ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

SOUSTAVY POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hana Reháková

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 7. dubna 2014

………………………………

Hana Reháková

Děkuji vedoucí bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, připomínky, a také za ochotu a čas, který mi věnovala.

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratek

I	obor integrity
I$[x, y]$, resp. I$[x_1, x_2]$	obor integrity polynomů dvou neurčitých
T	komutativní těleso
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel včetně nuly
$Syl(f, g)$	Sylvesterova matice polynomů f, g
$res_x(f, g)$	rezultant polynomů f, g vzhledem k neurčité x
$<_T$	úplné přípustné uspořádání termů
$<_L$	lexikografické uspořádání termů
$LM(f)$	vedoucí monom polynomu f
$LC(f)$	vedoucí koeficient polynomu f
$LT(f)$	vedoucí term polynomu f
$rem(f, M)$	zbytek po dělení polynomu f množinou M
$LCM(LM(f), LM(g))$	nejmenší společný násobek vedoucích monomů polynomů f, g
$Spoly(f, g)$	S-polynom polynomů f, g
I	ideál
$I_O(f, g)$	násobnost řešení $[0;\ 0]$ soustavy rovnic $f = 0$, $g = 0$
$I_P(f, g)$	násobnost řešení $P = [x_1, x_2]$ soustavy rovnic $f = 0$, $g = 0$

Úvod

Řešení soustav rovnic je jedním ze základních problémů, se kterými se v matematice setkáváme. Při řešení soustavy rovnic je naším úkolem najít takové řešení, které vyhovuje všem rovnicím v soustavě. Jaký postup řešení zvolíme, závisí většinou na typu rovnic v soustavě. Podle těchto typů rozlišujeme soustavy algebraických (polynomiálních) a nealgebraických rovnic. Tato práce bude zaměřena pouze na jeden typ soustav, a to na soustavy rovnic polynomiálních.

Najít řešení soustavy polynomiálních rovnic nemusí být vždy úplně jednoduché, především pokud rovnice obsahují hned několik neznámých nebo jsou vyššího stupně. Protože budeme ve druhé části práce ztotožňovat polynomiální rovnice s rovnicemi rovinných algebraických křivek, zaměříme se pouze na soustavy rovnic se dvěma neznámými.

Cílem první části práce je podat přehled o možných způsobech řešení polynomiálních rovnic se dvěma neznámými. Je tedy důležité připomenout si základní pojmy, o které se bude práce opírat. Proto v první kapitole definujeme mimo jiné polynom, polynomiální rovnici nebo soustavu polynomiálních rovnic.

Ve druhé a třetí kapitole uvedeme způsoby řešení soustav polynomiálních rovnic se dvěma neznámými. Nejprve se zaměříme na soustavy rovnic, které půjdou řešit jednoduše pomocí základních postupů vyučovaných na základní či střední škole. Následně si představíme takové postupy řešení, pomocí nichž již vyřešíme libovolnou soustavu polynomiálních rovnic se dvěma neznámými. Mezi tyto postupy patří metoda rezultantů a metoda Gröbnerových bází. Obě metody nám pomohou v průběhu výpočtu určitým způsobem eliminovat jednu neznámou, což nám velice usnadní řešení soustavy.

Ve druhé části práce se zaměříme na určování násobnosti jednotlivých řešení soustav polynomiálních rovnic, a to na základě násobnosti průsečíků algebraických křivek, jejichž rovnice odpovídají rovnicím v soustavě. Ve čtvrté kapitole se nejprve omezíme na násobnost řešení $[0;\ 0]$, tedy na násobnost průsečíku křivek v počátku soustavy souřadnic. K tomu, abychom mohli určit násobnost libovolného řešení soustavy polynomiálních rovnic, potřebujeme zavést homogenní polynomy a vhodnou transformaci souřadnic. To učiníme v závěru práce a uvedeme několik řešených příkladů.

1. Polynomy, polynomiální rovnice, soustavy rovnic

Definujme v úvodní kapitole některé základní pojmy, které se týkají polynomů, rovnic a soustav rovnic a které budeme v následujících kapitolách používat.

Definice 1.1.: Buď I obor integrity. Označme $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}[x]$ množinu všech výrazů ve tvaru $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathrm{I}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Množina $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}[x]$ se nazývá obor integrity polynomů jedné neurčité nad I. Prvky množiny $\mathrm{I}[x]$ se nazývají polynomy jedné neurčité nad I, prvky a_i se nazývají koeficienty polynomu $f(x)$.

Je-li $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, kde $a_n \neq 0$, pak říkáme, že polynom $f(x)$ je stupně n. [3]

Poznámka: V příkladech budeme za obor integrity I většinou volit těleso reálných čísel.

Příklad 1.2.: Příkladem polynomu jedné neurčité nad $\mathbb{R}$ je výraz

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 3.$$

Říkáme, že $f(x)$ je polynomem třetího stupně.

Takto jsme zavedli polynom jedné neurčité, ale pokusme se zavést také polynomy n neurčitých. Obor integrity I_n se skládá ze všech možných součtů konečného počtu sčítanců tvaru

$$a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathrm{I}$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla.

Každý prvek z I_n můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $m_1, m_2, \dots, m_n$ jsou celá nezáporná čísla.

Definice 1.3.: Obor integrity I_n se nazývá obor integrity polynomů n neurčitých nad I a značí se $\mathrm{I}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Jeho prvky se nazývají polynomy n neurčitých nad I a značí se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atd.

Členem polynomu n neurčitých nazýváme výraz $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, stupeň členu polynomu je $s = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, stupeň polynomu n neurčitých je maximum ze stupňů jeho členů. [11]

Poznámka: Pro potřeby této práce se omezíme pouze na případy polynomů dvou neurčitých. Budeme je značit $f(x_1, x_2)$, resp. $f(x, y)$. Obor integrity polynomů dvou neurčitých budeme značit $\mathrm{I}[x_1, x_2]$, resp. $\mathrm{I}[x, y]$.

Příklad 1.4.: Polynomem dvou neurčitých z oboru integrity $\mathrm{I}[x, y]$ je například polynom $f(x, y) = 2x^2y + xy - 2y^2 + 6x + 1$, kde členy polynomu jsou výrazy $2x^2y$, xy, $-2y^2$, $6x$, 1. Stupně jednotlivých členů jsou $3, 2, 2, 1, 0$ a je tedy zřejmé, že stupeň polynomu f je 3, tj. jedná se o polynom třetího stupně.

Z oboru integrity I můžeme tedy vytvořit obor integrity polynomů jedné neurčité $\mathrm{I}[x_1]$. Označme ho $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}[x_1]$. Z takto vytvořeného oboru integrity můžeme vytvořit opět obor integrity polynomů jedné neurčité $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1[x_2] = \mathrm{I}[x_1][x_2]$. Stejným způsobem utvoříme $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1}[x_n]$. [11]

Příklad 1.5.: Určete stupeň polynomu $f(x, y)$: $x^4 - 2x^3y^2 + 5x^2y - 5x + 3y^3 + 17$, jestliže

a) $f(x, y) \in \mathrm{I}[x, y]$,

b) $f(x, y) \in \mathrm{I}[x][y]$,

c) $f(x, y) \in \mathrm{I}[y][x]$.

Řešení:

a) Stupeň polynomu $f(x, y)$ určíme podle definice jako maximum ze stupňů jeho členů. Stupeň polynomu $f(x, y)$ je 5.

b) Polynom $f(x, y)$ přepíšeme vzhledem k neurčité y, tj. jako polynom jedné neurčité y, jehož koeficienty jsou polynomy jedné neurčité x:

$$3y^3 - (2x^3)y^2 + (5x^2)y + (x^4 - 5x + 17).$$

Stupeň polynomu $f(x, y)$ je 3.

c) Polynom $f(x,y)$ přepíšeme vzhledem k neurčité x, tj. jako polynom jedné neurčité x, jehož koeficienty jsou polynomy jedné neurčité y:

$$x^4 - (2y^2)x^3 + (5y)x^2 - 5x + (3y^3 + 17).$$

Stupeň polynomu $f(x,y)$ je 4.

Definice 1.6.: Nechť je nad oborem integrity I dán polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0, a_n \neq 0.$$

Výraz $f(\xi) = 0$, kde ξ je neznámá, nazýváme polynomiální rovnicí[1] n-tého stupně nad oborem integrity I. Prvek $\alpha \in \mathrm{I}^+$, kde I^+ je nadoborem oboru integrity I, nazýváme kořenem (řešením) této polynomiální rovnice právě tehdy, když platí $f(\alpha) = 0$. Prvek α též nazýváme nulovým bodem polynomu $f(x)$.

Řešit polynomiální rovnici znamená nalézt všechny její kořeny. [6]

Soustavy rovnic, jimiž se bude práce zabývat, jsou tvořeny dvěma nebo více rovnicemi o dvou neznámých, které mají být splněny zároveň. Řešením soustavy rovnic je společné řešení všech rovnic soustavy, tedy průnik množin řešení jednotlivých rovnic soustavy. Rozlišujeme soustavy algebraických rovnic a soustavy nealgebraických rovnic. Tato práce se ale bude zabývat pouze soustavami algebraických, tedy polynomiálních, rovnic.

Definice 1.7.: Soustava m polynomiálních rovnic o dvou neznámých nad oborem integrity I je každá soustava, kterou lze upravit na tvar

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned}$$

kde výrazy na levých stranách jsou nenulové polynomy dvou neurčitých nad I. [7]

Při řešení soustav rovnic se téměř vždy používají tzv. ekvivalentní úpravy jednotlivých rovnic. Tyto úpravy slouží většinou ke zjednodušení původních rovnic. Ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení původní rovnice a nově vzniklou rovnici nazýváme rovnicí ekvivalentní s rovnicí původní. Základními ekvivalentními úpravami rovnic jsou:

---

[1] Polynomiální rovnice se též označuje výrazem algebraická rovnice.

1) Záměna levé a pravé strany rovnice.

2) Přičtení (odečtení) stejného čísla nebo výrazu obsahujícího neznámé (pokud jsou definovány v celém oboru řešení) k oběma stranám rovnice.

3) Vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo nenulovým výrazem obsahujícím neznámé (pokud jsou definovány v celém oboru řešení).

4) Umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jestliže obě strany rovnice nabývají nezáporných (nebo záporných) hodnot v celém oboru řešení. [8]

Příklad 1.8.: Ekvivalentními rovnicemi k rovnici $x^3 + 2xy + y^2 = -3$ jsou například rovnice:

$$-3 = x^3 + 2xy + y^2,$$

$$x^3 + 2xy = -3 - y^2,$$

$$2x^3 + 4xy + 2y^2 = -6.$$

Existují také ekvivalentní úpravy soustav rovnic, jejichž aplikací získáme ekvivalentní soustavu rovnic k soustavě původní. Tedy množina řešení soustavy se nezmění. Takovými úpravami jsou:

1) Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s původní rovnicí ekvivalentní.

2) Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice s libovolným násobkem jiné rovnice soustavy.

3) Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámými z jedné rovnice soustavy do libovolné jiné rovnice soustavy. [8]

Příklad 1.9.: Soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 4y &= 20, \\ 2x - y &= 4, \\ 3x + y &= 16 \end{aligned}$$

je ekvivalentní s následujícími soustavami:

$$
\begin{array}{lll}
x + 4y = 20, & x + 4y = 20, & x + 4(2x - 4) = 20, \\
8x - 4y = 16, & 9x = 36, & 2x - y = 4, \\
3x + y = 16, & 3x + y = 16, & 3x + (2x - 4) = 16.
\end{array}
$$

Řešení soustav rovnic se provádí pomocí různých metod. Volba metody většinou závisí na typu rovnic v soustavě, ale existují také některé obecně platné postupy. Tato práce by měla podat přehled o možných postupech řešení některých konkrétních typů soustav, ale i libovolných soustav polynomiálních rovnic se dvěma neznámými.

2. Speciální typy soustav rovnic

Rovnice v soustavě mohou mít někdy určitý tvar, který zaručí „jednoduché“ vyřešení soustavy pomocí základních postupů. Prvním takovým speciálním typem soustav rovnic jsou soustavy lineárních rovnic.

2.1. Soustavy lineárních rovnic

Definice 2.1.1.: Soustavou n lineárních rovnic se dvěma neznámými nad tělesem T budeme rozumět soustavu rovnic ve tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 = b_n,$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n2}$ a pravé strany $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou prvky tělesa T. [2]

Nazvěme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}$ maticí soustavy, $b^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sloupcem pravých stran soustavy, $(A|b^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n \end{pmatrix}$ rozšířenou maticí soustavy a $x = (x_1;\ x_2)$ řešením soustavy rovnic. Soustavu můžeme nyní zapisovat ve tvaru $Ax = b$. Odpovídající homogenní soustavou rovnic k soustavě $Ax = b$ rozumíme soustavu $Ax = o$, kde $o = (0; 0)$.

Příklad 2.1.2.: Příkladem soustavy tří lineárních rovnic se dvěma neznámými nad $\mathbb{R}$ je soustava S:

$$2x + y = 7,$$

$$x + 3y = 6,$$

$$x - y = 2.$$

Maticí této soustavy je matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, rozšířenou maticí soustavy je matice $(A|b^T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Díky Frobeniově větě lze určit, zda soustava lineárních rovnic má řešení či nikoliv.

Věta 2.1.3.: Nechť A je matice nad tělesem T a b je n-tice prvků tělesa T. Potom soustava lineárních rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když $hod(A|b^T) = hod(A)$, kde $hod(A)$ je hodnost matice soustavy a $hod(A|b^T)$ je hodnost rozšířené matice soustavy rovnic.

Důkaz věty je uveden v [2].

Příklad 2.1.4.: Hodnost matice soustavy S z příkladu 2.1.2. je $hod(A) = 2$. Hodnost rozšířené matice soustavy je $hod(A|b^T) = 2$. Soustava lineárních rovnic S tedy má řešení.

Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými se řeší pomocí několika základních metod:

a) Metoda sčítací – rovnice soustavy vynásobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení rovnic jedna neznámá eliminovala.

b) Metoda dosazovací – z jedné rovnice soustavy vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do ostatních rovnic, čímž se tato neznámá z ostatních rovnic eliminuje.

c) Gaussova eliminační metoda – rozšířenou matici soustavy rovnic upravíme na odstupňovaný tvar a tím získáme novou, jednodušší soustavu rovnic ekvivalentní se soustavou původní.

Příklad 2.1.5.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu lineárních rovnic S:

$$2x + y = 7,$$

$$x + 3y = 6,$$

$$x - y = 2.$$

Řešení:

a) Pomocí sčítací a dosazovací metody.

Nejdříve sečteme první rovnici s třetí rovnicí, čímž získáme rovnici $3x = 9$. Z této rovnice snadno vyjádříme neznámou $x = 3$. Po dosazení hodnoty 3 za x do druhé rovnice soustavy získáme rovnici $3 + 3y = 6$, ze které dostaneme $y = 1$. Snadno ověříme, že uspořádaná dvojice $[3;\ 1]$ vyhovuje všem rovnicím soustavy S a je tedy jejím řešením.

b) Pomocí Gaussovy eliminace.

Rozšířenou matici soustavy $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ upravíme pomocí řádkových úprav na odstupňovaný tvar $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Z tohoto tvaru matice získáváme novou soustavu rovnic:

$$x - y = 2,$$

$$y = 1.$$

Nyní již dosazením hodnoty $y = 1$ do první rovnice soustavy snadno určíme, že $x = 3$. Získali jsme uspořádanou dvojici $[3; 1]$, která je řešením soustavy rovnic S.

2.2. Soustavy lineárních rovnic a jedné rovnice nelineární

Dalším speciálním typem soustav rovnic jsou soustavy, kdy právě jedna rovnice je vyššího stupně a ostatní rovnice jsou lineární. Příkladem takové soustavy může být například soustava M:

$$x + 2y = 6,$$

$$x^2 - 4y = -4.$$

Pro řešení takovéto soustavy použijeme opět dosazovací metodu. Z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou a po dosazení do druhé rovnice řešíme jednu rovnici s jednou neznámou.

Příklad 2.2.1.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic M.

Řešení: Z první rovnice soustavy vyjádříme neznámou x a získáme

$$x = 6 - 2y.$$

Do druhé rovnice dosadíme za x výraz $6 - 2y$ a získáme tak rovnici

$$(6-2y)^2-4y+4=4y^2-28y+40=y^2-7y+10=0.$$

Je zřejmé, že kořeny rovnice jsou $y_1=2$ a $y_2=5$. Získané kořeny dosadíme do lineární rovnice a dostáváme řešení soustavy rovnic M: $P=\{[2;2],[-4;5]\}$.

2.3. Soustavy rovnic, kdy alespoň jedna rovnice je lineární vzhledem k jedné neznámé

Následující soustava rovnic N již neobsahuje žádnou rovnici lineární:

$$x^3y+x^2y-1=0,$$

$$x^2y-xy-6=0.$$

Všimněme si ale, že polynomy $f(x,y)=x^3y+x^2y-1$, $g(x,y)=x^2y-xy-6$ jsou lineární, pokud $f(x,y)$, $g(x,y)\in \mathrm{I}[x][y]$. Z jedné rovnice tedy můžeme opět vyjádřit neznámou y a dosadit vzniklý výraz do druhé rovnice.

Příklad 2.3.1.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic N.

Řešení: Podle výše uvedeného postupu vyjádříme neznámou y z druhé rovnice soustavy. Upravíme soustavu na tvar

$$x^3y+x^2y-1=0,$$

$$y\,(x^2-x)=6$$

a získáme

$$y=\frac{6}{(x^2-x)}.$$

Nyní už snadno dosadíme do první rovnice:

$$x^3.\frac{6}{(x^2-x)}+x^2.\frac{6}{(x^2-x)}-1=0.$$

Po úpravě získáme kubickou rovnici

$$6x^3+5x^2+x=0.$$

Tuto rovnici vyřešíme a nalezené hodnoty $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 0$ dosadíme do druhé rovnice soustavy a získáme řešení soustavy rovnic N: $P = \left\{\left[-\frac{1}{2};\ 8\right], \left[-\frac{1}{3};\ \frac{27}{2}\right]\right\}$. Pro $x_3 = 0$ nemá výraz $\frac{6}{(x^2-x)}$ smysl, pro $x_3 = 0$ nemá druhá rovnice soustavy $y.0 = 6$ řešení.

2.4. Soustavy s homogenními polynomy

Uveďme si ještě jeden příklad speciální soustavy rovnic, kdy jsou výrazy na levé straně všech rovnic soustavy homogenní, tj. všechny členy jednotlivých polynomů mají stejný stupeň. Tuto podmínku splňuje například soustava O:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 28,$$
$$x^2 + 2xy - y^2 = -2.$$

Příklad 2.4.1.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic O.

Řešení: Nejdříve použijeme vhodnou substituci. Předpokládejme, že neznámá y je nějakým násobkem neznámé x, tedy $y = s.x$. Po dosazení získáme následující soustavu:

$$x^2 + 3x^2s + 2x^2s^2 = 28,$$
$$x^2 + 2x^2s - x^2s^2 = -2.$$

Vidíme, že z výrazů na levých stranách můžeme vytknout x^2:

$$x^2(1 + 3s + 2s^2) = 28,$$
$$x^2(1 + 2s - s^2) = -2.$$

V následujícím kroku vyjádříme z obou rovnic výraz $\frac{1}{x^2}$ a získáme

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1 + 3s + 2s^2}{28},$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1 + 2s - s^2}{-2}.$$

Pro $x \neq 0$ tedy platí rovnost

$$\frac{1 + 3s + 2s^2}{28} = \frac{1 + 2s - s^2}{-2}.$$

Po úpravách získáváme kvadratickou rovnici

$$12s^2 - 31s - 15 = 0,$$

ze které již snadno zjistíme $s_1 = 3,\ s_2 = -\frac{5}{12}$. Do rovnosti $y = sx$ dosadíme nejprve nalezenou hodnotu s_1 a získáme $y = 3x$. Dosazením výrazu $3x$ za neznámou y do rovnic původní soustavy získáme $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ a zpětným dosazením nalezených hodnot x_1, x_2 do vztahu $y = 3x$ také $y_1 = 3,\ y_2 = -3$. Následně do rovnosti $y = sx$ dosadíme i hodnotu s_2 a stejným postupem získáme $x_3 = 12\sqrt{2}$, $x_4 = -12\sqrt{2}$ a $y_3 = -5\sqrt{2}$, $y_4 = 5\sqrt{2}$. Získali jsme tedy řešení soustavy rovnic O:

$$P = \left\{[1; 3], [-1;\ -3], \left[12\sqrt{2};\ -5\sqrt{2}\right], \left[-12\sqrt{2};\ 5\sqrt{2}\right]\right\}.$$

3. Rezultanty a Gröbnerovy báze

V mnoha případech nebudou mít soustavy rovnic některý ze speciálních tvarů uvedených v předchozí kapitole. Libovolné soustavy polynomiálních rovnic se dvěma neznámými budeme řešit s využitím tzv. rezultantu nebo Gröbnerovy báze. Obě metody nám pomohou eliminovat jednu neznámou. Pomocí kořenů takto získané rovnice s jednou neznámou již snadno vyřešíme danou soustavu polynomiálních rovnic.

