ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ČÍSLO π A JEHO APROXIMACE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Frank

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 19. února 2014

……………………………………………

vlastnoruční podpis

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkoval především vedoucímu mé bakalářské práce, doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc., za odborné vedení, cenné připomínky a čas, který mi věnoval při konzultacích.

Dále bych rád poděkoval mé rodině, přítelkyni a i všem ostatním, kteří mě podporovali a povzbuzovali po celou dobu studia.

Místo tohoto listu je ve svázané práci zařazen originál zadání práce.

OBSAH

1. ÚVOD

Hovoří-li se o čísle π, snad každý si pod tímto pojmem dokáže něco představit a je schopný nám k němu říci nějakou informaci. Někdo nám řekne jeho přibližnou hodnotu, která je $3{,}14$, někdo jiný se zmíní o výpočtu obsahu kruhu a další člověk nám řekne, že se jedná o důležitou matematickou konstantu. Všichni mají pravdu a asi bychom nenarazili na nikoho, kdo by číslo π vůbec neznal, a není se ani čemu divit, vždyť s tímto číslem se všichni setkají už na základní škole.

K číslu π v podobě, v jaké ho známe dnes, vedla dlouhá cesta a mnoho matematiků této zajímavé matematické konstantě zasvětilo svůj život. Právě díky jejich obětavosti a píli známe už poměrně přesné vyjádření této konstanty a jsme schopni jí prakticky používat a to nejenom při výpočtech v matematice. Číslo π bylo a je důležité například i ve stavitelství, fyzice nebo statistice.

V této práci se budeme zabývat číslem π a vývojem jeho aproximací od starověku až po moderní dobu. V první části práce si nejprve rozebereme několik jeho vlastností. Zaměříme se na zařazení čísla π v množinách číselných oborů a na důvod, proč se vlastně číslu π říká „Ludolfo číslo“. Poté se stručně podíváme na vztah čísla π a geometrie a na důvod, proč konstrukce čísla π není euklidovsky řešitelná. Závěrem kapitoly s vlastnostmi se podíváme na zažité vzorce, ve kterých se číslo π vyskytuje a je na nich vidět, jak je pro nás tato konstanta důležitá.

V další části práce se zaměříme na historii čísla π - na postupy, kterými bylo číslo π v průběhu let zpřesňované, a na cestu, která vedla k našemu poznání. Postupně se budeme zabývat více i méně vyspělými zeměmi od starověku až po novověk a na brilantní matematiky a jiné vědce, které číslo π fascinovalo a chtěli odkrýt všechna jeho tajemství. Nastíníme postupy, které v dávnější či bližší minulosti matematici objevili a použili při zpřesnění aproximace čísla π a podíváme se i na praktické použití čísla π v minulosti se zaměřením na důležité momenty, které posunuly poznání lidstva blíže naší přítomnosti.

Po rozboru historie a různých metod, které matematici dob minulých používali pro výpočet čísla π, se budeme v další kapitole věnovat modernějším metodám pro výpočet hodnoty čísla π - jedná se o metody, které využívají rozvoj funkcí do mocninných řad, díky kterým matematici získávají ještě přesnější výsledky aproximace. Protože při používání mocninných řad je potřeba určitých znalostí z oboru matematické analýzy, rozebereme i potřebné matematické základy, na kterých tato metoda stojí - jedná se o Taylorův a Maclaurinův rozvoj. Následně už se budeme věnovat jen řadám, které nám dávají přesné aproximace čísla π a zaměříme se opět i na významná jména matematiky, která tyto řady objevila.

V další kapitole věnujeme pozornost iteračním vzorcům pro výpočet čísla π a osobnosti Srinivasy Ramanujana, který matematice a i číslu π věnoval značnou část svého života. Díky němu byly objeveny nové metody, pomocí kterých jsou získávány za poměrně krátkou dobu velmi přesné aproximace čísla π. Zaměříme se podrobněji na tohoto významného matematika, pokusíme se rozebrat metody výpočtu, které objevil on sám a i ty, které objevili matematici, kteří na jeho dílo navázali.

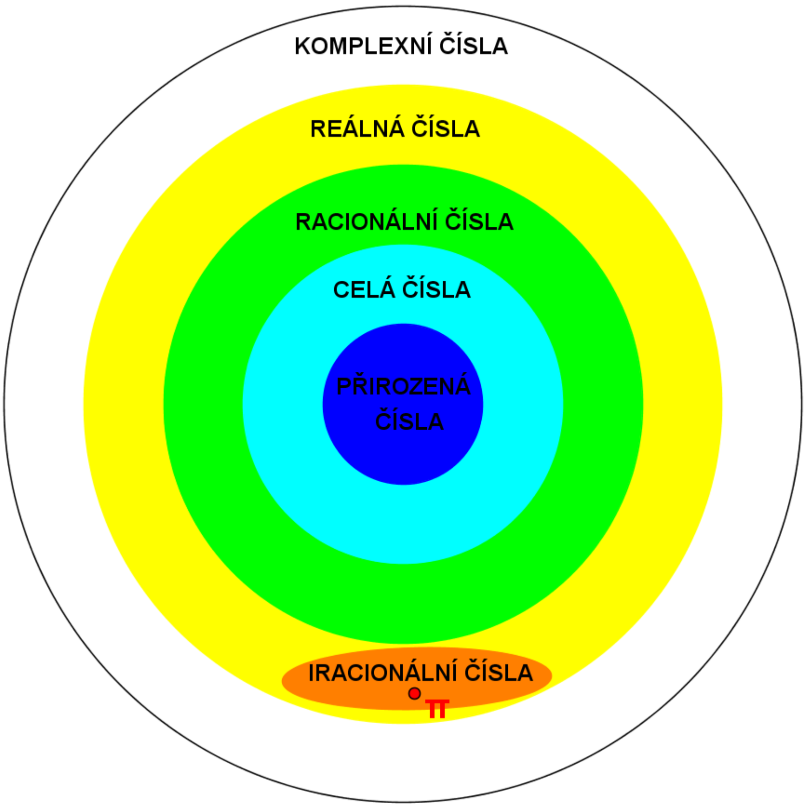
Následující kapitola je věnována moderním poznatkům a určitým zajímavostem o hodnotě čísla π. Zmíníme některé matematiky moderní doby, kteří se věnovali nebo stále věnují zpřesňování aproximace čísla π. Nastíníme metody, které jsou v současnosti používané, kdy se pro výpočet hodnoty čísla π používá hlavně výpočetní technika a „superpočítače“. Po shrnutí používaných metod se podíváme na četnost jednotlivých číslic v desetinném rozvoji čísla π a na rekordy aproximace čísla π od minulosti až po současnost – na počet desetinných míst, kterých bylo v průběhu let, kdy se lidé zpřesňováním aproximace zabývají, dosaženo.

Závěr práce bude věnován stručnému shrnutí některých poznatků o hodnotě π a porovnání jednotlivých metod, které byly používány v dávné historii s těmi, které používáme dnes. Pokusíme se zhodnotit a porovnat obtížnost jednotlivých výpočtů aproximací čísla π a zamyslet se i nad smyslem stálého zpřesňování aproximací čísla π - smyslu hledání dalších a dalších desetinných míst této konstanty a jejich praktického využití.

2. ČÍSLO π A JEHO VLASTNOSTI

Číslo π značíme řeckým písmenem „π" a jedná se o jednu z nejdůležitějších a pravděpodobně i nejzajímavějších matematických konstant a spousta lidí je jí i v dnešní době doslova posedlá. V historii se o π zajímalo mnoho matematiků (některými se budeme v práci zabývat později) a po jednom z nich dokonce číslo π nazýváme jménem „Ludolfovo číslo". Toto jméno dostalo po holandském matematikovi Ludolphu van Ceulenovi (1539-1610), který věnoval mnoho času studiu čísla π a hledání dalších čísel jeho nekonečného rozvoje.

Číslo π nelze vyjádřit žádným jednoduchým zlomkem s celými čísly a, jak bylo již naznačeno, má nekonečný desetinný rozvoj. Tento rozvoj je dokonce neperiodický a díky těmto vlastnostem zařazujeme π do skupiny iracionálních čísel. Patří tedy do stejného oboru čísel jako například $\sqrt{2}$ nebo $\log 2$. Pozici čísla π mezi obory čísel lépe znázorňuje obrázek 1.



Obrázek 1 - POZICE ČÍSLA π V ČÍSELNÝCH OBORECH

Další zajímavou vlastností π je, že je číslem transcendentním, což dokázal německý matematik Ferdinand Lindemann (1852-1939) v roce 1882. [15] Tato vlastnost nám říká, že číslo π není kořenem žádné algebraické rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ s racionálními koeficienty a_1, $a_2, \ldots, a_n$. [22] Kvůli transcendentnosti nelze číslo π sestrojit euklidovsky, tedy pouze za pomoci pravítka a kružítka. Tento problém je úzce spjatý s problematikou kvadratury kruhu, která také není euklidovsky řešitelná.

Závěrem této kapitoly se podíváme na několik jednoduchých vzorců, které se běžně používají, a při výpočtech se zde číslo π vyskytuje. Číslo π je úzce spjato s kruhem a kružnicí, konkrétně vyjadřuje poměr obvodu kruhu k jeho průměru [4] – díky této vlastnosti známe následující vzorce:

Délka kružnice o poloměru r:	$o = 2\pi r$
Obsah kruhu o poloměru r:	$S = \pi r^2$
Povrch koule o poloměru r:	$S = 4\pi r^2$
Objem koule o poloměru r:	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Povrch válce o poloměru r a výšce v:	$S = 2\pi r(r + v)$
Objem válce o poloměru r a výšce v:	$V = \pi r^2 v$

[3]

3. ČÍSLO π A HISTORIE

Jak jsme poznamenali již v úvodu, číslo π nebylo ani pro naše předky nijak neznámé a v minulosti se mnoho matematiků zabývalo problematikou čísla π a snažili se najít jeho nejlepší aproximaci, snažili se maximálně přiblížit skutečné hodnotě π, a některým z nich se povedla najít poměrně přesná vyjádření. Číslo π zde však bylo mnohem dříve než velcí matematikové a už člověk v době více než 2000 let před naším letopočtem si uvědomoval vztah π na základě poměru mezi průměrem a obvodem kruhu.

Čím je větší kruh „napříč", tím je delší „kolem".

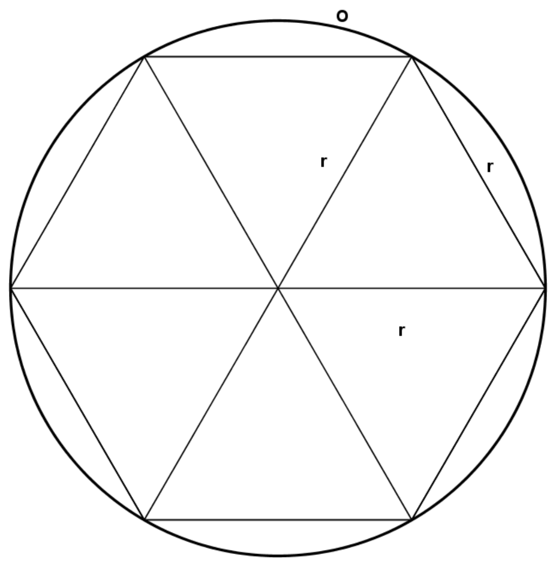
[4]

Postupem času se na Zemi začala vytvářet společenství, vznikaly první národy, psaly se první zákony a člověk potřeboval vystavět města, kde mohli lidé žít. Společně se vzestupem lidského rozumu byla na vzestupu i matematika a učenci se mohli zabývat všemi jejími otázkami, tedy i číslem π, a mohli hledat jeho nejpřesnější aproximace a mohli se zabývat jeho využitím v praktickém životě.

3.1. BABYLONSKÁ MATEMATIKA

Babyloňané byli národ, který se nacházel v Mezopotámii v okolí řek Eufratu a Tigridu. Byl ve své době velmi vyspělý a měl propracovaný společenský systém. Stavěl velké sochy, kterými se chtěl zavděčit svým bohům, a jeho vládci obchodovali v celém Středozemí. Při stavitelství i obchodu byla matematika potřebná a tak pozornosti Babyloňanů neuniklo ani číslo π. Oproti naší společnosti používali Babyloňané při výpočtech a zápisech jejich matematických objevů šedesátkovou soustavu, tedy soustavu, u které není základem hodnota 10, jak jsme my zvyklí, ale hodnota 60. Všechny své poznatky psali Babyloňané na desítky tisíc hliněných tabulek.

Asi 200 až 300 mil od Babylonu byl v roce 1936 vykopán soubor několika takových hliněných tabulek, které nám popisují poměry ploch a obvodů pravidelných mnohoúhelníků o straně příslušné délky. Díky těmto tabulkám můžeme vidět, čím se Babyloňané zabývali a na jaké úrovni byly jejich znalosti. Mimo jiné najdeme na tabulkách i vztah mezi pravidelným šestiúhelníkem a jeho opsanou kružnicí, kdy Babyloňané porovnávali jejich obvody a na základě těchto porovnání docházeli k první aproximaci čísla π. Babyloňané věděli, že obvod pravidelného šestiúhelníku je stejný jako šestinásobek poloměru opsané kružnice, což je také pravděpodobně přivedlo k myšlence, že kruh lze rozdělit na 360 dílů. [4]



Obrázek 2 - VZTAH ŠESTIÚHELNÍKU A JEHO OPSANÉ KRUŽNICE

Pokud se nyní vrátíme k aproximaci čísla π, babylonští matematici se ho snažili stanovit právě pomocí pravidelného šestiúhelníku a jeho opsané kružnice (obrázek 2) a stanovili hodnotu poměru mezi obvodem pravidelného šestiúhelníka a obvodem jeho opsané kružnice $\frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2}$. [4] Dále již věděli, že $6r = O$, to tedy znamená, že $\frac{6r}{O} = 1$, kdy r je poloměr kružnice opsané šestiúhelníku a O je její obvod.

