jsou zobecněné souřadnice

Q_i $i=1,2,\dots,n$ jsou zobecněné síly

2.7 Parametry robotu

Při tvorbě matematického modelu pomocí Lagrangeovy metody budeme používat specifické označení parametrů robotu, které jsme odměřili z reálného prototypu. Tyto parametry nyní definujeme pomocí bodů umístěných v soustavě souřadnic viz. obrázek 2.3.



Obrázek 2.3: Soustava souřadnic s modelem robotu

Konstrukci robota namodelujeme jako soustavu hmotných bodů, které jsou na obrázku 2.3 znázorněny pomocí červených a žlutých koleček. Červené kolečka znázorňují ty hmotné body (A_K , B_K , C_K , S), které jsou pevně svázány s konstrukcí robota. Žluté kolečka znázorňují hm. body (A , B , C), které mění polohu vůči konstrukci robota v příslušných osách O_A , O_B , O_C . Ostatní body mají význam při definování parametrů modelu robota.

Seznam parametrů robota:

Hmota:

hmotný bod	parametr	velikost parametru[kg]
A_k	m_c	0.0165
B_k	m_c	0.0165
C_k	m_c	0.0165
A	m_z	0.0475
B	m_z	0.0475
C	m_z	0.0475
S	m_T	0.166

Příslušné rozměry charakterizující konstrukci robota nadefinujeme pomocí velikostí vektorů, které označíme koncovým a počátečním bodem viz. obrázek 2.3.

Vzdálenosti:

velikost vektoru	parametr	velikost parametru[m]
$ \overrightarrow{A'A_K} $	d_0	0.0286
$ \overrightarrow{B'B_K} $	d_0	0.0286
$ \overrightarrow{C'C_K} $	d_0	0.0286
$ \overrightarrow{A'A} $	δA	(-0.0286,0.0286)
$ \overrightarrow{B'B} $	δB	(-0.0286,0.0286)
$ \overrightarrow{C'C} $	δC	(-0.0286,0.0286)
$ \overrightarrow{OS} $	l_T	0.076
$ \overrightarrow{OV} $	l	0.209
$ \overrightarrow{VA'} $	r	0.2176
$ \overrightarrow{VB'} $	r	0.2176
$ \overrightarrow{VC'} $	r	0.2176

2.8 Odvození Lagrangeova modelu robota

2.8.1 Popis polohy v soustavě souřadnic

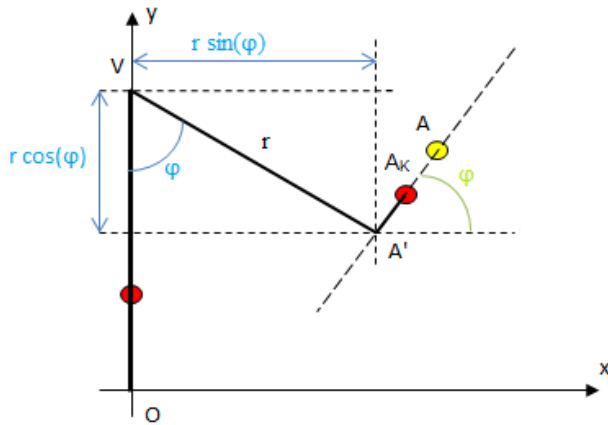
Polohu jednotlivých hmotných bodů v s.s. vyjadřují příslušné průvodiče, což jsou vektory s počátečním bodem v počátku s. s. a koncovým bodem v příslušném hmotném bodu. Na obrázku 2.3 vidíme, že tělo robota leží v ose Y, proto x-ova a z-ova souřadnice průvodiče \mathbf{r}_S budou nulové. Body (A', A_K, A) leží v rovině XY, proto průvodiče $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_{A_K}$ budou mít z-ovou souřadnici nulovou. Platí tedy:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ l_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{r}_{A_K} = \begin{bmatrix} r \sin(\varphi) + \cos(\varphi)d_0 \\ l - r \cos(\varphi) + \sin(\varphi)d_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}d_0 \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}d_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

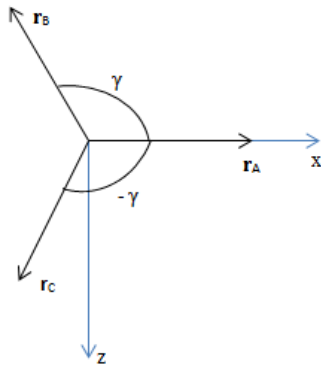
$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} r \sin(\varphi) + \cos(\varphi)(d_0 + \delta_A) \\ l - \cos(\varphi) + \sin(\varphi)(d_0 + \delta_A) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(d_0 + \delta_A) \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(d_0 + \delta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Odvození těchto vztahů si lépe představíme zobrazením části robota v rovině XY viz. obr. 2.4, kde úhel $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



Obrázek 2.4: Částečný model robota

Abychom dostali zbylé průvodiče hmotných bodů, provedeme rotaci průvodičů $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_{A_K}$ kolem osy Y o úhel $\gamma = \pm \frac{2\pi}{3}$, neboť mají ramena robota mezi sebou odchylku právě γ , což je vidět při zobrazení robota v rovině XZ viz. obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Model robota v rovině XZ

Platí tedy:

$$\mathbf{r}_B = R_y(\gamma)\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}(r + \delta_B + d_0) \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2}(r - \delta_B - d_0) \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}(r + \delta_B + d_0) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{r}_{BK} = R_y(\gamma)\mathbf{r}_{AK} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}(r + d_0) \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2}(r - d_0) \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}(r + d_0) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{r}_C = R_y(-\gamma)\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}(r + \delta_C + d_0) \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2}(r - \delta_C - d_0) \\ \frac{\sqrt{6}}{8}(r + \delta_C + d_0) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{r}_{CK} = R_y(-\gamma)\mathbf{r}_{AK} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}(r + d_0) \\ l - \frac{\sqrt{2}}{2}(r - d_0) \\ \frac{\sqrt{6}}{4}(r + d_0) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

kde $R_y(\gamma)$ je matice rotace kolem osy Y o úhel γ :

$$R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

2.8.2 Sestavení Lagrangianu

K sestavení Lagrangianu potřebujeme určit počet stupňů volnosti a zobecněné souřadnice modelu robota. Model robota má 5 stupňů volnosti, protože může konat 5 nezávislých pohybů v různých osách (osy viz. obrázek 2.3). Přehled pohybů:

typ pohybu	osa pohybu	časově proměnné parametry
translace	osa O_A	$\delta A(t)$
translace	osa O_B	$\delta B(t)$
translace	osa O_B	$\delta B(t)$
rotace	osa X	$\alpha(t)$
rotace	osa Z	$\beta(t)$

Koná-li konstrukce robota rotaci kolem os X a Z, pak se podle toho mění i příslušné průvodiče hm. bodů. Rotaci robota musíme zahrnout ve vyjádření polohy, proto všechny průvodiče přenásobíme maticí rotace R_{xz} :

$$R_{xz} = R_z(\beta)R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_{xz} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta)\cos(\alpha) & \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\cos(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Nyní můžeme vyjádřit potenciální energii všech hmotných bodů \mathbf{V} v gravitačním poli, kde tíhová síla působí ve směru osy $-Y$ podle vzorce:

$$V_g = \sum_i m_i g \cdot h_i \quad (2.59)$$

kde g je gravitační zrychlení, m_i jsou příslušné hmotnosti bodů a $h_i = \mathbf{r}(2)$ jsou vždy y -ové souřadnice průvodiče daného hmotného bodu.

$$V_g = g\{m_z[\mathbf{r}_A(2) + \mathbf{r}_B(2) + \mathbf{r}_C(2)] + m_c[\mathbf{r}_{A_K}(2) + \mathbf{r}_{B_K}(2) + \mathbf{r}_{C_K}(2)] + m_T \mathbf{r}_S(2)\}$$

Dále do potenciální energie patří také, potenciální energie pružnosti:

$$V_p = \sum_i \frac{1}{2} k y_i^2 = \frac{1}{2} k [(a - \delta A)^2 + (a - \delta B)^2 + (a - \delta C)^2] \quad (2.60)$$

kde k je tuhost pružiny, na které jsou zavěšeny body A,B,C a y_i je výchylka z rovnovážné polohy, a je délka nezatížené pružiny pružiny. Celková potenciální energie \mathbf{V} je dána součtem:

$$\mathbf{V} = V_g + V_p \quad (2.61)$$

Abychom určili kinetickou energii potřebujeme znát rychlosti jednotlivých hmotných bodů. Protože rychlost je časovou derivací polohy, zderivujeme polohové vektory podle času. Časově závislé jsou parametry, které souvisejí s pohybem, jsou to parametry $\delta A(t)$, $\delta B(t)$, $\delta C(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$. Úplný popis složek pro rychlosti jsou uvedeny v příloze.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_A &= \begin{bmatrix} v_A(1) \\ v_A(2) \\ v_A(3) \end{bmatrix} & \mathbf{v}_B = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_B &= \begin{bmatrix} v_B(1) \\ v_B(2) \\ v_B(3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_C = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} v_C(1) \\ v_C(2) \\ v_C(3) \end{bmatrix} & \mathbf{v}_S = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_S &= \begin{bmatrix} -c_\beta \left(\frac{d}{dt} \beta\right) c_\alpha l T + s_\beta s_\alpha \left(\frac{d}{dt} \alpha\right) l T \\ -s_\beta \left(\frac{d}{dt} \beta\right) c_\alpha l T - c_\beta s_\alpha \left(\frac{d}{dt} \alpha\right) l T \\ c_\alpha \left(\frac{d}{dt} \alpha\right) l T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pro rychlosti bodů A_K , B_K , C_K platí obdobné vztahy jako pro rychlosti v_A, v_B, v_C , jen u nich nefigurují parametry změny polohy $\delta_A, \delta_B, \delta_C$.

$$\mathbf{v}_{A_K} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{A_K} \quad \mathbf{v}_{B_K} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{B_K} \quad \mathbf{v}_{C_K} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{C_K} \quad (2.62)$$

Celková kinetická energii soustavy hm. bodů robota \mathbf{T} je dána součtem dílčích kin. energií:

$$\mathbf{T} = T_A + T_B + T_C + T_S + T_{A_K} + T_{B_K} + T_{C_K} \quad (2.63)$$

kde pro kinetickou energii i -tého hmotného bodu o hmotnosti m_j platí:

$$T_i = \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad (2.64)$$

Teď již můžeme sestavit Lagrangian, který je dán rozdílem celkové kinetické a potenciální energie soustavy:

$$L = \mathbf{T} - \mathbf{V} \quad (2.65)$$

2.8.3 Sestavení Lagrangeových rovnic

Nyní již máme vyjádřen potřebný matematický popis. Sestavíme tedy Lagrangeovi rovnice dle vztahu (2.50). Kde provedeme substituci časově proměnných parametrů a jejich časových derivací na zobecněné souřadnice:

časově prom. parametr	zobecněné značení
$\delta A(t)$	q_{10}
$\frac{d}{dt}\delta A(t)$	q_{11}
$\frac{d^2}{dt^2}\delta A(t)$	q_{12}
$\delta B(t)$	q_{20}
$\frac{d}{dt}\delta B(t)$	q_{21}
$\frac{d^2}{dt^2}\delta B(t)$	q_{22}
$\delta C(t)$	q_{30}
$\frac{d}{dt}\delta C(t)$	q_{31}
$\frac{d^2}{dt^2}\delta C(t)$	q_{32}
$\alpha(t)$	q_{40}
$\frac{d}{dt}\alpha(t)$	q_{41}
$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)$	q_{52}
$\beta(t)$	q_{50}
$\frac{d}{dt}\beta(t)$	q_{51}
$\frac{d^2}{dt^2}\beta(t)$	q_{52}

Na soustavu hmotných bodů působí síly způsobené změnou polohy hmotných bodů A, B, C . Máme tedy soustavu 5 lineárních rovnic, kterou vyřešíme pro neznámé $q_{12}, q_{22}, q_{32}, q_{42}, q_{52}$ a následně využijeme k sestavení stavového popisu.

$$\begin{aligned}
 a_1 + b_1 q_{12} + f_1 q_{52} &= F_1 - b q_{11} \\
 a_2 + b_1 q_{22} + e_2 q_{42} + f_2 q_{52} &= F_2 - b q_{21} \\
 a_3 + b_1 q_{32} + e_3 q_{42} + f_2 q_{52} &= F_3 - b q_{31} \\
 a_4 + c_4 q_{22} - c_4 q_{32} + e_4 q_{42} + f_4 q_{52} &= 0 \\
 a_5 + b_5 q_{12} + c_5 q_{22} + c_5 q_{32} + e_5 q_{42} + f_5 q_{52} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

kde jsme pro soustavu lineárních rovnic zavedli opět substituce $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$. Substituce i řešení soustavy 2.67 jsou uvedeny v příloze.

2.9 Stavová reprezentace L-modelu

Stavovou reprezentaci nelineárního systému 10.řádu dostaneme z Lagrangeových rovnic uvažujeme-li stavové respektive vstupní proměnné jako příslušné zobecněné souřadnice respektive síly takto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \\ q_{40} \\ q_{50} \\ q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \\ q_{41} \\ q_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Stavová reprezenatce:

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \\ g_9 \\ g_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \\ q_{42} \\ q_{52} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$y(t) = I\mathbf{x}(t)$$

kde q_{i2} , $i = 1, 2, \dots, 5$ jsou řešením soustavy (1.66) a I je identická matice 10×10 .

2.9.1 Lineární stavový popis L-modelu

Lineární stavový popis má tento maticový tvar:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.69)$$

kde matice systému A je řádu 10×10 , B je matice vstupu řádu 10×3 . Linearizovaný stavový model dostaneme pomocí Taylorova rozvoje nelineárního systému v pracovním bodě (x_0, u_0) při zanedbání vyšších členů rozvoje. Tento lineární model bude aproximovat chování nelineárního systému v blízkém okolí pracovního bodu. Matice A, B jsou určeny z Jacobiových matic po dosažení pracovního bodu (x_0, u_0) takto:

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad u_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$A = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{10}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{10}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{10}}{\partial x_{10}} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \quad (2.70)$$

$$B = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{10}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_{10}}{\partial u_3} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \quad (2.71)$$

Prvky matic A,B závisí na parametrech robotu. Dosadíme-li za parametry robotu naměřené hodnoty vyrobeného prototypu, dostaneme číselně matice A,B.

$$a = 0 \quad b = 1 \quad d_0 = 0.035 \quad g = 9.81 \quad k = 10 \quad l = 0.209 \quad lT = 0.076$$

$$m_c = 0.0165 \quad m_k = 0.166 \quad m_z = 0.0475 \quad r = 0.2176$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -215.80 & 2.63 & 2.63 & -11.34 & 0 & -22.05 & 0.50 & 0.50 & 0 & 0 \\ 2.63 & -215.80 & 2.63 & 5.67 & -9.82 & 0.5 & -22.05 & 0.50 & 0 & 0 \\ 2.63 & 2.63 & -215.80 & 5.67 & 9.82 & 0.50 & 0.50 & -22.05 & 0 & 0 \\ 75.25 & -37.63 & -37.63 & 63.01 & 0 & 14.25 & -7.13 & -7.13 & 0 & 0 \\ 0 & 65.17 & -65.17 & 0 & 63.01 & 012.34 & -12.34 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4974 & -0.4974 & 22.0475 \\ -0.4974 & 22.0475 & -0.4974 \\ 22.0475 & -0.4974 & -0.4974 \\ -14.2495 & 7.1247 & 7.1247 \\ 0 & -12.3404 & 12.3404 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

3 Návrh řídicího systému

3.1 Lineární kvadratický regulátor (LQR)

LQR problém se zabývá nalezením optimálního regulátoru ve smyslu minima integrálního kvadratického kritéria. Pro lineární spojité systém s nekonečným časovým horizontem řízení má kritérium tvar:

$$I = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt \rightarrow \min \quad (3.1)$$

kde předpokládáme, že Q je pozitivně semidefinitní matice řádu $n \times n$, která váží odchylku a R je pozitivně definitní matice řádu $m \times m$, která váží řízení. Předpokládáme tedy, že systém má stavový popis:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n je řád systému, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, m je počet vstupů, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, p je počet výstupů systému. Řízení bude realizováno stavovým regulátorem:

$$u(t) = Fx(t) \quad (3.3)$$

Nutnou podmínkou nalezení zpětnovazební matice F je, aby byl systém říditelný. Systém je říditelný, pokud má matice říditelnosti Q_c plnou sloupcovou hodnotu ($\text{rank}(Q_c) = n$):

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{\nu-1}B] \quad (3.4)$$

kde $\nu \in [1..n]$ je index říditelnosti. Uzavřený systém má tedy tvar:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3.5)$$

Dále víme, že stavy v čase $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ jsou:

$$x(0) = x_0 \quad x(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.6)$$

Řešením integrálu I je primitivní funkce $V(t)$ ve tvaru:

$$V(t) = -x(t)^T P x(t) \quad (3.7)$$

kde $P \geq 0$ je semidefinitní matice. Dosadíme-li do integrálu I vztahy (3.3) a (3.7), potom dostaneme následující rovnost:

$$I = \int_0^{\infty} x^T(Q + F^T R F)x dt = \int_0^{\infty} \dot{V}(t)dt = [V(t)]_0^{\infty} = \underbrace{V(\infty)}_{=0} - V(0) = x_0^T P x_0 \quad (3.8)$$

kde P je řešení rovnice:

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) + Q + F^T R F = 0 \quad (3.9)$$

3.1.1 Zpětnovazební matice podezřelé z extrému

Z rovnice (3.9) pro zpětnovazební matici $F \rightarrow F + sX$ dostaneme:

$$(A + B(F + sX))^T P(s) + P(s)(A + B(F + sX)) + Q + (F + sX)^T R(F + sX) = 0 \quad (3.10)$$

Derivováním podle s obdržíme:

$$\begin{aligned} (BX)^T P(s) + [A + B(F + sX)]^T \dot{P}(s) + \dot{P}(s)[A + B(F + sX)] + (BX)P(s) + \\ + X^T R(F + sX) + (F + sX)^T R X = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Je-li F podezřelá z extrému, potom platí:

$$\forall x_0 : \dot{I}(s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} x_0^T P(s) x_0|_{s=0} = x_0^T \dot{P}(s) x_0|_{s=0} = 0 \Rightarrow \dot{P}(s) = 0 \quad (3.12)$$

Pokud tedy položíme $s = 0$, potom z rovnice (3.11) dostaneme:

$$(BX)^T P(0) + P(0)BX + X^T R F + F^T R X = 0 \quad (3.13)$$

Současně také z rovnice (3.10) plyne:

$$(A + BF)^T P(0) + P(0)(A + BF) + Q + F^T R F = 0 \quad (3.14)$$

Upravíme-li rovnici (3.13) dostaneme:

$$X^T (B^T P(0) + R F) + (P(0)B^T + F^T R)X = 0 \quad (3.15)$$

Protože tato rovnice (3.15) musí platit pro $\forall X$, je zpětnovazební matice určena vztahem:

$$B^T P(0) + R F = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(0) \quad (3.16)$$

Kde P(0) je řešení rovnice (3.14). Dosadíme-li tuto zpětnovazební matici (3.16) do rovnice (3.14) dostaneme po úpravě Algebraickou Riccatiovou rovnicí:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3.17)$$

Toto odvození je pravdivé za předpokladu, že pro zvolenou matici F je matice A+BF stabilní.

3.1.2 Řešení problému LQR

Pro přehlednost řešení úlohy znovu zopakujeme předpoklady a dosažené řešení. Tedy předpokládáme systém a kritérium ve tvaru:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

$$I = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \rightarrow \min, \quad Q \geq 0, \quad R > 0$$

Potom pro stavovou zpětnou vazbu (F nezávisí na x_0) platí:

$$u = Fx$$

$$F = -R^{-1}B^T P$$

$$I = x_0^T P x_0$$

kde $P > 0$ je řešení tvz. algebraické Ricatiovy rovnice (3.17).

3.2 Metoda přiřazení Jordanovi formy (JFA)

Zpětnovazebnímu systému chceme přiřadit Jordanovu formu, protože tím zachováme **všechny spektrální vlastnosti** zvolené matice L , což bychom nedocílili, pokud bychom přiřadili pouze vlastní čísla. Přiřazení Jordanovi formy (**J**ordan **F**orm **A**ssignment-**JFA**) může být úplné (přiřazovaná Jordanova matice L má stejnou dimenzi jako matice systému A) nebo neúplné (dimenze přiřazované Jordanovi matice je menší než dimenze matice systému $\dim(A) > \dim(L$). Úplné přiřazení JFA používáme, pokud chceme uzavřenému systému přiřadit všechna vlastní čísla, pokud je tedy přiřazení všech vlastních čísel možné. Rozlišujeme tyto zpětné vazby - stavovou zpětnou vazbu:

$$u(t) = Fx(t) \quad (C = I) \tag{3.18}$$

kde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a výstupní zpětnou vazbu:

$$u(t) = Ky(t) = KCx(t) \tag{3.19}$$

kde $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

- pro $p = n$ je úplné přiřazení JF
- pro $p < n$ je neúplné přiřazení JF

3.2.1 JFA pro stavovou zpětnou vazbu

Hlavní myšlenkou JFA metody pro stavovou zpětnou vazbu je, že požadujeme podobnost matice uzavřeného systému s přiřazovanou Jordanovou formou:

$$(A + BF) \sim L \tag{3.20}$$

Matice (3.20) jsou podobné právě tehdy, pokud existuje regulární matice X taková, že platí:

$$A + BF = X L X^{-1} \tag{3.21}$$

neboli

$$AX - XL + BFX = 0 \quad (3.22)$$

Zavedeme - li substituci $Q = FX$, přepíšeme rovnici (3.22) na tvar:

$$AX - XB + BQ = 0$$

Obrátíme-li postup dostaneme proceduru pro výpočet žádané zpětné vazby F :

- a) Zvolíme náhodně matici $Q \in R^{m \times n}$.
- b) Vyřešíme maticovou rovnici $AX - XL + BQ = 0$, řešení $X(Q)$ je genericky regulární pro skoro každou matici Q .
- c) Protože platí:

$$A + BQX^{-1} = XLX^{-1}$$

je zpětnovazební matice $F(Q)$ dána vztahem:

$$F(Q) = QX^{-1}(Q) \quad (3.23)$$

Uvedená **heuristická procedura** vyžaduje matematické zpřesnění. Množinu všech stavových zpětných vazeb označíme:

$$\mathcal{F}(A, B, L) \triangleq \{F \in R^{m \times n} : A + BF \sim L\} \quad (3.24)$$

a parametrickou matici

$$Q \triangleq \{Q \in R^{m \times n} : AX - XL + BQ = 0, \det[X(Q)] \neq 0\}$$

Nechť existuje neprázdná množina stavových zpětných vazeb $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$, průnik spekter matic (A, L) je také neprázdná množina $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$, potom řešení $X(Q)$ maticové rovnice

$$AX - XL + BQ = 0 \quad (3.25)$$

je regulární pro skoro každou matici $Q \in R^{m \times n}$.