3.1. Rezultanty

Definice 3.1.1.: Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots + b_1 x + b_0$ jsou dva polynomy z $\mathrm{T}[x]$, kde T je komutativní těleso. Sylvesterovou maticí polynomů $f(x)$ a $g(x)$ nazýváme matici

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . & . \\ . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . & . \\ . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 \end{pmatrix}.$$

Jde o čtvercovou matici typu $m+n \times m+n$ mající v prvních m řádcích koeficienty $a_i, i = n, n-1, \dots, 0,$ polynomu f, vždy však „posunuté o jedno místo vpravo“, a obdobně v dalších n řádcích matice se vyskytují koeficienty $b_j, j = m, m-1, \dots, 0,$ polynomu g. (V neobsazených místech matice se píší nuly.)

Příklad 3.1.2.: Sylvesterovu matici polynomů $f(x) = 3x^3 + 14x^2 + 9x - 11$ a $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ zapíšeme ve tvaru:

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 9 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 9 & -11 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definice 3.1.3.: Rezultantem $res_x(f(x), g(x))$ polynomů f a g se nazývá determinant Sylvesterovy matice.

Věta 3.1.4. (Sylvesterovo kritérium): Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou polynomy kladných stupňů. Polynomy $f(x)$, $g(x) \in \mathrm{T}[x]$ jsou dělitelné společným dělitelem v $\mathrm{T}[x]$ právě tehdy, když $res_x(f(x), g(x)) = 0$. [10]

Příklad 3.1.5.: Určete rezultant polynomů $f(x) = 3x^3 + 14x^2 + 9x - 11$ a $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Řešení: V příkladě 3.1.2. jsme zapsali Sylvesterovu matici polynomů f a g. Nyní stačí určit její determinant.

$$res_x\big(f(x), g(x)\big) = \begin{vmatrix} 3 & 14 & 9 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 9 & -11 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -3407.$$

Vidíme, že rezultant je nenulový a polynomy $f(x)$, $g(x)$ nemají podle věty 3.1.4. v $\mathrm{T}[x]$ společného dělitele.

Uvedená tvrzení a definice platí pro polynomy jedné neurčité. Abychom mohli řešení pomocí rezultantu aplikovat na soustavy rovnic se dvěma neznámými, potřebujeme jednu neurčitou eliminovat. Budeme tedy pracovat s polynomy $f(x, y)$, $g(x, y) \in \mathrm{T}[x][y]$, resp. $\mathrm{T}[y][x]$. Rezultant polynomů vzhledem k neurčité y budeme značit res_y a vzhledem k neurčité x res_x.

Ukažme si, jak lze pomocí rezultantu najít řešení soustavy polynomiálních rovnic.

Příklad 3.1.6.: Řešte nad $\mathbb{R}$ stejnou soustavu dvou rovnic, jako jsme řešili v příkladě 2.4.1., nyní však pomocí rezultantu vzhledem k neurčité x.

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 28,$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = -2.$$

Řešení: Nejprve sestavíme Sylvesterovu matici, která bude typu 4×4:

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} 1 & 3y & 2y^2 - 28 & 0 \\ 0 & 1 & 3y & 2y^2 - 28 \\ 1 & 2y & -y^2 + 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2y & -y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Následně vypočítáme rezultant polynomů $f(x,y)$ a $g(x,y)$:

$$res_x\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\begin{vmatrix}1 & 3y & 2y^2-28 & 0\\ 0 & 1 & 3y & 2y^2-28\\ 1 & 2y & -y^2+2 & 0\\ 0 & 1 & 2y & -y^2+2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 3y & 2y^2-28 & 0\\ 0 & 1 & 3y & 2y^2-28\\ 0 & -y & -3y^2+30 & 0\\ 0 & 1 & 2y & -y^2+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3y & 2y^2-28\\ -y & -3y^2+30 & 0\\ 1 & 2y & -y^2+2\end{vmatrix}=$$

$$=2(y^4-59y^2+450)=2(y^2-50)(y^2-9).$$

Na základě Sylvesterova kritéria (věta 3.1.4.) mají polynomy $f(x,y)$ a $g(x,y)$ společného dělitele, jestliže $2(y^2-50)(y^2-9)=0$.

Řešením této rovnice jsou hodnoty $y_1=3$, $y_2=-3$, $y_3=5\sqrt{2}$, $y_4=-5\sqrt{2}$. Získané hodnoty postupně dosadíme do původní soustavy rovnic a řešíme nové soustavy dvou rovnic s jednou neznámou. Pro $y_1=3$ má soustava tvar

$$x^2+9x-10=0,$$

$$x^2+6x-7=0$$

a jejím řešením je $x_1=1$. Stejně vyřešíme soustavy pro další nalezené hodnoty y a získáme řešení původní soustavy rovnic

$$P=\{[1,3],[-1,-3],\left[-12\sqrt{2},5\sqrt{2}\right],\left[12\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right]\}.$$

Určení rezultantu lze provést také ve většině počítačových programů. Ukažme si, jak lze nalézt rezultant polynomů $f(x,y)=x^2+3xy+2y^2-28$, $g(x,y)=x^2+2xy-y^2+2$ vzhledem k neurčité x v programu Wolfram Mathematica 7.0:

$$In[1]:=\ Resultant[x\hat{}2+3\ x\ y+2\ y\hat{}2-28, x\hat{}2+2\ x\ y-y\hat{}2+2, x]$$

$$Out[1]=\ 900-118\ y\hat{}2+2\ y\hat{}4.$$

Pomocí příkazu $Factor$, který rozloží výsledný rezultant na součin polynomů,

$$In[2]:=\ Factor[900-118\ y\hat{}2+2\ y\hat{}4]$$

$$Out[2] = 2\,(-3+y)(3+y)(-50+y^2),$$

a s využitím Sylvesterova kritéria již snadno získáme potřebné hodnoty neznámé y.

3.2. Gröbnerovy báze

Dalším důležitým nástrojem, pomocí kterého můžeme řešit libovolné soustavy polynomiálních rovnic se dvěma neznámými, jsou Gröbnerovy báze. Pomocí této báze budeme moci soustavu rovnic přepsat na jednodušší tvar, který půjde snáze vyřešit. Nejprve si ale zavedeme důležité pojmy, které budeme později využívat pro definici Gröbnerovy báze. Definice a věty v této kapitole jsou převzaty z [5], [1], [9].

3.2.1. Uspořádání termů

Definice 3.2.1.1.: Nechť $\mathrm{I}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je obor integrity polynomů nad I. Termem rozumíme libovolný prvek množiny $T = \{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n};\ i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0\}$.

Definice 3.2.1.2.: Úplným přípustným uspořádáním termů, značíme $<_T$, na množině termů T je takové uspořádání, pro které platí:

(i) $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 = 1 <_T t$;

(ii) jestliže $s <_T t$, potom také $u.s <_T u.t$,

kde $s, t, u \in T$.

Definice 3.2.1.3.: Lexikografické uspořádání termů, značíme $<_L$, je definováno následujícím způsobem:

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_L x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$$

právě tehdy, když $\exists m \in \mathbb{N}$ takové, že $i_m < j_m$ a zároveň $i_k = j_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

Příklad 3.2.1.4.: Množinu termů $\{x^2y^2, x^2y, y^2, x\}$ lexikograficky uspořádáme (pokud $x > y$) následujícím způsobem: $y^2 <_L x <_L x^2y <_L x^2y^2$.

Definice 3.2.1.5.: Nechť $f \in \mathrm{I}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je polynom a $<_T$ je přípustné uspořádání termů z množiny T. Vedoucím termem polynomu f nazveme největší term polynomu f a značíme jej $LT_T(f)$. Příslušný monom nazýváme vedoucím monomem polynomu f, značíme $LM_T(f)$, a koeficient tohoto monomu nazýváme vedoucím koeficientem polynomu f, značíme $LC_T(f)$. Platí rovnost $LM_T(f) = LC_T(f).LT_T(f)$.

Poznámka: Protože dále budeme uvažovat pouze lexikografické uspořádání, budeme psát pouze $LM(f)$, $LC(f)$, $LT(f)$. Dále předpokládejme, že $x > y$ (pokud není uvedeno jinak).

Příklad 3.2.1.6.: Mějme polynom $f(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^2y - 2x + y^2$. Jednotlivé termy polynomu jsme lexikograficky uspořádali v příkladě 3.2.1.4. Největším a tedy vedoucím termem polynomu f je term x^2y^2, vedoucím monomem polynomu je člen $3x^2y^2$ a vedoucím koeficientem polynomu f je koeficient 3.

3.2.2. Dělení polynomů dvou neurčitých

Ukažme si nyní na příkladech, jak lze dělit polynomy dvou neurčitých za předpokladu, že jsme členy polynomů uspořádali pomocí lexikografického uspořádání.

Příklad 3.2.2.1.: Dělte polynom $f = 3x^2y^2 + 2x^2y - 2x + y^2$ polynomem $g = x^2y + x^2 + 3y$.