Pokud se nyní na jejich znalosti podíváme očima moderní matematiky a použijeme vztah $\pi = \frac{O}{2r}$, získáme aproximaci čísla π, kterou Babyloňané používali:

$$\frac{6r}{O} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$$

$$\frac{3}{\pi} = 0,96$$

$$\pi = 3,125 = 3\frac{1}{8}$$

[1]

Babyloňané tedy používali pro své výpočty hodnotu $\pi = 3\frac{1}{8}$, která je o něco málo menší než skutečná hodnota čísla π, ale na svou dobu se jedná určitě o něco mimořádného.

3.2. EGYPTSKÁ MATEMATIKA

Egypťané jsou dalším národem, který se zabýval matematikou, a někdo je dokonce označoval za zakladatele matematiky. Tento fakt byl možná také dán tím, že se díky Rosettské desce podařilo poměrně brzy dešifrovat hieroglyfy. [4]

Vůbec nejstarším dokumentem, který pojednává o egyptské matematice, je papyrus, který zakoupil v Egyptě Skot Henry Rhind v roce 1856, který je datován až do roku 1650 před naším letopočtem. [1] Tento papyrus dnes nazýváme „Rhindův papyrus" a jedná se o sbírku matematických problémů. Nenajdeme zde však žádné formální teorie, ale jedná se pouze o výčet problémů.

Papyrus se dotýká i problematiky čísla π. Autor problému zde říká:

Čtverec o straně 8 jednotek má stejně velkou plochu jako kruh o průměru 9 jednotek.

Pokud se nad touto větou zamyslíme, můžeme snadno dopočítat hodnotu čísla π, kterou staří Egypťané používali. Pro náš výpočet budeme vycházet ze vzorce pro výpočet obsahu kruhu, tedy $S = \pi r^2$, a znalosti, že $d = 2r = 9$:

$$\pi(9/2)^2 = 8.8$$

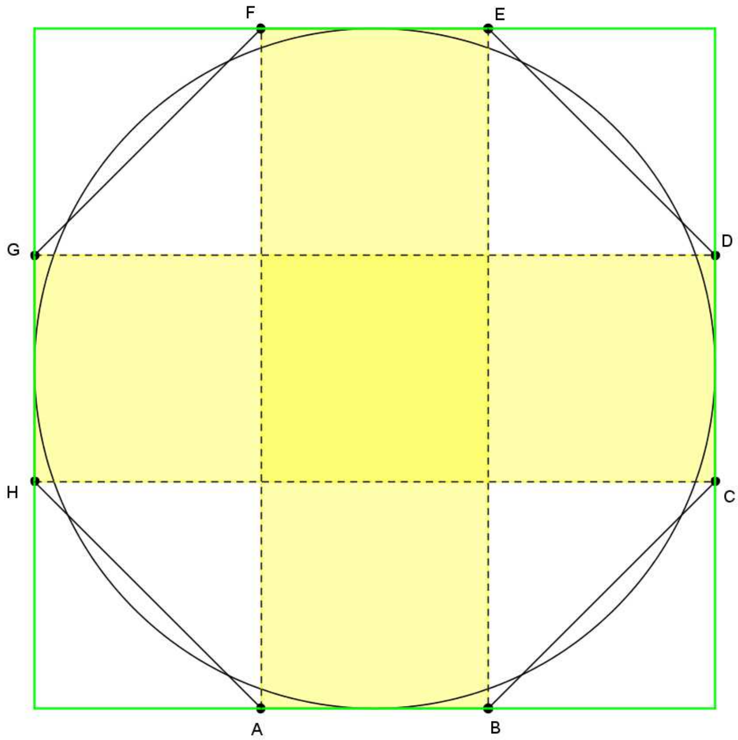
$$\pi(4,5)^2 = 64$$

$$\pi = \frac{64}{(4,5)^2}$$

$$\pi = 3{,}16049$$

[4]

Získali jsme tedy hodnotu, kterou používali Egypťané při svých výpočtech, a vidíme, že tato hodnota $\pi = 3{,}16049$ je vyšší než skutečná hodnota čísla π a že se jedná i o trochu horší odhad hodnoty π než zjistili Babyloňané. Egypťané pochopitelně při stanovování hodnoty čísla π neměli náš matematický aparát a všechno bylo možné pouze díky geometrii – úlohu řešili pomocí osmiúhelníku (obrázek 3).



Obrázek 3 - URČENÍ HODNOTY π V EGYPTĚ

Egyptský matematik Ahmes sestrojil čtverec o straně 9 jednotek, který je vyznačený zelenou barvou, a strany rozdělil na třetiny. Dále sestrojil osmiúhelník ABCDEFGH a vidíme, že vzniklo 5 menších čtverců a v rozích 4 trojúhelníky. Uvažoval, že tento osmiúhelník má stejný obsah jako kruh (obrázek 3). Každý malý čtverec má tedy obsah 9 jednotek plochy a dohromady s trojúhelníky je obsah $5.9 + 4.4{,}5 = 63$ plošných jednotek. Ahmes řekl, že je 63 velmi blízké hodnotě 64 a dále už počítal s tím, že plocha kruhu s průměrem 9 jednotek je 64 plošných jednotek, což se rovná ploše čtverce o straně 8 jednotek. Následně už vše vede k hodnotě $\pi = 3{,}16049$. Nutno jenom podotknout, že Ahmes trochu „kouzlil“, když řekl, že osmiúhelník má stejnou plochu jako kruh a dále tvrdil, že $63 = 64$. [4]

I přes to, že Ahmes při výpočtech nepostupoval příliš korektně a vycházel z nepravdivých předpokladů, mohl si uvědomovat, že tato dvě porušení se mohou svým způsobem vyrušit – osmiúhelník má totiž obsah menší než kruh, který je vymezený jeho opsanou kružnicí, a tudíž se nám i výsledná hodnota zmenší, a tuto chybu pak mohl chtít jistým způsobem vykompenzovat myšlenkou, že 63 = 64. Ahmesův odhad čísla π je sice o trochu horší než aproximace Babyloňanů, ale vzhledem k době a použitým metodám se jedná o další dobrý výsledek a určitý pokrok.

3.3. HINDSKÁ MATEMATIKA

Zabýváme-li se hindskou matematikou, pak se jedná o matematiku, kterou bychom hledali na indickém subkontinentu – jedná se tedy o současné území státu Indie.

Stejně jako babylonská matematika, i hindská matematika zůstala pro Evropu déle nepoznaná a možná je to škoda, protože by se Evropané mohli nechat inspirovat některými myšlenkami, kterými se hindští matematici zabývali. Hindští matematici se totiž nebáli formulovat nové, revoluční a pokrokové myšlenky a nebáli se dotknout ani tak odvážných témat jako je například problematika nekonečna. [21] Ve svých výpočtech používali desítkovou soustavu, tedy tu, na kterou je zvyklá i naše společnost, a počítali i se zápornými čísly a nulou. Snaha hindských matematiků byla, mimo jiné, taková, aby jejich teoretické poznatky směřovaly k nějakému praktickému závěru a obecným metodám výpočtu. [21]

Pochopitelně národu, který se zabýval problematikou nekonečna, nemohlo uniknout ani tak záhadné číslo jako je π. Hindský mudrc a matematik Aryabhata (476-550 n. l.) shrnul veškeré poznání hindských matematiků v díle Aryahatyia napsané roku 499 našeho letopočtu, kde přináší řešení mnoha různých problémů, zpravidla bohužel bez přesného postupu. [4] Jeden z těchto problémů vede i na hindskou hodnotu čísla π. Problém zní následovně:

Sečti 4 a 100, znásob to 8 a přidej 62 000. Výsledek je přibližně obvodem kruhu, jehož průměr je 20 000.

[4]

Pokud budeme tedy postupovat dle pokynů v tomto zadání, získáme požadovanou hodnotu hindského čísla π:

$$4+100=104$$

$$104.8=832$$

$$832+62000=62832$$

$$\pi=\frac{62832}{20000}=3{,}1416$$

Díky výše uvedenému výpočtu jsme dospěli k hodnotě čísla π, která je 3,1416 a můžeme o ní bez výčitek říct, že je, na dobu, ve které byl výpočet vymyšlen a proveden, úžasně přesná. Vidíme, že se tato hodnota blíží skutečné hodnotě čísla π mnohem víc než hodnoty, které používali Babyloňané i Egypťané, což je dalším ukazatelem, že hindská matematika byla minimálně stejně vyspělá a možná byla i o trochu dál.

3.4. ČÍNSKÁ MATEMATIKA

Stejně jako Babylon nebo starověká Indie, i Čína je Evropě poměrně vzdálená a proto se nemůžeme divit, že i čínská matematika zůstala Evropany dlouho nepoznaná. Jediné šíření jejich poznatků do Evropy snad bylo možné jen díky Hedvábné stezce, což byla obchodní tepna vedoucí z Číny do Arábie a následně i Benátek v Evropě, ale ani zde se tak moc nedělo a spíše pronikaly matematické myšlenky Arabů a Hindů do Číny. [21]

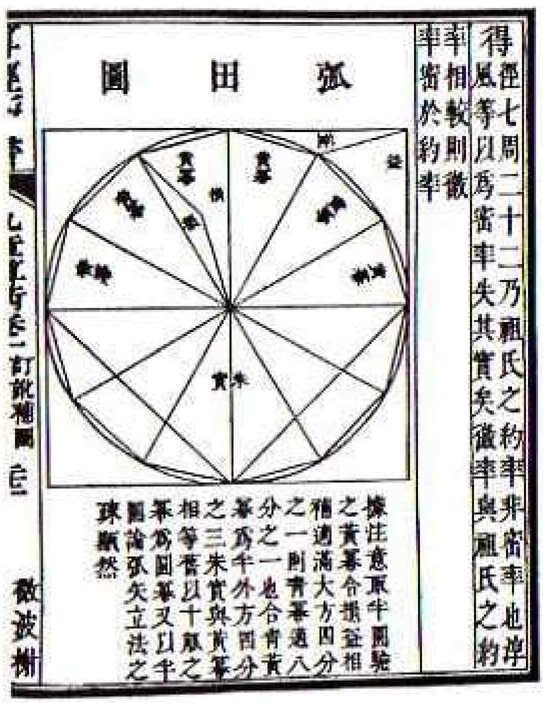
Pokud se podíváme na čínskou matematiku samotnou, Číňané používali při svých výpočet desítkovou soustavu – touto myšlenkou se možná mohli nechat inspirovat v hindské matematice. V případě, že čínští matematikové řešili nějaký problém, zpravidla neměli potřebu uvádět důkazy svých tvrzení. Číňané matematiku brali ne jenom jako teoretickou vědu, ale byl to obor, který měl praktické využití při stavbách, při vyměřování nových cest nebo například i při evidenci potravin a surovin. [21]

Pochopitelně národ, který obchodoval až se vzdálenou Evropou a používal matematiku ve stavitelství, musel narazit i na problematiku čísla π, která nás zajímá nejvíc. V čínské matematice se objevuje více hodnot čísla π, na kterých v podstatě vidíme vývoj a také to, že čínští matematikové postupem doby hodnotu π různými metodami zpřesňovali.

První hodnotou, na kterou bychom mohli narazit, je hodnota, kterou používal čínský matematik Hou Han Shu. Použil ji v roce 130 našeho letopočtu a byla to hodnota velice blízká hodnotě $\sqrt{10}$, uvažoval totiž, že $\pi = 3{,}1622$. [4] Pokud se podíváme na tuto hodnotu, zjistíme, že je velice podobná té, kterou používali egyptští matematici, jenom je ještě o trochu méně přesná, je ještě o trochu více vzdálená skutečné hodnotě čísla π.

Ještě více vzdálená hodnota skutečnému číslu π, kterou čínští matematici pravděpodobně používali, byla nalezena v dokumentu z roku 718 našeho letopočtu a tato hodnota byla dokonce $\pi = 3{,}1724$. [4] Jak je vidět, tato hodnota je opět větší než skutečná hodnota čísla π.

Další hodnoty čínského čísla π už byly mnohem přesnější. Čínský matematik Liu Hui použil metodu mnohoúhelníků vepisovaných do kružnice (obrázek 4) a učinil tak roku 264 našeho letopočtu. [4]



Obrázek 4 - METODA VÝPOČTU π LIU HUIEM

Liu Hui se metodou vepisovaných mnohoúhelníků dostával k úžasným výsledkům, k velice přesným aproximacím čísla π. Například při použití mnohoúhelníku o 192 stranách zjistil:

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$$

[4]

Pokud se na tuto hodnotu podíváme, vidíme, že je trochu menší než skutečná hodnota čísla π. Liu Hui zde ovšem nekončil a pokračoval ve zpřesňování dál. Nakonec použil mnohoúhelník, který měl 3072 stran a díky němu získal hodnotu čísla $\pi = 3{,}14159$. [4] Pokud se podíváme na tuto hodnotu, vidíme, že je to číslo π s 5 platnými desetinnými místy. Jedná se tedy o aproximaci, která je mnohem přesnější než ty, které používali Babyloňané, Egypťané nebo Hindové.