3.2.2 Explicitní parametrizace stavové zpětné vazby

Výše uvedená heuristická procedura neuvažuje, že bychom mohli volit prvky matice Q cíleně. V heuristické metodě volíme všechny prvky matice Q , tedy $m \times n$ parametrů, což je relativně velký počet pro optimalizaci těchto parametrů. Obecně bychom chtěli volit jen tolik volných parametrů, kolik je nezbytně nutné k nalezení zpětnovazební matice F . Pro zvolené přiřazení Jordanových bloků matice L , chceme nalézt matici $Q(\alpha)$, která bude mít minimální počet volných parametrů α_i , $i = 1, \dots, r$ a explicitně jimi parametrizovat zpětnou vazbu $F(\alpha)$:

$$F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1}(\alpha) \quad (3.26)$$

kde minimální počet parametrů je dán vztahem:

$$r = mn - \nu_1 - \dots - (2k - 1)\nu_k$$

a nalezení struktury matice $Q(\alpha)$ zajistí následující algoritmus uvedený v práci [3]:

vstup: $L = \text{diag}[L_1^1, L_1^2, \dots, L_1^{l_1} | L_2^1, L_2^2, \dots, L_2^{l_2} | \dots | L_k^1, L_k^2, \dots, L_k^{l_k}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$

L_i^j - jsou reálné Jordanovi bloky velikosti n_i^j odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_j \in \Lambda(L)$

$$n_1^j \geq n_2^j \geq \dots \geq n_k^j, \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$$

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{l_i} n_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

m je počet vstupů

výstup: $Q(\alpha)$

1) Vygeneruj nulovou matici Q velikosti $m \times n$

2) Přičiň **1** do následujících prvků $Q(x,y)$:

$$Q(1,1), Q(1, n_1^1 + 1), \dots, Q(1, \sum_{i=1}^{l_1-1} n_1^i + 1);$$

$$Q(2, \nu_1), Q(2, \nu_1 + n_2^1 + 1), \dots, Q(2, \nu_1 + \sum_{i=1}^{l_2-1} n_2^i + 1);$$

....

$$Q(k, \sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + 1), Q(k, \sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + n_k^1 + 1), \dots, Q(k, \sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + \sum_{i=1}^{l_k-1} n_k^i + 1);$$

3) Přičiň volné parametry α_i do následujících prvků matice $Q(x,y)$:

pro $j=2,3, \dots, k$

$$Q(j,1), Q(j,2), \dots, Q(j, n_1^1 - n_j^1);$$

$$Q(j, n_1^1 + 1), Q(j, n_1^1 + 2), \dots, Q(j, n_1^1 + n_1^2 - n_j^2);$$

...

$$Q(j, \sum_{i=1}^{l_1-1} n_1^i + 1), Q(j, \sum_{i=1}^{l_1-1} n_1^i + 2), \dots, Q(j, \sum_{i=1}^{l_1-1} n_1^i + n_1^{l_1} + n_j^{l_1});$$

pro $j=3,4, \dots, k$

$$Q(j, \nu_1 + 1), Q(j, \nu_1 + 2), \dots, Q(j, \nu_1 + n_2^1 - n_j^1);$$

$$Q(j, \nu_1 + n_2^1 + 1), Q(j, \nu_1 + n_2^1 + 2), \dots, Q(j, \nu_1 + n_2^1 + n_2^2 - n_j^2);$$

...

$$Q(j, \nu_1 + \sum_{i=1}^{l_2-1} n_2^i + 1), Q(j, \nu_1 + \sum_{i=1}^{l_2-1} n_2^i + 2), \dots, Q(j, \nu_1 + \sum_{i=1}^{l_2-1} n_2^i + n_2^{l_2} + n_j^{l_2});$$

$$Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + 1), Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + 2), \dots, Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + n_{k-1}^1 - n_k^1);$$

$$Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + n_{k-1}^1 + 1), Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + n_{k-1}^1 + 2), \dots, Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + n_{k-1}^2 - n_k^2);$$

...

$$Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + \sum_{i=1}^{l_{k-1}-1} n_{k-1}^i + 1), Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + \sum_{i=1}^{l_{k-1}-1} n_{k-1}^i + 1 + 2), \dots,$$

$$Q(k, \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + \sum_{i=1}^{l_{k-1}-1} n_{k-1}^i + n_{k-1}^{l_{k-1}} - n_k^{l_{k-1}});$$

$$Q(i,j), \text{ pro } i = k+1, k+2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, s$$

3.2.3 JFA pro výstupní zpětnou vazbu

O výstupní zpětné vazbě mluvíme v případě, že nemáme k dispozici informaci o vektoru stavu. Pro tento případ se problém přiřazení Jordanovi formy stává složitější. Označíme množinu všech výstupních zpětných vazeb:

$$\mathcal{K}_s(A, B, L) \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times p} : (A + BK) \sim \begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\} \quad (3.27)$$

kde symboly $*$ označují libovolné reálné matice. Nyní uvedeme přístup nalezení výstupní zpětné vazby, který převádí tento problém nalezení $K \in \mathcal{K}_s$ na problém nalezení stavové zpětné vazby $F \in \mathcal{F}_s$ jiného ekvivalentního systému takové, že matice F obsahuje $m(n-p)$ nulových prvků. Uvažujeme stavový popis (3.2) a transformaci stavu:

$$z(t) = Tx(t) = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad x(t) = T^{-1}z(t) \quad (3.28)$$

kde matici $D \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ volíme tak, aby matice T byla regulární. Potom lze napsat stavový popis ekvivalentního systému $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}z(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1} = [I_p \ 0]$, $I_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$, pro tento ekvivalentní systém máme řízení (pro $F = K\bar{C}$) ve tvaru:

$$u(t) = Ky(t) = K\bar{C}z(t) = Fz(t) \quad (3.30)$$

Uvědomme si souvislost podobnosti matic ekvivalentních systémů s maticí L :

$$\begin{aligned} \bar{A} + \bar{B}F &\sim L \\ TAT^{-1} + TBF &\sim L \\ A + BKC &\sim L \end{aligned}$$

Nyní je tedy nutné nalézt pomocí JFA stavovou zpětnou vazbu $F = [F_1 \ F_2]$ takovou, že $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-p)}$, pro niž bude $F_2 = [0]$. Potom pro výstupní zpětnou vazbu platí:

$$K = F_1 \quad (3.31)$$

Přesné algoritmy nalezení explicitní zpětnovazební matice $F(\alpha)$ takové, aby byla F_2 nulová jsou uvedeny v práci [6]. Při nulování matice F_2 se počet nezávislých volných parametrů α_i většinou sníží.

3.3 Robustnost zpětnovazebního systému

Nalezením robustní stavové a výstupní zpětné vazby dle určitého kritéria se zabývá práce [3]. Pro náhled na věc je důležité znát teorii robustnosti. Výše jsme si naznačili jak explicitně parametrizovat zpětnovazební matice $F(\alpha)$ pomocí r volných parametrů. Díky volným parametrům α_i můžeme hledat matici $F(\alpha) \in \mathcal{F}(A, B, L)$ takovou, aby byl uzavřený systém v určitém smyslu optimální.

Při modelování například mechanických soustav uvažujeme různé hodnoty parametrů jako je hmotnost, tuhosti pružin, délky pružin a jiné konstanty, tyto parametry však většinou neznáme přesně. Na těchto parametrech ovšem závisí matice dynamiky systému, kterou uvažujeme při návrhu zpětné vazby. Pokud při perturbaci všech prvků matice dynamiky zůstane uzavřený systém stabilní, mluvíme o **robustní stabilitě systému**. Chceme tedy aby zpětnovazební matice byla stabilní i pokud k ní přičteme perturbační matici:

$$(A + \Delta) + BF = (A + BF) + \Delta \quad (3.32)$$

kde Δ je perturbační matice.

Podobný problém nastává při realizaci regulátoru v praxi, kdy nemůžeme použít u regulátoru velký počet platných cifer. Od tohoto regulátoru požadujeme, aby i při perturbacích ve zpětné vazbě byl uzavřený systém stabilní, tedy aby regulátor nebyl fragilní (křehký). Chceme, aby **regulátor nebyl fragilní**, tedy aby uzavřený systém zůstal stabilní i po přičtení perturbační matice Δ ke zpětné vazbě:

$$A + B(F + \Delta) = (A + BF) + B\Delta \quad (3.33)$$

Stejně tak pro výstupní zpětnou vazbu by měl být uzavřený systém stabilní:

$$A + B(K + \Delta)C = (A + BKC) + B\Delta C \quad (3.34)$$

3.3.1 Kritéria robustnosti

Jako jedno z kritérií robustnosti bychom mohli uvažovat například, že najdeme **vlastní číslo z** matice uzavřené smyčky A_c , jehož reálná složka je největší (tj. spektrální abscissa $\alpha(A_c)$):

$$\alpha(A_c) = \max \{ \operatorname{Re}(z) : z \in \Lambda(A_c) \} \quad (3.35)$$

Tedy hledané **vlastní číslo z** je nejbližší k imaginární ose. $\operatorname{Re}(z)$ je reálná část čísla z a $\Lambda(A_c)$ je spektrum matice uzavřeného systému např. pro stavovou zpětnou vazbu $A_c = A + BF$. Toto kritérium má však nevýhodu v tom, že je velmi citlivé na změny v prvcích matice A_c .

Proto nás zajímá, jaké perturbace vedou k nestabilitě matice A_c . Máme matici komplexních perturbací $\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pro kterou je euklidovská norma $\|\Delta\|_2 < \varepsilon$. Pokud matici perturbací přičteme ke zpětnovazební matici,

$$X = A_c + \Delta$$

chceme, aby matice X byla stabilní. Spektrum této matice označujme jako komplexní ε -pseudospektrum:

$$\Lambda_\varepsilon^{\mathbb{C}}(X) = \{ z : z \in \Lambda(A_c + \Delta), \text{ pro } \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|\Delta\|_2 < \varepsilon \} \quad (3.36)$$

nebo pro matici Δ reálných perturbací označujeme reálné ε -pseudospektrum:

$$\Lambda_\varepsilon^{\mathbb{R}}(X) = \{z : z \in \Lambda(A_c + \Delta), \text{ pro } \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|\Delta\|_2 < \varepsilon\} \quad (3.37)$$

Jako vhodnější kritérium stability bychom nyní mohli považovat velikost perturbací ε , pro které by leželo nějaké vlastní číslo z množiny $\Lambda_\varepsilon(X)$ na imaginární ose, toto číslo nazýváme **poloměr stability**:

$$r_F = \inf \{\|\Delta\| : \Delta \in F^{n \times n} \wedge (A_c + \Delta) \text{ je nestabilní}\} \quad (3.38)$$

kde pro $F = \mathbb{C}$ nebo $F = \mathbb{R}$ máme **komplexní** nebo **reálný poloměr stability**.

V praktických příkladech nás zajímají spíše reálné perturbace, ale reálný poloměr stability $r_{\mathbb{R}}(X)$ je výpočetně mnohem složitější. Koplexní poloměr stability $r_{\mathbb{C}}(X)$ slouží jako dolní odhad pro reálný poloměr stability.

4 Symetrie systému

4.1 Definice symetrie

Lineární systém popsany stavovým popisem:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

je **vstupně symetrický**, jestliže existuje regulární matice T, pro kterou platí:

$$TAT^{-1} = A \quad (4.2)$$

$$TB = BG \quad (4.3)$$

kde matice G je sestavené z jednotkové matice I záměnou sloupců např. takto:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dále chceme definovat **symetrii stavové zpětné** vazby ($u = Fx$):

$$\dot{x} = (A + BF)x \quad (4.4)$$

Tedy stavová zpětná vazba $F \in R^{m \times n}$ přiřazující Jordanovu formu L je symetrická, jestliže platí:

$$A + BF \sim L \quad (4.5)$$

a zároveň dvojice $(A+BF, B)$ je vstupně symetrická.

4.2 Podmínky symetrie systému

Máme dvojici (A, B) , kde A je matice systému a B matice vstupu.

1) Dvojici (A, B) převedeme do Jordanovy formy, tedy platí:

$$J = RAR^{-1} \quad \wedge \quad \tilde{B} = RB \quad (4.6)$$

- 2) Nalezneme obecný tvar pro zaměnitelné matice $W \in \mathbb{Z}(J)$ s maticí J , pro které musí platit:

$$WJ = JW \quad \Rightarrow \quad WJW^{-1} = J \quad (4.7)$$

- 3) Ze vztahu (4.3) dostaneme soustavu lineárních rovnic, kde neznámé jsou prvky matice W :

$$W\tilde{B} = \tilde{B}G \quad \Rightarrow \quad WRB = RBG \quad (4.8)$$

Systém (A,B) je **vstupně symetrický**, právě tehdy když **existuje řešení soustavy** (4.8) a zároveň je matice **W regulární**.

4.3 Podmínky zpětnovazební symetrie

Vydeme z podobnosti zpětnovazební matice $(A+BF)$ a požadované Jordanovi formy matice L , jsou-li tyto matice podobné \Rightarrow existuje matice Q a matice X , která je regulární ($\det(X) \neq 0$). Matice X je řešením rovnice:

$$AX - XL + BQ = 0 \quad (4.9)$$

Dannou podobnost těchto matic můžeme zapsat rovnicí:

$$A + BF = XLX^{-1} \quad (4.10)$$

Dále můžeme matici X předpokládat v součinném tvaru:

$$X = X_0\bar{Z} \quad (4.11)$$

kde matice \bar{Z} patří do množiny zaměnitelných matic $\mathbb{Z}(L)$ s maticí L , tedy platí:

$$\mathbb{Z}(L) = \{Z : LZ = ZL, \det(Z) \neq 0\} \quad (4.12)$$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Dvojce $(A+BF, B)$ je vstupně symetrická
- Dvojce $(L, X^{-1}B)$ je vstupně symetrická
- Existuje taková zaměnitelná matice $\exists Z \in \mathbb{Z}(L)$ pro kterou platí:

$$ZX^{-1}B = X^{-1}BG \quad (4.13)$$

- Existují zaměnitelné matice $\exists Z, \bar{Z} \in \mathbb{Z}(L)$ pro které platí:

$$Z(X_0\bar{Z})^{-1}B = (X_0\bar{Z})^{-1}BG \quad (4.14)$$

Upravujeme-li rovnici (4.14) dostaneme:

$$(X_0\bar{Z})Z(X_0\bar{Z})^{-1}B = BG$$

$$X_0\bar{Z}Z\bar{Z}^{-1}B = BG$$

Součin zaměnitelných matic $\bar{Z}Z\bar{Z}^{-1}$ je opět zaměnitelná matice $\tilde{Z} \in \mathbb{Z}(L)$, proto součin označíme maticí:

$$\tilde{Z} = \bar{Z}Z\bar{Z}^{-1} \quad (4.15)$$

Dostáváme tedy jednu z maticových rovnic pro symetrii zpětnovazebního systému:

$$X_0\tilde{Z}X_0^{-1}B = BG \quad (4.16)$$

Jako druhou rovnicí uvažujeme výše odvozenou rovnici (4.8) pro vstupní symetrii systému:

$$R^{-1}WRB = BG \quad (4.17)$$

4.3.1 Nutná a postačující podmínka zpětnovazební symetrie

Je-li součin matic RB regulární a existuje-li řešení soustavy lineárních rovnic :

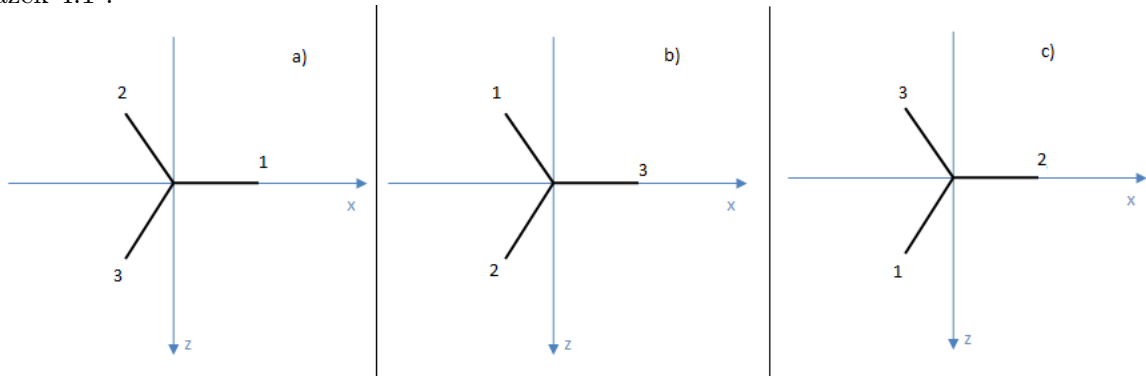
$$R^{-1}WRB = BG \quad (\vee X_0\tilde{Z}X_0^{-1}B = BG) \quad (4.18)$$

$$R^{-1}WRB = X_0\tilde{Z}X_0^{-1}B \quad (4.19)$$

kde neznámé jsou prvky matic $\tilde{Z} \in \mathbb{Z}(L)$, $W \in \mathbb{Z}(J)$, potom je dvojice $(\mathbf{A}+\mathbf{BF}, \mathbf{B})$ vstupně symetrická.

4.4 Test symetrie systému

Nyní bychom měli nejprve ověřit vstupní symetrii 4-bodového modelu jednohého robota. Vstupní symetrie spočívá v transformaci modelu robota v s.s., konkrétně tedy rotaci o 120° kolem osy Y. Pro tuto transformaci se ramena robota překrývají a předpokládáme, že vstupy jsou nezávislé na permutaci. Pro rotaci dostaneme 3 různé permutace vstupů viz. obrázek 4.1 .



Obrázek 4.1: Jednonozka v rovině XZ

Každé permutaci přísluší permutační matice $G - (G_a, G_b, G_c)$.

$$G_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Pro dvojici matic (A,B), které mají stejnou strukturu jako linearizovaný 4-bodový model, provedeme analogicky kroky uvedené v sekci **Podmínky symetrie systému**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\gamma \\ -\delta & \frac{\delta}{2} & \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Provedeme převod matice A do Jordanovi formy ($J = RAR^{-1}$):

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ -1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Dále je třeba nalézt matici zaměnitelnou s maticí J, $W \in \mathbb{Z}(J)$:

$$W = \begin{bmatrix} a & 0 & e & 0 \\ 0 & b & 0 & f \\ g & 0 & c & 0 \\ 0 & h & 0 & d \end{bmatrix}$$

Pro nalezení matice W vyřešíme soustavu lineárních rovnic:

$$R^{-1}WRB = BG \quad (4.22)$$

kde neznámé jsou prvky matice W (a,b,c,d,e,f,g,h), pro permutace ($G = G_b \vee G = G_c$) dostaneme 2 různá řešení(W_b, W_c):

$$W_b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{2\gamma+\delta}{\delta} & 0 & -\frac{\gamma}{\delta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{2\gamma+\delta}{\delta} & 0 & -\frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{1}{4} \frac{4\gamma^2+3\delta^2}{\gamma\delta} & 0 & \frac{1}{2} \frac{2\gamma-\delta}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \frac{4\gamma^2+3\delta^2}{\gamma\delta} & 0 & \frac{1}{2} \frac{2\gamma-\delta}{\delta} \end{bmatrix}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{2\gamma-\delta}{\delta} & 0 & \frac{\gamma}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{2\gamma-\delta}{\delta} & 0 & \frac{\gamma}{\delta} \\ -\frac{1}{4} \frac{4\gamma^2+3\delta^2}{\gamma\delta} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{2\gamma+\delta}{\delta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \frac{4\gamma^2+3\delta^2}{\gamma\delta} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{2\gamma+\delta}{\delta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Obě tyto matice W_c, W_b jsou regulární, mají plnou hodnotu $rank(W_b) = rank(W_c) = 4 \Rightarrow$ linearizovaný systém jednohého robota je tedy **vstupně symetrický**.

4.5 Symetrie zpětné vazby

Pro nalezení symetrické zpětné vazby využijeme nalezenou zaměnitelnou matici $W \in \mathbb{Z}(J)$, která je řešením rovnice (4.18) a tedy je třeba nalézt řešení rovnice (4.19) pro neznámou matici $\tilde{Z} \in \mathbb{Z}(L)$, kde L je blokově diagonální matice pro návrh zpětné vazby metodou přiřazení Jordanovy formy. Protože známe pouze postačující podmínku vstupní symetrie zpětnovazebního systému $(A+BF, B)$, je třeba ověřovací algoritmus opakovat pro různé Jordanovy formy podobné se zpětnovazebním systémem $A + BF \sim L$. Zvolíme různé struktury matice L a ověříme pro ně zpětnovazební symetrii.

$$L_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad L_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad L_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad L_6 = \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

Ke zvoleným strukturám matic L_j samozřejmě přísluší parametrické matice Q_j , $j = 1, 2, \dots, 6$ s volnými parametry α_i :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \alpha_8 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \alpha_8 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad Q_4 = Q_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \alpha_8 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix}$$

Pro zvolené struktury L, Q nalezneme řešení Sylvestroví rovnice (matice X):

$$AX - XL + BQ = 0 \quad (4.24)$$

Řešení X je závislé na volbě volných parametrů α_i . Pro řešitelnost rovnice (4.19) musíme parametry α_i zvolit tak, aby X_0 bylo regulární. Tuto podmínku splňují například parametry:

$$\alpha_1 = 11, \alpha_2 = 7, \alpha_4 = 11, \alpha_3 = 4, \alpha_6 = 7, \alpha_7 = 2, \alpha_8 = 10, \alpha_5 = 1$$

Nyní již máme všechny potřebné matice zvoleny tak, abychom mohli testovat zda existuje řešení rovnice (4.19) pro neznámé $\tilde{Z} \in \mathbb{Z}(L)$ při jednotlivých strukturách L .