Řešení: Polynom f můžeme dělit polynomem g tak dlouho, dokud bude vedoucí člen (monom) polynomu g dělit vedoucí člen zbytku r:

$$(3x^2y^2 + 2x^2y - 2x + y^2):(x^2y + x^2 + 3y) = 3y - 1$$
$$\underline{-3x^2y^2 - 3x^2y - 9y^2}$$
$$-x^2y - 2x - 8y^2$$
$$\underline{x^2y + x^2 + 3y}$$
$$x^2 - 2x - 8y^2 + 3y$$

Můžeme tedy psát, že

$$(3x^2y^2 + 2x^2y - 2x + y^2) = (x^2y + x^2 + 3y).(3y - 1) + x^2 - 2x - 8y^2 + 3y.$$

Definice 3.2.2.2.: Nechť f a g jsou polynomy. Řekneme, že polynom f je v normálním tvaru vzhledem k polynomu g, pokud žádný monom (člen) polynomu f není dělitelný vedoucím monomem polynomu g.

Poznámka: Polynom f může být také v normálním tvaru vzhledem k množině polynomů $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ a to tehdy, jestliže žádný monom polynomu f není dělitelný žádným z vedoucích monomů polynomů z množiny Q.

Zbytkem po dělení polynomu f polynomem g, resp. množinou polynomů Q, budeme rozumět pouze takový polynom r, který bude v normálním tvaru vzhledem k polynomu g, resp. k množině polynomů Q.

Příklad 3.2.2.3.: Dělte polynom $h = 2x^3y - 3x^3 + x^2y^2 + xy$ polynomem $i = 2x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Řešení: Postupujme stejně jako v předchozím příkladě:

$$(2x^3y - 3x^3 + x^2y^2 + xy) : (2x^2y + 3xy^2 + y^3) = x$$
$$\underline{-2x^3y - 3x^2y^2 - xy^3}$$
$$-3x^3 - 2x^2y^2 - xy^3 + xy$$

Nyní vidíme, že vedoucí člen zbytku r není dělitelný vedoucím členem polynomu i. Pokračujme ale v dělení do té doby, než vedoucí člen polynomu i nebude dělit žádný člen zbytku r:

$$(-3x^3 - 2x^2y^2 - xy^3 + xy) : (2x^2y + 3xy^2 + y^3) = -y$$
$$\underline{2x^2y^2 + 3xy^3 + y^4}$$
$$-3x^3 + 2xy^3 + xy + y^4$$

Platí tedy, že

$$(2x^2y + 3xy^2 + y^3).(x - y) - 3x^3 + 2xy^3 + xy + y^4 = (2x^3y - 3x^3 + x^2y^2 + xy).$$

Polynom dvou neurčitých můžeme dělit také množinou polynomů, což nám dokládá následující věta.

Věta 3.2.2.4: Nechť $<_T$ je přípustné uspořádání na množině termů T. Nechť dále $M = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ je množina polynomů z $\mathrm{I}[x_1, x_2]$ a polynom $f \in \mathrm{I}[x_1, x_2]$. Potom existují polynomy $a_1, a_2, \dots, a_m, r \in \mathrm{I}[x_1, x_2]$ takové, že

$$f = a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_mf_m + r,$$

kde r je nulový polynom nebo polynom, který je v normálním tvaru vzhledem k množině M. Polynom r, označme $r = rem(f, M)$, se nazývá zbytek po dělení polynomu f množinou polynomů M.

Důkaz věty je uveden v [5].

Příklad 3.2.2.5.: Dělte polynom $f = x^4 - 2x^3y - 2xy^2 + xy - y$ polynomy $g_1 = x^3 - 1$ a $g_2 = xy + 2x$.

Řešení: Dělme polynom f polynomem g_1 do té doby, než žádný z členů zbytku nebude dělitelný vedoucím členem polynomu g_1. Následně pokračujme v dělení polynomem g_2 do té doby, než získáme zbytek po dělení polynomu f polynomy g_1 a g_2.

$$(x^4 - 2x^3y - 2xy^2 + xy - y) : \begin{cases} x^3 - 1 \\ xy + 2x \end{cases} = \begin{cases} x - 2y \\ -2y + 5 \end{cases}$$

$\underline{-x^4 + x}$

$-2x^3y - 2xy^2 + xy + x - y$

$\underline{2x^3y - 2y}$

$-2xy^2 + xy + x - 3y$

$\underline{2xy^2 + 4xy}$

$5xy + x - 3y$

$\underline{-5xy - 10x}$

$-9x - 3y$

Podle věty 3.2.2.4. můžeme psát $f = (x - 2y)g_1 + (-2y + 5)g_2 - 9x - 3y$, kde $r = -9x - 3y$ je zbytek po dělení polynomu f polynomy g_1 a g_2.

Druhou možností je vydělit polynom f stejnými polynomy g_1 a g_2, ale v opačném pořadí.

$$(x^4 - 2x^3y - 2xy^2 + xy - y) : \begin{cases} xy + 2x \\ x^3 - 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x^2 - 2y + 5 \\ x + 4 \end{cases}$$

$\underline{2x^3y + 4x^3}$

$x^4 + 4x^3 - 2xy^2 + xy - y$

$\underline{2xy^2 + 4xy}$

$x^4 + 4x^3 + 5xy - y$

$\underline{-5xy - 10x}$

$x^4 + 4x^3 - 10x - y$

$\underline{-x^4 + x}$

$4x^3 - 9x - y$

$\underline{-4x^3 + 4}$

$-9x - y + 4$

Polynom f tedy můžeme zapsat také ve tvaru

$$f = (x+4)g_1 + (-2x^2 - 2y + 5)g_2 - 9x - y + 4,$$

kde $r = -9x - y + 4$ je zbytek po dělení polynomu f polynomy g_1 a g_2.

Z předchozího příkladu vidíme, že zbytek po dělení polynomu f množinou polynomů M není určen jednoznačně. Zbytek bude určen jednoznačně jen v případě, že množina M bude tzv. Gröbnerova báze. K jejímu výpočtu je nutno zavést ještě tzv. S-polynom.

Definice 3.2.2.6.: Nechť f a g jsou dva polynomy z oboru integrity $\mathrm{I}[x_1, x_2]$, na němž je zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. Potom:

(i) Nejmenším společným násobkem vedoucích termů $LT(f) = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, $LT(g) = x_1^{l_1} x_2^{l_2}$ polynomů f, g je term $x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, kde $m_1 = \max(k_1, l_1)$, $m_2 = \max(k_2, l_2)$. Zapisujeme $LCM(LT(f), LT(g))$.

(ii) Nejmenším společným násobkem vedoucích členů polynomů f, g, zapisujeme $LCM(LM(f), LM(g))$, rozumíme součin $LCM\big(LC(f), LC(g)\big).LCM(LT(f), LT(g))$, kde $LCM(LC(f), LC(g))$ je nejmenší společný násobek vedoucích koeficientů polynomů f, g.

(iii) S-polynomem polynomů f, g nazýváme polynom

$$Spoly(f,g) = LCM\big(LM(f), LM(g)\big).\left(\frac{f}{LM(f)} - \frac{g}{LM(g)}\right).$$

Příklad 3.2.2.7.: Určete S-polynom polynomů $f = x^2y + 3xy^2 - 2x + 6y$ a $g = 2xy + y^2 - 2$.

<u>Řešení:</u> Určíme nejmenší společný násobek vedoucích členů polynomů f, g:

$$LCM(x^2y, 2xy) = 2x^2y.$$

Nyní už můžeme určit S-polynom:

$$Spoly(f,g) = 2x^2y.\left(\frac{f}{x^2y} - \frac{g}{2xy}\right) = 2.f - x.g = 7xy^2 - 6x + 12y.$$

3.2.3. Gröbnerova báze

Posledním pojmem, který je třeba připomenout před definováním Gröbnerovy báze, je báze ideálu.

Definice 3.2.3.1.: Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je množina polynomů z $\mathrm{I}[x_1, x_2]$, pak množina

$$I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \,;\, h_1, \dots, h_n \in \mathrm{I}[x_1, x_2] \right\}$$

je ideál. Množinu A nazveme bází ideálu I.

Definice 3.2.3.2.: Nechť je v oboru integrity $\mathrm{I}[x_1, x_2]$ zavedeno přípustné uspořádání $<_T$. Báze $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ ideálu $I \subset \mathrm{I}[x_1, x_2]$ se nazývá Gröbnerovou bází právě tehdy, když zbytek po dělení libovolného polynomu $f \in I$ množinou G je nulový, tzn. $rem(f, G) = 0$.

Uveďme si bez důkazů i některá další tvrzení týkající se Gröbnerovy báze.

Věta 3.2.3.3.: Nechť je v oboru integrity $\mathrm{I}[x_1, x_2]$ zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I \subset \mathrm{I}[x_1, x_2]$;

(ii) zbytek po dělení libovolného polynomu $f \in \mathrm{I}[x_1, x_2]$ množinou G je určen jednoznačně, tzn. je-li $g = rem(f, G)$ a $h = rem(f, G)$, potom $g = h$;

(iii) $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_m) \rangle$, kde $LT(I)$ je množina vedoucích termů všech polynomů ideálu I;

(iv) pro každé $i \neq j$ je $rem\big(Spoly(g_i, g_j), G\big) = 0$.

Příklad 3.2.3.4.: Určete, zda je množina polynomů $M = \{2x^2 - 3x + y, xy^2 + xy - x\}$ Gröbnerovou bází ideálu $\langle M \rangle$ při lexikografickém uspořádání termů.

<u>Řešení:</u> Nejdříve určíme S-polynom polynomů m_1, m_2 množiny M:

$$Spoly(2x^2-3x+y, xy^2+xy-x) = 2x^2y^2\left(\frac{2x^2-3x+y}{2x^2} - \frac{xy^2+xy-x}{xy^2}\right) =$$

$$= -2x^2y + 2x^2 - 3xy^2 + y^3.$$

V dalším kroku vydělíme tento S-polynom prvky množiny M:

$$(-2x^2y + 2x^2 - 3xy^2 + y^3) : \begin{cases} 2x^2 - 3x + y \\ xy^2 + xy - x \end{cases} = \begin{cases} -y + 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$\underline{2x^2y - 3xy + y^2}$$

$$2x^2 - 3xy^2 - 3xy + y^3 + y^2$$

$$\underline{-2x^2 + 3x - y}$$

$$-3xy^2 - 3xy + 3x + y^3 + y^2 - y$$

$$\underline{3xy^2 + 3xy - 3x}$$

$$y^3 + y^2 - y$$

Zbytek po dělení S-polynomu množinou M není nulový, proto množina M není Gröbnerovou bází ideálu $\langle M \rangle$.