Touto hodnotou ovšem čínská matematika nekončí. Další čínští matematikové, otec a syn, Chung-Chih a Keng-Chih, v 5. století našeho letopočtu navázali na Liu Huieho metodu a podařil se jim odhad čísla π ještě zpřesnit a dostali se k hodnotě, na kterou si evropská matematika musela počkat až do 16. století. [4] Jejich nalezená hodnota čísla π činila:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

[4]

Podíváme-li se na tuto hodnotu čísla π, zjistíme, že se jedná o další vynikající výsledek a můžeme z něj usoudit, že čínští matematici byli opravdu zdatní počtáři. Hodnota čísla π, kterou určili Chung-Chih s Keng-Chihem se hodně blíží té, kterou už známe z displeje našich kalkulaček, kdy jsme se s číslem π ve výpočtech poprvé setkali někde na základní škole. Sice se stále jedná jenom o „pár“ desetinných míst v porovnání s moderními aproximacemi čísla π, ale na dobu, ve které byla objevena, a na techniku, kterou měli čínští matematici k dispozici, se jedná o fenomenální výsledek a můžeme z něj také usoudit, na jaké úrovni se pohybovala čínská matematika.

3.5. MATEMATIKA STAROVĚKÉHO ŘECKA

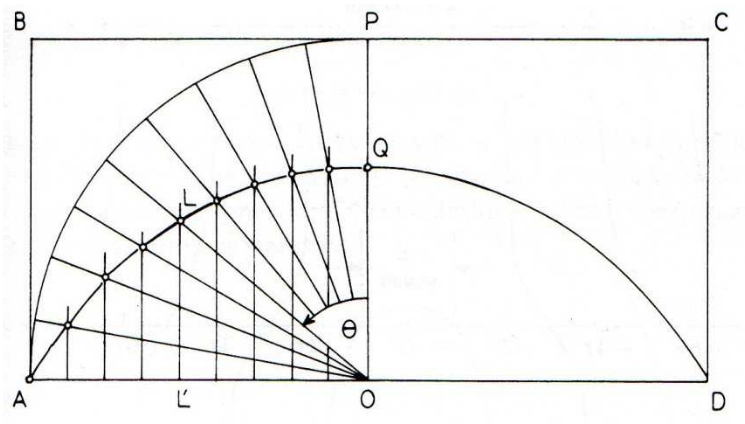
Epochou starověkého Řecka rozumíme období začínající zhruba v roce 800 před naším letopočtem, kdy se začíná kultura a věda ve starověkém Řecku rozvíjet. [21] Toto období je velmi bohaté na spoustu zvučných jmen – na spoustu významných matematiků, filozofů, fyziků, geometrů – jako jsou například Aristoteles, Archimédes, Eukleides nebo Hippias. Z hlediska aproximace hodnoty čísla π jsou pro nás důležití Archimédes a Hippias. Nutno ještě podotknout, že oba tito matematici neměli k dispozici, stejně jako jejich předchůdci z jiných zemí světa, náš moderní matematický aparát a veškeré jejich aproximace byly opět možné jenom díky znalosti geometrie, které musely být na poměrně vysoké úrovni. O tom svědčí i dílo Stoicheia (česky Základy), jejichž autorem byl Eukleides, a ve 13 knihách jsou zde shrnuty veškeré geometrické znalosti, které byly do té doby známy. Toto dílo velmi ovlivnilo i dobu, která přišla po starověkém Řecku.

Hippias, nebo přesněji Hippias z Elidy, působil pravděpodobně v druhé polovině 5. století před naším letopočtem v Aténách. Hippias se zabýval problematikou křivek a objevil například křivky trisektrix, díky které lze rozdělit úhel na tři stejné díly, nebo kvadratrix, kterou lze použít při kvadratuře kruhu. [4] Právě kvadratrix nás zajímá při hledání aproximace čísla π. Hippiova definice kvadratrix zněla následovně:

Nechť se úsečka AB pohybuje rovnoměrně z daného místa, až dosáhne místa CD, a nechť úsečka AO rotuje rovnoměrně ve směru hodinových ručiček okolo bodu O přes polohu OP až do polohy OD za stejnou dobu, za kterou AB dospěje do CD. Křivka vzniklá spojením průsečíků těchto dvou úseček je Hippiova kvadratrix.

[4]

Díky definici jsme schopni Hippiovu kvadratrix zkonstruovat (obrázek 5) a následně zjistíme, jakým způsobem mohl Hippias určit hodnotu čísla π.



Obrázek 5 – HIPPIOVA KVADRATRIX

Není známo, zda si Hippias uvědomoval, že pomocí jeho křivky kvadratrix je možná kvadratura kruhu. Je možné, že to věděl, ale neměl prostředky k tomu, aby mohl své tvrzení dokázat. Důkaz provedl až Pappus ke konci 3. století před naším letopočtem [4] a poskytnul nám tak geometrickou konstrukci čísla π, protože platí:

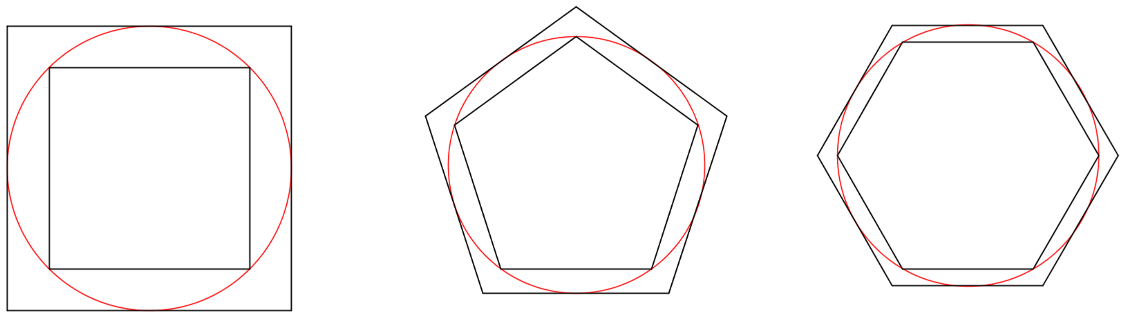
$$\frac{AD}{OQ} = \pi$$

[4]

Konkrétní hodnotou čísla π se Hippias pravděpodobně nikdy nezabýval, ale i tak svými objevy připravil půdu pro své následovníky, kteří měli možnost využít jeho poznatků pro určení konkrétní hodnoty čísla π.

Archimédes se číslem π zabýval mnohem intenzivněji než Hippias a určitě ho můžeme zařadit mezi nejdůležitější matematiky, kteří přispěli k aproximaci čísla π. Archimédes ze Syrakus působil přibližně v období 287 – 212 před naším letopočtem a řadil se mezi nejlepší matematiky a fyziky své doby. [4] Archimédes zasáhl do mnoha vědních oborů, ale pro nás nejdůležitější je, že se, jak jsme již zmínili dříve, zabýval studiem čísla π a hledal jeho co nejpřesnější aproximaci.

Archimédova metoda výpočtu čísla π spočívala v konstrukci kružnice s jednotkovým průměrem, které vepisoval a opisoval pravidelné n-úhelníky. S rostoucím počtem stran pravidelného n-úhelníku se hodnota jeho obvodu bude blížit hodnotě obvodu kružnice (obrázek 6). Vepsaný n-úhelník se svým obvodem bude hodnotě obvodu kružnice blížit zdola a opsaný shora – máme zde tedy dolní a horní odhad hodnoty čísla π.



Obrázek 6 - PRAVIDELNÉ N-ÚHELNÍKY OPSANÉ A VEPSANÉ KRUŽNICI

Archimédes při svých výpočtech začínal u pravidelného šestiúhelníku a zdvojováním počtu stran pravidelného n-úhelníku postupoval dále a zpřesňoval tak hodnotu čísla π. Ale už šestiúhelník nám může poskytnout velmi hrubý odhad, který činí $3,000000 < \pi < 3,464102$. [12] Tento odhad je opravdu velmi hrubý a vidíme, že nám poskytne pouze jedinou pravdivou informaci, kdy na místě jednotek se vyskytuje číslice 3. Archimédes se ovšem propracoval dále – až k pravidelnému mnohoúhelníku, který měl 96 stran. Zde už je odhad mnohem přesnější:

$$3,14084 < \pi < 3,142858$$

[4]

Výše uvedený odhad už nám může vzdáleně připomínat hodnotu čísla π, jak ji známe a je zde správně vypočtena na dvě desetinná místa.

Pokud se budeme zajímat o matematické vyjádření vztahu mezi stranami vepsaných a opsaných pravidelných n-úhelníků, platí:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$$

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}},$$

[12]

kdy s_n je strana vepsaného pravidelného n-úhelníku a t_n je polovina strany opsaného pravidelného n-úhelníku.

Archimédova metoda není určitě nejlepší metodou pro získání přesné aproximace čísla π, protože výpočet může být velmi zdlouhavý, ale ve své době se určitě jednalo o revoluční objev, který ovlivnil celou řadu matematiků po Archimédovi. Vždyť ještě matematici v 16. a 17. století používali tuto metodu při hledání přesné aproximace čísla π. Například Holanďan Adriaen van Rooman využil při výpočtu mnohoúhelníky, které měly 2^{10} stran a stanovil tak v roce 1593 rekord, kdy číslo π vypočetl na 15 desetinných míst. Tento rekord však o 3 roky později překonal další Holanďan, matematik Ludolph van Ceulen, o kterém jsme se již krátce zmínili a podle kterého se číslo π nazývá „Ludolfovo číslo“. Žil v letech 1539 – 1610 a hledáním hodnoty čísla π byl úplně posedlý. V roce 1596 užil mnohoúhelník, který měl 60.2^{29} stran a získal tak hodnotu čísla π na 20 platných desetinných míst. Ve výpočtech se pokusil jít ještě dál a ve článcích, které byly publikovány až po jeho smrti, byla objevena hodnota dokonce na 32 platných desetinných míst a později bylo zjištěno, že hodnotu čísla π zpřesnil dokonce na 35 platných desetinných míst, což byl na svou dobu ohromný výkon. [4]

4. METODY VYUŽÍVAJÍCÍ ROZVOJE FUNKCÍ DO MOCNNINÝCH ŘAD

V předchozí kapitole jsme zjistili, že existuje celá řada možností, jak získat určitou aproximaci čísla π. Tyto metody byly v minulosti velmi důležité a do současnosti pro nás mají velký význam, ovšem tyto metody mají při získávání přesné aproximace jeden problém – jsou velmi pomalé. Pomocí klasických metod získáme sice hodnotu čísla π s určitou přesností, ale výpočet několika číslic za desetinnou čárkou nám může zabrat velké množství času.

V této kapitole se budeme věnovat sofistikovanějším metodám, díky kterým můžeme získat aproximace čísla π. Jak už je patrné z názvu, jedná se o metody, které využívají rozvoj některých funkcí do mocninných řad. Tyto řady mají tu vlastnost, že jsou nekonečné a rychleji či pomaleji nám konvergují k hodnotě čísla π. Pokud se poté budeme snažit takovou řadu sečíst, získáme aproximaci čísla π v podstatě s libovolnou přesností – otázkou zde je opět „pouze“ časová náročnost výpočtu.

Než se ovšem pustíme do řad samotných, učiníme nejprve malou odbočku, která nám pomůže celý princip této metody výpočtu aproximace čísla π pochopit – odbočku k Taylorově a Maclaurinově rozvoji, který při získání konvergentních řad využíváme.

4.1. TAYLORŮV A MACLAURINŮV ROZVOJ

Taylorův rozvoj, nebo můžeme také říkat Taylorova řada, je mechanismus, díky kterému můžeme složité funkce nahradit polynomem. Díky polynomu je poté celková práce s funkcí jednodušší a i operace, které by byly jinak prakticky nemožné, jsme schopni realizovat. Při hledání aproximací čísla π budeme sice pracovat jenom s několika funkcemi, ale metoda zde má zásadní vliv na získání konvergujících řad a proto se budeme metodě obecně věnovat trochu podrobněji.

Taylorova řada je definována následovně:

Buďte a, x dvě čísla $x \neq a$; funkce f nechť má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu, jehož krajní body jsou a, x. Potom platí:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

[13]

Vztah můžeme také zjednodušit pomocí zápisu formou sumy:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Nutno ještě podotknout, že každá takováto náhrada s sebou nese určitou chybu (zbytek), kterou však jsme schopni přesně určit a je definována vztahem:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

U hledání konvergentních řad a aproximace čísla π však spíše využijeme Maclaurinův rozvoj – Maclaurinovu řadu. Tento rozvoj funguje na principu Taylorova rozvoje, ale jedná se o situaci, kdy hodnota $a = 0$. Pokud tedy upravíme vztah platící obecně pro Taylorovu řadu, získáme:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} \dots$$

[13]

Vidíme, že v tomto případě nám rozvojem vzniknou poměrně jednoduché zlomky s mocninami, díky kterým můžeme provádět další výpočty. A právě tyto zlomky, tento rozvoj, jsou používány při získání aproximací hodnoty čísla π.

V těchto místech ukončíme odbočku, která se zabývá obecnou teorií, a vrátíme se ke konkrétním postupům, které využívají tohoto matematického aparátu pro získání aproximací hodnoty čísla π i na větší počet desetinných míst.