Uvažujeme-li zaměnitelné matici $W_b, W_c \in \mathbb{L}(J)$, pak řešení existuje pro zvolené struktury matic $\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$. Rovnice:

$$RX_0\tilde{Z}(RX_0)^{-1} - WRB = 0 \quad (4.25)$$

má takovéto řešení:

	pro $W = W_b$	pro $W = W_c$
pro $L = L_3$	$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & 0 & \frac{13}{14} & 0 \\ 0 & \frac{59}{17} & 0 & \frac{111}{17} \\ -\frac{111}{14} & 0 & -\frac{43}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{43}{17} & 0 & -\frac{76}{17} \end{bmatrix}$	$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} -\frac{43}{14} & 0 & -\frac{13}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{76}{17} & 0 & -\frac{111}{17} \\ \frac{111}{14} & 0 & \frac{29}{14} & 0 \\ 0 & \frac{43}{17} & 0 & \frac{59}{17} \end{bmatrix}$
pro $L = L_4$	$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{328}{49} & \frac{13}{14} & \frac{211}{49} \\ 0 & \frac{29}{14} & 0 & \frac{13}{14} \\ -\frac{111}{14} & -\frac{15}{14} & -\frac{43}{14} & -\frac{328}{49} \\ 0 & -\frac{49}{14} & 0 & -\frac{43}{14} \end{bmatrix}$	$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} -\frac{43}{14} & -\frac{328}{49} & -\frac{13}{14} & -\frac{211}{49} \\ 0 & -\frac{43}{14} & 0 & -\frac{13}{14} \\ \frac{111}{14} & \frac{15}{14} & \frac{29}{14} & \frac{328}{49} \\ 0 & \frac{49}{14} & 0 & \frac{49}{14} \end{bmatrix}$

Ověřili jsme splnění **Postačující podmínky zpětnovazební symetrie**, která je splněna pro struktury matic L_3, L_4 . Přiřadíme-li tedy pomocí JFA metody Jordanovi formy L_3, L_4 , pak dostaneme symetrickou stavovou zpětnou:

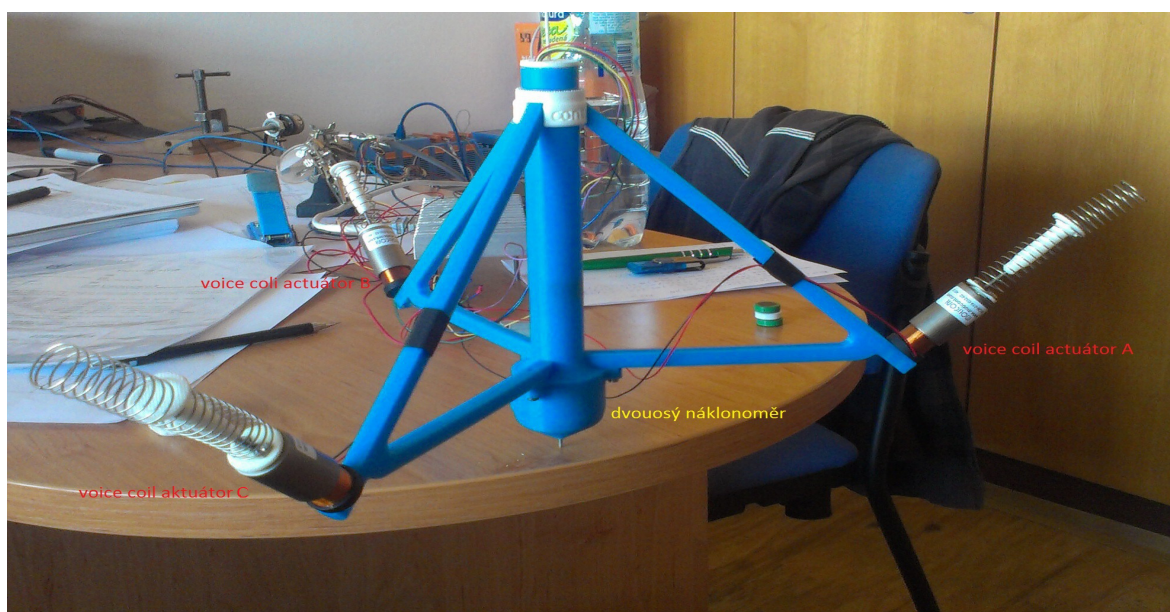
$$F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1} \quad (4.26)$$

kde X je řešením Sylvestroví rovnice:

$$AX - XL + BQ(\alpha) = 0 \quad (4.27)$$

5 Model prototypu v SimMechanics

Prostředí MATLAB/Simulink/SimMechanics je prostředí pro modelování mechanických systémů pomocí funkčních bloků. Při vytváření matematických modelů mechanických soustav například Newton-Eulerovou nebo Lagrangeovou metodou musíme dopodrobna uvažovat jednotlivé mechanické vztahy, které pro systém platí. Při vytváření modelu v SimMechanics se již nemusíme starat o popis mechanických vztahů, stačí znát pouze strukturu modelu a vědět, jak ji v programovém prostředí SimMechanics reprezentovat. Chceme vytvořit model pro prototyp jednoohého robota.

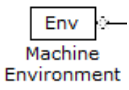
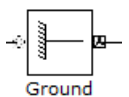

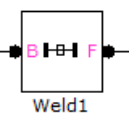
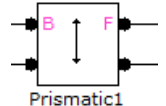
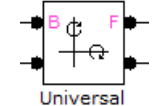
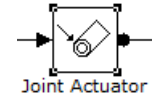
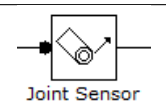
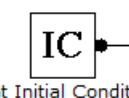


Obrázek 5.1: Prototyp jednoohého robota se 3 nezávislými lineárními voice coil aktuátory a dvouosým náklonoměrem

Na obrázku 5.1 jsou dobře vidět voice coil aktuátory, součástí každého aktuátoru je cívka a permanentní magnet, který je zavěšen na pružině. Cívky jsou pevně přišroubované k modré konstrukci robota. Dvouosý náklonoměr je na obrázku skryt, neboť je uložen v dolní rozšířené části konstrukce.

5.1 Tvorba modelu

Nyní přejdeme k modelování robota pomocí funkčních bloků v SimMechanicsu. V následující tabulce uvedeme stručný popis jednotlivých funkčních bloků, které budou použity v modelu jednoohého robota.

název bloku	funkce a parametry bloku	značka bloku
Machine Environment	blok mechanického prostředí, nastavujeme v jakém směru působí gravitační síla, připojuje se k bloku Ground	
Ground	blok uzemění, ve kterém nastavíme vztažný nepohyblivý bod, ke kterému se vztahují absolutní souřadnice (World), nečastěji [0 0 0]	
Body	reprezentuje hmotný bod, hmotné body spojujeme pomocí kloubů (Joints), nastavujeme hmotnost (mass), souřadnice připojení bodu (CS1 '=coordinate system 1', CS2) a souřadnice hmoty (CG - central of gravity)	
Weld	pevné spojení ('svar'), kloub Weld nemá žádný stupeň volnosti, obecně u všech kloubů je třeba dodržet zapojení od báze k následovníkovi (B - base, F - follower)	
Prismatic	je posuvný kloub, umožňuje translaci v jednom směru podél libovolně nadefinované osy	
Universal	je rotační kloub, umožňuje rotaci ve dvou osách, které lze libovolně nastavit	
Joint Actuator	blok, který umožňuje pohybovat kloubem v jedné ose, pokud přivedeme na jeho vstup nějaký signál	
Joint Sensor	blok, který snímá polohu a její derivace v jedné ose, nastavujeme, ve které ose veličiny snímáme a jednotky, ve kterých je snímáme	
Joint Initial Condition	blok počáteční podmínky, kde se kloub nachází při simulaci v čase $t = 0$	

K realizaci modelu je nutné znát rozměry a hmoty robota, tyto parametry jsou popsány v sekci 2.7, proto je zde nebudeme opakovaně uvádět. Model v SimMechanics odpovídá soustavě hmotných bodů na obrázku 2.3. Gravitační síla působí ve směru osy -y. Pro modelování pružin je nutné zahrnout konstantu k (tuhost pružiny) a konstantu b (tlumení). K nastavení polohy hmotných bodů jsou potřeba průvodiče hmotných bodů, které jsou uvedeny v sekci 2.8. K nastavení kloubů Prismatic jsou potřeba souřadnice os, ve kterých se body A,B,C pohybují.

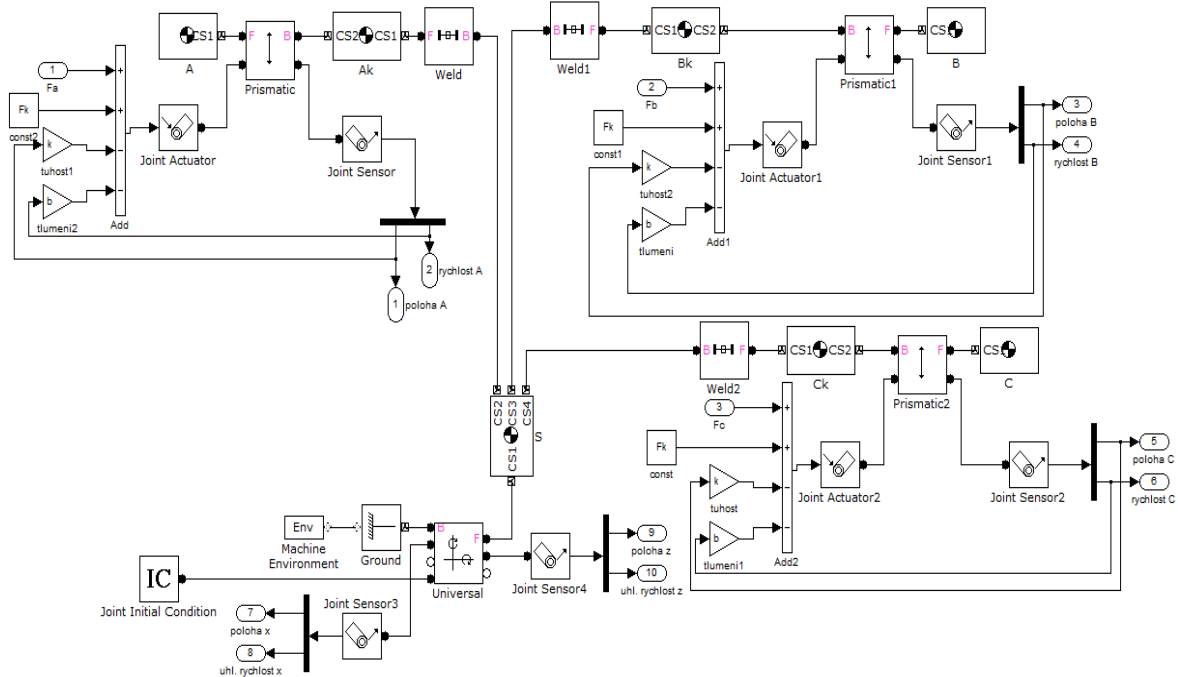
$$O_A = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$O_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$O_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Vstupy pro jednotlivé Joint Actuators jsou síly (F_a, F_b, F_c), které chceme vypočítat tak, abychom stabilizovali jednoohého robota ve svislé poloze. Na jednotlivé hmotné body A,B,C působí také síly pružin ($F_p = k \cdot \delta_i, i = A,B,C$) a tlumící síla ($F_p = k \cdot v_{\delta_i}, i = A,B,C$), které přičteme ke vstupním silám F_a, F_b, F_c . Dále přičteme kompenzační sílu F_k , což je konstanta, která zajistí, abychom měli hmotné body A,B,C ve stejné poloze jako u prototypu na obrázku 5.1. Tato síla má velikost:

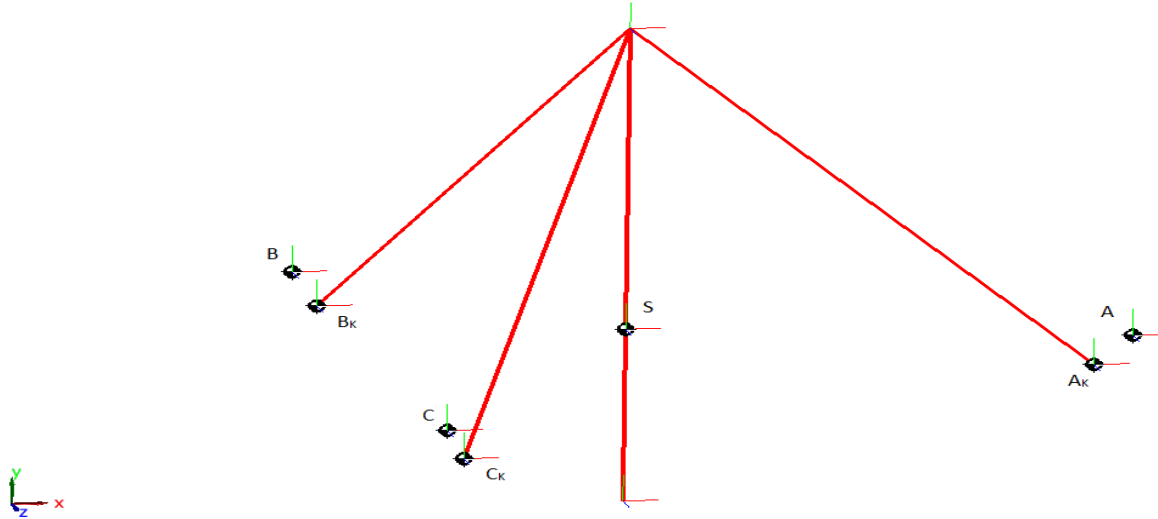
$$F_k = (m_z \cdot g + k \cdot d_0) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) \quad (5.4)$$



Obrázek 5.2: Modelové schéma v SimMechanics

5.2 Řídicí systém v SimMechanics

Vytvořený model jednohohého robota je nelineární systém 10. řádu. Tento systém je nestabilní. My však pro něj chceme navrhnout lineární řízení takové, aby byl uzavřený systém stabilizován ve svislé poloze. Pro návrh lineárního řízení je potřeba linearizovat tento model v pracovním bodě, který odpovídá svislé poloze (‘= situace, kdy průvodič těžiště r_S leží na ose Y orientovaný v kladném směru’). Na obrázku 5.3 vidíme, jak by měla vypadat animace v SimMechanics (navíc jsou popsány hmotné body).



Obrázek 5.3: Animace v SimMechanics

K linearizaci modelu použijeme příkaz v Matlabu `linmod('navez_modelu')`, který má jako návratové hodnoty matice A,B,C,D lineárního stavového popisu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{5.5}$$

Rozměry a hmotnosti, které jsou nutné pro realizaci modelu, jsme naměřili z vyrobeného prototypu, avšak velikosti tuhostí pružin a tlumení nám známé nejsou, tyto hodnoty dosti významně ovlivňují chování systému. Simulujme tedy chování systému pro různé tuhosti pružin. Do modelu dosadíme následující parametry:

parametr	hodnota	význam
l	0.209 m	výška prototypu
lT	0.076 m	výška konstrukce s náklonoměrem
r	0.2176 m	délka ramena aktuátoru
mk	0.166 kg	hmotnost konstrukce s náklonoměrem
mz	0.0475 kg	hmotnost magnetu aktuátoru
mc	0.0165 kg	hmotnost cívky aktuátoru
$[k_1, k_2]$	$[10, 5] \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	tuhost pružiny
d0	0.0286 m	polovina pohybového rozsahu aktuátoru
b	$1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$	tlumení pružiny

Stavový popis využijeme pro návrh **stavového regulátoru**. Regulátor navrhne například LQR metodou. Penalizační matici Q volíme jako diagonální matici, R volíme identickou:

$$Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]) \quad R = I_{3 \times 3} \quad (5.6)$$

Pro výpočet použijeme příkaz Matlabu $\text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{0})$. Pro k_1 dostaneme stavovou zpětnou vazbu,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 5.6809 & 2.2486 & -0.0697 & -0.7104 & 0.9804 & -0.3658 & 0.1244 & 0.0128 & 0.4033 & 0.0503 \\ -4.2600 & -1.2058 & 0.0473 & 0.9080 & -4.2571 & -1.2041 & -0.3414 & -0.0401 & -0.1973 & -0.0232 \\ 0.9638 & -0.3624 & -0.0475 & -0.7105 & 5.6543 & 2.2464 & 0.4097 & 0.0499 & -0.0942 & -0.0140 \end{bmatrix}$$

která uzavřenému systému přiřadí tyto vlastní čísla:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -31.1839 + 16.2875i & \lambda_2 &= -31.1839 - 16.2875i & \lambda_3 &= -11.5204 + 17.5453i \\ \lambda_4 &= -11.5204 - 17.5453i & \lambda_5 &= -10.9233 + 17.6194i & \lambda_6 &= -10.9233 - 17.6194i \\ \lambda_7 &= -8.5719 + 0.3814i & \lambda_8 &= -8.5719 - 0.3814i & \lambda_9 &= -7.8378 + 0.4797i \\ \lambda_{10} &= -7.8378 - 0.4797i \end{aligned}$$

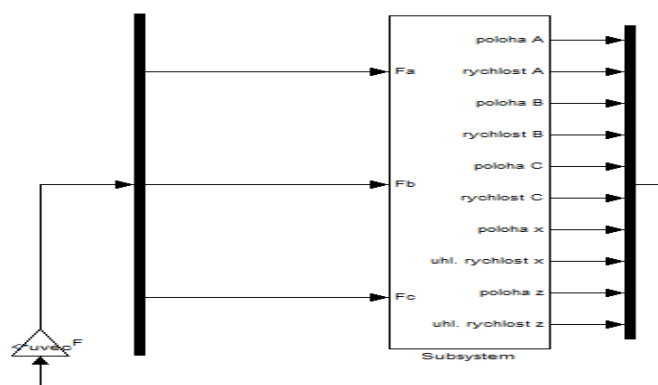
Pro k_2 dostaneme stavovou zpětnou vazbu,

$$F_2 = \begin{bmatrix} -5.2764 & 0.8855 & 3.4197 & -0.3115 & 2.7657 & -0.1290 & 0.0601 & 0.0062 & 0.2120 & 0.0258 \\ 1.6588 & -0.5193 & -4.7812 & 0.4228 & 1.6530 & -0.5186 & -0.1858 & -0.0216 & -0.1074 & -0.0125 \\ 2.7503 & -0.1287 & 3.4293 & -0.3107 & -5.2759 & 0.8838 & 0.2124 & 0.0254 & -0.0543 & -0.0076 \end{bmatrix}$$

která uzavřenému systému přiřadí tyto vlastní čísla:

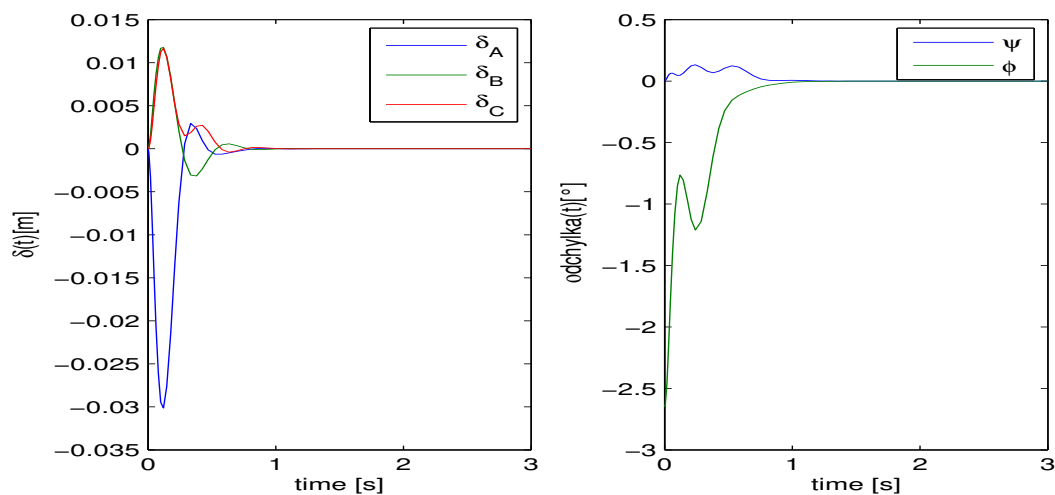
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -57.0926 & \lambda_2 &= -18.5773 & \lambda_3 &= -5.9654 \\ \lambda_4 &= -15.5878 & \lambda_5 &= -9.3808 & \lambda_6 &= -8.7949 \\ \lambda_7 &= -5.9496 + 3.5000i & \lambda_8 &= -5.9496 - 3.5000i & \lambda_9 &= -6.8576 + 2.5604i \\ \lambda_{10} &= -6.8576 - 2.5604i \end{aligned}$$

Máme-li vypočtenou zpětnou vazbu, můžeme ji v SimMechanicsu zapojit. Nejdříve z modelu na obrázku 5.2 vytvoříme subsystém. Všechny stavy systému svedeme do multiplexu, tím získáme stav systému - signál $\mathbf{x}(t)$, který přenásobíme zpětnovazební maticí F . Máme tedy řízení $u(t) = F \mathbf{x}(t)$, jehož složky přivedeme na vstupy Joint Actuátorů.

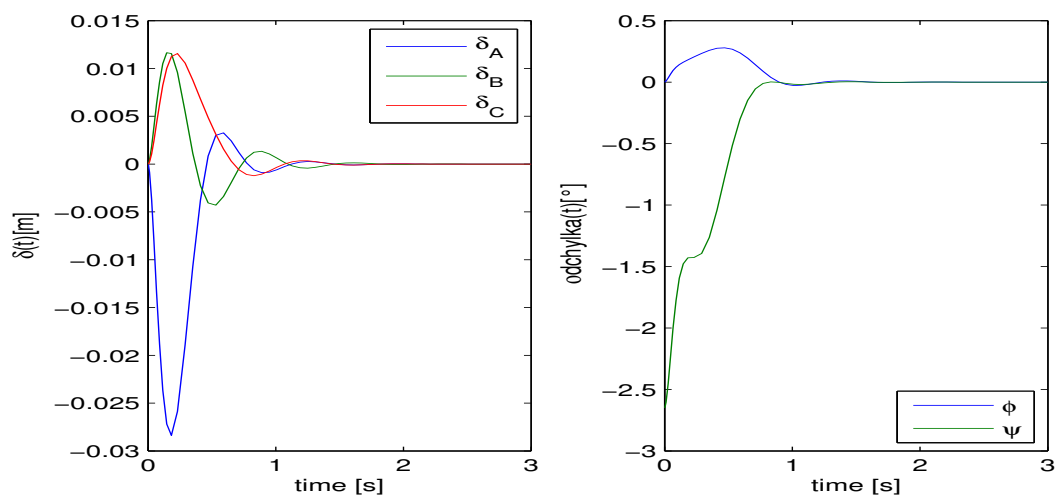


Obrázek 5.4: Regulační schéma

Nyní provedeme simulaci pro vypočtené zpětné vazby. Do bloku Joint Inicial Condition zadáme počáteční rotaci kolem osy Z o $\phi_{10} = -2.65^\circ$. V grafu zobrazíme časové průběhy polohy.