Nyní již umíme rozhodnout, zda určitá množina je Gröbnerovou bází daného ideálu či nikoliv. Pomocí následujícího algoritmu budeme moci Gröbnerovu bázi ideálu sestrojit.

Buchbergerův algoritmus

Postup, pomocí kterého nalezneme Gröbnerovu bázi ideálu I, se nazývá Buchbergerův algoritmus. Při hledání budeme postupovat následovně:

1. Určíme S-polynom pro každou dvojici polynomů zadané množiny a nalezneme zbytek po dělení S-polynomu zadanou množinou polynomů.

2. Pokud je některý ze zbytků nenulový, přidáme ho do původní množiny a opakujeme stejný postup do té doby, než budou všechny zbytky nulové.

Příklad 3.2.3.5.: Určete Gröbnerovu bázi ideálu $I = \langle x^2y + 2x - y, x + y - 1 \rangle$ při lexikografickém uspořádání.

<u>Řešení:</u> Označme $g_1 = x^2y + 2x - y$, $g_2 = x + y - 1$ a postupujme stejně jako v příkladě 3.2.3.4., tj. nalezněme S-polynom polynomů g_1, g_2 a vydělme ho těmito polynomy.

$$Spoly(g_1, g_2) = x^2y\left(\frac{g_1}{x^2y} - \frac{g_2}{x}\right) = -xy^2 + xy + 2x - y$$

$$(-xy^2 + xy + 2x - y) : \begin{cases} x^2y + 2x - y \\ x + y - 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -y^2 + y + 2 \end{cases}$$

$\underline{xy^2 + y^3 - y^2}$

$xy + 2x + y^3 - y^2 - y$

$\underline{-xy - y^2 + y}$

$2x + y^3 - 2y^2$

$\underline{-2x - 2y + 2}$

$y^3 - 2y^2 - 2y + 2$

Množina $G = \{g_1, g_2\}$ není Gröbnerovou bází ideálu I, protože zbytek po dělení S-polynomu $Spoly(g_1, g_2)$ polynomy g_1, g_2 není nulový. Označme tento zbytek $g_3 = y^3 - 2y^2 - 2y + 2$ a přidejme ho do množiny G:

$$G_1 = G \cup \{g_3\} = \{x^2y + 2x - y, x + y - 1, y^3 - 2y^2 - 2y + 2\}.$$

Nyní je potřeba určit $Spoly(g_1, g_2), Spoly(g_1, g_3), Spoly(g_2, g_3)$. S-polynom polynomů g_1, g_2 jsme již nalezli a je zřejmé, že zbytek po dělení $Spoly(g_1, g_2)$ množinou G_1 bude nulový. Zbývá tedy dopočítat zbytky po dělení polynomů $Spoly(g_1, g_3)$, $Spoly(g_2, g_3)$ množinou G_1.

$$Spoly(g_1, g_3) = x^2y^3\left(\frac{g_1}{x^2y} - \frac{g_3}{y^3}\right) = 2x^2y^2 + 2x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - y^3$$

$$(2x^2y^2 + 2x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - y^3) : \begin{cases} x^2y + 2x - y \\ x + y - 1 \\ y^3 - 2y^2 - 2y + 2 \end{cases} = \begin{cases} 2y + 2 \\ -2x + 2y^2 - 2y - 6 \\ -3 \end{cases}$$

$\underline{-2x^2y^2 - 4xy + 2y^2}$

$2x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - 4xy - y^3 + 2y^2$

$\underline{-2x^2y - 4x + 2y}$

$-2x^2 + 2xy^2 - 4xy - 4x - y^3 + 2y^2 + 2y$

$\underline{2x^2 + 2xy - 2x}$

$2xy^2 - 2xy - 6x - y^3 + 2y^2 + 2y$

$\underline{-2xy^2 - 2y^3 + 2y^2}$

$-2xy - 6x - 3y^3 + 4y^2 + 2y$

$\underline{2xy + 2y^2 - 2y}$

$-6x-3y^3+6y^2$

$\underline{6x+6y-6}$

$-3y^3+6y^2+6y-6$

$\underline{3y^3-6y^2-6y+6}$

0

$$Spoly(g_2,g_3)=xy^3\left(\frac{g_2}{x}-\frac{g_3}{y^3}\right)=2xy^2+2xy-2x+y^4-y^3$$

$$(2xy^2+2xy-2x+y^4-y^3):\begin{cases} x^2y+2x-y \\ x+y-1 \\ y^3-2y^2-2y+2 \end{cases}=\begin{cases} 0 \\ 2y^2+2y-2 \\ y-1 \end{cases}$$

$\underline{-2xy^2-2y^3+2y^2}$

$2xy-2x+y^4-3y^3+2y^2$

$\underline{-2xy-2y^2+2y}$

$-2x+y^4-3y^3+2y$

$\underline{2x+2y-2}$

y^4-3y^3+4y-2

$\underline{-y^4+2y^3+2y^2-2y}$

$-y^3+2y^2+2y-2$

$\underline{y^3-2y^2-2y+2}$

0

Vidíme, že všechny zbytky po dělení S-polynomů množinou G_1 jsou nulové, a proto je množina $G_1=\{x^2y+2x-y, x+y-1, y^3-2y^2-2y+2\}$ Gröbnerovou bází ideálu I.

3.2.4. Redukovaná a monická Gröbnerova báze

Gröbnerova báze daného ideálu ale není určena jednoznačně a někdy se v ní vyskytují „nepotřebné“ polynomy. Proto je důležité zavést pojem redukovaná Gröbnerova báze. K tomu nám pomůže následující věta.

Věta 3.2.4.1.: Nechť $G=\{g_1,g_2,\dots,g_m\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I\subset \mathrm{I}[x_1,x_2]$. Nechť dále $g_i\in G$ je polynom, pro který platí:

$$LT(g_i)\in\langle LT(G-\{g_i\})\rangle.$$

Potom $G-\{g_i\}$ je také Gröbnerova báze ideálu I.

Důkaz: Podle věty 3.2.3.3. je množina G Gröbnerovou bází právě tehdy, když $\langle LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_m)\rangle = \langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$. Jestliže platí, že $LT(g_i) \in$ $\in \langle LT(G - \{g_i\})\rangle$, potom platí také, že $\langle LT(G - \{g_i\})\rangle = \langle LT(G)\rangle$. Podle věty 3.2.3.3. je tedy také množina $G - \{g_i\}$ Gröbnerovou bází ideálu I. [dle 5] □

Definice 3.2.4.2.: Gröbnerovu bázi G ideálu $I \subset \mathrm{I}[x_1, x_2]$ nazveme redukovanou Gröbnerovou bází, jestliže pro každý polynom $g \in G$ platí, že žádný z termů polynomu g nenáleží ideálu $\langle LT(G - \{g\})\rangle$. Pokud navíc $LC(g) = 1$ pro všechny polynomy $g \in G$, nazveme tuto bázi redukovanou monickou Gröbnerovou bází ideálu I.

Věta 3.2.4.3.: Nechť I je nenulový ideál. Potom redukovaná a monická Gröbnerova báze ideálu I je při daném uspořádání termů určena jednoznačně.

Důkaz je uveden například v [1] nebo [5].

Příklad 3.2.4.4.: Uveďte Gröbnerovu bázi $G_1 = \{x^2y + 2x - y, x + y - 1, y^3 - 2y^2 - 2y + 2\}$ z příkladu 3.2.3.5. v redukovaném a monickém tvaru.

Řešení: Označme $g_1 = x^2y + 2x - y$, $g_2 = x + y - 1$, $g_3 = y^3 - 2y^2 - 2y + 2$.

Nyní ověříme, zda nějaký term polynomu g_1 náleží ideálu $\langle LT(G_1 - \{g_1\})\rangle = \langle x, y^3\rangle$. Vidíme, že například term x^2y je dělitelný vedoucím termem polynomu g_2, a platí tedy, že $x^2y \in \langle LT(G_1 - \{g_1\})\rangle$. Polynom g_1 nepatří do redukované monické Gröbnerovy báze, proto jej odebereme z množiny G_1.

Dále pokračujeme v ověřování zbývajících dvou polynomů. Žádný z termů polynomu g_2 nenáleží ideálu $\langle LT(G_1 - \{g_2\})\rangle = \langle y^3\rangle$ a zároveň $LC(g_2) = 1$, a proto polynom g_2 náleží do redukované monické Gröbnerovy báze. Pro polynom g_3 také platí, že žádný z jeho termů nenáleží ideálu $\langle LT(G_1 - \{g_3\})\rangle = \langle x\rangle$ a $LC(g_3) = 1$, a proto také polynom g_3 patří do redukované monické Gröbnerovy báze.

Redukovaný a monický tvar Gröbnerovy báze G_1 zapíšeme

$$G_1 = \{x + y - 1, y^3 - 2y^2 - 2y + 2\}.$$

Ukažme si tedy, jak lze Gröbnerovu bázi využít k řešení soustav polynomiálních rovnic se dvěma neznámými. Nejprve vyslovme následující větu:

Věta 3.2.4.5.: Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic se dvěma neznámými S:

$$f_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0,$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2) = 0.$$

Nechť dále $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ je Gröbnerova báze ideálu $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ v oboru integrity $\mathrm{I}[x_1, x_2]$ při daném uspořádání termů $<_T$. Potom soustava rovnic

$$g_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2) = 0$$

je ekvivalentní s původní soustavou rovnic S.