4.2. GREGORYHO ŘADA

První řadou, kterou se nyní budeme zabývat, a dá se pomocí ní získat hodnota čísla π, se nazývá Gregoryho řada. Využívá rozvoje funkce arkustangens a jmenuje se po svém objeviteli, Jamesi Gregorym, který objevil tuto řadu v roce 1671. [25] Gregory byl skotský matematik žijící v letech 1638 – 1675, který vystudoval v Itálii a vedle matematiky se zabýval i astronomií. Již v roce 1667 se zabýval problémy týkající se kvadratury kruhu, transcendentálními funkcemi a později významně přispěl k objevení integrálního a diferenciálního počtu. [16]

Pokud se vrátíme ke Gregoryho řadě a hodnotě čísla π, již bylo řečeno, že pro hledání aproximace je zde využita funkce arkustangens a její Maclaurinův rozvoj. Dnes tento rozvoj dobře známe a pomocí matematického softwaru jsme okamžitě schopni ho zkonstruovat:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \dots$$

Rozvoj vypadá poměrně jednoduše, ale to, co nám díky počítači trvá několik sekund, stálo Gregoryho velké úsilí. Gregory tuto řadu objevil díky integrálnímu počtu, protože při svém bádání zjistil, že plocha pod křivkou $\frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $(0, x)$ odpovídá funkci arkustangens. [4]

Dnes jsme schopni tento objev zapsat pomocí moderní symboliky následovně:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg(x)$$

Gregory následnými výpočty, které spočívaly v dlouhém dělení v integrandu [4], došel ke stejné řadě pro arkustangens, která již byla uvedena výše, tedy k řadě:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \ldots$$

V tuto chvíli už následuje pouze jediný krok – dosadit za x hodnotu, která by nám pomohla získat aproximaci čísla π. Hledanou hodnotou je $x=1$. Víme totiž, že $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$. Pokud tedy v řadě nahradíme $arctg(x)$ hodnotou $\frac{\pi}{4}$ a za všechny x na pravé straně rovnice dosadíme hodnotu $x=1$ a provedeme několik jednoduchých úprav, získáme aproximaci čísla π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots\right)$$

Pokud se nyní pokusíme sečíst prvních několik členů řad, které jsou zde uvedeny, získáme:

$$\pi \approx 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11}$$

$$\pi \approx 2{,}976046176\ldots$$

Toto číslo nám hodnotu čísla π nepřipomíná – ani jedna číslice zde není správná, ale pokud přidáme několik dalších členů, můžeme vidět, jak se postupně číslu π blížíme:

$$\pi \approx 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19}$$

$$\pi \approx 3{,}04183961892\ldots$$

Pokud bychom stejně pokračovali dál a přidávali členy, postupně bychom se stále blížili hodnotě čísla π, až bychom postupně získali první správnou desetinnou cifru a po ní další. Gregoryho řada je tedy rozhodně velmi důležitá a i v moderní počítačové době ji můžeme uplatnit při hledání aproximace čísla π. Jedinou nevýhodou této řady je, že konvergence ke správné hodnotě čísla π je poměrně pomalá vzhledem k jiným řadám, které už byly také objeveny. Rozhodně jí však nesmíme považovat za méněcennou, protože i někteří moderní lovci čísel, například Abraham Sharp, se při hledání dalších a dalších desetinných míst přikláněli k využití této Gregoryho řady. Tito lovci čísel však hledali metody, jak konvergenci řady zrychlit a výše zmiňovaný Sharp proto dosadil hodnotu $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$ a získal následující řadu:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3^2.5}-\frac{1}{3^3.7}+\dots\right)$$

[25]

Sharp následným výpočtem získal hodnotu čísla π na 72 platných desetinných míst.

Na závěr nutno ještě podotknout, že James Gregory nebyl jediný, kdo tuto konvergentní řadu objevil. Nezávisle na něm k této řadě dospěl v roce 1674 Gottfried W. Leibniz, který se jí zabýval hlouběji a byl to on, kdo dosadil $x=1$ a získal tak první nekonečnou konvergentní řadu pro vyjádření čísla π v dějinách matematiky. Snad i díky tomu se někdy Gregoryho řada často nazývá řadou Leibnizovou. [4] Je otázkou, jestli Gregory o možnosti dosadit $x=1$ a získat tak aproximaci čísla π věděl a nestálo mu to za zmínku, protože považoval tuto situaci za triviální, nebo ho tímto směrem bádat nenapadlo. Faktem ale zůstává, že byl první, kdo získal obecný zápis této řady, na kterou pak další matematici mohli navázat a dosazováním jiných hodnot, jako v případě Abrahama Sharpa, získali rychleji konvergující řadu a přesnější aproximace čísla π.

4.3. MACHINŮV VZOREC

Jak již bylo řečeno, Gregoryho řada byla i přes svou pomalejší konvergenci při hledání aproximace čísla π využívána lovci čísel, kteří se snažili hodnotu určit na co největší počet desetinných míst. Stejně tak použil tuto řadu při hledání přesné aproximace i John Machin a protože se nejednalo a pouhé dosazení „zvláštní“ hodnoty jako v případě Abrahama Sharpa, budeme se této metodě věnovat trochu podrobněji.

Anglický matematik John Machin žil v letech 1680 – 1751 a s matematikou se setkával již od mládí, protože než nastoupil na vysokou školu v Cambridge, byl jeho soukromým učitelem matematik Brook Taylor, který mu zůstal po celý život rádcem v oboru matematiky. Mimo matematiky se Machin zajímal i o astronomii a v roce 1713 se dokonce stal profesorem astronomie. [17]

Pro nás je však důležitější jeho přínos matematice a hlavně přínos, který se týká aproximace čísla π. Machin totiž ukázal, že platí následující vztah:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,arctg\left(\frac{1}{5}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

[25]

Tento vztah, využívající dvě hodnoty funkce arkustangens, vypadá poměrně jednoduše, ale odvození není zdaleka triviální a vychází se při něm ze znalosti trigonometrie. Při odvozování vycházíme ze vztahu:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-(tg(\alpha).tg(\beta))}$$

Nyní položíme $\alpha = \beta$:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$$

V dalším kroku označíme $tg(\alpha) = x$, čímž upravíme pravou stranu rovnice:

$$tg(2\alpha) = \frac{2x}{1-x^2}$$

Nyní vidíme vztah, kdy na levé straně rovnice se nám vyskytuje funkce tangens, a na pravé máme zlomek s polynomy. Tento vzorec by se nám hodilo zobecnit. Pokud se vrátíme na úplný začátek – k výchozímu vztahu – a nahradili bychom $\alpha = 2\alpha$, potom bychom stejným postupem dospěli ke vztahu:

$$tg(3\alpha) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

Obecně tedy můžeme zapsat:

$$tg(n\alpha) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

Pro polynomy $P_n(x)$ a $Q_n(x)$ platí:

$$P_{n+1}(x) = 2.P_n(x) - \left(1 + x^2\right).P_{n-1}(x)$$
$$Q_{n+1}(x) = 2.Q_n(x) - \left(1 + x^2\right).Q_{n-1}(x)$$

Pokud bychom tedy teď chtěli získat vztah pro $n = 4$:

$$P_4(x) = 2.\left(3x - x^3\right) - \left(1 + x^2\right).\left(2x\right)$$
$$P_4(x) = 4x - 4x^3$$
$$Q_4(x) = 2.\left(1 - 3x^2\right) - \left(1 + x^2\right).\left(1 - x^2\right)$$
$$Q_4(x) = 1 - 6x^2 + x^4$$

Získali jsme tedy:

$$tg(4\alpha) = \frac{-4x^3 + 4x}{x^4 - 6x^2 + 1} = 4tg\alpha \frac{1 - tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha + tg^4\alpha}$$

Nyní vše upravíme pro $tg(4\alpha - \beta)$:

$$tg\left(4\alpha - \beta\right) = \frac{4tg\alpha.\left(1 - tg^2\alpha\right) - tg\beta.\left(1 - 6tg^2\alpha + tg^4\alpha\right)}{\left(1 - 6tg^2\alpha + tg^4\alpha\right) + 4tg\alpha.tg\beta.(1 - tg^2\alpha)}$$

Provedeme substituci, kdy $4\alpha-\beta=arctg\left(\frac{1}{x}\right);\alpha=arctg\left(\frac{1}{x+n}\right);\beta=arctg\left(t\right)$,

potom platí $arctg\left(\frac{1}{x}\right)=4\,arctg\left(\frac{1}{x+n}\right)-arctg\left(t\right)$ a získáme vztah:

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{4}{(x+n)}\left[1-\left(\frac{1}{x+n}\right)^2\right]-t.\left[1-6.\left(\frac{1}{x+n}\right)^2+\left(\frac{1}{x+n}\right)^4\right]}{\left[1-6.\left(\frac{1}{x+n}\right)^2+\left(\frac{1}{x+n}\right)^4\right]+\frac{4t}{(x+n)}\left[1-\left(\frac{1}{x+n}\right)^2\right]}$$

Nyní už pouze potřebujeme vyjádřit ze vztahu t:

$$t=\frac{\frac{4x}{(x+n)}\left[1-\left(\frac{1}{x+n}\right)^2\right]-\left[1-6.\left(\frac{1}{x+n}\right)^2+\left(\frac{1}{x+n}\right)^4\right]}{\frac{4}{(x+n)}\left[1-\left(\frac{1}{x+n}\right)^2\right]+x.\left[1-6.\left(\frac{1}{x+n}\right)^2+\left(\frac{1}{x+n}\right)^4\right]}$$

V případě, že $x=1$, protože $arctg\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$, můžeme dosazovat za $n=1,2,3,4,5,...$ a získáme následující vzorce:

$$\frac{\pi}{4}=4\,arctg\left(\frac{1}{2}\right)-arctg\left(\frac{31}{17}\right)$$
$$\frac{\pi}{4}=4\,arctg\left(\frac{1}{3}\right)-arctg\left(\frac{17}{31}\right)$$
$$\frac{\pi}{4}=4\,arctg\left(\frac{1}{4}\right)-arctg\left(\frac{79}{401}\right)$$
$$\frac{\pi}{4}=4\,arctg\left(\frac{1}{5}\right)-arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$
$$\frac{\pi}{4}=4\,arctg\left(\frac{1}{6}\right)-arctg\left(\frac{241}{1921}\right)$$

[14]

Ve čtvrtém řádku nyní vidíme vzorec, který John Machin využil při svých výpočtech. Díky tomuto objevu zrychlil Machin konvergenci Gregoryho řady a již v roce 1706 získal pomocí této metody aproximaci čísla π na 100 platných desetinných míst [25], čímž se nesmazatelně zapsal do historie čísla π a matematiky vůbec. Machinův vzorec byl dokonce tak úspěšný a prakticky využitelný, že se ještě v nedávné době používal při výpočtech přesné aproximace čísla π i pomocí matematického softwaru na počítačích.

Nyní použijeme stejný vzorec jako John Machin a pokusíme sečíst několik prvních členů, abychom viděli, že rychlost konvergence u Machinova vzorce je opravdu mnohem vyšší než u Gregoryho řady s dosazením $x = 1$. Budeme vycházet z následující rovnosti:

$$\pi = 16\,arctg\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

Nyní využijeme rozvoje pro $arctg(x)$, který už známe, a rovnou dosadíme hodnoty $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{239}$:

$$\pi \approx 16\left[\frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5}\right] - 4\left[\frac{1}{239} - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^5}{5}\right]$$

Po vypočtení získáme výsledek:

$$\pi \approx 3{,}141621...$$

Vidíme, že už po několika sečtených členech získáváme hodnotu čísla π na 3 platná desetinná místa a pokud tento výsledek srovnáme s výsledkem, který jsme získali součtem u Gregoryho řady, kdy jsme použili mnohem více členů a získali jsme jen platnou číslici 3, je jasné, že tato metoda výpočtu je nesrovnatelně rychlejší. I díky tomu mohl John Machin bez pomoci počítačů a jiné moderní techniky získat ve své době hodnotu čísla π na 100 desetinných míst a stal se tak jedním z držitelů rekordu v počtu správně určených cifer čísla π.

Abychom si lépe představili rychlost konvergence Machinova vzorce, provedeme ještě jeden výpočet pomocí matematického software. Pro tento výpočet použijeme alternativní zápis rozvoje funkce arkustangens ve tvaru:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

[12]

Do této sumy dosadíme za x hodnoty $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{239}$ a vytvoříme stejnou rovnost jako dříve, abychom získali hodnotu čísla π. Využijeme metody částečných součtů a jednotlivé částečné součty označíme s_k, kdy nám hodnota k představuje počet sečtených členů řady. Následně budeme zaznamenávat počet správně vypočtených cifer desetinného rozvoje čísla π při sečtení určitého počtu členů řady.

$$\begin{array}{ll} k=1 & 3{,}1... \\ k=5 & 3{,}1415926... \\ k=10 & 3{,}14159265358979... \\ k=15 & 3{,}1415926535897932384 62... \\ k=20 & 3{,}141592653589793238462643383 27... \\ k=25 & 3{,}1415926535897932384626433832795028 84... \end{array}$$

Vidíme, že s rostoucí hodnotou k se zvyšuje počet správně vypočtených cifer čísla π a rychlost konvergence Machinova vzorce je poměrně velká. Při hodnotě $k=25$ získáváme číslo π už s přesností na 36 desetinných míst. Na závěr je nutné pouze podotknout, že i přes rychlost konvergence svého vzorce musel Machin vynaložit velké úsilí, aby získal stejně přesný výsledek jako je v našem výpočtu a to, co nám trvalo díky matematickému software zlomek sekundy, zabralo Machinovi mnohem více času.