Obrázek 5.5: Graf časové závislosti odchylek ϕ, ψ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru pro zpětnou vazbu F_1



Obrázek 5.6: Graf časové závislosti odchylek ϕ, ψ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru pro zpětnou vazbu F_2

Porovnáme-li časové průběhy simulace pro zpětnou vazbu F_1 a F_2 vidíme, že zpětná vazba F_1 má kratší dobu potřebnou ke stabilizaci, avšak je potřeba větší maximální výchylka aktuátoru než jeho rozsah ($\max(|\delta_A(t)|) > d_0$). Pro zpětnou vazbu F_2 je doba potřebná ke stabilizaci sice větší, ale je splněn požadavek na maximální rozsah aktuátoru ($\max(|\delta_A(t)|) < d_0$). Tabulka charakteristických hodnot:

	k_1	k_2
$\max(\delta_A(t))$	0.0284 m	0.0301 m
t_s ($\phi(t_s) < 0.05^\circ$)	1.5082 s	1.6615 s

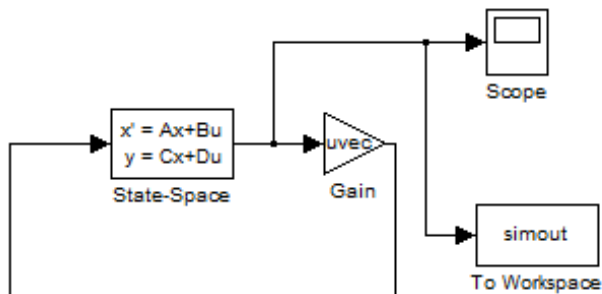
6 Simulace

6.1 Zpětnovazební systém 4-bodového modelu

Pro simulaci chování 4-bodového linearizovaného modelu použijeme prostředí Matlab/Simulink. Matematický model systému byl vytvořený k účelu, abychom mohli analyzovat vlastnosti navrženého zpětnovazebního řízení. K realizaci systému využijeme v Simulinku blok *State-Space*, kde A, B jsou matice uvedené v sekci **Lineární stavový popis NE modelu**, matice $C = I$ je identická $n \times n$, protože předpokládáme že měříme přímo stavy systému, a matice D je nulová, protože nepředpokládáme přímé působení vstupu na výstup. F je zpětnovazební matice navržená příslušnou metodou (JFA, LQR). Stavový popis uzavřeného systému má tedy tvar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BF)x \\ y &= Ix \\ u &= Fx\end{aligned}\tag{6.1}$$

Simulační schéma v Simulinku:



6.1.1 LQR úloha

V předchozí kapitole jsem odvodili, že 4-bodový model (A, B) jednoočky je vstupně symetrický. Proto bychom mohli předpokládat, že pro symetrický model by mohla být nejvhodnější symetrická zpětná vazba. Tento předpoklad můžeme nyní doložit na simulaci systému (6.1) pro různé zpětnovazební matice F . Při návrhu regulátoru pomocí LQR metody volíme danou penalizaci stavů a vstupů pomocí matic $Q \geq 0, R > 0$. Pokud zvolíme penalizaci stavů

symetrickou tedy například:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Dostaneme zpětnou vazbu:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0000 & 3.5983 & -0.0000 & 0.9370 \\ -3.1162 & -1.7992 & -0.8115 & -0.4685 \\ 3.1162 & -1.7992 & 0.8115 & -0.4685 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Vlastní čísla zpětnovazebního systému $(A+BF)$ jsou:

$$\lambda_1 = -29.7438 \quad \lambda_2 = -2.1660 \quad \lambda_1 = -29.7438 \quad \lambda_2 = -2.1660$$

Jordanova forma uzavřeného systému $(A+BF) \sim J_F$ odpovídá struktuře matice L_4 , pro kterou jsme ověřili zpětnovazební symetrii. Zpětná vazba F je symetrická. Nyní zvolíme různou penalizaci stavů:

$$Q = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

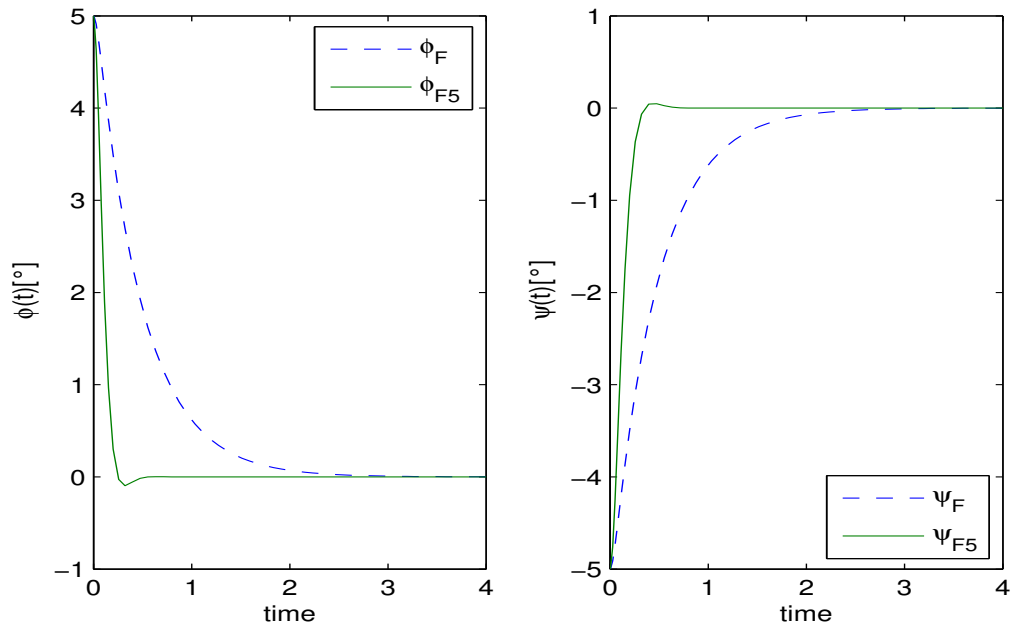
Dostaneme zpětnovazební matici:

$$F_5 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 6.4932 & -0.0000 & 0.6175 \\ -7.9728 & -3.2466 & -0.6368 & -0.3088 \\ 7.9728 & -3.2466 & 0.6368 & -0.3088 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

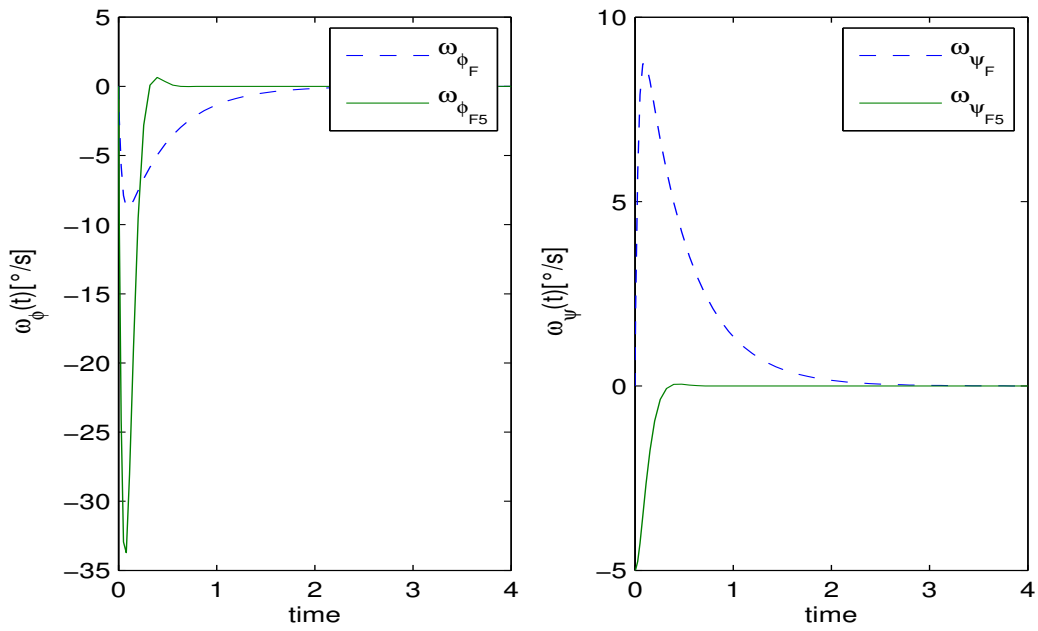
Vlastní čísla zpětnovazebního systému $(A+BF_5)$ jsou:

$$\lambda_1 = -12.5203 \quad \omega_1 = -9.9319 \quad \lambda_2 = -10.5149 \quad \omega_2 = -7.2420$$

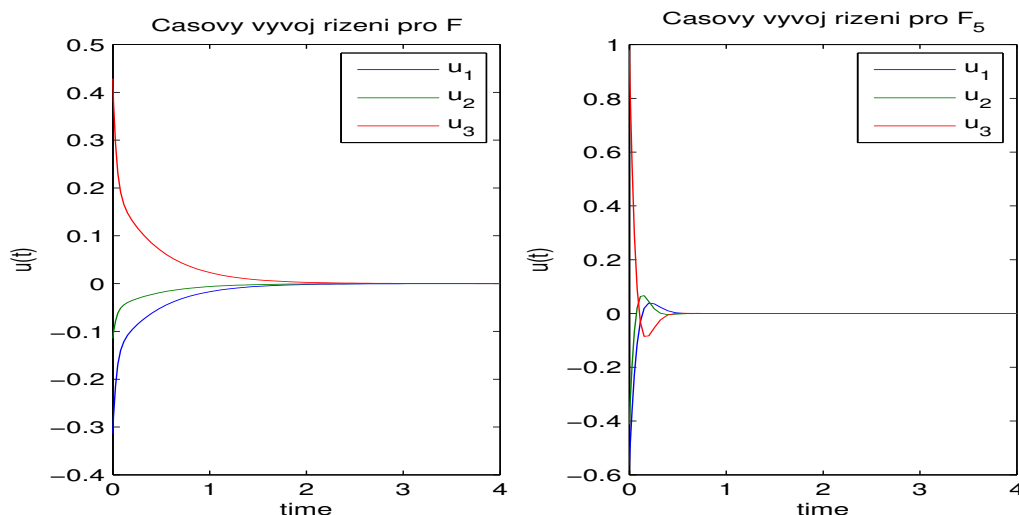
Jordanova matice uzavřeného systému $(A+BF_5) \sim J_{F_5}$ odpovídá struktuře L_5 . Pro strukturu Jordanovi matice L_5 jsme ověřili, že zpětnovazební systém symetrický není. Pro srovnání odezvy na změnu počátečního stavu systému změníme u obou zpětnovazebních systémů počáteční stav x_0 . Vychýlíme tělo robotu o úhel $\phi = 5^\circ$ v jednom smětu a o úhel $\psi = -5^\circ$ v druhém směru. Počáteční stav bude $x_0 = [\frac{5\pi}{180} \quad -\frac{5\pi}{180} \quad 0 \quad 0]^T$, protože matematický popis systému je odvozený v Radianech. Pro lepší představu zobrazíme grafy odchylek $\phi(t)$, $\psi(t)$ a úhlových rychlostí $\omega_\phi(t)$, $\omega_\psi(t)$ ve stupních $[\circ]$, respektive $[\circ/s]$.



Obrázek 6.1: Grafy časové závislosti odchylek od svislé osy těla robotu, modře zpětnovazební systém $(A + BF)$, zeleně $(A + BF_5)$



Obrázek 6.2: Grafy časové závislosti úhlových rychlostí, modře zpětnovazební systém $(A + BF)$, zeleně systém $(A + BF_5)$



Obrázek 6.3: Grafy časové závislosti řízení $u(t)$

Porovnáme-li časové průběhy odchylek viz obrázek 6.1, je vidět, že symetrická zpětná vazba F nemá oproti zpětné vazbě F_5 překmit. Avšak zpětná vazba F_5 má rychlejší odezvu. Pomalejší odezva u zpětné vazby F je způsobena vlastním číslem $\lambda_2 = -2.1660$. U metody LQR nevíme jaké vlastní čísla budou přiřazeny zpětnovazebnímu systému $(A+BF)$, to je nevýhoda metody LQR oproti metodě JFA.

Dále porovnáme-li grafy úhlových rychlostí na obrázku 6.2 vidíme, že úhlová rychlost $\omega_{\phi_{F_5}}$ dosahuje vysoké maximální absolutní hodnoty oproti maximální absolutní hodnotě úhlové rychlosti $\omega_{\psi_{F_5}}$, tedy $\max(|\omega_{\phi_{F_5}}(t)|) \gg \max(|\omega_{\psi_{F_5}}(t)|)$. Naproti tomu průběhy úhlových rychlostí $\omega_{\phi_F}, \omega_{\psi_F}$ jsou souměrné vůči časové ose, jejich maximální absolutní hodnota $\max(|\omega_{\phi_{F_5}}(t)|) \sim \max(|\omega_{\psi_F}(t)|)$ je cca 4 krát menší než hodnota $\max(|\omega_{\phi_{F_5}}(t)|)$.

Toto chování souvisí také s velikostí akčních zásahů řízení $u(t)$. Pro zpětnou vazbu F je oproti zpětné vazbě F_5 třeba cca poloviční síly ke stabilizaci robota.

6.1.2 JFA metoda

Při návrhu zpětné vazby metodou přiřazení Jordanovi formy je obtížné vědět, jak vhodně zvolit Jordanovi bloky matice L, tedy vlatní čísla uzavřeného systému $\lambda_i \in \Lambda(A_c)$, kde

$$A_c = A + BF$$

je matice uzavřeného systému pro stavovou zpětnou vazbu F. Pro návrh stavové zpětné vazby heuristickou metodou JFA musíme dále ještě volit $m \times n$ parametrů. Při použití explicitní parametrizace zpětné vazby $F(\alpha)$ pomocí JFA lze dosáhnout minimálního počtu volných parametrů α_i . Dále bychom také chtěli optimalizovat α_i tak, aby byl komplexní či reálný poloměr stability $(r_{\mathbb{C}}, r_{\mathbb{R}})$ co největší. Počet volných parametrů je závislý na volbě struktury matice L. Pro účel simulace zvolíme nejdříve 2 matice L, pro které zpětnovazební systém A_c symetrický není:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad L_{23} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

dále zvolíme 2 struktury matic L_3, L_4 pro $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -13$, pro které zpětnovazební systém symetrický je:

$$L_3 = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad L_4 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Nyní provedeme opět experiment, kde vychýlíme tělo robotu o úhel $\phi = 5^\circ$ od svislé osy (rotace kolem osy x) a o úhel $\psi = -5^\circ$ (rotace kolem osy z), počáteční stav simulace bude opět $x_0 = [\frac{5\pi}{180} \quad -\frac{5\pi}{180} \quad 0 \quad 0]^T$.

Zpočteme tedy zpětné vazby pomocí metody JAF a volné parametry α_i optimalizuje dle reálného poloměru stability. Vypočtené zpětnovazební matice:

$$F_{23} = \begin{bmatrix} -5.8718 & -1.2794 & -0.3474 & -0.2846 \\ -12.4872 & -12.6618 & -0.8603 & -1.1669 \\ 0.7436 & -12.6618 & 0.1654 & -1.1669 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 6.8360 & 9.4698 & 0.7563 & 0.9454 \\ 3.1509 & 1.5755 & 0.2775 & -0.0249 \\ 11.2546 & 1.5721 & 1.3033 & -0.0252 \end{bmatrix}$$

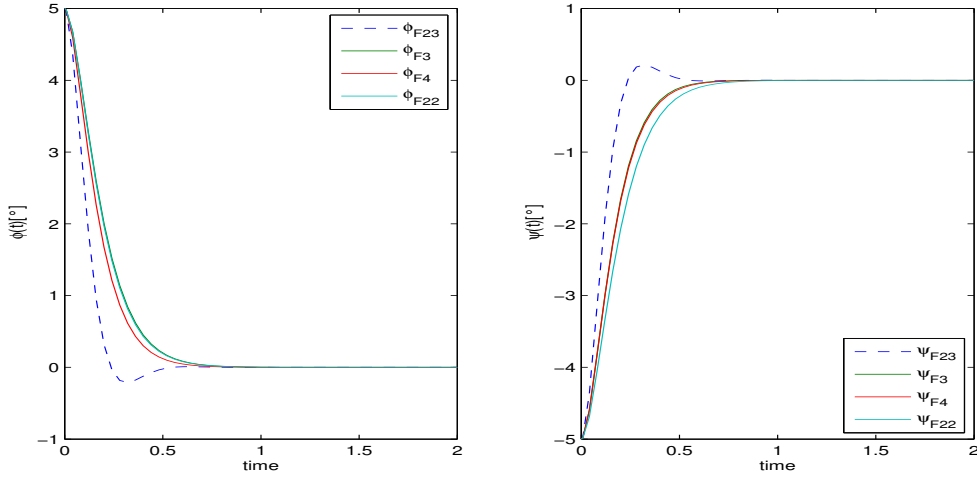
$$F_4 = \begin{bmatrix} 3.4785 & 4.2070 & 0.3859 & 0.4602 \\ -1.3053 & -4.0788 & -0.1990 & -0.5528 \\ 8.2624 & -4.0788 & 0.9708 & -0.5528 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} -3.7982 & 6.3628 & -0.4236 & 0.6985 \\ -7.9492 & -0.4960 & -0.9421 & -0.1727 \\ 0.2799 & -0.5068 & 0.0958 & -0.1738 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

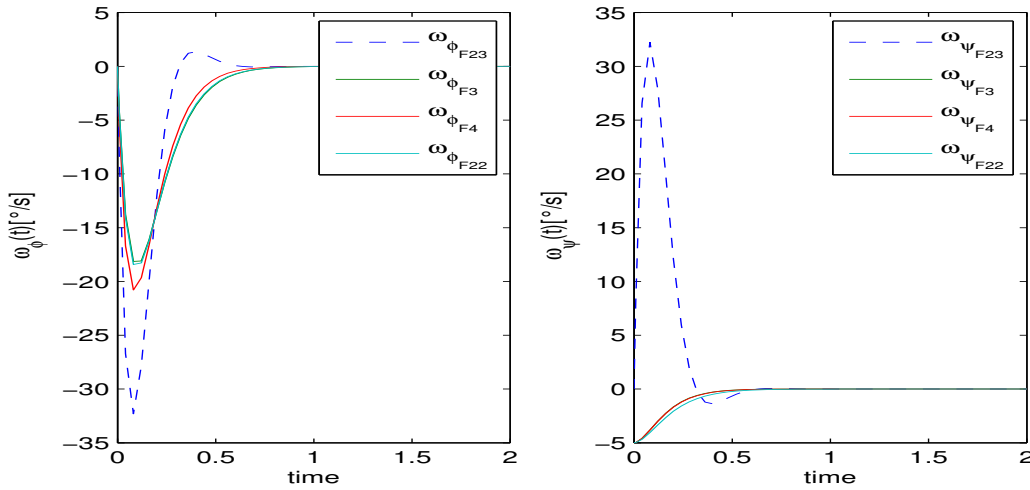
Tabulka hodnot reálného poloměru stability příslušící k dané zpětné vazbě F_i :

zpětnovazební matice F_i	r_R
F_{23}	0.9805789
F_3	0.9805789
F_4	0.9847064
F_{22}	0.9800853

Porovnáme-li časové průběhy odchylek $\phi(t), \psi(t)$ pro navržené zpětné vazby, vidíme, že pro zpětnou vazbu F_{23} dostaneme vždy překmit. Doby ustálení se při dané volbě vlastních čísel téměř shodují. Odezvy úhlových rychlostí se kromě zpětné vazby F_{23} , která dosahuje vysoké absolutní maximální úhlové rychlosti v obou směrech, taktéž téměř shodují. Všechny

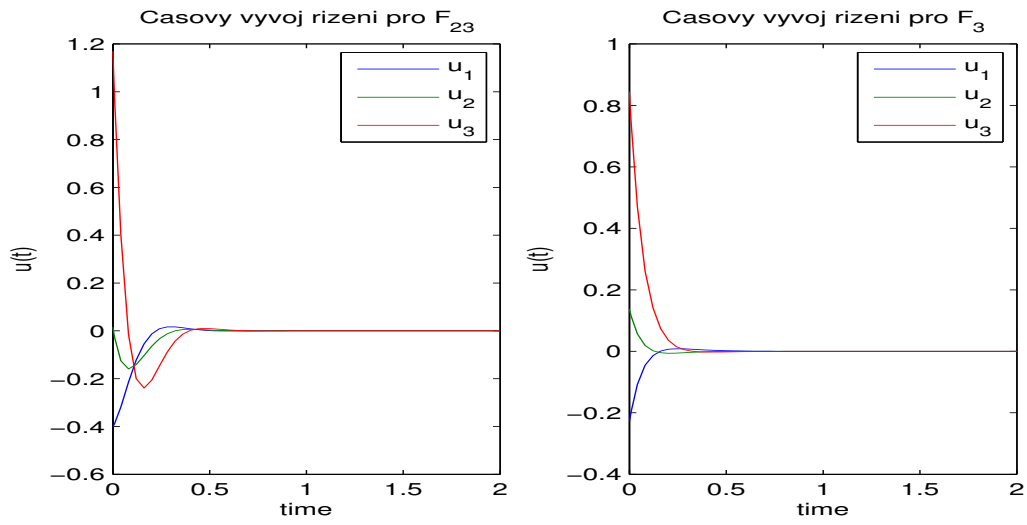


Obrázek 6.4: Graf časové závislosti úhlů pro vypočtené zpětné vazby

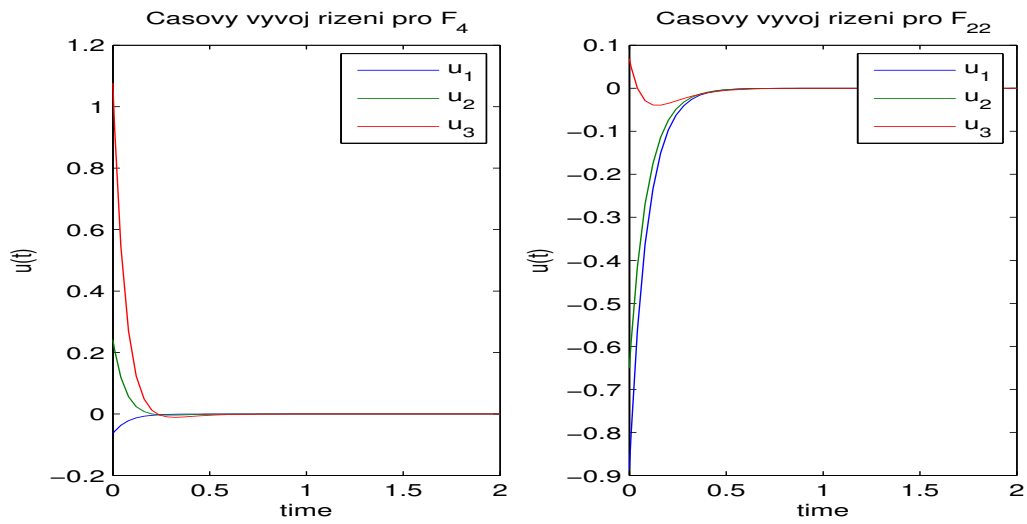


Obrázek 6.5: Graf časové závislosti úhlových rychlostí pro vypočtené zpětné vazby

navržené zpětné vazby byly optimalizovány dle reálného poloměru stability. Nejvyšší poloměr stability vyšel logicky u zpětné vazby F_4 , kde jsme zvolili dvě vlastní čísla ($\lambda_2 = -13$) dále od imaginární osy oproti vlastním číslům $\lambda_1 = -10$ u zpětných vazeb F_{23}, F_3, F_{22} . Dalším ukazatelem kvality řízení symetrického systému by měl být fakt, že také zpětná vazba F by měla být symetrická, což splňují F_3, F_4 .