Příklad 3.2.4.6.: Nad tělesem reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 - 25 = 0,$$

$$x^2 + y - 5 = 0.$$

<u>Řešení:</u> Nalezněme redukovanou a monickou Gröbnerovu bázi ideálu $\langle\, x^4 + y^2 - 25,$ $x^2 + y - 5 \rangle$. Označme $g_1 = x^4 + y^2 - 25$, $g_2 = x^2 + y - 5$.

$$Spoly(g_1, g_2) = x^4 \left(\frac{g_1}{x^4} - \frac{g_2}{x^2}\right) = g_1 - x^2 g_2 = -x^2y + 5x^2 + y^2 - 25.$$

$$(-x^2y + 5x^2 + y^2 - 25) : \begin{cases} x^4 + y^2 - 25 \\ x^2 + y - 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -y + 5 \end{cases}$$

$$\underline{x^2y + y^2 - 5y}$$

$$5x^2 + 2y^2 - 5y - 25$$

$$\underline{-5x^2 - 5y + 25}$$

$$2y^2 - 10y$$

Označme zbytek po dělení $g_3 = 2y^2 - 10y$, nalezněme S-polynomy $Spoly(g_1, g_3)$ a $Spoly(g_2, g_3)$ a vydělme je polynomy g_1, g_2 a g_3.

$$Spoly(g_1, g_3) = 2x^4y^2\left(\frac{g_1}{x^4} - \frac{g_3}{2y^2}\right) = 2y^2g_1 - x^4g_3 = 10x^4y + 2y^4 - 50y^2.$$

$$(10x^4y + 2y^4 - 50y^2) : \begin{cases} x^4 + y^2 - 25 \\ x^2 + y - 5 \\ 2y^2 - 10y \end{cases} = \begin{cases} 10y \\ 0 \\ y^2 - 25 \end{cases}$$

$\underline{-10x^4y - 10y^3 + 250y}$

$2y^4 - 10y^3 - 50y^2 + 250y$

$\underline{-2y^4 + 10y^3}$

$-50y^2 + 250y$

$\underline{50y^2 - 250y}$

0

$$Spoly(g_2, g_3) = 2x^2y^2\left(\frac{g_2}{x^2} - \frac{g_3}{2y^2}\right) = 2y^2g_2 - x^2g_3 = 10x^2y + 2y^3 - 10y^2.$$

$$(10x^2y + 2y^3 - 10y^2) : \begin{cases} x^4 + y^2 - 25 \\ x^2 + y - 5 \\ 2y^2 - 10y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 10y \\ y - 5 \end{cases}$$

$\underline{-10x^2y - 10y^2 + 50y}$

$2y^3 - 20y^2 + 50y$

$\underline{-2y^3 + 10y^2}$

$-10y^2 + 50y$

$\underline{10y^2 - 50y}$

0

Gröbnerova báze daného ideálu je množina $G = \{x^4 + y^2 - 25, x^2 + y - 5, 2y^2 - 10y\}$. Aby byla tato báze monická, vydělme polynom g_3 dvěma. Získáme množinu $G = \{x^4 + y^2 - 25, x^2 + y - 5, y^2 - 5y\}$. Nyní prověříme, zda všechny polynomy náleží redukované bázi.

Term y^2 polynomu g_1 je dělitelný vedoucím termem polynomu g_3 a náleží tedy ideálu $\langle LT(G - \{g_1\})\rangle = \langle x^2, y^2\rangle$. Polynom g_1 tak nepatří do redukované Gröbnerovy báze. Žádný z termů polynomu g_2 nenáleží ideálu $\langle LT(G - \{g_2\})\rangle = \langle x^4, y^2\rangle$ a žádný z termů polynomu g_3 nenáleží ideálu $\langle LT(G - \{g_3\})\rangle = \langle x^4, x^2\rangle$, proto je redukovanou monickou Gröbnerovu bází množina $G = \{x^2 + y - 5, y^2 - 5y\}$.

Zadanou soustavu rovnic tedy můžeme nahradit soustavou následující:

$$x^2 + y - 5 = 0,$$

$$y^2 - 5y = 0.$$

Soustavu upravíme na tvar

$$x^2 + y - 5 = 0,$$

$$y(y - 5) = 0$$

a snadno již z druhé rovnice získáme $y_1 = 0$, $y_2 = 5$. Po dosazení do první rovnice dostaneme $x_1 = \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{5}$, $x_2 = 0$. Řešením zadané soustavy rovnic je množina $P = \left\{\left[\sqrt{5}; 0\right], \left[-\sqrt{5}; 0\right], [0; 5]\right\}$.

Výpočet Gröbnerovy báze si můžeme, tak jako výpočet rezultantu, usnadnit pomocí matematických programů. Program Wolfram Mathematica 7.0 vypíše po zadání vstupních polynomů redukovanou Gröbnerovu bázi. Ukažme si tento postup na polynomech z předchozího příkladu $x^4 + y^2 - 25, x^2 + y - 5$:

$$In[1] := \ GroebnerBasis[\{x\verb|^|4 + y\verb|^|2 - 25, x\verb|^|2 + y - 5\}, \{x, y\}]$$

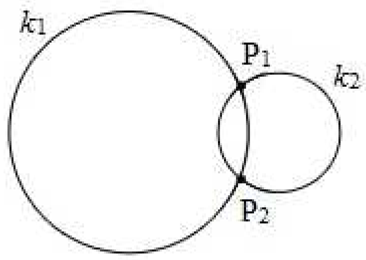
$$Out[1] = \ \{-5\,y + y^2, -5 + x^2 + y\}.$$

4. Násobnosti řešení soustav dvou polynomiálních rovnic se dvěma neznámými

V následující kapitole se omezíme na případ soustav dvou polynomiálních rovnic se dvěma neznámými nad tělesem reálných čísel. S jejich řešením souvisí také pojem násobnost řešení soustavy dvou rovnic. Definice a věty uvedené v této kapitole jsou převzaty z [4]. Podle následující definice můžeme ztotožnit polynomiální rovnici s rovnicí algebraické křivky.

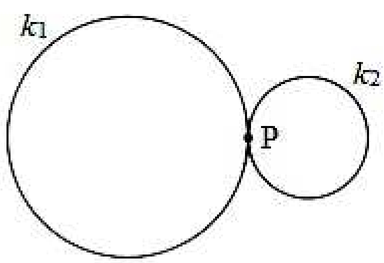
Definice 4.0.1.: Rovnicí algebraické křivky v rovině rozumíme rovnici $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je polynom dvou neurčitých.

Pokud se tedy dvě algebraické křivky protínají ve dvou bodech, můžeme říci, že soustava dvou polynomiálních rovnic, které odpovídají rovnicím daných křivek, má dvě řešení (Obr. 1).



Obr. 1

Pokud budeme kružnici k_2 „posouvat doprava“, splynou průsečíky P_1 a P_2 v jeden bod P (Obr. 2). Soustava rovnic má nyní jedno řešení. Mohli bychom ale tvrdit, že kružnice se protínají v bodě P dvakrát a soustava má tedy jedno dvojnásobné řešení. Zavádíme proto pojem násobnost průsečíku dvou algebraických křivek (resp. násobnost řešení soustavy rovnic). Algebraickou křivku budeme dále označovat pouze „křivka“.



Obr. 2

4.1. Násobnost řešení $[0;\ 0]$ soustavy rovnic

Definice 4.1.1.: Nechť $O = [0;\ 0]$ je počátek soustavy souřadnic. Nechť je dále polynomům f a g přiřazena hodnota $I_O(f, g)$. Číslo $I_O(f, g)$ udává, kolikrát se křivky $f(x, y) = 0$ a $g(x, y) = 0$ protínají v počátku a nazveme ho násobností průsečíku křivek f a g v bodě O.

Předpokládejme, že uspořádaná dvojice $[0;\ 0]$ je řešením soustavy rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$. Potom číslo $I_O(f, g)$ nazveme také násobností řešení dané soustavy rovnic.

Uveďme si základní vlastnosti násobnosti průsečíku křivek v počátku, resp. násobnosti řešení $[0;\ 0]$ soustavy rovnic.

Věta 4.1.2.: Nechť $I_O(f, g)$ je násobnost průsečíku křivek f a g v bodě O, resp. násobnost řešení $[0;\ 0]$ soustavy rovnic $f = 0$, $g = 0$. Nechť dále h je polynom dvou neurčitých. Potom platí:

(i) $I_O(f, g)$ je nezáporné celé číslo nebo $+\infty$;

(ii) $I_O(f, g) = I_O(g, f)$;

(iii) $I_O(f, g) \geq 1$ právě tehdy, když $O \in f \wedge O \in g$;

(iv) Nechť $x = 0$ a $y = 0$. Potom $I_O(x, y) = 1$;

(v) $I_O(f, g) = I_O(f, g + fh)$;

(vi) $I_O(f, gh) = I_O(f, g) + I_O(f, h)$.

Příklad 4.1.3.: S využitím uvedených vlastností určete násobnost řešení soustavy rovnic

$$x = 0,$$
$$y^3 = 0.$$

Řešení: Podle vlastnosti (vi) věty 4.1.2. můžeme zapsat

$$I_O(x, y^3) = I_O(x, y^2 y) = I_O(x, y^2) + I_O(x, y).$$

Z opakovaného využití vlastnosti (vi) získáme

$$I_O(x, y^2) + I_O(x, y) = I_O(x, y) + I_O(x, y) + I_O(x, y) = 3I_O(x, y).$$

Podle vlastnosti (iv) věty 4.1.2. už je zřejmé, že $I_O(x, y^3) = 3I_O(x, y) = 3$. Řešení $[0;\ 0]$ dané soustavy má tedy násobnost 3.

Uveďme si několik tvrzení, která vyplývají z vlastností násobnosti a která využijeme při výpočtu násobnosti průsečíku dvou algebraických křivek v počátku (tj. násobnosti řešení [0; 0] soustavy dvou polynomiálních rovnic). Následující věta objasňuje, jaká bude násobnost průsečíku křivek, z nichž jedna bude násobkem druhé, tj. jaká bude násobnost společného nulového bodu dvou polynomů, z nichž jeden je násobkem druhého.

Věta 4.1.4.: Nechť f a g jsou polynomy, kdy g je násobkem f, a nechť počátek $O \in f(x, y)$, tj. $[0;\ 0]$ je nulový bod polynomu f. Potom $I_O(f, g) = +\infty$.