4.4. NEWTONOVA METODA

Již jsme objevili několik způsobů, pomaleji či rychleji konvergujících, díky kterým jsme schopni postupně získat číslo π v podstatě s libovolnou přesností. Stále však nejsme s výčtem metod, které rozvoje funkcí do mocninných řad využívají, u konce. Metodu, kterou se nyní budeme zabývat, objevil Isaac Newton. Než se však budeme zabývat samotnou metodou, pomocí které hledal přesnou hodnotu čísla π, věnujeme několik řádek tomuto velikánovi vědy.

Sir Isaac Newton byl anglický fyzik, matematik, astronom, alchymista a teolog žijící v letech 1642 – 1727 a je považován za jednoho z nejvýznamnějších vědců všech dob, který položil základy moderní fyziky. Měl velmi vysoké vzdělání a v roce 1669 se dokonce stal profesorem matematiky. Ve svých pracích se zabýval mnoha složitými přírodovědnými otázkami a v oblasti fyziky slavil úspěch tím, že popsal zákony gravitace a díky pohybovým zákonům položil základy klasické mechaniky. V matematice objevil a popsal základy diferenciálního a integrálního počtu, kdy následoval velký spor mezi ním a Gottfriedem Leibnizem, o kterém jsme mluvili v souvislosti s Gregoryho řadou a dosazením hodnoty $x = 1$, kdy si oba nárokovali prvenství na tento objev. [18]

Takový velikán přírodních věd, který se přel dokonce s Leibnizem, musel také dříve nebo později narazit i na problematiku týkající se aproximace čísla π. Newton mohl použít při svých výpočtech Gregoryho řadu, ale ta je, jak už jsme zjistili dříve, poměrně pomalu konvergující a tak našel jinou metodu, jak hodnotu čísla π zjistit rychleji na větší počet desetinných míst. Při tomto výpočtu je opět využita jedna z cyklometrických funkcí a Newton zjistil, že platí:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

[25]

Na tento vztah aplikoval Newton své znalosti binomické věty a vyjádřil levou stranu rovnosti následujícím způsobem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \ldots\right) dx$$

Následně integroval pravou stranu člen po členu a získal tak řadu, kterou dal do rovnosti s $\arcsin(x)$:

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} \ldots$$

Pokud se nyní na vztah, který Newton objevil, podíváme pečlivěji, zjistíme, že se nejedná o nic jiného než Maclaurinův rozvoj funkce $\arcsin(x)$. Do této řady, tohoto rozvoje, pak dosadil Newton hodnotu $x = \frac{1}{2}$, protože platí, že $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, díky čemuž jsme pak už schopni určit hodnotu čísla π po vynásobení obou stran rovnice hodnotou 6.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6.2^3} + \frac{3}{40.2^5} + \frac{5}{112.2^7} \ldots$$

$$\pi = 6.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6.2^3} + \frac{3}{40.2^5} + \frac{5}{112.2^7} \ldots\right)$$

[25]

Nyní už vidíme, že jsme schopni určit hodnotu čísla π a zkusíme si, stejně jako u předchozích metod, sečíst výše uvedené členy řady, abychom mohli srovnat rychlosti konvergencí.

$$\pi \approx 6.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6.2^3} + \frac{3}{40.2^5} + \frac{5}{112.2^7}\right)$$
$$\pi \approx \frac{6}{2} + \frac{6}{6.2^3} + \frac{18}{40.2^5} + \frac{30}{112.2^7}$$

$$\pi \approx 3{,}1411551\ldots$$

Pokud se podíváme na náš výsledek, zjistíme, že hodnota čísla π je správně určena na 3 desetinná místa. Když ho srovnáme s předchozími metodami, okamžitě zjistíme, že Newtonova metoda je při sečtení prvních 4 členů řady mnohem rychlejší než metoda výpočtu pomocí Gregoryho řady. Při pohledu na výsledky dle počtu platných desetinných míst bychom mohli nabýt dojmu, že Machinova a Newtonova metoda konvergují stejně rychle, protože u obou našich výsledků máme hodnotu čísla π správně určenou na 3 desetinná místa. Zkusíme proto provést ještě jeden výpočet, kdy použijeme Newtonovu metodu a sečteme 6 členů řady, abychom zjistili, jak nám vzroste přesnost určení hodnoty čísla π:

$$\pi \approx 6.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6.2^3} + \frac{3}{40.2^5} + \frac{5}{112.2^7} + \frac{35}{1152.2^9} + \frac{63}{2816.2^{11}}\right)$$
$$\pi \approx \frac{6}{2} + \frac{6}{6.2^3} + \frac{18}{40.2^5} + \frac{30}{112.2^7} + \frac{210}{1152.2^9} + \frac{378}{2816.2^{11}}$$

$$\pi \approx 3{,}14157671...$$

Nyní vidíme, že při 6 sečtených členech nám u Newtonovy metody vychází hodnota čísla π správně pouze na 4 desetinná místa a tudíž přidanými 2 členy jsme získali pouze jedno další platné desetinné místo. Pokud bychom přidávali další členy řady, přibližně by platilo, že na 5 přičtených členů řady připadají 3 platná desetinná místa a při přidávání členů v Machinově vzorci by byla rychlost konvergence mnohem vyšší – například pro získání hodnoty čísla π s přesností na 63 platných desetinných míst bychom museli u Newtonovy metody sečíst 100 členů řady, zatímco u Machinova vzorce získáváme při sečtení 50 členů hodnotu čísla π na 72 platných desetinných míst. [24] Newton pracoval ještě s jinou řadou, kdy platí:

$$\pi = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + 24.\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9}...\right)$$

[25]

Tato řada konverguje o trochu rychleji než předcházející Newtonem objevená řada a například součtem prvních 22 členů získáme hodnotu čísla π s přesností na 15 desetinných míst [25], ale i přes to nepřekoná rychlost konvergence Machinova vzorce. A není se ani čemu divit, že při výpočtu přesné hodnoty čísla π je Machinův vzorec rychlejší, protože když nic jiného, je tento vzorec mladší než postupy, které používal Newton. I přes to však, že není Newtonova metoda ta úplně nejrychlejší při získávání přesné hodnoty čísla π, byla důležitá pro další rozvoj matematiky, ukázala další možný směr, kterým postupovat při hledání aproximace čísla π a poukázala i na nové souvislosti – na souvislost mezi číslem π a cyklometrickou funkcí $\arcsin(x)$.

4.5. EULEROVA METODA

Poslední metodou využívající při získání hodnoty čísla π rozvoj funkce do mocninné řady, kterou se budeme zabývat, je, jak je již patrné z názvu, Eulerova metoda.

Leonhard Euler byl švýcarský fyzik a matematik žijící v letech 1707 – 1783, který je považován za jednoho z největších matematiků všech dob. Euler byl velice aktivní a publikoval za svůj život 886 knih a matematických pojednání. V matematice učinil mnoho objevů v oboru teorie grafů, v diferenciálním počtu a díky němu byly v matematice zavedeny některé moderní symboly. Na poli fyziky se zabýval astronomií, optikou a mechanikou. [19]

Jestliže zde máme tak významného a aktivního matematika, který inspiroval řadu jeho následovníků a obor samotný obohatil o spoustu nových poznatků, je jasné, že ani problematika čísla π mu nemohla uniknout a také neunikla. Euler navíc nezískal jen jedno vyjádření čísla π, ale hned několik, která byla, obdobně jako u jiných matematiků, vedlejším produktem spjatým s mnohem složitější problematikou.

Při hledání prvního vzorce, pomocí kterého by mohl Euler určit hodnotu čísla π, vyšel ze vzorce pro $\sin(x)$, který už byl známý některým jeho předchůdcům:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

[4]

Pokud se na tento vzorec podíváme, opět vidíme Maclaurinův rozvoj, se kterým jsme se už několikrát setkali u předchozích metod výpočtu hodnoty čísla π. Tento vztah je možné dále upravit vytknutím x:

$$\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots\right)$$

Euler v této fázi položil $\sin(x) = 0$ a získal tak vztah:

$$x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots\right) = 0$$

V dalším kroku vydělil rovnici hodnotou x a následně položil $x^2 = y$, díky čemuž získal pro $y \neq 0$ rovnici nekonečného stupně:

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} \dots = 0$$

[25]

Víme, stejně jako Euler, že kořeny rovnice $\sin(x)=0$ jsou čísla $0;\pm\pi;\pm 2\pi;\pm 3\pi;\ldots$ a proto po vypuštění hodnoty 0 vidíme, že kořeny výše uvedené rovnice jsou $\pi^2;(2\pi)^2;(3\pi)^2;\ldots$. Díky znalostem z oboru teorie rovnic Euler věděl, že záporný koeficient lineárního členu, v našem případě se jedná o hodnotu $\frac{1}{3!}$, je součtem převrácených hodnot kořenů rovnice. Pro naši situaci to tedy znamená, že platí:

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\ldots$$

[4]

Po úpravě hodnot ve jmenovatelích získáváme:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots$$

Nyní už stačí jen vynásobit hodnotou π^2 a provést drobnou úpravu a získáme výsledný vztah:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Euler tedy poměrně snadno získal řadu pro π^2, čímž ohromil všechny ostatní matematiky své doby, ale i přes to se zde Euler nezastavil a protože věděl, že stejný princip jako byl použit zde lze aplikovat i na koeficienty u vyšších mocnin, získal následující vztahy:

$$\frac{\pi^4}{90}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4};\qquad \frac{\pi^6}{945}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6};\qquad \frac{\pi^8}{9450}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8};\ldots$$

[25]

Stejným způsobem Euler pokračoval dále a propracoval se dokonce až k řadě 26. mocnin převrácených hodnot přirozených čísel. Ani zde však Euler neskončil a analogicky jako s funkcí $\sin(x)$ pracoval také s funkcí $\cos(x)$ a dospěl k závěru, že:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

[4]

Nyní však funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ opustíme a podíváme se na druhou metodu, u které se vrátíme k cyklometrickým funkcím. Tímto postupem Euler vlastně navázal na Machinův vzorec, o kterém již víme, že konverguje rychle k hodnotě čísla π. Euler dokázal odvodit, že pro $arctg(x)$ platí:

$$arctg\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v+w} + arctg\,\frac{w}{v^2+vw+1}$$

A dále zjistil, že také platí:

$$arctg\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax-y}{ay+x} + arctg\,\frac{b-a}{ab+1} + arctg\left(\frac{c-b}{cb+1}\right) + \ldots$$

[4]

Tyto vztahy nám jsou schopny poskytnout výrazy pro vyjádření čísla π. Pokud si vezmeme například druhou rovnost, začneme za $a, b, c, \ldots$ dosazovat lichá čísla a užijeme znalosti, že $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$, potom získáme vztah:

$$\frac{\pi}{4} = arctg\,(0) + arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{8}\right) + arctg\left(\frac{1}{18}\right) + \ldots$$

Jakýkoliv z těchto výrazů nám vychází z řady funkce arkustangens. Euler však pokračoval ještě dál a našel řadu, která rychlostí své konvergence převyšovala všechny řady ostatní:

$$arctg\,(x) = \left(\frac{x}{y}\right).\left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2.4}{3.5}y^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}y^3 + \ldots\right)$$

V této řadě platí, že $y = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)}$. Euler už poté pouze použil jeden z Machinových vzorců, který měl tvar:

$$\pi = 20\,arctg\left(\frac{1}{7}\right) + 8\,arctg\left(\frac{3}{79}\right)$$

[4]

Díky použití tohoto Machinova vzorce a řady, kterou Euler objevil, je možné vypočítat hodnotu čísla π velmi rychle na velký počet platných desetinných míst. Sám Euler údajně získal pomocí tohoto postupu hodnotu čísla π na 20 platných desetinných míst za pouhou hodinu v době, kdy neexistovaly ani počítače s matematickým softwarem, ani obyčejné kalkulačky. Euler tak ukázal, že existuje celá řada dalších způsobů, pomocí kterých lze aproximovat číslo π a některé čekají jen na to, aby byly objeveny dalšími matematiky v příštích letech.

Eulerovou metodou, nebo lépe metodami, uzavíráme velkou kapitolu, ve které byly využity pro hledání aproximace čísla π funkce a jejich rozvoj do mocninných řad. Zjistili jsme, že některé řady konvergují rychleji, jiné pomaleji, některé jsou vhodné pro svižný výpočet, u jiných je výpočet náročnější. Nyní se podíváme na další – novější metody a postupy, díky kterým lze opět sofistikovaně získávat hodnotu čísla π na velký počet platných desetinných míst, ale faktem zůstává, že bez základů, které položili Gregory, Leibniz, Newton, Machin, Euler a i další bychom se k takovým způsobům vůbec nepropracovali.

5. ITERAČNÍ VZORCE A OSOBNOST MATEMATIKA S. RAMANUJANA

Tato kapitola bude úžeji zaměřena než kapitoly předcházející. Budeme se nyní věnovat jednomu konkrétnímu muži, velké osobnosti matematiky Srinivasaovi Ramanujanovi, jeho vzorcům, díky kterým lze získat velmi přesnou hodnotu čísla π, a několika dalším algoritmům, iteračním vzorcům, které objevili matematici v moderní době díky Ramanujanovým poznatkům. Než se k těmto vzorcům a algoritmům však dostaneme a podrobně je rozebereme, odložíme na chvíli matematiku samotnou trochu stranou a podíváme se na život S. Ramanujana a na cestu, která vedla k jeho velkým objevům.