Obrázek 6.6: Graf časové závislosti řízení pro vypočtené zpětné vazby



Obrázek 6.7: Graf časové závislosti řízení pro vypočtené zpětné vazby

7 Návrh řízení pro prototyp

Cílem návrhu řízení pro reálný prototyp je opět stabilizovat jej ve svislé poloze. Pro návrh řízení použijeme linearizovaný model 10. řádu vytvořený Lagrangeovou metodou, kde matice (A,B):

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -215.80 & 2.63 & 2.63 & -11.34 & 0 & -22.05 & 0.50 & 0.50 & 0 & 0 \\ 2.63 & -215.80 & 2.63 & 5.67 & -9.82 & 0.5 & -22.05 & 0.50 & 0 & 0 \\ 2.63 & 2.63 & -215.80 & 5.67 & 9.82 & 0.50 & 0.50 & -22.05 & 0 & 0 \\ 75.25 & -37.63 & -37.63 & 63.01 & 0 & 14.25 & -7.13 & -7.13 & 0 & 0 \\ 0 & 65.17 & -65.17 & 0 & 63.01 & 012.34 & -12.34 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4974 & -0.4974 & 22.0475 \\ -0.4974 & 22.0475 & -0.4974 \\ 22.0475 & -0.4974 & -0.4974 \\ -14.2495 & 7.1247 & 7.1247 \\ 0 & -12.3404 & 12.3404 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

U prototypu máme k dispozici pouze měření dvouosého náklonoměru. K získání úhlových rychlostí použijeme derivační článek. Pro návrh řízení tedy budeme předpokládat, že známe 4 výstupy systému, proto použijeme výstupní zpětnou vazbu:

$$\mathbf{u}(t) = Ky(t) = KC x(t)$$

kde

$$C_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Při analýze zpětné vazby 4-bodového modelu jsme výpočtem ověřili jeho symetrii a dokázali nalézt symetrické zpětné vazby. Pro matici dynamiky A dokážeme sice najít Jordanovu formu J , ale nedokážeme pro ni výpočtem najít transformační matici R , kde ($J = RAR^{-1}$), proto přesně nedokážeme ověřit symetrii tohoto systému ani genericky najít symetrickou zpětnou vazbu.

Pokud chceme navrhnout zpětnou vazbu od výstupu při znalosti pouze náklonů ve dvou osách a jejich derivací, nelze přiřadit systému všechna vlastní čísla. Pro návrh řízení tedy použijeme neúplné přiřazení výstupní zpětnou vazbou, kde přiřadíme pouze čtyři vlastní čísla analogicky jako u 4-bodového modelu pro symetrickou strukturu matice L_3 . Výpočet zpětné vazby provedeme explicitní metodou JFA, kde $L \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$.

$$L = \begin{bmatrix} L_3 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Pro explicitní vyjádření výstupní zpětné vazby $K(\alpha)$ optimalizujeme vektor volných parametrů $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]$ tak, aby byl maximalizován reálný poloměr stability $r_{\mathbb{R}}$. Systému přiřazujeme čtyřnásobné vlastní čísla λ_1 . Na volbě vlastního čísla λ_1 však také závisí stabilita nepřirázovaných vlastních čísel. Pro volbu $\lambda_1 < -4.1$ již nelze nalézt výstupní zpětnou vazbu K , která by systém stabilizovala. Takže volíme $\lambda_1 \in (-4.1, 0)$ a optimalizujeme α takové, aby byl poloměr stability r_R maximální.

Tabulka hodnot reálného poloměru stability $r_{\mathbb{R}}$ v závislosti na volbě λ_1 :

vlastní číslo λ_1	reálný poloměr stability $r_{\mathbb{R}}$
-3	0.1817
-2.6	0.1828
-2.5	0.1848
-2.4	0.1844
-2	0.1789

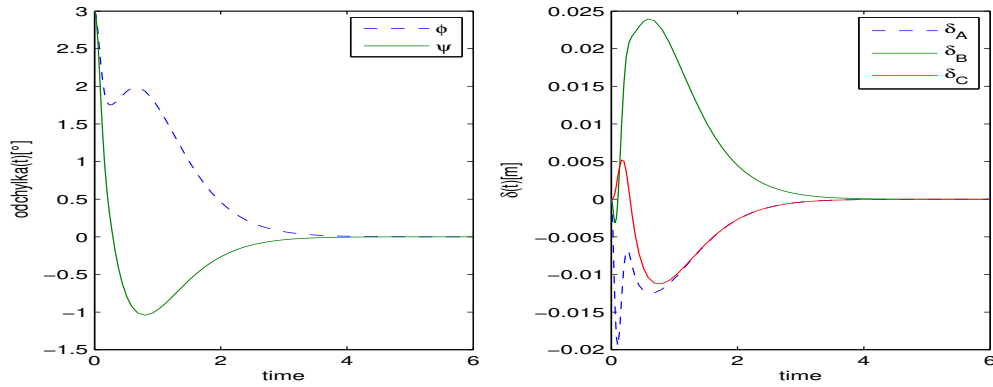
Jak je vidět z tabulky, reálný poloměr stability je maximální pro hodnotu $\lambda_1 = -2.5$. Výpočtem dostaneme optimalizovaný vektor $\alpha_{opt} = [10.4572 \ -9.3547 \ 6.2075 \ -7.0323]$, který dosadíme do parametrického vyjádření $K(\alpha)$:

$$K_{10} = K(\alpha_{opt}) = \begin{bmatrix} -2.7238 & -0.4659 & 1.6035 & -0.1483 \\ 2.5724 & 0.2997 & -7.7385 & -1.5095 \\ -8.1055 & -1.2476 & -7.7385 & -1.5095 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

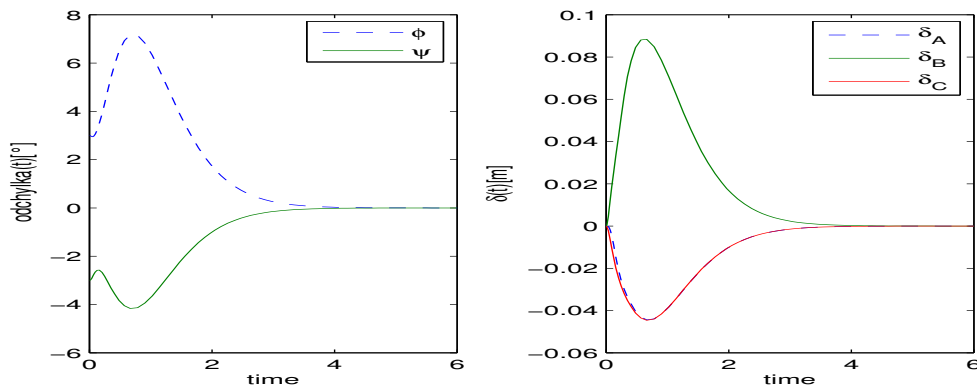
Uzavřený systém ($A_{10} + B_{10}K_{10}C_{10}$) má vlastní čísla:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -33.7516 & \lambda_2 &= -14.0135 + 23.0395i & \lambda_3 &= -14.0135 - 23.0395i \\ \lambda_4 &= -10.5263 + 9.9861i & \lambda_5 &= -10.5263 - 9.9861i & \lambda_6 &= -8.8615 \\ \lambda_7 &= -2.6285 + 0.4517i & \lambda_8 &= -2.6285 - 0.4517i & \lambda_9 &= -2.6485 \\ \lambda_{10} &= -5.0246 \end{aligned}$$

Nyní simulačně ověříme vlastnosti navržené výstupní zpětné vazby K_{opt} , když nakloníme tělo robotu pro různé kombinace odchylek $[\phi, \psi]$.

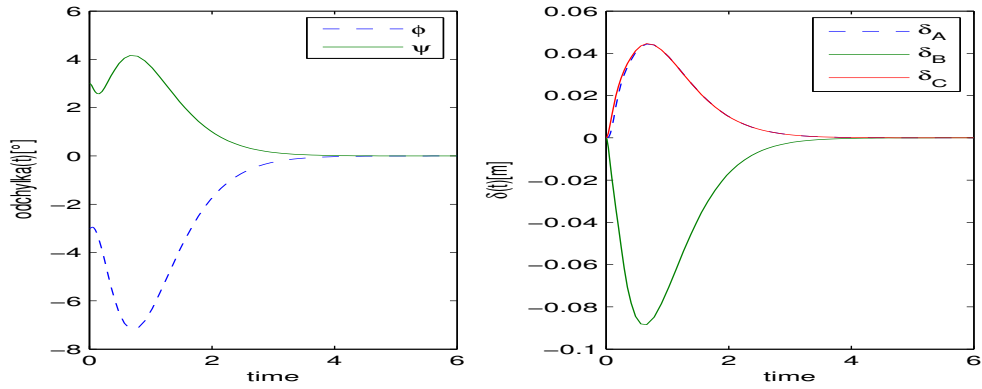


Obrázek 7.1: Graf časové závislosti odchylek $[\phi, \psi] = [3, 3]$ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru

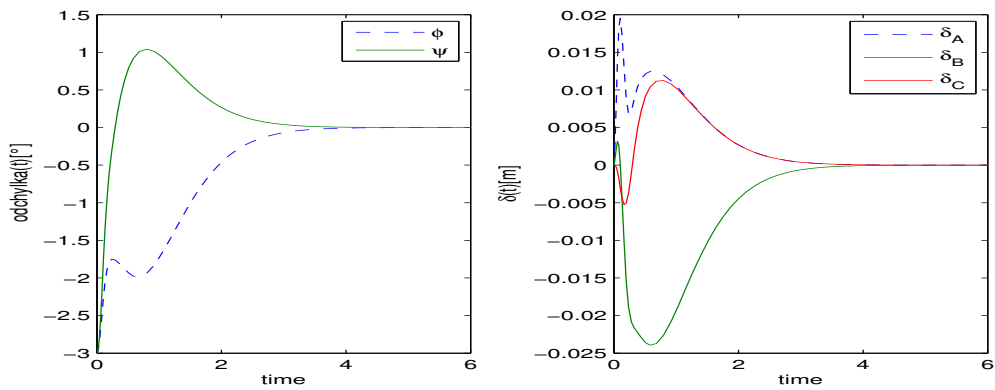


Obrázek 7.2: Graf časové závislosti odchylek $[\phi, \psi] = [-3^\circ, 3^\circ]$ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru

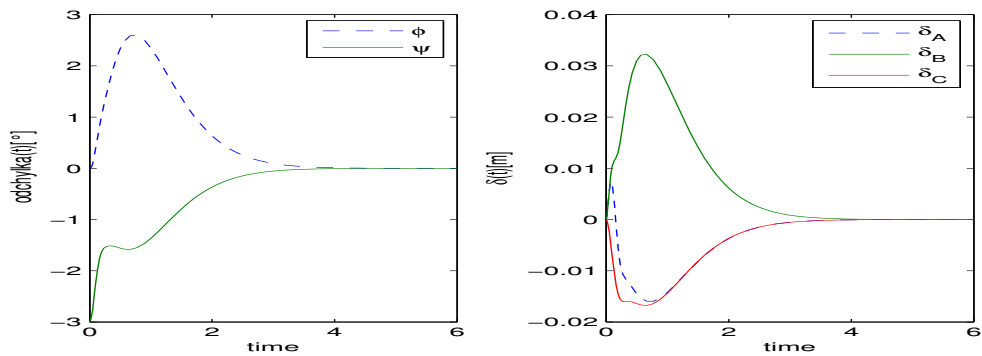
Jak je vidět v grafech má řídicí systém pro různé náklony jiné funkční vlastnosti. Pro počáteční hodnoty $[3, 3], [-3^\circ, -3^\circ]$ je splněno omezení na rozsahy aktuátorů $|\delta(t)| < d_0$. Pro počáteční body $[3^\circ, -3^\circ], [-3^\circ, 3^\circ]$ je však omezení na rozsah aktuátorů dosti porušeno a pro bod $[0^\circ, -3^\circ]$ je tedy téměř splněno. Při stabilizaci robota záleží v jakém směru je tělo robota nakloněno, což není moc žádoucí vlastnost pro reálný systém. Nicméně navržené řízení ověříme na reálném systému prototypu robota. K realizaci regulátoru využijeme řídicí systém REX.



Obrázek 7.3: Graf časové závislosti odchylek $[\phi, \psi] = [3^\circ, -3^\circ]$ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru



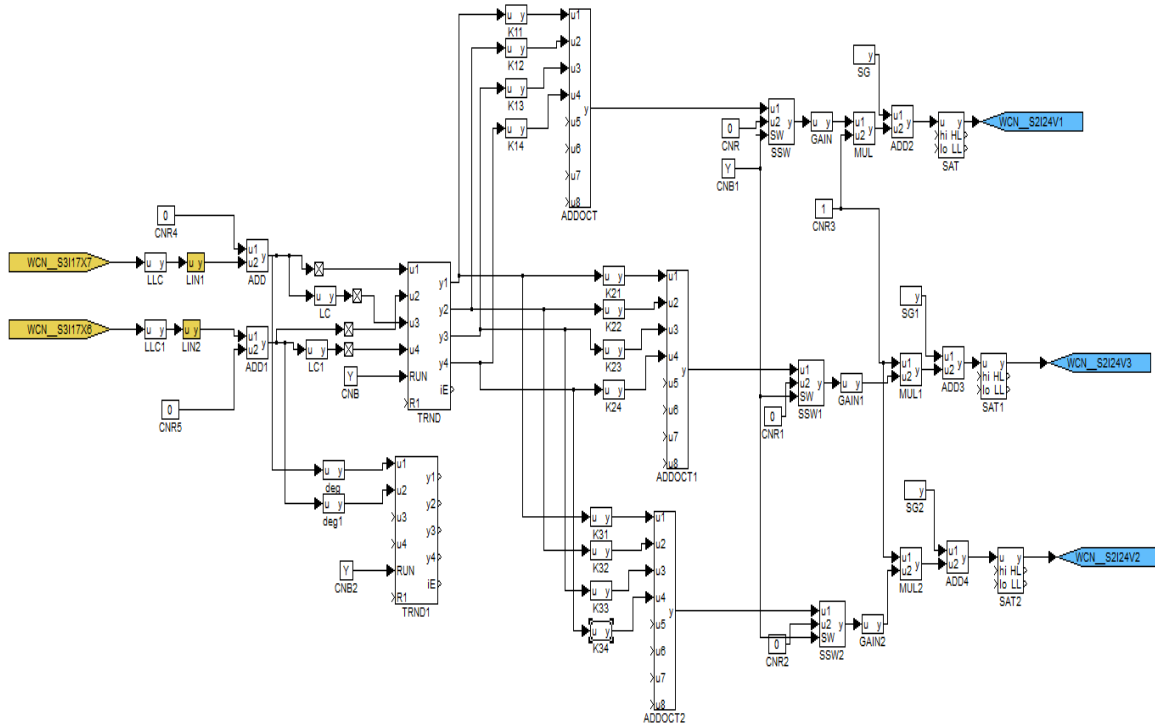
Obrázek 7.4: Graf časové závislosti odchylek $[\phi, \psi] = [-3^\circ, -3^\circ]$ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru



Obrázek 7.5: Graf časové závislosti odchylek $[\phi, \psi] = [0^\circ, -3^\circ]$ od svislé polohy a odchylek $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ od středu rozsahu voice coil aktuátoru

7.1 Aplikace řízení v REXU

Při aplikaci vypočtených řízení pro prototyp robota jsem zjistili nedostatky, které jsou zásadní pro stabilizaci. Jedním nedostatkem je doba ustálení náklonoměru. Zahrneme-li toto omezení do stavového popisu, dostaneme systém 14. řádu, pro který se pokusíme navrhnout zpětnou vazbu. Výstupní zpětná vazba lze ještě vypočítat pro parazitní časové konstanty $\tau_1 = \frac{1}{33}$, $\tau_2 = \frac{1}{16}$, pro větší časové konstanty již výstupní zpětná vypočítat nelze.



Obrázek 7.6: Schématické zapojení výstupního regulátoru v REXu

Matice lineárního modelu po zařazení parazitní časové konstanty $\tau_1 = \frac{1}{33}$, $\tau_2 = \frac{1}{16}$

$$A_{14} = \left[\begin{array}{c|ccc} A_{10} & & & 0 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & A_{4,10} & & A_{4,4} \end{array} \right] \quad A_{4,10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,4} = \begin{bmatrix} -33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \quad B_{14} = \begin{bmatrix} B_{10} \\ - \\ - \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{14} = \left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{zeros}(4, 10) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad D_{14} = \text{zeros}(14, 3)$$

Pokud pro tento systém $S_{14} \sim (A_{14}, B_{14}, C_{14})$ navrhujeme výstupní zpětnou vazbu metodou JFA analogicky jako pro systém $S_{10} \sim (A_{10}, B_{10}, C_{10})$, dostaneme opět omezení na volbu λ_1 . Pro volbu $\lambda_1 \in (-2, 0)$ lze ještě nalézt parametrickou výstupní zpětnou vazbu $K_{14}(\alpha)$, která stabilizuje systém S_{14} . Vzhledem ke složitosti výpočtů optimalizujeme vektor volných parametrů α dle komplexního poloměru $r_{\mathbb{C}}$.

vlastní číslo λ_1	reálný poloměr stability $r_{\mathbb{C}}$
-1.8	0.0164
-1.5	0.0263
-1.0	0.0238

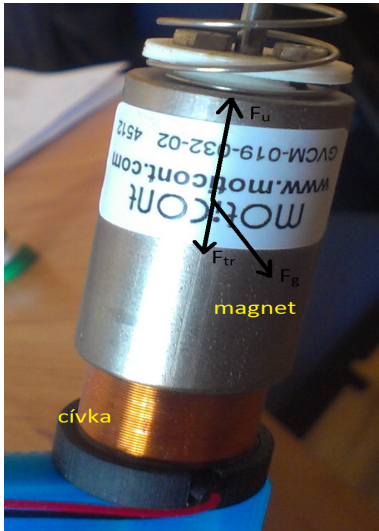
Podíváme-li se na hodnoty tabulky, největší komplexní poloměr stability je pro volbu $\lambda_1 = -1.5$, kde optimalizovaný vektor parametrů $\alpha_{opt} = [9.5239 \ 10.8146 \ 2.6539 \ 0.2147]$ a výstupní zpětná vazba $K(\alpha_{opt})$:

$$K_{14} = K(\alpha_{opt}) = \begin{bmatrix} 0.0805 & 0.0303 & -0.5999 & 0.8390 \\ -8.9243 & 5.1623 & -1.9005 & 1.5860 \\ -8.9243 & -5.1028 & -1.9005 & 0.1163 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

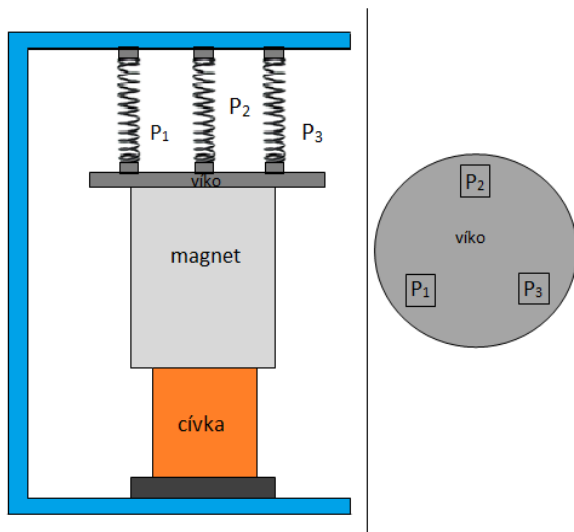
Vezmeme-li v potaz komplexní poloměr stability $r_{\mathbb{C}} = 0.0263$ zpětné vazby K_{14} je přibližně o řád nižší než reálný poloměr stability u $K_{10} \sim r_{\mathbb{R}} = 0.1848$. Tato skutečnost přispívá k faktu, že i pro velmi malé odchylky modelu od reálného systému, je uzavřený systém destabilizován. Tedy navržená zpětná vazba K_{14} je velmi křehká vzhledem k perturbací v prvcích matice A_{14} .

7.2 Tření u aktuátoru

Druhou významnou komplikací při aplikaci řízení u vyrobeného prototypu robota je tření mezi magnetem a cívkou aktuátoru způsobené tíhovou silou F_g . V opačném směru proti vstupní síle F_u působí vždy třecí síla F_{tr} . Působení třecí síly zavádí do lineárního pohybu aktuátorů nelinearity, což způsobuje nelineární chování aktuátoru.



Obrázek 7.7: Aktuátor s vyznačenými silami působící na magnet aktuátoru



Obrázek 7.8: Nákres aktuátoru s novým uchycením ke konstrukci robota

Pro správné fungování navrženého řízení by mělo být působení třecí síly odstraněno. To částečně lze zajistit pokud k signálu řízení přičteme sinusový signál o vysoké frekvenci. V

regulačním schématu 7.6 je proto použit blok SG, kterým přičítáme ke vstupu aktuátoru sinusový signál, avšak třecí síla nevymizí úplně.

K úplnému odstranění třecí síly F_{tr} působící na závaží aktuátoru by bylo třeba navrhnout nové ukotvení aktuátorů ke konstrukci robota. Pokud bychom nahradili uchycení magnetu aktuátoru pomocí jedné pružiny soustavou alespoň 3 pružin, bylo by tření plně odstraněno. Na obrázku 7.2 je navrženo nové uložení aktuátoru, které obsahuje stejně tuhé pružiny P_1, P_2, P_3 .

8 Závěr

Práce se zabývá návrhem zpětné vazby, která má stabilizovat prototyp jednohého robota. Řízení je navrženo pro různé modely jednohého robota. Vlastnosti různých řízení jsou ověřeny pomocí simulace v Simulinku a stabilizace je vždy dosaženo. Při aplikaci navržených řízení jsme však narazili na rozdílné chování reálného prototypu a simulačních modelů. Pro náklonměr reálného prototypu je doba ustálení cca $t_u \doteq 0.1s$, avšak pro návrh zpětné vazby jsme ověřili, že výstupní zpětnou vazbu lze nalézt pouze pro náklonměr s dobou ustálení menší než 0,033 s. Další rozdílné chování reálného prototypu oproti modelu je tření mezi magnetem a cívkou aktuátoru. Abychom zaručili správnou funkci navrženého řízení, měl by být navržen nový prototyp, kde bychom použili náklonměr s menší dobou ustálení ($t_u \leq 0.033$ s) a aktuátory s novým uchycením ke konstrukci robota viz. obrázek 7.8. V příloze je uveden datasheet náklonoměru, který má dobu ustálení $t_u \leq 0.025s$, což je dostačující k návrhu stabilizujícího řízení. U nového prototypu by k uložení aktuátorů také bylo třeba použít pružiny o známé tuhosti, neboť právě tuhost pružin významně ovlivňuje dynamické vlastnosti systému.