Důkaz (dle [4]): Předpokládejme nejprve, že g je nulový polynom. Platí předpoklad věty, že g je násobkem f (můžeme psát $0 = f.0$). Podle vlastnosti (iii) věty 4.1.2. platí nerovnost $I_O(f, 0) \geq 1$. Pro všechna přirozená čísla n můžeme psát

$$n \leq n \cdot I_O(f, 0).$$

Podle vlastnosti (vi) věty 4.1.2. platí

$$n \cdot I_O(f, 0) = I_O(f, 0^n) = I_O(f, 0).$$

Pokud má nerovnost $n \leq I_O(f, 0)$ platit pro všechna přirozená čísla, musí být nutně

$$I_O(f, 0) = +\infty.$$

Uvažujme nyní nenulový polynom g, který je násobkem polynomu f. Můžeme psát $g = fh$, kde h je libovolný polynom. Zapíšeme

$$I_O(f, g) = I_O(f, fh).$$

Podle vlastnosti (v) věty 4.1.2. platí rovnost

$$I_O(f, g) = I_O(f, g - fh) = I_O(f, fh - fh) = I_O(f, 0).$$

A tedy už vidíme, že

$$I_O(f, g) = I_O(f, 0) = +\infty. \qquad \square$$

Věta 4.1.5.: Nechť f, g, h jsou polynomy a nechť dále počátek $O = [0; 0]$ není nulovým bodem polynomu g. Potom násobnost řešení [0; 0] soustavy rovnic $f = 0$, $gh = 0$ je stejná jako násobnost řešení [0; 0] soustavy rovnic $f = 0$, $h = 0$, tj. platí

$$I_O(f, gh) = I_O(f, h).$$

Důkaz (dle [4]): Podle vlastností (vi), (iii), a (i) věty 4.1.2. můžeme psát

$$I_O(f, gh) = I_O(f, g) + I_O(f, h) = I_O(f, h).$$

Protože křivka g neprochází počátkem, je násobnost $I_O(f, g) = 0$. □

Ukažme si na příkladu, jak lze uvedená tvrzení a vlastnosti k výpočtu násobnosti využít.

Příklad 4.1.6.: Mějme polynomy $f = y - x^3$ a $l = y^4 + 6x^3y + x^8$. Určete násobnost řešení soustavy rovnic $f(x, y) = 0$, $l(x, y) = 0$ (tj. určete násobnost průsečíku těchto křivek).

Řešení: Podle vlastnosti (v) věty 4.1.2. platí $I_O(f, g) = I_O(f, g + fh)$. Pokusme se tedy najít polynom h takový, že $l = fh + g$. Pro získání h vydělme polynom $l = y^4 + 6x^3y + x^8$ polynomem $f = y - x^3$ (postupujme stejně jako při dělení polynomu jedné neurčité y, kdy x bereme jako koeficient).

$$(y^4 + 6x^3y + x^8)/(y - x^3) = y^3 + y^2x^3 + yx^6 + x^9 + 6x^3$$

$$\underline{-y^4 + y^3x^3}$$

$$y^3x^3 + 6x^3y + x^8$$

$$\underline{-y^3x^3 + y^2x^6}$$

$$y^2x^6 + 6x^3y + x^8$$

$$\underline{-y^2x^6 + yx^9}$$

$$yx^9 + 6x^3y + x^8$$

$$\underline{-yx^9 + x^{12}}$$

$$6yx^3 + x^{12} + x^8$$

$$\underline{-6yx^3 + 6x^6}$$

$$x^{12} + 6x^6 + x^8$$

Můžeme tedy psát

$$y^4 + 6x^3y + x^8 = (y - x^3)(y^3 + y^2x^3 + yx^6 + x^9 + 6x^3) + x^{12} + 6x^6 + x^8.$$

Nyní již využijeme vlastnosti (v) věty 4.1.2. pro zapsání rovnosti

$$I_O(y - x^3, y^4 + 6x^3y + x^8) = I_O(y - x^3, x^{12} + x^8 + 6x^6).$$

Dále s využitím vlastností (i) – (vi) věty 4.1.2. a věty 4.1.5. určíme hledanou násobnost:

$$I_O(y - x^3, x^{12} + x^8 + 6x^6) = I_O(y - x^3, x^6(x^6 + x^2 + 6)) = I_O(y - x^3, x^6) =$$
$$= 6I_O(y - x^3, x) = 6I_O(y, x) = 6.$$

Řešení [0; 0] dané soustavy rovnic má tedy násobnost 6, tzn. dvě algebraické křivky $f = y - x^3$ a $l = y^4 + 6x^3y + x^8$ se v počátku protínají šestkrát.

Všimněme si, že jedna z rovnic soustavy v předchozím příkladě byla ve tvaru $y = p(x)$, kde $p(x)$ je polynom jedné neurčité. Pokud je jedna rovnice zadaná v tomto tvaru, je možné počítat násobnost řešení soustavy bez zdlouhavého dělení polynomu polynomem, a to na základě následující věty.

Věta 4.1.7.: Nechť jsou dány polynomy $p(x)$ a $g(x, y)$.

(i) Zbytek po dělení polynomu $g(x, y)$ polynomem $y - p(x)$ má tvar $g(x, p(x))$. Existuje tedy polynom $h(x, y)$ takový, že $g(x, y) = \big(y - p(x)\big)h(x, y) + g\big(x, p(x)\big)$.

(ii) Polynom $g(x, y)$ je násobkem polynomu $y - p(x)$ právě tehdy, když $g(x, p(x))$ je nulový polynom.

<u>Důkaz (dle [4]):</u> (i) Předpokládejme, že vydělením polynomu $g(x, y)$ polynomem $y - p(x)$ dostaneme polynom $h(x, y)$. Zbytek po dělení označme $r(x)$:

$$g(x, y) = \big(y - p(x)\big)h(x, y) + r(x).$$

Dosazením polynomu $p(x)$ za y do předchozího vztahu získáme

$$g\big(x, p(x)\big) = r(x).$$

(ii) Předpokládejme nejprve, že $g(x, p(x))$ je nulový polynom. Ze vztahu

$$g(x, y) = \big(y - p(x)\big)h(x, y)$$

je zřejmé, že polynom g je násobkem polynomu $y - p(x)$. Naopak jestliže g je násobkem polynomu $y - p(x)$, můžeme psát

$$g(x,y) = \big(y - p(x)\big)h(x,y).$$

Po dosazení polynomu $p(x)$ za y (podle (i)) zjistíme, že $g(x,p(x))$ je nulový polynom. □

Příklad 4.1.8.: Mějme opět polynomy $f = y - x^3$, $l = y^4 + 6x^3y + x^8$. Určete násobnost řešení [0; 0] soustavy rovnic $f(x,y) = 0$, $l(x,y) = 0$ (nyní s využitím věty 4.1.7.).

<u>Řešení:</u> Je zřejmé, že polynom f má tvar $y - p(x)$, a proto je podle věty 4.1.7. zbytek $r(x)$ po dělení polynomu l polynomem f roven polynomu $l(x,p(x))$, což je v našem případě polynom $r = (x^3)^4 + 6x^3x^3 + x^8 = x^{12} + x^8 + 6x^6$. Můžeme tedy rovnou psát

$$I_O(f,l) = I_O(y - x^3, x^{12} + x^8 + 6x^6).$$

Následně dopočítáme výslednou násobnost řešení soustavy podle postupu uvedeného v příkladě 4.1.6.

Postup pro určení násobnosti řešení soustav rovnic, které budou mít tvar jako soustava $f(x,y) = 0$, $l(x,y) = 0$ z příkladů 4.1.6. a 4.1.8., výrazně zjednoduší následující věta.

Věta 4.1.9.: Nechť $y = p(x)$, $g(x,y) = 0$ je soustava dvou rovnic se dvěma neznámými. Nechť dále [0; 0] je řešením rovnice $y = p(x)$ a polynom $g(x,y)$ není násobkem polynomu $y - p(x)$. Potom násobnost řešení [0; 0] soustavy rovnic $y = p(x)$, $g(x,y) = 0$ bude rovna nejnižšímu ze stupňů členů polynomu $g(x,p(x))$.

<u>Důkaz (dle [4]):</u> Díky předpokladu, že $g(x,y)$ není násobkem polynomu $y - p(x)$, víme, že zbytek $g(x,p(x))$ není nulový polynom. Jestliže dále s je nejmenší ze stupňů členů polynomu $g(x,p(x))$, můžeme člen x^s z tohoto polynomu vytknout. Získáme vztah

$$g\big(x,p(x)\big) = x^s q(x),$$

kde $q(x)$ je polynom, který obsahuje nenulový absolutní člen. Podle věty 4.1.7. můžeme psát rovnost

$$g(x,y) = \big(y - p(x)\big)h(x,y) + x^s q(x),$$

a dále podle vlastnosti (v) věty 4.1.2. platí

$$I_O\big(y - p(x), g(x,y)\big) = I_O\big(y - p(x), x^s q(x)\big).$$

Skutečnost, že polynom $q(x)$ obsahuje nenulový absolutní člen, znamená, že $[0;\ 0]$ není řešením rovnice $q(x) = 0$. Proto podle věty 4.1.5. a s využitím vlastnosti (vi) věty 4.1.2. můžeme zapsat rovnost

$$I_O\big(y - p(x), x^s q(x)\big) = I_O(y - p(x), x^s) = sI_O(y - p(x), x).$$

Předpoklad, že $[0;\ 0]$ je řešením rovnice $y = p(x)$, zaručuje, že polynom $p(x)$ neobsahuje absolutní člen. Proto můžeme psát $p(x) = xt(x)$, kde $t(x)$ je polynom jedné neurčité. Nyní již můžeme využít vlastnosti věty 4.1.2. a získáváme

$$sI_O(y - p(x), x) = sI_O(y - xt(x), x) = sI_O(y, x) = s.$$

Platí tedy, že násobnost řešení $[0;\ 0]$ soustavy rovnic $y = p(x)$ a $g(x, y) = 0$ je

$$I_O\big(y - p(x), g(x, y)\big) = s. \qquad \square$$

Vraťme se nyní k příkladu 4.1.8. Po určení tvaru zbytku $r = x^{12} + x^8 + 6x^6$ je už na první pohled zřejmé, že podle věty 4.1.9. je $I_O(f, l) = 6$, neboť nejmenší ze stupňů členů polynomu $r(x)$ je 6.