5.1. SRINIVASA RAMANUJAN

Srinivasa Ramanujan, celým jménem Srinivasa Aaiyangar Ramanujan, se narodil 22. 12. 1887 ve městě Eroda, které se nachází v jižní Indii, do chudé rodiny účetního a byl nejstarším ze tří synů. V sedmi letech byl poslán do základní školy v Kumbakonamu, kde se mohl naplno začít rozvíjet jeho talent. Své spolužáky i kantory překvapoval mírou představivosti a neuvěřitelnou zběhlostí v algebře, aritmetice, geometrii, trigonometrii a teorii čísel. Jeden z učitelů na škole tolik věřil Ramanujanově znalostem, že ho nechal sestavit nekonfliktní rozvrh pro 30 učitelů. [9] Vypráví se, že jeho talent pro matematiku byl tak velký, že byl schopný spolužákům recitovat složité matematické vzorce a číslo π na velké množství desetinných míst. [12] V roce 1897 se Ramanujan stal nejúspěšnějším žákem v oblastních zkouškách základních škol a díky tomu dostal stipendium a mohl začít studovat na střední škole.

V roce 1903 složil Ramanujan úspěšně maturitní zkoušku a byl přijat na vysokou školu v Madrásu, ale už během studia získal řadu cen za jeho matematické dovednosti a například ve 12 letech dokázal prostudovat složitou publikaci „Rovinná geometrie“ od S. L. Loneyho a mohl tak pochopit nekonečné řady a nekonečné součiny, které měly později v jeho pracích velký význam. Ramanujana silně ovlivnila také publikace „Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics“ od G. S. Carra, ve které se vyskytuje více jak 6000 matematických vět, které jsou většinou uváděny bez důkazu/odvození, což Ramanujana velmi ovlivnilo v jeho vlastních dílech, kde většinou své výsledky uvádí pouze se stručnou motivací a bez podrobných důkazů. [12]

Na vysoké škole byla hlavním Ramanujanovým zájmem matematika, kvůli které zanedbával všechny ostatní předměty a další povinnosti. Svému učiteli matematiky však přinášel spoustu originálních výsledků, které se týkaly převážně konečných a nekončených řad. Kvůli neúspěchu v angličtině a fyziologii ztratil Ramanujan v roce 1905 stipendium a nepoustoupil do vyššího ročníku. O rok později se ještě na školu vrátil, ale v roce 1907 uspěl pouze při zkouškách z matematiky, v ostatních předmětech získal příliš málo bodů a tak skončilo jeho formální vzdělávání. [9]

Ramanujan si veškeré své matematické poznatky znamenával do „Zápisníků“ a po neúspěšném ukončení studií dlouho hledal mecenáše, který by jeho talent podporoval. Ve stejné době, v roce 1909, se oženil. V roce 1910 získal za mecenáše v profesora V. Ramaswamyho Lyera, který byl zakladatel indické matematické společnosti. Ramanujan pokračoval ve svých matematických pracích a v roce 1912 přijal místo účetního v přístavu v Madrásu. [12]

Ramanujan stále pokračoval ve svém matematickém bádání a v roce 1913 poslal dopis adresovaný profesoru a přednášejícímu matematiky na univerzitě v Cambridge, G. H. Hardymu, ve kterém píše asi o 120 matematických formulích a větách, které byly uvedeny bez důkazů. Hardy chtěl původně tento dopis, jako řadu jiných, ignorovat, ale po jeho prostudování zjistil, že se jedná o práci génia a okamžitě zařídil Ramanujanovi cestu do Anglie. [12]

I přes námitky matky, které nakonec ustaly, Ramanujan v březnu roku 1914 odcestoval do Anglie - do Cambridge a začal pracovat v Trinity College. Ramanujan si rychle doplnil scházející znalosti z evropské matematiky první poloviny 20. století a přímo spolupracoval s Hardym. [9] Díky této spolupráci vznikla řada odborných článků, které byly věnovány hlavně teorii čísel.

Na jaře roku 1917 však u Ramanujana vypukla nevyléčitelná nemoc, kterou pravděpodobně urychlil i přídělový systém potravin ve válkou postižené Anglii. Ve stejném roce se Ramanujan stal členem Královské společnosti a byl také prvním indickým vědcem, který se stal členem Trinity Fellowship. Následně Ramanujan střídavě přežíval v sanatoriích a mimo ně. [12]

Po skončení první světové války se v únoru 1919, kdy začala být lodní přeprava opět bezpečná, Ramanujan vrátil do rodné vlasti. Byla mu věnována veškerá péče, ale i přes to 26. 4. 1920 zemřel. Oficiální diagnózou byla tuberkulóza, ale dnes se soudí, že mohlo také jít o nedostatek několika důležitých vitamínů. [12]

Ramanujan zemřel v poměrně mladém věku, v 32 letech, ale i tak po sobě zanechal velké množství důležitých matematických poznatků. Nyní se zaměříme hlavně na ty, které vedou k aproximaci čísla π a dávají nám možnost rychle vypočítat jeho hodnotu s velkou přesností.

5.2. RAMANUJANOVY ŘADY

Jak již bylo řečeno, Srinivasa Ramanujan byl geniální matematik, který se zabýval mnoha složitými problémy a při svém bádání musel dříve nebo později narazit i na problematiku aproximace čísla π. Ve chvíli, kdy se tak stalo, se jí začal zabývat a objevil neuvěřitelných 15 nekonečných řad, které konvergují k převrácené hodnotě čísla π, tedy k číslu $\frac{1}{\pi}$. [12] Jedna z těchto řad je v následujícím tvaru:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{[1103+26390n]}{396^{4n}}$$

[6]

Pokud bychom na levé straně usilovali o to, aby zde byla přímo hodnota čísla π a ne jeho převrácená hodnota, pak můžeme provést ještě následující úpravu:

$$\pi=\frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{[1103+26390n]}{396^{4n}}\right)^{-1}$$

Metoda výpočtu čísla π pomocí konvergujících řad, které objevil Ramanujan, má oproti všem předchozím metodám tu výhodu, že díky ní můžeme získat velmi rychle hodnotu čísla π s libovolnou přesností. Do této doby jsme měli vždy pevně zadaný - odvozený vzorec na základě rozvoje funkcí do mocninných řad. Následně jsme sečetli určitý počet členů a po výpočtu se nám vrátila jedna hodnota, která měla číslo π aproximovat, my zjistili, kolik tato aproximace obsahuje platných desetinných míst, těmi jsme se zabývali a ostatní pro nás byla nepodstatná. U Ramanujanových řad je na první pohled vidět, že svým tvarem jsou úplně jiné a hodnotu čísla π můžeme zjišťovat s různou přesností pomocí částečných součtů.

Pokud označíme částečné součty řady s_k a budeme je postupně vyčíslovat pro hodnoty $k=0,1,2,\ldots$, potom nám bude se zvyšující se hodnotou k vzrůstat přesnost výpočtu čísla π. [12] Samozřejmě ruční výpočet touto metodou by byl poměrně zdlouhavý, a proto nyní provedeme výpočet pomocí matematického software a použijeme algoritmus, který najdeme v [12]. Zaměříme se opět jen na správně vypočtená desetinná místa a pro jednotlivá k tím získáme následující výsledky:

$$
\begin{array}{ll}
k=0 & 3{,}141592... \\
k=1 & 3{,}141592653589793... \\
k=2 & 3{,}14159265358979323846264... \\
k=3 & 3{,}1415926535897932384626433832795... \\
k=4 & 3{,}141592653589793238462643383279502884 19... \\
k=5 & 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939 93...
\end{array}
$$

Vidíme, že už pro $k=0$ máme hodnotu čísla π správně vypočtenou na 6 desetinných míst. Pokud bychom stejně pokračovali dál, tak každým dalším zvýšením hodnoty k bychom získali přibližně dalších 8 správně vypočtených desetinných míst čísla π. Pomocí této řady bylo dosaženo neuvěřitelných výsledků v aproximaci čísla π, kdy například matematik R. W. Gosper získal v roce 1985 pomocí této řady hodnotu čísla π na více jak 17 miliónů desetinných míst. [12] Řady, které Ramanujan objevil, mají tedy svůj význam v podstatě až dodnes.

Ale nejsou to jen konvergující řady, co tento matematický génius objevil. Našel i další metody, které popsal ve svých dílech a na které pak navázali matematici moderní doby, kdy zkonstruovali tzv. iterační vzorce, pomocí kterých je opět možné velmi rychle vypočíst hodnotu čísla π s velkou přesností.

5.3. ITERAČNÍ VZORCE A VÝPOČET ČÍSLA π

Iterační algoritmy jsou takové algoritmy, u kterých probíhá výpočet opakovaně a výsledek jednoho výpočetního cyklu je vstupní podmínkou pro cyklus následující. Po provedení určitého počtu takových cyklů dochází k postupnému zpřesňování konečného výsledku. Při studiu Ramanujanových textů objevili lovci čísel moderní doby postupy, díky kterým zkonstruovali takové iterační vzorce a algoritmy, pomocí kterých lze vypočítat rychle hodnotu čísla π na velké množství desetinných míst. Následující dva algoritmy společně objevili a ve formě vět zavedli J. M. Borwein a P. B. Borwein. [12]

První z algoritmů je definován následovně:

Nechť $\alpha_0 := 6 - 4\sqrt{2}$ *a* $y_0 := \sqrt{2} - 1$. *Nechť dále* $y_{n+1} := \dfrac{1-\left(1-y_n^4\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\left(1-y_n^4\right)^{\frac{1}{4}}}$ *a*

$\alpha_{n+1} := \left(1+y_{n+1}\right)^4 \alpha_n - 2^{2n+3} y_{n+1}\left(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2\right)$. *Potom* $0 < \alpha_n - \dfrac{1}{\pi} < 16.4^n e^{-2.4^n \pi}$ *a*

posloupnost α_n *konverguje k číslu* $\dfrac{1}{\pi}$ *v řádu 4.*

[6]

Pokud nyní budeme dosazovat do vzorce jednotlivá $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsme schopni postupně zjišťovat hodnotu čísla π a vidíme, že s rostoucí hodnotou n roste i přesnost aproximace:

$n = 0$ 2,91...
$n = 1$ 3,1415926...
$n = 2$ 3,14159265358979323846264338327950288841971...
$n = 3$ 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816...

Vidíme, že nultá aproximace čísla π neobsahuje jedinou správnou číslici, ale už pro $n = 1$ získáváme výsledek na 7 platných desetinných míst. Pro $n = 2$ je výsledek ještě mnohem přesnější a pro $n = 3$ bychom získali hodnotu čísla π dokonce na 172 správně vypočtených desetinných míst. Výše je z úsporných důvodů uvedených pouze prvních 70. Stejně bychom mohli pokračovat dále a se zvyšujícím se n bychom získávali více a více platných desetinných míst čísla π.

Stejně jako my postupovali i někteří matematici v historii, a tak se pomocí tohoto algoritmu a počítači Cray 2 podařilo Baileymu vypočítat v roce 1986 číslo π na více než 29 miliónů desetinných míst. [12]

Jak již však bylo řečeno v úvodu podkapitoly, J. M. a P. B. Borweinové objevili algoritmy dva.

Druhý z algoritmů je definován následovně:

Nechť $s_0 := 5\left(\sqrt{5}-2\right)$ *a* $\alpha_0 := \frac{1}{2}$. *Nechť dále* $s_{n+1} := \frac{25}{\left(z+x/z+1\right)^2 s_n}$, *kde*

$x := \frac{5}{s_n} - 1$; $y := \left(x-1\right)^2 + 7$; $z := \left[\frac{1}{2}x\left(y+\sqrt{y^2-4x^3}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$. *Buď ještě*

$\alpha_{n+1} := s_n^2\alpha_n - 5^n\left\{\frac{s_n^2-5}{2} + \sqrt{s_n\left(s_n^2-2s_n+5\right)}\right\}$, *potom* $0 < \alpha_n - \frac{1}{\pi} < 16.5^n e^{-5^n\pi}$ *a*

posloupnost α_n *konverguje k číslu* $\frac{1}{\pi}$ *v řádu 5.*

[6]

Pokud bychom postupovali stejně jako u prvního algoritmu, s rostoucím počtem cyklů bychom postupně získávali hodnotu čísla π na velké množství platných desetinných míst. Konvergence v řádu 5 nám navíc říká, že každé jedno proběhnutí cyklu zpětinásobí počet správně vypočtených číslic. Stejně tak to platí i u prvního algoritmu, kde je konvergence v řádu 4, kdy nám každé proběhnutí cyklu počet správně vypočtených číslic zečtyřnásobí. [12] Z toho lze tedy velmi rychle určit, že druhý algoritmus je z hlediska hledání přesné hodnoty čísla π rychlejší, je však oproti prvnímu algoritmu složitější.