Dále jsme v práci zkoumali symetrii systému a návrh symetrické zpětné vazby. Symetrická zpětná vazba se chová stejně pro všechny směry náklonu robota, proto by bylo vhodné, aby navržená zpětná vazba použitá k řízení reálného prototypu byla také symetrická. Nicméně vzhledem k vysokému řádu modelu prototypu (10.řád) jsme při návrhu symetrické zpětné vazby narazili na velkou složitost úlohy, pro kterou dosud aplikované numerické algoritmy v softwaru Maple nenaleznou transformační matici R pro převod matice dynamiky A do jordanovi formy J . Proto jsme nebyli schopni zaručit symetrii výstupní zpětné vazby pro model systému 10.řádu.

9 Literatura

- [1] SPONG M.W., *Robot Modeling and Control*, John Wiley and Sons. INC.
- [2] SCHLEGEL Miloš, *Mechanické systémy*. ZČU, Plzeň, 2007, 31 s. Pomocný učební text.
- [3] KÖNIGSMARKOVÁ Jana, *Robustní přiřazení pólů stavovou a výstupní zpětnou vazbou*. Plzeň, 2013. Diplomová práce. ZČU
- [4] SCHLEGEL Miloš, *Přiřazení pólů zpětnou vazbou*. ZČU, Plzeň, 2005, 6 s. Pomocný učební text.
- [5] SCHLEGEL Miloš, LQ regulátor. ZČU, Plzeň, 2005, 7 s, Pomocný učební text.
- [6] KÖNIGSMARKOVÁ Jana, *Modální řízení konečně rozměrných lineárních systémů*. Plzeň, 2010. Bakalářská práce. ZČU.
- [7] MELICHAR Jiří, *Lineární systémy 1*. ZČU, Plzeň, 2011. Učební text.
- [8] MELICHAR Jiří, *Lineární systémy 2*. ZČU, Plzeň, 2011. Učební text.
- [9] KOVÁŘÍK Matěj, *Virtuální model skákacího robotu*. Plzeň, 2012. Bakalářská práce. ZČU.

Přílohy

Vektor hybnosti H_s

Matematické vyjádření složek vektoru momentu hybnosti \mathbf{H}_s v sekci 2.4.2

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_1 = & (-m((s_\psi r - c_\psi c_\varphi h)(-s_\psi r + c_\psi c_\varphi h) - s_\varphi^2 h^2) - \\ & -m((-\frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi r - \frac{1}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h)(\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) + (\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h)(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h)) \\ & -m((-\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h)(\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) + (-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h)(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h)) \\ & -M(-c_\psi^2 c_\varphi^2 l^2 - s_\varphi^2 l^2) \frac{d}{dt} \varphi + (ms_\varphi h(c_\psi r + s_\psi c_\varphi h) - m(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h)(-\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h) \\ & -m(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r - s_\varphi h)(-\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h) + Ms_\varphi l^2 s_\psi c_\varphi) \frac{d}{dt} \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 = & (-m(-c_\psi r - s_\psi c_\varphi h)s_\varphi h - m(\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h)(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h) - \\ & -m(\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h)(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h) + Ms_\varphi l^2 s_\psi c_\varphi) \frac{d}{dt} \varphi \\ & + (-m((s_\psi r - c_\psi c_\varphi h)(-s_\psi r + c_\psi c_\varphi h) + (-c_\psi r - s_\psi c_\varphi h)(c_\psi r + s_\psi c_\varphi h)) - \\ & -m((-\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h)(\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) + \\ & + (\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h)(-\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h)) - \\ & -m((-\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h)\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) + \\ & + (1/2c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r - s_\psi c_\varphi h)(-\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h)) - M(-c_\psi^2 (c_\varphi)^2 l^2 - s_\psi^2 c_\varphi^2 l^2) \frac{d}{dt} \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 = & (-m(c_\psi r + s_\psi c_\varphi h)(-s_\psi r + c_\psi c_\varphi h) - \\
& -m(-\frac{1}{2}c_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h)(\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) - \\
& -m(-\frac{1}{2}c_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}s_\psi s_\varphi r + s_\psi c_\varphi h)(\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r + c_\psi c_\varphi h) - Mc_\psi c_\varphi^2 l^2 s_\psi) \frac{d}{dt} \varphi + \\
& + (-ms_\varphi h(s_\psi r - c_\psi c_\varphi h) - m(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h)(-\frac{1}{2}s_\psi r - \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h) - \\
& -m(\frac{\sqrt{3}}{2}c_\varphi r + s_\varphi h)(-\frac{1}{2}s_\psi r + \frac{\sqrt{3}}{2}c_\psi s_\varphi r - c_\psi c_\varphi h) + Mc_\psi c_\varphi l^2 s_\varphi \frac{d}{dt} \psi
\end{aligned}$$

4-bodový model

Substituce zavedené pro soustavu lineárních rovnic 2.41 pro 4-bodový model:

$$b_1 = -\frac{3}{2}mr^2 - 3mc_\psi^2 c_\varphi^2 h^2 - 3mh^2 + 3mh^2 c_\varphi^2 + \frac{3}{2}mr^2 c_\psi^2 c_\varphi^2 - \frac{3}{2}mc_\varphi^2 r^2 - Mc_\psi^2 c_\varphi^2 l^2 - Ml^2 + Ml^2 c_\varphi^2$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}s_\varphi s_\psi c_\varphi (6mh^2 - 3mr^2 + 2Ml^2)$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}s_\varphi s_\psi c_\varphi (6mh^2 - 3mr^2 + 2Ml^2)$$

$$c_2 = -3mr^2 - 3mh^2 c_\varphi^2 + \frac{3}{2}mc_\varphi^2 r^2 - Ml^2 c_\varphi^2$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & -\frac{1}{4}u_3 s_\varphi h s_\psi \sqrt{2} + \frac{1}{4}u_3 s_\varphi \sqrt{2} s_\psi r + \frac{1}{4}u_2 s_\varphi \sqrt{2} s_\psi r - \frac{1}{4}u_2 s_\varphi h s_\psi \sqrt{2} - \frac{1}{2}u_1 s_\varphi \sqrt{2} s_\psi r + \frac{1}{2}u_1 s_\varphi h s_\psi \sqrt{2} - \\
& \frac{1}{4}u_2 c_\psi h \sqrt{3} \sqrt{2} - \frac{1}{4}u_3 c_\psi \sqrt{3} r \sqrt{2} + \frac{1}{4}u_3 c_\psi h \sqrt{3} \sqrt{2} + \frac{1}{4}u_2 c_\psi \sqrt{3} r \sqrt{2} - 3\omega_\varphi m c_\psi \omega_\psi r^2 s_\psi c_\varphi^2 + s_\varphi g M l - \\
& \frac{3}{2}\omega_\psi m r^2 s_\psi \omega_\varphi + \omega_\psi M \omega_\varphi l^2 s_\psi + 3\omega_\psi m \omega_\varphi h^2 s_\psi - 2M s_\varphi l^2 c_\varphi \omega_\varphi^2 - 6m s_\varphi h^2 c_\varphi \omega_\varphi^2 + 3m s_\varphi \omega_\varphi^2 r^2 c_\varphi - \\
& 2\omega_\psi M c_\varphi^2 \omega_\varphi l^2 s_\psi + 2M c_\psi^2 c_\varphi l^2 s_\varphi \omega_\varphi^2 + 6m c_\psi^2 s_\varphi \omega_\varphi^2 h^2 c_\varphi - 6\omega_\psi m c_\varphi^2 \omega_\varphi h^2 s_\psi - 3m s_\varphi h^2 c_\psi \omega_\psi^2 c_\varphi - \\
& M s_\varphi l^2 c_\psi \omega_\psi^2 c_\varphi + 3\omega_\psi m c_\varphi^2 r^2 s_\psi \omega_\varphi + \frac{3}{2}m c_\varphi r^2 c_\psi \omega_\psi^2 s_\varphi - 3m c_\psi^2 c_\varphi \omega_\varphi^2 r^2 s_\varphi + 2\omega_\varphi M c_\psi c_\varphi^2 l^2 s_\psi \omega_\psi + \\
& 6\omega_\varphi m s_\psi \omega_\psi c_\varphi^2 h^2 c_\psi + 3s_\varphi g m h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & \frac{3}{2}\omega_\varphi m c_\varphi r^2 c_\psi \omega_\psi s_\varphi - 3\omega_\varphi m s_\varphi h^2 c_\psi \omega_\psi c_\varphi - \omega_\varphi M s_\varphi l^2 c_\psi \omega_\psi c_\varphi + \frac{1}{4}u_3 r c_\varphi \sqrt{2} - \frac{1}{4}u_3 c_\varphi h \sqrt{2} + \\
& \frac{1}{4}u_2 r c_\varphi \sqrt{2} - \frac{1}{4}u_2 c_\varphi h \sqrt{2} - \frac{1}{2}u_1 r c_\varphi \sqrt{2} + \frac{1}{2}u_1 c_\varphi h \sqrt{2} + Ml^2 s_\psi \omega_\varphi^2 - 3\omega_\psi m c_\varphi \omega_\varphi r^2 s_\varphi + 2\omega_\psi M c_\varphi l^2 s_\varphi \omega_\varphi + \\
& 6\omega_\psi m s_\varphi \omega_\varphi h^2 c_\varphi + 3m \omega_\varphi^2 h^2 s_\psi - \frac{3}{2}m \omega_\varphi^2 r^2 s_\psi + 3m c_\varphi^2 r^2 s_\psi \omega_\varphi^2 - 6m c_\varphi^2 \omega_\varphi^2 h^2 s_\psi - 2M c_\varphi^2 \omega_\varphi^2 l^2 s_\psi + \\
& 3s_\psi c_\varphi g m h + s_\psi c_\varphi g M l
\end{aligned}$$

kde

$$\cos(\varphi(t)) = c_\varphi \quad \sin(\varphi(t)) = s_\varphi \quad \cos(\psi(t)) = c_\psi \quad \sin(\psi(t)) = s_\psi$$

NS popis pro 4-bodový model

Ze sekce 2.5 uvedeme popis funkcí nelineárního statového popisu 4-bodového modelu:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_3$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_4$$

funkce $f_3(x, \mathbf{u})$, $f_4(x, u)$ získáme provedeme-li substituci stavových proměnných do řešení soustavy rovnic 2.41, kde proměnné jsou úhlové zrychlení $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$. Platí tedy:

$$\begin{aligned} f_3 = & \frac{1}{2}(48s_{x_1}c_{x_1}mh^2Ml^2x_3^2c_{x_2}^2+24mh^2c_{x_1}^2s_{x_1}gMlc_{x_2}^2-12mc_{x_1}^2r^2s_{x_1}gMlc_{x_2}^2+24Ml^2c_{x_1}^2s_{x_1}gmhc_{x_2}^2+ \\ & 3mc_{x_1}^2r^3u_3c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}-3mc_{x_1}^2r^3u_2c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}+6mr^2u_3c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}-6mr^2u_2c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}+12mr^2u_1s_{x_1}hs_{x_2}\sqrt{2}- \\ & 6mr^2u_2s_{x_1}hs_{x_2}\sqrt{2}-12mr^3u_1s_{x_1}\sqrt{2}s_{x_2}+6mr^3u_2s_{x_1}\sqrt{2}s_{x_2}+6mr^3u_3s_{x_1}\sqrt{2}s_{x_2}-6mr^3u_3c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}+ \\ & 6mr^3u_2c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}-72s_{x_1}c_{x_1}m^2h^4x_3^2-8s_{x_1}c_{x_1}M^2l^4x_3^2-6mr^2u_3s_{x_1}hs_{x_2}\sqrt{2}+6mh^3c_{x_1}^2u_3c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}- \\ & 6mh^3c_{x_1}^2u_2c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}+3mc_{x_1}^2r^2u_2c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}-2Ml^2c_{x_1}^2u_3c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}+6mh^2c_{x_1}^2u_2c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}- \\ & 2Ml^2c_{x_1}^2u_2c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}+2Ml^2c_{x_1}^2u_2c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}+2Ml^2c_{x_1}^2u_3c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}-3mc_{x_1}^2r^2u_3c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}- \\ & 6mh^2c_{x_1}^2u_3c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}+24mr^2x_3Mc_{x_2}c_{x_1}^2l^2s_{x_2}x_4+48mh^2c_{x_1}^4x_3Mc_{x_2}l^2s_{x_2}x_4-24mc_{x_1}^4r^2x_3Mc_{x_2}l^2s_{x_2}x_4+ \\ & 48s_{x_2}c_{x_1}^2mh^2x_3Ml^2c_{x_2}x_4+72s_{x_1}c_{x_1}m^2h^4x_3^2c_{x_2}^2+8s_{x_1}c_{x_1}M^2l^4x_3^2c_{x_2}^2+72m^2h^3c_{x_1}^2s_{x_1}gc_{x_2}^2+8M^2l^3c_{x_1}^2s_{x_1}gc_{x_2}^2+ \\ & 72m^2h^4c_{x_1}^4x_3s_{x_2}x_4c_{x_2}+18m^2c_{x_1}^4r^4x_3c_{x_2}x_4s_{x_2}+8M^2l^4c_{x_1}^4x_3c_{x_2}s_{x_2}x_4-54m^2r^4x_3c_{x_2}x_4s_{x_2}c_{x_1}^2- \\ & 24mr^2Ms_{x_1}l^2c_{x_1}x_3^2+24mr^2x_4Ms_{x_1}l^2s_{x_2}+72m^2r^2c_{x_2}^2s_{x_1}x_3^2h^2c_{x_1}-72m^2r^2x_4c_{x_1}^2x_3h^2s_{x_2}-72m^2r^2s_{x_1}h^2c_{x_2}x_4^2c_{x_1}+ \\ & 72m^2h^2c_{x_1}^3r^2c_{x_2}x_4^2s_{x_1}+24mc_{x_1}^3r^2Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4^2-24mr^2x_4Mc_{x_1}^2x_3l^2s_{x_2}+24mr^2Mc_{x_2}^2c_{x_1}l^2s_{x_1}x_3^2- \\ & 24mr^2Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4^2c_{x_1}+72m^2r^2x_3s_{x_2}x_4c_{x_1}^2h^2c_{x_2}-72m^2h^2c_{x_1}^4x_3c_{x_2}x_4r^2s_{x_2}-48mh^2c_{x_1}^2x_4Ms_{x_1}l^2s_{x_2}- \\ & 48mh^2c_{x_1}^3Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4^2-36m^2r^4x_4s_{x_2}x_3+54m^2r^4s_{x_1}x_3^2c_{x_1}+72m^2r^2s_{x_1}gh-72m^2r^2s_{x_1}h^2c_{x_1}x_3^2+ \\ & 72m^2r^2x_4x_3h^2s_{x_2}+54m^2r^4x_4c_{x_1}^2s_{x_2}x_3+36m^2r^4c_{x_1}c_{x_2}x_4^2s_{x_1}-54m^2r^4c_{x_2}^2c_{x_1}x_3^2s_{x_1}+24mr^2s_{x_1}gMl- \\ & 72m^2h^4c_{x_1}^2x_4x_3s_{x_2}-72m^2h^4c_{x_1}^3s_{x_1}c_{x_2}x_4^2-18m^2c_{x_1}^3r^4c_{x_2}x_4^2s_{x_1}-8M^2l^4c_{x_1}^2x_4x_3s_{x_2}-8M^2l^4c_{x_1}^3s_{x_1}c_{x_2}x_4^2+ \\ & 8s_{x_2}c_{x_1}^2M^2l^4x_3c_{x_2}x_4-48s_{x_1}c_{x_1}mh^2Ml^2x_3^2+72s_{x_2}c_{x_1}^2m^2h^4x_3c_{x_2}x_4-36m^2c_{x_1}^2r^2s_{x_1}ghc_{x_2}^2)/(18m^2r^4+ \\ & 36m^2h^2r^2+12mr^2Ml^2+36m^2h^4c_{x_1}^2c_{x_2}^2+4M^2l^4c_{x_1}^2c_{x_2}^2+24mh^2c_{x_1}^2Ml^2c_{x_2}^2-9m^2r^4c_{x_2}^2c_{x_1}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 = & \frac{1}{2}(-4Ml^2u_1rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2+4Ml^2u_1c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2+6mh^2u_2rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2+2Ml^2u_2rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2- \\ & 2Ml^2u_2c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2+6mh^2u_3rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2+2Ml^2u_3rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2-2Ml^2u_3c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2-6mr^2u_1c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2+ \\ & 3mr^2u_2c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2-6mr^2u_3c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2-6mr^2u_2c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2+12mr^2u_1c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2+6mr^3u_1c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2- \\ & 3mr^3u_2c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2-3mr^3u_3c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2+12mh^3u_1c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2-6mh^3u_2c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2-6mh^3u_3c_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2+ \\ & 3mr^2u_3c_{x_1}h\sqrt{2}c_{x_2}^2-12mh^2u_1rc_{x_1}\sqrt{2}c_{x_2}^2-48mh^2x_3Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4c_{x_1}+48mc_{x_1}^3c_{x_2}^3h^2x_3Ms_{x_1}l^2x_4- \\ & 48mh^2c_{x_1}^3x_3Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4-24mr^2c_{x_2}^3c_{x_1}^3x_3Ms_{x_1}l^2x_4+24mc_{x_1}^3r^2x_3Ms_{x_1}l^2c_{x_2}x_4-48mc_{x_2}^2c_{x_1}^2h^2Ml^2s_{x_2}x_3^2- \\ & 72m^2c_{x_1}^3c_{x_2}^3h^2x_3r^2x_4s_{x_1}+48mh^2x_4Mc_{x_1}l^2s_{x_1}x_3+24mc_{x_2}^2c_{x_1}^3h^2s_{x_2}gMl+72m^2h^2c_{x_1}^3x_3r^2c_{x_2}x_4s_{x_1}+ \\ & 24mr^2c_{x_2}^2c_{x_1}^2Ml^2s_{x_2}x_3^2-12mr^2c_{x_2}^2c_{x_1}^3s_{x_2}gMl+24Mc_{x_2}^2c_{x_1}^3l^2s_{x_2}gmh+72m^2c_{x_2}^2c_{x_1}^2h^2x_3^2r^2s_{x_2}+ \\ & 72m^2c_{x_2}^3c_{x_1}^3h^4x_3s_{x_1}x_4-72m^2h^4c_{x_1}^3x_3s_{x_1}c_{x_2}x_4+18m^2r^4c_{x_2}^3c_{x_1}^3x_3x_4s_{x_1}-36m^2r^2c_{x_2}^2c_{x_1}^3s_{x_2}gh- \\ & 18m^2c_{x_1}^3r^4x_3c_{x_2}x_4s_{x_1}-72m^2h^4x_3s_{x_1}c_{x_2}x_4c_{x_1}-48mh^2Mc_{x_1}^2x_3^2l^2s_{x_2}+18m^2r^4x_3c_{x_1}c_{x_2}x_4s_{x_1}- \\ & 24mr^2Mc_{x_1}^2x_3^2l^2s_{x_2}+24mr^2s_{x_2}c_{x_1}gMl-8M^2l^4x_3s_{x_1}c_{x_2}x_4c_{x_1}+8M^2c_{x_2}^3c_{x_1}^3l^4x_3s_{x_1}x_4-8M^2l^4 \\ & c_{x_1}^3x_3s_{x_1}c_{x_2}x_4-3s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mr^3u_3c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}+3s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mr^3u_2c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}-6s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mh^3u_3c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}+ \\ & 6s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mh^3u_2c_{x_2}\sqrt{3}\sqrt{2}-12mr^3u_1c_{x_1}\sqrt{2}+6mr^3u_2c_{x_1}\sqrt{2}+6mr^3u_3c_{x_1}\sqrt{2}-8s_{x_2}c_{x_1}^4M^2l^4c_{x_2}x_4^2- \\ & 18s_{x_2}c_{x_1}^4m^2r^4c_{x_2}x_4^2-72s_{x_2}c_{x_1}^4m^2h^4c_{x_2}x_4^2+72s_{x_2}c_{x_1}^2m^2h^4c_{x_2}x_4^2+8s_{x_2}c_{x_1}^2M^2l^4c_{x_2}x_4^2+18s_{x_2}c_{x_1}^2m^2r^4c_{x_2}x_4^2- \\ & 2Ms_{x_1}l^2s_{x_2}c_{x_1}u_3c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}+2Ms_{x_1}l^2s_{x_2}c_{x_1}u_3c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2} \\ & -2Ms_{x_1}l^2s_{x_2}c_{x_1}u_2c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}+2Ms_{x_1}l^2s_{x_2}c_{x_1}u_2c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}+6s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mh^2u_3c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}- \\ & 6s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mh^2u_2c_{x_2}\sqrt{3}r\sqrt{2}+3s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mr^2u_3c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}-3s_{x_1}s_{x_2}c_{x_1}mr^2u_2c_{x_2}h\sqrt{3}\sqrt{2}-18m^2r^4c_{x_2}^2c_{x_1}^2x_3^2s_{x_2}- \\ & 8M^2c_{x_2}^2c_{x_1}^2l^4s_{x_2}x_3^2+8M^2c_{x_2}^2c_{x_1}^3l^3s_{x_2}g+8M^2l^4x_4c_{x_1}s_{x_1}x_3+48mh^2Ml^2s_{x_2}x_3^2+72m^2h^4x_4s_{x_1}x_3c_{x_1}- \\ & 72m^2h^2c_{x_1}^2r^2s_{x_2}x_3^2-54m^2r^4x_4c_{x_1}x_3s_{x_1}+72m^2r^2s_{x_2}c_{x_1}gh-72m^2c_{x_2}^2c_{x_1}^2h^4x_3^2s_{x_2}+72m^2c_{x_2}^2c_{x_1}^3h^3s_{x_2}g- \\ & 72m^2h^4c_{x_1}^2x_3^2s_{x_2}+54m^2r^4c_{x_1}^2s_{x_2}x_3^2-8M^2l^4c_{x_1}^2x_3^2s_{x_2}+72m^2h^4x_3^2s_{x_2}-18m^2r^4x_3^2s_{x_2}+8M^2l^4s_{x_2}x_3^2- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 24mr^2x_4Mc_{x_1}l^2s_{x_1}x_3c_{x_2}^2+48mh^2x_4Mc_{x_1}l^2s_{x_1}x_3c_{x_2}^2-72s_{x_2}c_{x_1}^2m^2r^2h^2c_{x_2}x_4^2+72m^2h^2x_4c_{x_1}x_3r^2s_{x_1}+ \\
& 72s_{x_2}c_{x_1}^4m^2r^2h^2c_{x_2}x_4^2+18m^2r^4x_4c_{x_1}x_3s_{x_1}c_{x_2}^2+72m^2h^4x_4s_{x_1}x_3c_{x_1}c_{x_2}^2+8M^2l^4x_4c_{x_1}x_3r^2s_{x_1}c_{x_2}^2+ \\
& 24mr^2x_4Mc_{x_1}l^2s_{x_1}x_3-24s_{x_2}c_{x_1}^2mr^2Ml^2c_{x_2}x_4^2+48s_{x_2}c_{x_1}^2mh^2Ml^2c_{x_2}x_4^2-72m^2h^2x_4c_{x_1}x_3r^2s_{x_1}c_{x_2}^2- \\
& 48s_{x_2}c_{x_1}^4mh^2Ml^2c_{x_2}x_4^2+24s_{x_2}c_{x_1}^4mr^2Ml^2c_{x_2}x_4^2)/(18m^2r^4+12mr^2Ml^2-9m^2r^4c_{x_2}^2c_{x_1}^2+36m^2h^2r^2+ \\
& 36m^2h^4c_{x_1}^2c_{x_2}^2+4M^2l^4c_{x_1}^2c_{x_2}^2+24mh^2c_{x_1}^2Ml^2c_{x_2}^2)
\end{aligned}$$

Rychlosti v L-modelu

Abychom vyjádřili kinetickou energii je třeba znát rychlosti hmotných bodů v_A, v_B, v_C . Rychlosti $v_i = [v_i(1) \ v_i(2) \ v_i(3)]^T$ vyjádříme po složkách .

$$v_A(1) = -s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)c_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_A\right) - c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) + s_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \left(\frac{1}{2}\right)r\sqrt{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)s_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_A\right)$$

$$v_A(2) = c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)s_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_A\right) - s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \left(\frac{1}{2}\right)r\sqrt{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) - c_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)c_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_A\right)$$

$$v_A(3) = c_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_A + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_A\right)$$

$$\begin{aligned}
v_B(1) = & -s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)r - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)c_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right) - c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \right. \\
& \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) + s_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \left(\frac{1}{2}\right)r\sqrt{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{1}{2}\right)s_\beta c_\alpha \sqrt{2}\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right) - \left(\frac{1}{2}\right)c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)s_\alpha \sqrt{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \right. \\
& \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)r\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\right)s_\beta s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_B(2) = & c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)r - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)s_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right) - s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \right. \\
& \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) - c_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)c_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right) - \left(\frac{1}{2}\right)s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)s_\alpha \sqrt{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \right. \\
& \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)c_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) + \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\right)c_\beta s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right)
\end{aligned}$$

$$v_B(3) = c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(l - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\alpha \frac{d}{dt}\delta_B + \left(\frac{1}{2}\right)s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\delta_B + d_0)\right) - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\right)c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_B\right)$$

$$\begin{aligned}
v_C(1) = & -s_\beta \frac{d}{dt}\beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}c_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right) - c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + \\
& s_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}s_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right) + c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)s_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) + \right. \\
& \left.\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + s_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + \right. \\
& \left.\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}s_\beta s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_C(2) = & c_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}s_\beta\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right) - s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)c_\alpha\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) - \\
& c_\beta s_\alpha \frac{d}{dt}\alpha\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}c_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right) + s_\beta\left(\frac{d}{dt}\beta\right)s_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) + \right. \\
& \left.\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) - c_\beta c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) - \right. \\
& \left.\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\beta s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right)
\end{aligned}$$

$$v_C(3) = c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right) - s_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta_C + d_0)\right) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}c_\alpha\left(\frac{d}{dt}\delta_C\right)\right)$$

Substitute a řešení soustavy 2.66 pro L-model

$$a_1 = \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 r - \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 r - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{10} + m_z \sqrt{2} q_{51} s_{q40} q_{41} l - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 l \sqrt{2} + m_z q_{51} s_{q40} q_{41} d_0 + \frac{1}{2}m_z g c_{q50} c_{q40} \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 q_{10} - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 q_{10} - k a - m_z q_{51} s_{q40} q_{41} r + \frac{1}{2}m_z g s_{q50} \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 r + m_z q_{51} q_{10} s_{q40} q_{41} - \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 l \sqrt{2} + k q_{10}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{20} s_{q40} \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} + \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{20} c_{q40} q_{41} \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z q_{51} r c_{q40} q_{41} \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z q_{51} c_{q40} q_{41} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} s_{q40} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 l \sqrt{2} + \frac{1}{2}m_z g c_{q50} c_{q40} \sqrt{2} + \frac{1}{8}m_z q_{41}^2 r - \frac{7}{8}m_z q_{41}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 r - \frac{1}{2}m_z q_{51} s_{q40} q_{41} d_0 - \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{20} - \frac{1}{2}m_z \sqrt{2} q_{51} s_{q40} q_{41} l - k a + \frac{1}{2}m_z q_{51} s_{q40} q_{41} r - \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 d_0 + \frac{7}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 r - \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{20} s_{q40} q_{41} + k q_{20} - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 q_{20} - \frac{7}{8}m_z q_{41}^2 q_{20} - \frac{1}{4}m_z g s_{q50} \sqrt{2} - \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 c_{q40} l s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 l \sqrt{2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{4}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} - \frac{1}{4}m_z q_{51} r c_{q40} q_{41} \sqrt{3} - \frac{1}{4}m_z q_{51} c_{q40} q_{41} \sqrt{3} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} s_{q40} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 l \sqrt{2} + \frac{1}{2}m_z g c_{q50} c_{q40} \sqrt{2} + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{30} s_{q40} \sqrt{3} - \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{30} c_{q40} q_{41} \sqrt{3} + \frac{1}{8}m_z q_{41}^2 r - \frac{7}{8}m_z q_{41}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 r - \frac{1}{2}m_z q_{51} s_{q40} q_{41} d_0 - \frac{1}{2}m_z \sqrt{2} q_{51} s_{q40} q_{41} l - k a + \frac{1}{2}m_z q_{51} s_{q40} q_{41} r - \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 d_0 + \frac{7}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 r - \frac{7}{8}m_z q_{41}^2 q_{30} - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 q_{30} - \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 q_{30} c_{q40}^2 - \frac{1}{4}m_z g s_{q50} \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{30} s_{q40} q_{41} + k q_{30} + \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 c_{q40} l s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z q_{41}^2 l \sqrt{2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}m_z q_{51} q_{20} c_{q40} \sqrt{3} q_{21} + \frac{1}{2}m_z q_{51} \sqrt{2} q_{31} s_{q40} l + \frac{1}{2}m_z q_{51} \sqrt{2} q_{21} s_{q40} l + m_z q_{41} l \sqrt{2} q_{31} + m_z q_{41} l \sqrt{2} q_{21} - \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{21} c_{q40} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 q_{30} \sqrt{3} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 q_{20} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{4}m_z g c_{q50} c_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} - \frac{1}{4}m_z q_{51} r c_{q40} \sqrt{3} q_{21} - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{20}^2 \sqrt{3} - m_z q_{51} \sqrt{2} q_{11} s_{q40} l + \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{30} c_{q40} \sqrt{3} q_{31} + \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{31} c_{q40} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20} + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} - 3m_z q_{51}^2 c_{q40} l r \sqrt{2} s_{q40} + m_z q_{51}^2 c_{q40} l \sqrt{2} q_{20} s_{q40} + m_z q_{51}^2 c_{q40} l \sqrt{2} q_{30} s_{q40} + 3m_c q_{51}^2 c_{q40} l \sqrt{2} d_0 s_{q40} - 3m_c q_{51}^2 c_{q40} l r \sqrt{2} s_{q40} + m_z q_{51}^2 c_{q40} l \sqrt{2} q_{10} s_{q40} + 3m_z q_{51}^2 c_{q40} l \sqrt{2} d_0 s_{q40} + \frac{1}{4}m_z q_{51} r c_{q40} \sqrt{3} q_{31} - \frac{1}{2}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{2} q_{20} - \frac{3}{2}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{2} d_0 + \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 q_{20}^2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{30}^2 \sqrt{3} - \frac{3}{2}m_c g c_{q50} s_{q40} \sqrt{2} d_0 + \frac{3}{2}m_z g c_{q50} s_{q40} r \sqrt{2} - \frac{1}{2}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{2} q_{10} - m_z q_{41} r q_{11} + \frac{7}{4}m_z q_{41} q_{30} q_{31} + m_z q_{41} q_{10} q_{11} + \frac{7}{4}m_z q_{41} q_{20} q_{21} + m_z q_{41} q_{11} d_0 - \frac{1}{4}m_z q_{41} r q_{21} + \frac{7}{4}m_z q_{41} q_{21} d_0 - \frac{1}{4}m_z q_{41} r q_{31} + \frac{7}{4}m_z q_{41} q_{31} d_0 + m_z q_{41} l \sqrt{2} q_{11} - \frac{1}{2}m_z g c_{q50} s_{q40} \sqrt{2} q_{30} + \frac{3}{2}m_c g c_{q50} s_{q40} r \sqrt{2} + \frac{3}{4}m_c q_{51}^2 c_{q40} r^2 s_{q40} + \frac{3}{4}m_c q_{51}^2 c_{q40} d_0^2 s_{q40} + 3m_c q_{51}^2 c_{q40} l^2 s_{q40} + \frac{3}{4}m_z q_{51}^2 c_{q40} r^2 s_{q40} + \frac{1}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{10}^2 s_{q40} + \frac{3}{4}m_z q_{51}^2 c_{q40} d_0^2 s_{q40} + 3m_z q_{51}^2 c_{q40} l^2 s_{q40} - \frac{1}{2}m_z q_{51} r s_{q40} q_{31} - m_k g c_{q50} s_{q40} l T + \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{20}^2 s_{q40} + \frac{1}{8}m_z q_{51}^2 q_{30}^2 c_{q40} s_{q40} + m_k l T^2 q_{51}^2 c_{q40} s_{q40} - 3m_c g c_{q50} s_{q40} l + m_z q_{11} q_{51} s_{q40} r - \frac{1}{2}m_z q_{51} r s_{q40} q_{21} + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{31} s_{q40} d_0 - m_z q_{51} q_{11} s_{q40} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{21} s_{q40} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{20} s_{q40} q_{21} + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{30} s_{q40} q_{31} - m_z q_{51} q_{10} s_{q40} q_{11} - 3m_z g c_{q50} s_{q40} l - \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} + \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20} + m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{30} \sqrt{3} d_0 - m_z q_{51}^2 c_{q40}^2 q_{20} \sqrt{3} d_0 - m_z q_{51}^2 c_{q40} r q_{10} s_{q40} - \frac{9}{2}m_z q_{51}^2 c_{q40} r d_0 s_{q40} - \frac{7}{4}m_z q_{51}^2 r q_{20} c_{q40} s_{q40} + \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 q_{20} d_0 c_{q40} s_{q40} - \frac{7}{4}m_z q_{51}^2 r q_{30} c_{q40} s_{q40} + \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{30} d_0 s_{q40} - \frac{9}{2}m_c q_{51}^2 c_{q40} r d_0 s_{q40} + m_z q_{51}^2 c_{q40} q_{10} d_0 s_{q40} - \frac{1}{4}m_z q_{51}^2 q_{30}^2 \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z g c_{q50} c_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}m_z q_{21} s_{q40} q_{41} d_0 - m_z q_{11} s_{q40} q_{41} r + \frac{1}{2}m_z r s_{q40} q_{41} q_{21} + \frac{1}{2}m_z q_{20} s_{q40} q_{41} q_{21} - 3m_z g s_{q50} c_{q40} l - 3m_c g s_{q50} c_{q40} l - m_k g s_{q50} c_{q40} l T + \frac{1}{4}m_z q_{30} c_{q40} q_{41} \sqrt{3} q_{31} - \frac{1}{2}m_z g s_{q50} c_{q40} \sqrt{2} q_{20} - \frac{3}{2}m_z g s_{q50} c_{q40} \sqrt{2} d_0 - \frac{1}{2}m_z g s_{q50} c_{q40} \sqrt{2} q_{10} + \frac{3}{2}m_z g s_{q50} c_{q40} r \sqrt{2} - \frac{3}{2}m_c g s_{q50} c_{q40} \sqrt{2} d_0 + \frac{3}{2}m_c g s_{q50} c_{q40} r \sqrt{2} - \frac{1}{4}m_z g c_{q50} \sqrt{2} q_{20} + m_z q_{51} q_{41} q_{30} \sqrt{3} d_0 - m_z q_{51} q_{41} q_{20} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{4}m_z r s_{q40} q_{41}^2 \sqrt{3} q_{30} - \frac{1}{4}m_z g s_{q50} s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20} + m_z q_{51} c_{q40}^2 l \sqrt{2} q_{21} - m_z q_{51} c_{q40}^2 l q_{41} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} + m_z q_{51} c_{q40}^2 l q_{41} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20} - \frac{1}{2}m_z q_{51} c_{q40} l s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{31} - 2m_z q_{51} c_{q40} l \sqrt{2} q_{10} s_{q40} q_{41} - 6m_c q_{51} c_{q40} l \sqrt{2} d_0 s_{q40} q_{41} - 6m_z q_{51} c_{q40} l \sqrt{2} d_0 s_{q40} q_{41} + 6m_z q_{51} c_{q40} l r \sqrt{2} s_{q40} q_{41} - 2m_z q_{51} c_{q40} l \sqrt{2} q_{20} s_{q40} q_{41} + 6m_c q_{51} c_{q40} l r \sqrt{2} s_{q40} q_{41} - 2m_z q_{51} c_{q40} l \sqrt{2} q_{30} s_{q40} q_{41} + \frac{1}{2}m_z q_{51} c_{q40} l s_{q40} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{21} - \frac{1}{2}m_z g s_{q50} c_{q40} \sqrt{2} q_{30} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}m_z q_{20} c_{q_{40}} q_{41} \sqrt{3} q_{21} + m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 l \sqrt{2} q_{11} - \frac{1}{4}m_z g c_{q_{50}} \sqrt{2} q_{30} + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{41} q_{30}^2 \sqrt{3} + \frac{1}{8}m_z q_{20}^2 s_{q_{40}} q_{41}^2 \sqrt{3} + \\
& \frac{1}{4}m_z \sqrt{2} q_{30} c_{q_{40}} q_{41}^2 l + \frac{1}{4}m_z \sqrt{2} q_{20} c_{q_{40}} q_{41}^2 l - \frac{1}{8}m_z q_{30}^2 s_{q_{40}} q_{41}^2 \sqrt{3} - 2m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{30} q_{41} \sqrt{3} d_0 + 2m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{20} q_{41} \sqrt{3} d_0 + \\
& \frac{1}{4}m_z r s_{q_{40}} q_{41}^2 \sqrt{3} q_{20} + \frac{1}{4}m_z q_{20} s_{q_{40}} q_{41}^2 \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{2}m_z \sqrt{2} q_{10} c_{q_{40}} q_{41}^2 l + m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 l \sqrt{2} q_{31} + \frac{1}{2}m_z g c_{q_{50}} \sqrt{2} q_{10} - \\
& \frac{1}{4}m_z r c_{q_{40}} q_{41} \sqrt{3} q_{21} - \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{41} q_{20}^2 \sqrt{3} + m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{20}^2 q_{41} \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z q_{31} c_{q_{40}} q_{41} \sqrt{3} d_0 + \frac{1}{4}m_z r c_{q_{40}} q_{41} \sqrt{3} q_{31} - \\
& \frac{1}{4}m_z q_{21} c_{q_{40}} q_{41} \sqrt{3} d_0 - \frac{1}{4}m_z q_{30} s_{q_{40}} q_{41}^2 \sqrt{3} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{41} l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} - \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{41} l \sqrt{3} \sqrt{2} q_{20} + 9m_c q_{51} c_{q_{40}} r d_0 s_{q_{40}} q_{41} - \\
& 2m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{10} d_0 s_{q_{40}} q_{41} + 2m_z q_{51} c_{q_{40}} r q_{10} s_{q_{40}} q_{41} + 9m_z q_{51} c_{q_{40}} r d_0 s_{q_{40}} q_{41} + (7/2)m_z q_{51} r q_{20} c_{q_{40}} s_{q_{40}} q_{41} - \\
& \frac{1}{2}m_z q_{51} q_{20} d_0 c_{q_{40}} s_{q_{40}} q_{41} + (7/2)m_z q_{51} r q_{30} c_{q_{40}} s_{q_{40}} q_{41} - \frac{1}{2}m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{30} d_0 s_{q_{40}} q_{41} - m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{10}^2 s_{q_{40}} q_{41} - \\
& \frac{3}{2}m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{10}^2 s_{q_{40}} q_{41} - 6m_z q_{51} c_{q_{40}} l^2 s_{q_{40}} q_{41} - m_z q_{10} c_{q_{40}} q_{41}^2 d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{20} c_{q_{40}} q_{41}^2 d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{30} c_{q_{40}} q_{41}^2 d_0 - \\
& \frac{1}{4}m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{20}^2 s_{q_{40}} q_{41} - \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{30}^2 c_{q_{40}} s_{q_{40}} q_{41} - 2m_c k l T^2 q_{51} c_{q_{40}} s_{q_{40}} q_{41} - \frac{3}{2}m_c q_{51} c_{q_{40}} r^2 s_{q_{40}} q_{41} - \\
& \frac{3}{2}m_c q_{51} c_{q_{40}} d_0^2 s_{q_{40}} q_{41} - 6m_c q_{51} c_{q_{40}} l^2 s_{q_{40}} q_{41} - \frac{3}{2}m_z q_{51} c_{q_{40}} r^2 s_{q_{40}} q_{41} - m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{30}^2 q_{41} \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z g s_{q_{50}} s_{q_{40}} \sqrt{3} \sqrt{2} q_{30} + \\
& m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{20} s_{q_{40}} \sqrt{3} q_{21} - m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{30} s_{q_{40}} \sqrt{3} q_{31} - m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{31} s_{q_{40}} \sqrt{3} d_0 + m_z q_{51} c_{q_{40}} q_{21} s_{q_{40}} \sqrt{3} d_0 + \\
& m_z q_{51} q_{30} q_{31} + m_z q_{51} q_{20} q_{21} + m_z q_{51} q_{10} q_{11} + m_z q_{51} q_{11} d_0 + m_z q_{51} r q_{11} + m_z q_{51} q_{21} d_0 + m_z q_{51} r q_{21} + \\
& m_z q_{51} r q_{31} + m_z q_{51} q_{31} d_0 - \frac{7}{4}m_z q_{51} r q_{31} c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{4}m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{31} d_0 + \frac{1}{2}m_z q_{31} s_{q_{40}} q_{41} d_0 + m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{11} d_0 - \\
& m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 r q_{11} - \frac{7}{4}m_z q_{51} r q_{21} c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{21} d_0 c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{4}m_z q_{20}^2 c_{q_{40}} q_{41}^2 + \frac{1}{2}m_z r s_{q_{40}} q_{41} q_{31} + \frac{1}{2}m_z q_{30} s_{q_{40}} q_{41} q_{31} + \\
& \frac{1}{4}m_z q_{30}^2 c_{q_{40}} q_{41}^2 + \frac{1}{4}m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{20} q_{21} + \frac{1}{4}m_z q_{51} q_{30} c_{q_{40}}^2 q_{31} + m_z q_{51} c_{q_{40}}^2 q_{10} q_{11} - m_z q_{10} s_{q_{40}} q_{41} q_{11} - \\
& \frac{1}{2}m_z q_{10}^2 c_{q_{40}} q_{41}^2 - m_z q_{11} s_{q_{40}} q_{41} d_0
\end{aligned}$$

$$b_1 = m_z$$

$$b_5 = m_z c_{q_{40}} r - \frac{1}{2}m_z \sqrt{2} c_{q_{40}} l$$

$$c_4 = \frac{1}{2}m_z r \sqrt{3} - \frac{1}{4}m_z l \sqrt{3} \sqrt{2}$$

$$c_5 = -\frac{1}{2}m_z c_{q_{40}} r + \frac{1}{4}m_z \sqrt{2} c_{q_{40}} l$$

$$e_2 = \frac{1}{2}m_z r \sqrt{3} - \frac{1}{4}m_z l \sqrt{3} \sqrt{2}$$

$$e_3 = -\frac{1}{2}m_z r \sqrt{3} + \frac{1}{4}m_z l \sqrt{3} \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
e_4 = & 3m_z l \sqrt{2} d_0 + m_z l \sqrt{2} q_{20} - 3m_z l r \sqrt{2} + m_z l \sqrt{2} q_{10} + m_z l \sqrt{2} q_{30} - 3m_c l r \sqrt{2} + 3m_c l \sqrt{2} d_0 - \\
& m_z r q_{10} + m_z q_{10} d_0 - \frac{1}{4}m_z r q_{20} + \frac{7}{4}m_z q_{20} d_0 - \frac{1}{4}m_z r q_{30} + \frac{7}{4}m_z q_{30} d_0 - \frac{3}{2}m_c r d_0 - \frac{3}{2}m_z r d_0 + \frac{9}{4}m_z d_0^2 + \\
& \frac{1}{2}m_z q_{10}^2 + \frac{9}{4}m_c d_0^2 + \frac{7}{8}m_z q_{30}^2 + 3m_z l^2 + \frac{9}{4}m_c r^2 + \frac{9}{4}m_z r^2 + 3m_c l^2 + m_c k l T^2 + \frac{7}{8}m_z q_{20}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_5 = & -\frac{1}{8}m_z (-2q_{20}^2 s_{q_{40}} - 2q_{30}^2 s_{q_{40}} + 4q_{10}^2 s_{q_{40}} - 4q_{30} s_{q_{40}} d_0 - q_{30}^2 c_{q_{40}} \sqrt{3} + 8q_{10} s_{q_{40}} d_0 - 4q_{20} s_{q_{40}} d_0 + \\
& q_{20}^2 c_{q_{40}} \sqrt{3} - 2r c_{q_{40}} \sqrt{3} q_{30} - 2q_{30} c_{q_{40}} \sqrt{3} d_0 + 4\sqrt{2} q_{10} s_{q_{40}} l + 2r c_{q_{40}} \sqrt{3} q_{20} + 2q_{20} c_{q_{40}} \sqrt{3} d_0 - 2\sqrt{2} q_{20} s_{q_{40}} l - \\
& 2\sqrt{2} q_{30} s_{q_{40}} l)
\end{aligned}$$

$$f_1 = m_z c_{q_{40}} r - \frac{1}{2}m_z \sqrt{2} c_{q_{40}} l$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}m_z c_{q_{40}} r + \frac{1}{4}m_z \sqrt{2} c_{q_{40}} l$$

$$f_4 = -\frac{1}{8}m_z(-2q_{20}^2s_{q_{40}}-2q_{30}^2s_{q_{40}}+4q_{10}^2s_{q_{40}}-4q_{30}s_{q_{40}}d_0-q_{30}^2c_{q_{40}}\sqrt{3}+8q_{10}s_{q_{40}}d_0-4q_{20}s_{q_{40}}d_0+q_{20}^2c_{q_{40}}\sqrt{3}-2rc_{q_{40}}\sqrt{3}q_{30}-2q_{30}c_{q_{40}}\sqrt{3}d_0+4\sqrt{2}q_{10}s_{q_{40}}l+2rc_{q_{40}}\sqrt{3}q_{20}+2q_{20}c_{q_{40}}\sqrt{3}d_0-2\sqrt{2}q_{20}s_{q_{40}}l-2\sqrt{2}q_{30}s_{q_{40}}l)$$

$$f_5 = m_zc_{q_{40}}^2l\sqrt{2}q_{20} + \frac{1}{2}m_zc_{q_{40}}q_{20}^2s_{q_{40}}\sqrt{3} + m_zc_{q_{40}}^2l\sqrt{2}q_{30} + m_zc_{q_{40}}^2l\sqrt{2}q_{10} + 3m_zc_{q_{40}}^2l\sqrt{2}d_0 - 3m_zc_{q_{40}}^2lr\sqrt{2} - \frac{1}{2}m_zc_{q_{40}}q_{30}^2s_{q_{40}}\sqrt{3} + 3m_zc_{q_{40}}^2l\sqrt{2}d_0 - 3m_zc_{q_{40}}^2lr\sqrt{2} + m_zrq_{10} + m_zq_{10}d_0 + m_zrq_{20} + m_zq_{20}d_0 + m_zrq_{30} + m_zq_{30}d_0 + 3m_zrd_0 + 3m_zrd_0 + \frac{3}{2}m_zd_0^2 + \frac{1}{2}m_zq_{10}^2 + \frac{3}{2}m_zd_0^2 + \frac{1}{2}m_zq_{30}^2 + \frac{3}{2}m_zr^2 + \frac{3}{2}m_zr^2 + \frac{1}{2}m_zq_{20}^2 - \frac{7}{4}m_zrq_{30}c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{4}m_zc_{q_{40}}^2q_{30}d_0 - \frac{9}{2}m_zc_{q_{40}}^2rd_0 + m_zc_{q_{40}}^2q_{10}d_0 - m_zc_{q_{40}}^2rq_{10} - \frac{9}{2}m_zc_{q_{40}}^2rd_0 - \frac{7}{4}m_zrq_{20}c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{4}m_zq_{20}d_0c_{q_{40}}^2 + \frac{1}{8}m_zq_{30}^2c_{q_{40}}^2 + m_klT^2c_{q_{40}}^2 + \frac{3}{4}m_zc_{q_{40}}^2r^2 + \frac{3}{4}m_zc_{q_{40}}^2d_0^2 + 3m_zc_{q_{40}}^2l^2 + \frac{3}{4}m_zc_{q_{40}}^2r^2 + \frac{1}{2}m_zc_{q_{40}}^2q_{10}^2 + \frac{3}{4}m_zc_{q_{40}}^2d_0^2 + 3m_zc_{q_{40}}^2l^2 + \frac{1}{8}m_zc_{q_{40}}^2q_{20}^2 - \frac{1}{2}m_zc_{q_{40}}ls_{q_{40}}\sqrt{3}\sqrt{2}q_{30} + \frac{1}{2}m_zc_{q_{40}}ls_{q_{40}}\sqrt{3}\sqrt{2}q_{20} - m_zc_{q_{40}}q_{30}s_{q_{40}}\sqrt{3}d_0 + m_zc_{q_{40}}q_{20}s_{q_{40}}\sqrt{3}d_0$$

kde

$$\sin(q_{40}) = s_{q_{40}} \quad \cos(q_{40}) = c_{q_{40}} \quad \sin(q_{50}) = s_{q_{50}} \quad \cos(q_{50}) = c_{q_{50}}$$