V této kapitole jsme popsali životní osud matematického génia, Srinivasy Ramanujana, díky kterému je možné vypočíst hodnotu čísla π s libovolnou přesností pomocí částečných součtů řady, a na kterého mohli navázat matematici moderní doby. Ti měli na rozdíl od něj k dispozici počítače a tak se mohli na jeho postupy podívat novým způsobem a zkonstruovat na základě jeho myšlenek moderní a velmi rychlé algoritmy. Ramanujan pravděpodobně netušil, jak velký význam při hledání přesné hodnoty čísla π budou mít jeho objevy v počítačovém věku, ale i díky jeho přispění matematice, díky jeho nástupcům a díky rychlým moderním počítačům padla v roce 1989 pomyslná hranice jedné miliardy správně vypočtených desetinných míst a matematikům se tak otevřely dveře k dalšímu zpřesňování a zkoumání čísla π . [12]

6. MODERNÍ VÝSLEDKY O ČÍSLE π

V předcházejících kapitolách jsme se zatím zabývali spíše jen, více či méně vzdálenou, historií, v průběhu které docházelo k objevování stále lepších a výkonnějších vzorců, pomocí kterých je možné určit hodnotu čísla π na různý počet desetinných míst.

V této kapitole se budeme věnovat něčemu trochu jinému. Budeme se zabývat moderními poznatky o čísle π, podíváme se na jeden z nových vzorců, které je možné využít při hledání přesné hodnoty čísla π, zkusíme vyřešit otázku, jestli číslice v desetinném rozvoji čísla π jsou nahodilé nebo některé ve svém počtu převládají oproti jiným a na závěr se zaměříme na rekordy v počtu správně vypočtených desetinných míst, které padly v posledních 25 letech.

6.1. BAILEYHO-BORWEINŮV-PLOUFFEŮV VZOREC

Ve chvíli, kdy byla překonána hranice jedné miliardy správně vypočtených desetinných míst čísla π, to pomalu vypadalo, že další vzorce už nelze objevit a pokud nějaké další existují, pak budou velmi složité. Jak je patrné z názvu podkapitoly, nyní se budeme zabývat novým vzorcem pro výpočet čísla π, který objevili tři muži – tři významní matematici moderní doby, kterými jsou D. H. Bailey, P. B. Borwein a S. Plouffe. Vzorec, který nese jméno po jeho třech objevitelích, je často zkráceně označován názvem „BBP formule“ a jeho zajímavostí je, že oproti předcházejícím vzorcům, které objevili J. M. a P. B. Borweinové, je poměrně jednoduchý. Než se však budeme zabývat vzorcem samotným, zastavíme se na chvíli u těchto významných matematiků.

Všichni tři v současné době působí na americkém kontinentu. David H. Bailey pochází z USA z města Utah a pracuje jako matematik pro NASA. První titul, B.S., získal v roce 1972 na Brigham Young University. Pokračoval ve studiu na Stanford University a v roce 1976 tak získal i titul Ph.D. [8] Peter B. Borwein je původem ze Skotska, kde se narodil v roce 1953, ale vysokou školu již studoval v Kanadě, kde získal v roce 1974 bakalářský titul na University of Western Ontario. Pokračoval ve studiích a úspěšně dokončil magisterské studium a podařilo se mu získat i titul Ph.D. na University of British Columbia. V současné době působí jako matematik a profesor na Simon Fraser University. [10] Třetí matematik, Simon Plouffe, pochází z kanadského Quebecu, kde se narodil v roce 1956, a stejně jako P. B. Borwein působí jako matematik na Simon Fraser University. [12]

Nyní se ale už vrátíme ke vzorci, který tato trojice objevila. Jak již bylo řečeno, vzorec je poměrně jednoduchý a jedná se o zvláštní případ Adamchik-Wagonova vzorce, který má tvar:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4+8r}{8k+1} - \frac{8r}{8k+2} - \frac{4r}{8k+3} - \frac{2+8r}{8k+4} - \frac{1+2r}{8k+5} - \frac{1+2r}{8k+6} + \frac{r}{8k+7}\right),\ r \in C$$

[24]

Úpravami odvodili Bailey, Borwein a Plouffe vzorec, ve kterém se nám již nevyskytuje r a tento vzorec má následující tvar:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

[24]

Vidíme, že oproti předchozím vzorcům a algoritmům, kterými jsme se zabývali, je tento opravdu v poměrně jednoduchém tvaru. Otázkou je rychlost jeho konvergence k hodnotě čísla π. Pokusíme se nyní postupně určovat součty pro jednotlivá k a budeme zaznamenávat správně vypočtená desetinná místa:

$$\begin{array}{ll} k=0 & 3{,}1\ldots \\ k=1 & 3{,}141\ldots \\ k=2 & 3{,}1415\ldots \\ k=3 & 3{,}141592\ldots \\ k=4 & 3{,}1415926\ldots \\ k=5 & 3{,}141592653\ldots \end{array}$$

Po provedení výpočtu je okamžitě vidět, že rychlost konvergence není nijak velká a pro $k=5$ získáváme pouhých 9 platných desetinných míst čísla π. Faktem ovšem zůstává, že vzorec je oproti jiným opravdu jednoduchý a v případě, že nebudeme při nějakém rozsáhlejším projektu potřebovat hodnotu čísla π na stovky desetinných míst, můžeme tento vzorec použít. Vzorec je důležitý ještě z jiného hlediska a to z toho, že nám ukazuje, že stále nebylo vše objeveno a pořád je možné nacházet nové vzorce v jednoduchém tvaru, které nám mohou aproximovat číslo π.

6.2. ČETNOST ČÍSLIC V DESETINNÉM ROZVOJI ČÍSLA π

V předchozích kapitolách jsme již zjistili, že číslo π není žádná obyčejná konstanta, ale jedná se o číslo iracionální a transcendentní, které má nekonečný, neperiodický desetinný rozvoj. Otázkou zůstává, jak je to s jednotlivými číslicemi tohoto rozvoje. Vyskytují se nahodile, je zde určitá zákonitost nebo některá z číslic převládá z hlediska četnosti výskytu nad ostatními? V této podkapitole se pokusíme na tuto otázku odpovědět. Postupně vezmeme číslo π, které bude vždy vypočtené na určitý počet desetinných míst, budeme zjišťovat četnost jednotlivých číslic a porovnávat výskyt těchto číslic u jednotlivých rozvojů. Pro přehlednost vše zaneseme do tabulky se zvýrazněnými nejčetnějšími číslicemi v desetinných rozvojích čísla π o různé délce. Na základě této tabulky pak vyvodíme závěry.

Tabulka 1 – ČÍSLO π URČENÉ NA POŽADOVANÝ POČET DESETINNÝCH MÍST A ČETNOST VÝSKYTU ČÍSLIC

	100 D. MÍST	*1000 D. MÍST*	*10 000 D. MÍST*	*100 000 D. MÍST*	*1 000 000 D. MÍST*	*10 000 000 D. MÍST*
ČETNOST Č. 0	8	93	968	9999	99959	999440
ČETNOST Č. 1	8	116	1026	10137	99757	999333
ČETNOST Č. 2	12	103	1021	9908	100026	1000306
ČETNOST Č. 3	12	103	975	10026	100230	999965
ČETNOST Č. 4	10	93	1012	9971	100230	1001093
ČETNOST Č. 5	8	97	1046	10026	100359	1000466
ČETNOST Č. 6	9	94	1021	10028	99548	999337
ČETNOST Č. 7	8	95	969	10025	99800	1000206
ČETNOST Č. 8	12	101	948	9978	99985	999814
ČETNOST Č. 9	13	105	1014	9902	100106	1000040

Pokud se nyní podíváme na výsledek, který jsme získali, a na žlutě zvýrazněné hodnoty, vidíme, že u čísla π vypočteného na 100 desetinných míst je nejčetnější číslicí číslice 9. Posuneme-li se o řád výše, kdy máme číslo π vypočtené na 1000 desetinných míst, nejčetnější číslicí se stává číslice 1. Pokud se posuneme ještě o řád výše, zjišťujeme, že nejčetnější číslicí se nám stává číslice 5. Stejně tak bychom mohli rozebírat výsledky dále, ale vše lze vyčíst z tabulky, kde vidíme, že nejčetnější číslice se stále mění a v různě rozsáhlých desetinných rozvojích je jiná nejčetnější číslice. Zjišťujeme tedy, že s rostoucím počtem desetinných míst čísla π nezačíná výrazně převládat jedna z číslic, ale rozdíly v četnostech nejsou z hlediska celkového počtu desetinných míst nijak výrazné.

6.3. REKORDY VE VÝPOČTU ČÍSLA π ZA POSLEDNÍCH 25 LET

Pokud se podíváme na rekordy ve výpočtu čísla π z hlediska historie, už v předchozích kapitolách jsme zjistili, že když chtěl matematik stanovit nový rekord, představovalo to pro něj celoživotní úsilí a i po letech tvrdé práce se stávalo, že starý rekord překonal například o pouhé jedno desetinné místo. V historii však mělo i toto jedno desetinné místo rozvoje čísla π velký význam, protože matematici neměli k dispozici žádné počítače ani kalkulačky, ale veškeré výpočty prováděli ručně a aby u práce vydrželi, museli směřovat k nějakému cíli, kterým bylo právě překonání rekordu a zapsání se do historie matematiky. Někteří byli číslem π a myšlenkou vypočíst ho na velký počet desetinných míst úplně posedlí, stačí si vzpomenout na Ludolpha van Ceulena. Zdlouhavé ruční výpočty také zapříčiňovaly, že rekordy v počtu získaných platných desetinných míst čísla π nepadaly tak často. Dnes je však situace jiná. Máme k dispozici moderní počítačové technologie a řady, které rychle konvergují k hodnotě čísla π a umožňují nám tak stanovovat nové rekordy. A právě na tyto rekordy, na rekordy moderní doby, se v této podkapitole zaměříme.

V lednu roku 1973 bylo dosaženo hranice jednoho milionu správně vypočtených desetinných míst čísla π. Zásluhu na tomto rekordu mají Jean Guilloud a Martin Bouyer, kteří využili jednoho ze vztahů pro arkustangentu a pomocí počítače CDC 7600 získali po jednom dni práce hodnotu čísla π na 1 001 250 platných desetinných míst. V té době vypadalo jako nemožné získat hodnotu čísla π například na jednu miliardu desetinných míst, protože výpočet by mohl probíhat i několik měsíců. [12] Toto však bylo vyvráceno již v srpnu roku 1989, kdy bratři Gregory Chudnovsky a David Chudnovsky vypočetli číslo π pomocí jedné ze sum objevených Ramanujanem a počítače IBM 3090 na 1 011 196 691 platných desetinných míst. [23] Od překonání hranice jednoho milionu desetinných míst trvalo tedy přes 15 let, než byla překonána hranice jedné miliardy, ale po ní se začínají objevovat další a další rekordy a za nedlouho dochází i překonání hranice dvou miliard.

Nyní se zaměříme právě na tyto „průlomy“ dalších miliard a úplně všechny rekordy, kterých bylo v průběhu let dosaženo, shrneme až později.

O překonání již zmiňované hranice vypočtených dvou miliard desetinných míst čísla π se v srpnu roku 1991 postarali opět Gregory s Davidem Chudnovskym. Pro účel tohoto výpočtu sestavili svůj vlastní speciální počítač a hodnotu čísla π určili správně na 2 260 000 000 desetinných míst. Pro výpočet využili opět sum, které objevil Ramanujan. Díky těmto sumám a sestavení nového speciálního počítače se postarali i o další rekord, kdy v květnu roku 1994 vypočetli hodnotu čísla π na více než čtyři miliardy desetinných míst, přesně řečeno, vypočetli číslo π na 4 044 000 000 platných desetinných míst. [23]

Dalším překonáním hranice bylo již překonání hranice šesti miliard správně vypočtených desetinných míst čísla π. O tento rekord se postarali japonští matematici Yasumasa Kanada a Daisuke Takahashi, kteří v říjnu roku 1995 využili algoritmů objevených J. M. a P. B. Borweiny a pomocí počítače Hitac S-3000/480 získali hodnotu čísla π na 6 442 450 938 platných desetinných míst. [23]

Japonská dvojice Y. Kanada a D. Takahashi se výpočtem hodnoty čísla π zabývala i dále a i následující rekordy patří právě jim. V roce 1997 dosáhli neuvěřitelného výsledku, kdy pomocí počítače Hitachi SR2201 a vzorců objevených J. M. a P. B. Borweiny určili hodnotu čísla π správně na 51 539 600 000 desetinných míst. Pokračovali ovšem v práci dál a v dubnu roku 1999 pomocí počítače Hitachi SR8000 a kombinace několika algoritmů pro výpočet čísla π určili jeho hodnotu správně na 68 719 470 000 desetinných míst. O několik měsíců později téhož roku, v září roku 1999, ještě zlepšili svůj výsledek a určili číslo π správně na neuvěřitelných 206 158 430 000 platných desetinných míst. [23]

Yasumasa Kanada pokračoval v dalších výpočtech na tokijské univerzitě, kde měl k dispozici celý tým odborníků. V listopadu 2002 tak získali pomocí počítače Hitachi SR8000/MPP po 600 hodinách číslo π správně vypočtené na 1 241 100 000 000 desetinných míst a překonali tak hranici jednoho bilionu. [11]

Hranici dvou biliónů překonal první Daisuke Takahashi s týmem specialistů, který v roce 2009 získal pomocí „superpočítače“ T2K Open Supercomputer po 29,09 hodinách výpočtů hodnotu čísla π na 2 576 980 377 524 platných desetinných míst. [11]

Další hranice, která byla překonána, byla hranice pěti biliónů. O tento rekord, který se zapsal do historie, se postaral Japonec Shigeru Kondo. Pro výpočet využil kombinaci sofistikovaných vzorců a speciálně sestavený počítač, díky kterému získal po 90 dnech výpočtů v srpnu 2010 hodnotu čísla π přesně na 5 000 000 000 000 správně vypočtených platných desetinných míst. Pokračoval však v práci dál a v říjnu 2011 získal hodnotu čísla π správně vypočtenou na 10 000 000 000 050 desetinných míst. Výpočet počítači zabral 371 dní. [11]

V současné době známe hodnotu čísla π na 12 100 000 000 050 platných desetinných míst. Tohoto rekordu dosáhl 28. prosince 2013 opět Shigeru Kondo po 94 dnech výpočtů „superpočítače“. [11]

Pokud se nyní pokusíme zhodnotit, co jsme zjistili, o posledních 25 letech můžeme ve zpřesňování hodnoty čísla π mluvit o revoluci, protože v relativně krátkém období bylo dosaženo zpřesnění z jedné miliardy desetinných míst na dvanáct biliónů. To je určitě výkon, o kterém se klasickým matematikům v historii nemohlo ani zdát. Nic z toho by ovšem nebylo možné bez moderní počítačové technologie a celkovému rozvoji matematiky i vědění obecně. Kdyby v dnešní době žil Archimédes nebo Ludolph van Ceulen, možná bychom se ještě divili, čeho by tito velikáni dosáhli, kdyby měli k dispozici technologie, které používají současní matematici. Faktem zůstává, že všem výše zmíněným matematikům se podařilo něco neuvěřitelného a díky nim známe v současné době hodnotu čísla π na tolik desetinných míst, kolik si ani nedokážeme představit.