Soustavu vyřešíme ve výpočetním softwaru Maple 16, dostaneme řešení:

$$q12 = (-f_1c_4bq31b_1e_5 - bq11c_4b_1f_5e_3 - f_1c_4a_3b_1e_5 + f_1c_4F_3b_1e_5 + f_1c_4e_3a_5b_1 + F_1c_4b_1f_5e_3 - a_1c_4b_1f_5e_3 - a_1b_1^2e_4f_5 + a_1b_1^2e_5f_4 + f_1b_1^2e_4a_5 - f_1b_1^2e_5a_4 + F_1b_1^2e_4f_5 - F_1b_1^2e_5f_4 + 2a_1c_4c_5e_3f_2 + a_1c_4e_2b_1f_5 - 2a_1c_4e_2c_5f_2 - a_1c_5e_3b_1f_4 + 2a_1b_1e_4c_5f_2 - a_1e_2b_1c_5f_4 + f_1e_2b_1c_5a_4 - f_1b_1e_4c_5a_3 + f_1b_1e_4c_5F_3 - f_1b_1c_5e_4a_2 + f_1b_1c_5e_4F_2 + f_1c_5e_3b_1a_4 - f_1c_4e_2b_1a_5 + 2f_1c_4e_2c_5a_3 - 2f_1c_4e_2c_5F_3 + f_1c_4b_1e_5a_2 - f_1c_4b_1e_5F_2 - 2f_1c_4c_5e_3a_2 + 2f_1c_4c_5e_3F_2 - 2F_1c_4c_5e_3f_2 - F_1c_4e_2b_1f_5 + 2F_1c_4e_2c_5f_2 + F_1c_5e_3b_1f_4 - 2F_1b_1e_4c_5f_2 + F_1e_2b_1c_5f_4 - bq11b_1^2e_4f_5 + bq11b_1^2e_5f_4 - f_1b_1e_4c_5bq31 - f_1b_1c_5e_4bq21 + 2f_1c_4e_2c_5bq31 + f_1c_4b_1e_5bq21 - 2f_1c_4c_5e_3bq21 + 2bq11c_4c_5e_3f_2 + bq11c_4e_2b_1f_5 - 2bq11c_4e_2c_5f_2 - bq11c_5e_3b_1f_4 + 2bq11b_1e_4c_5f_2 - bq11e_2b_1c_5f_4)/(b_1(-c_4e_2b_1f_5 + c_4b_1f_5e_3 + c_4e_2b_5f_1 - c_4b_5f_1e_3 + 2c_4e_2c_5f_2 - 2c_4c_5e_3f_2 + c_5e_3b_1f_4 - b_1e_4b_5f_1 + e_2b_1c_5f_4 - 2b_1e_4c_5f_2 - b_1^2e_5f_4 + b_1^2e_4f_5))$$

$$q22 = -(-f_2b_1^2e_4a_5 + f_2b_1^2e_5a_4 + a_3c_4b_1e_5f_2 - a_3c_4e_2b_1f_5 + a_3c_4e_2b_5f_1 + a_3b_1e_4c_5f_2 - a_3e_2b_1c_5f_4 - e_3F_1b_5c_4f_2 - e_3F_2b_1c_4f_5 - e_3F_2b_1c_5f_4 + e_3F_2b_5c_4f_1 + e_3a_1b_5c_4f_2 + e_3a_2b_1c_4f_5 + e_3a_2b_1c_5f_4 - e_3a_2b_5c_4f_1 - e_3a_4b_1c_5f_2 - e_3a_5b_1c_4f_2 + f_2e_2b_1c_5a_4 + f_2b_1e_4b_5a_1 - f_2b_1e_4b_5F_1 - f_2b_1e_4c_5F_3 - f_2b_1c_5e_4a_2 + f_2b_1c_5e_4F_2 + f_2c_4e_2b_1a_5 + f_2c_4e_2b_5F_1 - f_2c_4e_2b_5a_1 - f_2c_4b_1e_5a_2 + f_2c_4b_1e_5F_2 - F_3c_4b_1e_5f_2 + F_3c_4e_2b_1f_5 - F_3c_4e_2b_5f_1 + F_3e_2b_1c_5f_4 + bq31c_4b_1e_5f_2 - bq31c_4e_2b_1f_5 + bq31c_4e_2b_5f_1 + bq31b_1e_4c_5f_2 - bq31e_2b_1c_5f_4 + e_3bb_1c_4f_5q21 + e_3bb_1c_5f_4q21 - e_3bb_5c_4f_1q21 + e_3bb_5c_4f_2q11 + f_2b_1e_4b_5bq11 - f_2b_1c_5e_4bq21 - f_2c_4e_2b_5bq11 - f_2c_4b_1e_5bq21 - a_2b_1e_4b_5f_1 + b_1a_4e_2b_5f_1 + F_2b_1e_4b_5f_1 + bq21b_1^2e_4f_5 - b_1^2f_4e_5bq21 + b_1f_4e_2b_5F_1 - b_1f_4e_2b_5a_1 + b_1^2f_4e_2a_5 - b_1^2f_4e_5a_2 + b_1^2f_4e_5F_2 + a_2b_1^2e_4f_5 - b_1^2a_4e_2f_5 - F_2b_1^2e_4f_5 - b_1f_4e_2b_5bq11 - bq21b_1e_4b_5f_1)/(b_1(-c_4e_2b_1f_5 + c_4b_1f_5e_3 + c_4e_2b_5f_1 - c_4b_5f_1e_3 + 2c_4e_2c_5f_2 - 2c_4c_5e_3f_2 + c_5e_3b_1f_4 - b_1e_4b_5f_1 + e_2b_1c_5f_4 - 2b_1e_4c_5f_2 - b_1^2e_5f_4 + b_1^2e_4f_5))$$

$$q32 = -(a_3b_1^2e_4f_5 - a_3b_1^2e_5f_4 - e_3a_4b_1^2f_5 + e_3a_5b_1^2f_4 - f_2b_1^2e_4a_5 + f_2b_1^2e_5a_4 - F_3b_1^2e_4f_5 + F_3b_1^2e_5f_4 + a_3c_4b_1e_5f_2 - a_3c_4e_2b_1f_5 + a_3c_4e_2b_5f_1 - a_3b_1e_4c_5f_2 + a_3e_2b_1c_5f_4 - a_3b_1e_4b_5f_1 + bq31b_1^2e_4f_5 - bq31b_1^2e_5f_4 + e_3F_1b_1b_5f_4 - e_3F_1b_5c_4f_2 - e_3F_2b_1c_4f_5 + e_3F_2b_1c_5f_4 + e_3F_2b_5c_4f_1 - e_3a_1b_1b_5f_4 + e_3a_1b_5c_4f_2 + e_3a_2b_1c_4f_5 - e_3a_2b_1c_5f_4 - e_3a_2b_5c_4f_1 + e_3a_4b_1b_5f_1 + e_3a_4b_1c_5f_2 - e_3a_5b_1c_4f_2 - f_2e_2b_1c_5a_4 + f_2b_1e_4b_5a_1 - f_2b_1e_4b_5F_1 + f_2b_1e_4c_5F_3 + f_2b_1c_5e_4a_2 - f_2b_1c_5e_4F_2 + f_2c_4e_2b_1a_5 + f_2c_4e_2b_5F_1 - f_2c_4e_2b_5a_1 - f_2c_4b_1e_5a_2 + f_2c_4b_1e_5F_2 - F_3c_4b_1e_5f_2 + F_3c_4e_2b_1f_5 -$$

$$F_3c_4e_2b_5f_1 - F_3e_2b_1c_5f_4 + F_3b_1e_4b_5f_1 + bq31c_4b_1e_5f_2 - bq31c_4e_2b_1f_5 + bq31c_4e_2b_5f_1 - bq31b_1e_4c_5f_2 + bq31e_2b_1c_5f_4 - bq31b_1e_4b_5f_1 - e_3bb_1b_5f_4q11 + e_3bb_1c_4f_5q21 - e_3bb_1c_5f_4q21 - e_3bb_5c_4f_1q21 + e_3bb_5c_4f_2q11 + f_2b_1e_4b_5bq11 + f_2b_1c_5e_4bq21 - f_2c_4e_2b_5bq11 - f_2c_4b_1e_5bq21) / (b_1(-c_4e_2b_1f_5 + c_4b_1f_5e_3 + c_4e_2b_5f_1 - c_4b_5f_1e_3 + 2c_4e_2c_5f_2 - 2c_4c_5e_3f_2 + c_5e_3b_1f_4 - b_1e_4b_5f_1 + e_2b_1c_5f_4 - 2b_1e_4c_5f_2 - b_1^2e_5f_4 + b_1^2e_4f_5))$$

$$q42 = (-c_4b_1f_5a_3 + c_4b_1f_5F_3 + c_4b_5f_1a_3 - c_4b_5f_1F_3 + c_4b_5f_1bq31 - c_4b_1f_5bq31 - a_4b_1^2f_5 + F_1b_1b_5f_4 - F_2b_1c_4f_5 + F_2b_1c_5f_4 + F_2b_5c_4f_1 + 2F_2c_4c_5f_2 + F_3b_1c_5f_4 - 2F_3c_4c_5f_2 - a_1b_1b_5f_4 + a_2b_1c_4f_5 - a_2b_1c_5f_4 - a_2b_5c_4f_1 - 2a_2c_4c_5f_2 - a_3b_1c_5f_4 + 2a_3c_4c_5f_2 + a_4b_1b_5f_1 + 2a_4b_1c_5f_2 - bb_1b_5f_4q11 + bb_1c_4f_5q21 - bb_1c_5f_4q21 - bb_1c_5f_4q31 - bb_5c_4f_1q21 - 2bc_4c_5f_2q21 + 2bc_4c_5f_2q31 + a_5b_1^2f_4) / (-c_4e_2b_1f_5 + c_4b_1f_5e_3 + c_4e_2b_5f_1 - c_4b_5f_1e_3 + 2c_4e_2c_5f_2 - 2c_4c_5e_3f_2 + c_5e_3b_1f_4 - b_1e_4b_5f_1 + e_2b_1c_5f_4 - 2b_1e_4c_5f_2 - b_1^2e_5f_4 + b_1^2e_4f_5)$$

$$q52 = -(-c_4e_3bb_5q11 - c_4bq31b_1e_5 - c_4e_3a_1b_5 + c_4e_3F_1b_5 - c_4a_3b_1e_5 + c_4F_3b_1e_5 + c_4e_3a_5b_1 + b_1^2e_4a_5 - b_1^2e_5a_4 - b_1e_4b_5bq11 - b_1e_4c_5bq31 - b_1c_5e_4bq21 + 2c_4e_2c_5bq31 + c_4e_2b_5bq11 + c_4b_1e_5bq21 - 2c_4c_5e_3bq21 + e_2b_1c_5a_4 - b_1e_4b_5a_1 + b_1e_4b_5F_1 - b_1e_4c_5a_3 + b_1e_4c_5F_3 - b_1c_5e_4a_2 + b_1c_5e_4F_2 + c_5e_3b_1a_4 - c_4e_2b_1a_5 - c_4e_2b_5F_1 + 2c_4e_2c_5a_3 - 2c_4e_2c_5F_3 + c_4e_2b_5a_1 + c_4b_1e_5a_2 - c_4b_1e_5F_2 - 2c_4c_5e_3a_2 + 2c_4c_5e_3F_2) / (-c_4e_2b_1f_5 + c_4b_1f_5e_3 + c_4e_2b_5f_1 - c_4b_5f_1e_3 + 2c_4e_2c_5f_2 - 2c_4c_5e_3f_2 + c_5e_3b_1f_4 - b_1e_4b_5f_1 + e_2b_1c_5f_4 - 2b_1e_4c_5f_2 - b_1^2e_5f_4 + b_1^2e_4f_5)$$

kde b je koeficient tlumení pružiny, na kterém jsou připevněny hmotné body A,B,C.

Náklonoměr



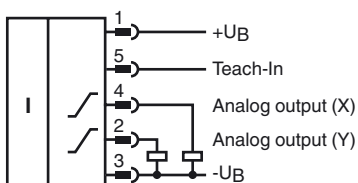
Model number

INY030D-F99-2U-V15

Features

- Measuring range $-15^{\circ} \dots +15^{\circ}$
- Analog output $0 \dots 10 \text{ V}$
- Fixed evaluation limits
- High shock resistance
- e1-Type approval
- Increased noise immunity 100 V/m

Electrical connection



Technical Data

General specifications

Type	Inclination sensor, 2-axis
Measurement range	$-15 \dots 15^{\circ}$
Absolute accuracy	$\leq \pm 0.2^{\circ}$
Response delay	$\leq 25 \text{ ms}$
Resolution	$\leq 0.01^{\circ}$
Repeat accuracy	$\leq \pm 0.02^{\circ}$
Temperature influence	$\leq 0.004^{\circ}/\text{K}$

Functional safety related parameters

MTTF _d	390 a
Mission Time (T _M)	20 a
Diagnostic Coverage (DC)	0 %

Indicators/operating means

Operation indicator	LED, green
Teach-In indicator	LED, yellow

Electrical specifications

Operating voltage U _B	$18 \dots 30 \text{ V DC}$
No-load supply current I ₀	$\leq 25 \text{ mA}$
Time delay before availability t _v	$\leq 200 \text{ ms}$

Analog output

Output type	2 voltage outputs $0 \dots 10 \text{ V}$ (one output for each axis)
Load resistor	$\geq 1 \text{ k}\Omega$

Ambient conditions

Ambient temperature	$-40 \dots 85^{\circ}\text{C}$ ($-40 \dots 185^{\circ}\text{F}$)
Storage temperature	$-40 \dots 85^{\circ}\text{C}$ ($-40 \dots 185^{\circ}\text{F}$)

Mechanical specifications

Connection type	5-pin, M12 x 1 connector
Housing material	PA
Degree of protection	IP68 / IP69K
Mass	240 g

Factory settings

Analog output (X)	$-15^{\circ} \dots 15^{\circ}$
Analog output (Y)	$-15^{\circ} \dots 15^{\circ}$

Compliance with standards and directives

Standard conformity	
Shock and impact resistance	100 g according to DIN EN 60068-2-27
Standards	EN 60947-5-2:2007 IEC 60947-5-2:2007

Approvals and certificates

UL approval	cULus Listed, Class 2 Power Source
CSA approval	cCSAus Listed, General Purpose, Class 2 Power Source
CCC approval	CCC approval / marking not required for products rated $\leq 36 \text{ V}$
e1 Type approval	2006/28/EG

EMC Properties

Emitted interference and interference immunity in accordance with motor vehicle directive 2006/28/EG (e1 Type approval)

Interference immunity in accordance with

DIN ISO 11452-2: 100 V/m

Frequency band 20 MHz up to 2 GHz

Mains-borne interference in accordance with ISO 7637-2:

Pulse	1	2a	2b	3a	3b	4
Severity level	III	III	III	III	III	III
Failure criterion	C	A	C	A	A	C

EN 61000-4-2: CD: 8 kV / AD: 15 kV

Severity level IV IV

EN 61000-4-3: 30 V/m (80...2500 MHz)

Severity level IV

EN 61000-4-4: 2 kV

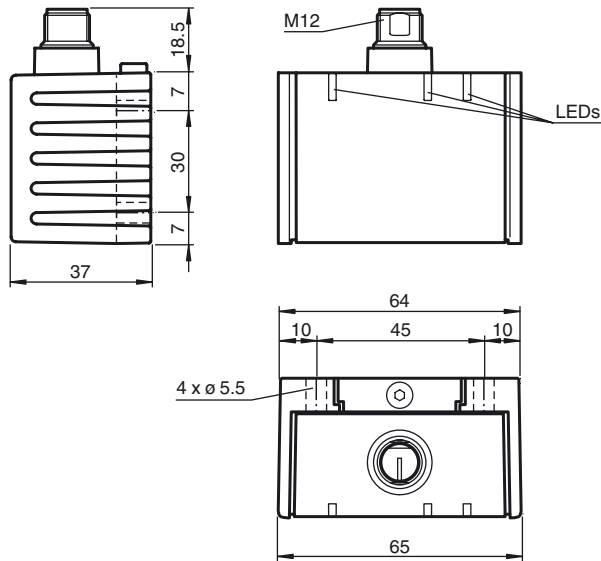
Severity level III

EN 61000-4-6: 10 V (0.01...80 MHz)

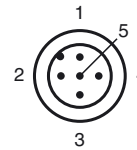
Severity level III

EN 55011: Klasse A

Dimensions



Pinout



Wire colors in accordance with EN 60947-5-2

1	BN	(brown)
2	WH	(white)
3	BU	(blue)
4	BK	(black)
5	GY	(gray)

Accessories

V15-G-2M-PUR

Female cordset, M12, 5-pin, PUR cable

V15-W-2M-PUR

Female cordset, M12, 5-pin, PUR cable

Sensor Orientation

In the default setting the zero position of the sensor is reached, when the sensor is mounted on a horizontal plane and electrical connection faces sideways.

Mounting of the sensor

Sensors from the -F99 series consist of a sensor module and accompanying cast aluminum housing. Select a horizontal flat surface with minimum dimensions of 70 mm x 50 mm to mount the sensor. Mount the sensor as follows:



1. Loosen the central screw under the sensor connection.
 2. Slide back the clamping element until you are able to remove the sensor module from the housing.
 3. Remove the sensor module from the housing
 4. Position the housing at the required mounting location and secure using four countersunk screws. Make sure that the heads of the screws do not protrude.
 5. Place the sensor module in the housing.
 6. Slide the clamping element flush into the housing. Check that the sensor element is seated correctly.
 7. Finally tighten the central screw.
- The sensor is now mounted correctly.

LED display

Displays dependent on the operating state	LED green: Power	LED yellow Teach In
Normal operation	on	off
Teach In of reference point Teach In (Pin 4 connected to +U _B) for 1 s ... 10 s falling slope at Teach In input then sensor returns to normal operation.	on on on	on flashes 3 x off
Reset to factory settings: Teach In (Pin 4 connected to +U _B) for 20 s ... 25 s falling slope at Teach In input then sensor returns to normal operation.	on on on	on flashes 3 x off
Undervoltage	flashes	off

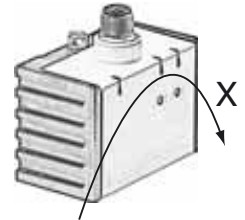
Factory settings

see Technical Data

Release date: 2014-02-21 16:44 Date of edition: 2014-03-03 239183_eng.xml

Axis definition

The definition of the X-axis is shown on the sensor housing by means of an imprinted and labeled double arrow. The figure shows the clockwise direction of rotation.

**Teach-in of reference point (output S1)**

1. Move sensor to reference position
2. Apply supply voltage (+Ub) to Teach In input (Pin 4) for 1 s ... 10 s
3. Teach In LED lights up for confirmation
4. Disconnect Teach In input (Pin 4) before the 10 s time elapses
5. Teach In LED flashes 3 x for confirmation
6. Reference point is now programmed and the sensor returns to normal operation (see LED display)

Resetting the sensor to factory settings

1. Apply supply voltage (+Ub) to Teach In input (Pin 4) for 20 s ... 25 s
2. Teach In LED lights up for confirmation
3. Disconnect Teach In input (Pin 4) before the 25 s time elapses
4. Teach In LED and Out LED flash 3 x for confirmation
5. The sensor is now reseted to factory settings and returns to normal operation (see LED display)

Undervoltage detection

If the supply voltage falls below a value of approx. 7 V, all outputs and yellow LEDs are deactivated. The green "power" LED flashes rapidly. If the supply voltage rises above a value of approx. 8 V, the sensor continues with normal operation.