6.4. VÝVOJ POČTU VYPOČTENÝCH DESETINNÝCH MÍST OD ROKU 1400

V předchozí kapitole jsme se zaměřili na rekordy v počtu získaných desetinných míst čísla π za posledních 25 let a podrobně jsme je rozebrali. V této kapitole se podíváme na vývoj počtu známých desetinných míst rozvoje čísla π od roku 1400. Nebudeme se už však podrobně zabývat jednotlivými matematiky a zkoumat každou metodu, pomocí které bylo zpřesnění hodnoty čísla π dosaženo. Pouze si formou tabulky shrneme, jak v průběhu let cifry desetinného rozvoje čísla π přibývaly a kdo se o objev zasloužil.

Tabulka 2 - VÝVOJ POČTU SPRÁVNĚ VYPOČTENÝCH DESETINNÝCH MÍST ČÍSLA π OD ROKU 1400

ROK VYPOČTENÍ	KDO SE O OBJEV ZASLOUŽIL	POČET DESETINNÝCH MÍST
1400	Madhava ze Sangamagramy	10
1424	Jamshīd al-Kāshī	16
1596	Ludolph van Ceulen	20
1615	Ludolph van Ceulen	32
1621	Willebrord Snell	35
1630	Christoph Grienberger	38
1699	Abraham Sharp	71
1706	John Machin	100
1719	Thomas Fantet de Lagny	112
1794	Jurij Vega	137
1841	William Rutherford	152
1844	Johann Martin Zacharias Dase	200
1847	Thomas Clausen	248
1853	Lehmann	261
1855	Richter	500
1874	William Shanks	527
1946	D. F. Ferguson	620
1947	D. F. Ferguson	710
1947	D. F. Ferguson	808
1949	D. F. Ferguson	1 120
1949	John Wrench, L. R. Smith	2 037
1954	S. C. Nicholson, J. Jeenel	3 092
1957	G. E. Felton	7 480
1958	Francois Genuys	10 000
1958	G. E. Felton	10 020
1959	Francois Genuys	16 167
1961	Daniel Shanks, John Wrench	100 265
1966	J. Guilloud, J. Filliatre	250 000
1967	J. Guilloud, M. Dichampt	500 000
1973	J. Guilloud, M. Bouyer	1 001 250
1981	Kazunori Miyoshi, Yasumasa Kanada	2 000 036

1981	Jean Guilloud	2 000 050
1982	Yoshiaki Tamura	2 097 144
1982	Yoshiaki Tamura, Yasumasa Kanada	4 194 288
1982	Yoshiaki Tamura, Yasumasa Kanada	8 338 576
1983	Y. Kanada, S. Yoshino, Y. Tamura	16 777 206
1985	Bill Gosper	17 526 200
1986	David. H. Bailey	29 360 111
1986	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura	33 554 414
1986	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura	67 108 839
1987	Y. Kanada, Y. Tamura, Y. Kubo a kolektiv	134 214 700
1988	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura	201 326 551
1989	Gregory Chudnovsky, David Chudnovsky	480 000 000
1989	Gregory Chudnovsky, David Chudnovsky	535 339 270
1989	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura	536 870 898
1989	Gregory Chudnovsky, David Chudnovsky	1 011 196 691
1989	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura	1 073 740 799
1991	Gregory Chudnovsky, David Chudnovsky	2 260 000 000
1994	Gregory Chudnovsky, David Chudnovsky	4 044 000 000
1995	Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	4 294 960 000
1995	Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	6 442 450 938
1997	Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	51 539 600 000
1999	Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	68 719 470 000
1999	Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	206 158 430 000
2002	Yasumasa Kanada a kolektiv	1 241 100 000 000
2009	Daisuke Takahashi a kolektiv	2 576 980 377 524
2009	Fabrice Bellard	2 699 999 990 000
2010	Shigeru Kondo	5 000 000 000 000
2011	Shigeru Kondo	10 000 000 000 050
2013	Shigeru Kondo	12 100 000 000 050

Na základě tabulky okamžitě zjišťujeme, že v historii nedocházelo k překonání rekordu ve výpočtu hodnoty čísla π tak často jako je tomu v posledních letech. Vidíme, že mezi jednotlivými rekordy je zpravidla několik let odstup. Úplným opakem je období kolem roku 1989, kdy probíhal rychlý rozvoj výpočetní techniky, a zde docházelo ke zpřesnění hodnoty čísla π a překonání rekordu i několikrát do roka a matematici se „přetahovali" o každé desetinné místo. V tomto roce také, jak již bylo zmíněno, došlo k „proražení" hranice jedné miliardy správně vypočtených desetinných míst a v tabulce je vidět, že tato hodnota byla opravdu mezníkem, po které dochází ke stále přesnějšímu určování hodnoty čísla π až do roku 2013, ze kterého máme poslední dosažený rekord, kdy je číslo π vypočteno na více jak dvanáct bilionů platných desetinných míst.

7. ZÁVĚR

V průběhu jednotlivých kapitol jsme se propracovali od prvních poznatků a nejhrubějších odhadů čísla π ve starověku až po současnost a jeho velmi přesné aproximace. Přesnost výpočtu vždy záležela na vyspělosti jednotlivých kultur a i na určité míře odvahy se pustit do určování tohoto „posvátného" čísla.

V historii by žádné aproximace nebyly možné bez znalosti geometrie, protože matematici v dávných dobách, ve starověku, neznali matematický aparát v podobě, jak ho používáme dnes. I přes to se však často dosahovalo pozoruhodně přesných výsledků – jako příklad můžeme uvést výsledky matematiků ze starověké Číny. Později, ve středověku a novověku, dochází k celkovému rozvoji matematických poznatků a při výpočtech se užívá diferenciálního a integrálního počtu. Díky tomuto rozvoji docházelo k postupnému zpřesňování hodnoty čísla π, ale vše bylo omezeno lidskými možnosti. Jak jsme zjistili, vše se změnilo po vynálezu kalkulačky a počítače. Matematici se rychle přizpůsobili rozvoji techniky a při hledání aproximace začali používat počítačovou techniku a někteří si i sestavovali své vlastní „superpočítače", pomocí kterých stále více a více zpřesňovali hodnotu čísla π až na dnešních více jak dvanáct biliónů desetinných míst.

Nelze však říct, že v současné době jsou matematici líní a mají práci snazší než matematici předchozích dob. Práce je jen jiná. Je pravda, že současní matematici mají vše usnadněné moderní technikou, díky které mohou provádět přesné výpočty, ale na druhou stranu, aby vůbec mohli nějaké výpočty realizovat, musí nalézt vzorce, které je možné do počítačů naprogramovat a vůbec obecně musí umět s touto technikou pracovat. Naopak si myslím, že v současné době mají matematici práci velmi těžkou, protože dříve existovala řada věcí, které bylo ještě možné objevit, dnes však o čísle π máme spoustu poznatků a pokud někdo chce objevit něco nového, většinou se uchýlí k pokusu správně vypočíst aspoň jednu další cifru desetinného rozvoje a překonat tak stávající rekord, což je při přesnosti, se kterou máme v současnosti číslo π již vypočtené, stejně těžké jako když ho Ludolph van Ceulen ručně počítal na 32 desetinných míst, možná i těžší.

Je otázkou, k čemu je vlastně taková honba za desetinnými místy čísla π dobrá. Pravdou je, že vypočtením nového rekordu se matematik nesmazatelně zapíše do historie čísla π i matematiky obecně, ale z praktického hlediska nám tak vzdálené číslice desetinného rozvoje u běžných výpočtů nic neovlivní. Stačí se podívat i na kalkulátory, které používají žáci a studenti na základních a středních školách – zde se pracuje s hodnotou čísla π zaokrouhlenou na 9 desetinných míst.

Číslo π je asi stále vnímáno jako číslo posvátné a tajemné, i když o tom nikdo nahlas neumluví. Proto asi všechny matematiky, fyziky, informatiky i další vědce tolik přitahuje, protože cokoliv tajemné je pro zvídavého člověka vždy zajímavé a proto se bude stále pracovat na zdokonalování „superpočítačů“ a bude docházet stále k dalšímu zpřesňování jeho hodnoty až do doby, dokud nás nezačne technika limitovat dobou výpočtu. Číslo π navíc, na rozdíl od jiných čísel se stejnými vlastnostmi, každý zná už od základní školy a o to víc je matematik, který stanoví nový rekord, slavnější, protože každý například z článku v novinách okamžitě pochopí, co se mu vlastně povedlo.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] ALLEN, G., 1999. π *a brief history* [online]. Texas A&M university [cit. 5. 5. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/alg_numtheory/pi.pdf>.

[2] ANDERSSON, E. A. 2013. *Frequency of Each Digit of Pi.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.eveandersson.com/pi/precalculated-frequencies>.

[3] BARTSCH, H. J. 1965. *Matematické vzorce.* 2. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[4] BECKMANN, P. 1998. *Historie čísla* π. 1. vyd. Praha: Academia.

[5] BORWEIN, J. M. 2003. *The life of Pi: History and Computation.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/pi-slides.pdf>.

[6] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B., BAILEY, D. H. 1989. *Ramanujan, Modular Equations, and Aproximations of Pi or How to Compute One billion Digits of Pi.* The American Mathematics Monthly, č. 96.

[7] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B., BERGRREN, L. 2004. *Pi: A source book.* 3. vyd. Springer.

[8] CECM. 2014. *David H. Bailey.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.cecm.sfu.ca/organics/authors/bailey/david.html>.

[9] CS.WIKIPEDIA. 2013. *Srinivasa Ramanujan.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan>.

[10] EN.WIKIPEDIA. 2013. *Peter Borwein.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Borwein>.

[11] EN.WIKIPEDIA. 2014. *Chronology of computation of* π. [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80>.

[12] HORA, J. 1998. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole - I. díl.* 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň.

[13] JARNÍK. V. 1974. *Diferenciální počet I.* 6. vyd. Praha: Academia.

[14] JOVANOVIC, R. 2005. *Machin's Formula.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://milan.milanovic.org/math/english/pi/machin.html>.

[15] LÁVIČKA, M. 2007. *Syntetická geometrie: pomocný učební text k předmětu KMA/SG.* Plzeň.

[16] MALET, A. 2014. *James Gregory.* [online]. Encyclopedia Britannica [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/245544/James-Gregory>.

[17] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. 2003. *John Machin.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Machin.html>.

[18] OSOBNOSTI. 2014. *Isaac Newton.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://zivotopis.osobnosti.cz/isaac-newton.php>.

[19] OSOBNOSTI. 2014. *Leonhard Euler.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.osobnosti.cz/leonhard-euler.php>.

[20] POLÁK, J. 1978. *Přehled středoškolské matematiky.* 2. vyd. Praha: SPN.

[21] REICHL, J., VŠETIČKA, M. 2013. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 5. 5. 2013]. Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/>.

[22] REKTORYS K. a kol. 1963. *Přehled užité matematiky.* 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[23] THE WORLD OF π. 2013. *For a fistfull of digits… History of records and methods.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.pi314.net/eng/accueildecimales.php>.

[24] THE WORLD OF π. 2013. *The mathematicians and Pi.* [online]. [cit. 23. 1. 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.pi314.net/eng/accueilmathematiciens.php>.

[25] VESELÝ, J. 1995. π *aneb 3,141592653…* . Učitel matematiky, roč. 3., č. 4.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

RESUMÉ

The main topic of this bachelor thesis is the estimation of the number π. The study examines the approximation of π throughout the history and modern period. One of the chapters is especially dedicated to the mathematician Srinivasa Ramanujan and his numerical series. Other chapters focus on the calculation methods of π and their discoveries. All methods are demonstrated on examples and for computation mathematical software was used. The final part is devoted to the current knowledge of the number π - records and interest in calculation.