Příklad 4.1.10.: Určete násobnost řešení $[0; 0]$ soustavy rovnic

$$y^3 + 4x^4 = 0,$$

$$xy^2 + y - 3x^4 = 0.$$

<u>Řešení:</u> Vidíme, že nyní už žádná z rovnic není ve tvaru $y = p(x)$, a proto nemůžeme využít věty 4.1.7. a 4.1.9. Postupně budeme z obou rovnic eliminovat nejvyšší mocniny s využitím vlastností násobností a některých vět uvedených v této kapitole. Nejprve chceme eliminovat y^3. Protože druhý polynom obsahuje ve vedoucím členu (při lexikografickém uspořádání, kde $y > x$) i neurčitou x, musíme polynom $y^3 + 4x^4$ vynásobit právě x. Využitím vlastnosti (vi) věty 4.1.2. získáme:

$$I_O(y^3 + 4x^4, xy^2 + y - 3x^4) = I_O(xy^3 + 4x^5, xy^2 + y - 3x^4) - I_O(x, xy^2 + y - 3x^4).$$

Následně určíme násobnost $I_O(x, xy^2 + y - 3x^4)$ podle vlastností (iv) a (v) věty 4.1.2.:

$$I_O(x, xy^2 + y - 3x^4) = I_O(x, x(y^2 - 3x^3) + y) = I_O(x, y) = 1.$$

Získáváme tedy vztah

$$I_O(y^3 + 4x^4, xy^2 + y - 3x^4) = I_O(xy^3 + 4x^5, xy^2 + y - 3x^4) - 1.$$

Podle vlastnosti (v) věty 4.1.2. se násobnost nezmění, přičteme-li k jednomu polynomu násobek druhého. Proto vynásobme druhý polynom výrazem $-y$ a přičtěme k prvnímu polynomu:

$$I_O(xy^3 + 4x^5 - y(xy^2 + y - 3x^4), xy^2 + y - 3x^4) - 1 =$$
$$= I_O(-y^2 + 3x^4y + 4x^5, xy^2 + y - 3x^4) - 1.$$

Tímto krokem jsme eliminovali člen y^3. Pokračujme dále v eliminaci členu y^2 stejným postupem. Vynásobme první polynom výrazem x a přičtěme ho k druhému polynomu:

$$I_O\big(-y^2 + 3x^4y + 4x^5, xy^2 + y - 3x^4 + x(-y^2 + 3x^4y + 4x^5)\big) - 1 =$$
$$= I_O(-y^2 + 3x^4y + 4x^5, (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1.$$

Pro vyloučení y^2 z prvního polynomu je nutné tento polynom vynásobit výrazem $3x^5 + 1$. Vzhledem k tomu, že $[0;\ 0]$ není nulovým bodem polynomu $3x^5 + 1$, můžeme užitím věty 4.1.5. výpočet násobnosti zjednodušit následovně:

$$I_O(-y^2(3x^5 + 1) + 3x^4y(3x^5 + 1) + 4x^5(3x^5 + 1), (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1 =$$
$$= I_O(-(3x^5 + 1)y^2 + (9x^9 + 3x^4)y + 12x^{10} + 4x^5, (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1.$$

Pokud nyní vynásobíme druhý polynom výrazem y a přičteme k prvnímu polynomu, eliminujeme člen y^2:

$$I_O(-(3x^5 + 1)y^2 + (9x^9 + 3x^4)y + 12x^{10} + 4x^5 +$$
$$+ y\big((3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4\big), (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1 =$$
$$= I_O(9x^9y + 4x^6y + 12x^{10} + 4x^5, (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1 =$$
$$= I_O(x^5(9x^4y + 4xy + 12x^5 + 4), (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1.$$

Protože nulovým bodem polynomu $9x^4y + 4xy + 12x^5 + 4$ není uspořádaná dvojice $[0;\ 0]$, můžeme na základě věty 4.1.5. a vlastností z věty 4.1.2. psát:

$$I_O(y^3 + 4x^4, xy^2 + y - 3x^4) = I_O(x^5, (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1 =$$
$$= 5I_O(x, (3x^5 + 1)y + 4x^6 - 3x^4) - 1 = 5I_O(x, x(3x^4y - 3x^3 + 4x^5) + y) - 1 =$$
$$= 5I_O(x, y) - 1 = 4.$$

Násobnost řešení [0; 0] zadané soustavy rovnic je 4, resp. soustava rovnic má čtyřnásobné řešení [0; 0].

4.2. Násobnost libovolného řešení soustavy rovnic

Dosud jsme hledali pouze násobnost konkrétního řešení dané soustavy rovnic, a to řešení [0; 0]. K tomu, abychom mohli určit násobnost libovolného řešení nějaké soustavy, potřebujeme zavést homogenní polynomy a následně způsoby transformace souřadnic.

Abychom mohli určit násobnost průsečíku dvou křivek v libovolném bodě (násobnost libovolného řešení soustavy rovnic), musíme nejprve rozšířit pojem algebraické křivky z Euklidovské roviny do projektivní roviny. Pro porozumění dalšímu textu není nezbytně nutné projektivní rovinu definovat. Vystačíme s představou projektivní roviny jako Euklidovské roviny doplněné o body v nekonečnu. Bližší souvislosti nalezneme v [4].

Definice 4.2.1.: Nechť d je celé nezáporné číslo. Homogenním polynomem $F(x, y, z)$ tří neurčitých, který má stupeň d, nazveme výraz

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j},$$

kde alespoň jeden z koeficientů $a_{ij} \in \mathbb{R}$ je nenulový a $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$.

Zjednodušeně řečeno, homogenní polynom stupně d je takový nenulový polynom, jehož všechny členy mají stupeň d.

Příklad 4.2.2.: Rozhodněte, zda jsou polynomy $F(x, y, z) = 2x^2yz + 6xy^2z + 3xz^3 - 2x^4$ a $G(x, y, z) = 3x^2y + 4xyz - 2xz + y^2 + 2$ homogenní.

<u>Řešení:</u> Všechny členy polynomu F mají stupeň 4, proto $F(x, y, z)$ je homogenní polynom stupně 4. Jednotlivé členy polynomu G mají v tomto pořadí stupně $3, 3, 2, 2, 0$. $G(x, y, z)$ tedy není homogenní polynom.

Definice 4.2.3.: Rovnicí algebraické křivky v projektivní rovině rozumíme rovnici $F(x, y, z) = 0$, kde $F(x, y, z)$ je homogenní polynom.

Každému homogennímu polynomu $F(x, y, z)$ můžeme přiřadit polynom $f(x, y) = F(x, y, 1)$. Podle definice 4.2.1. tedy můžeme psát

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} x^i y^j.$$

Bod $[x;\ y]$ leží v Euklidovské rovině na křivce $f(x, y) = 0$ (resp. uspořádaná dvojice $[x;\ y]$ je řešením rovnice $f(x, y) = 0$) právě tehdy, když odpovídající bod $[x;\ y;\ 1]$ leží na křivce $F(x, y, z) = 0$ v projektivní rovině (resp. uspořádaná trojice $[x;\ y;\ 1]$ je řešením rovnice $F(x, y, z) = 0$). Můžeme tedy říci, že na křivkách $f = 0$ a $F = 0$ leží stejné body z Euklidovské roviny. Polynom f nazýváme zúžením polynomu F do Euklidovské roviny.

Naopak nechť je $f(x, y)$ polynom dvou neurčitých stupně d, křivku $f(x, y) = 0$ můžeme rozšířit z Euklidovské do projektivní roviny. Učiníme tak tzv. homogenizací polynomu $f(x, y)$, kdy každý člen polynomu f vynásobíme neurčitou z umocněnou tak, aby každý člen výsledného polynomu měl stejný stupeň d. To znamená, že z polynomu

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} x^i y^j$$

získáme polynom

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}.$$

Volbou $z = 1$ získáme vztah $F(x, y, 1) = f(x, y)$ a můžeme tedy říci, že na křivkách $F = 0$ a $f = 0$ leží stejné body z Euklidovské roviny. Křivku $F = 0$ nazýváme rozšířením křivky $f = 0$ do projektivní roviny. Křivka $F(x, y, z) = 0$ může navíc obsahovat tzv. body v nekonečnu, které mají v projektivní rovině souřadnice $[1;\ s;\ 0]$ nebo $[0;\ 1;\ 0]$, kde $s \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.2.4.: Homogenizací polynomu $f(x, y) = x^2 + xy - y + 3$ je polynom $F(x, y, z) = x^2 + xy - yz + 3z^2$. Nyní zjistíme, které body v nekonečnu obsahuje křivka $F(x, y, z) = 0$. Dosazením bodu $[1;\ s;\ 0]$ do rovnice křivky získáme vztah $1 + s = 0$, tedy bod $[1;\ -1;\ 0]$ leží na křivce $F = 0$. Nyní ověříme, zda na křivce $F = 0$ leží také bod $[0;\ 1;\ 0]$. Dosazením do rovnice křivky získáme vztah $0 = 0$. Křivka $F(x, y, z) = 0$ tedy obsahuje dva body v nekonečnu a jsou jimi body $[1;\ -1;\ 0]$ a $[0;\ 1;\ 0]$.

Poznámka: Homogenizaci $F(x, y, z)$ polynomu $f(x, y)$ budeme pro lepší orientaci nazývat polynomem $f(x, y)$ v projektivní rovině.

Definice 4.2.5.: Nechť $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ jsou homogenní polynomy a bod P je libovolný bod v projektivní rovině. Násobností průsečíku křivek $F = 0$ a $G = 0$ v bodě P rozumíme číslo $I_P(F, G)$, které udává, kolikrát se křivky F a G protínají v bodě P.
Nechť P je řešení soustavy rovnic $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. Potom číslo $I_P(F, G)$ nazveme také násobností řešení dané soustavy rovnic.

Pokud provedeme zúžení křivek z projektivní do Euklidovské roviny, násobnost průsečíku v počátku, tj. násobnost společného nulového bodu $[0; 0; 1]$ polynomů $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, se podle následující věty nezmění.

Věta 4.2.6.: Nechť $F(x, y, z)$ a $G(x, y, z)$ jsou homogenní polynomy. Mějme dále polynomy $f(x, y)$, $g(x, y)$ takové, že $f(x, y) = F(x, y, 1)$ a $g(x, y) = G(x, y, 1)$. Potom

$$I_O\big(F(x, y, z), G(x, y, z)\big) = I_O\big(f(x, y), g(x, y)\big),$$

kde $O = [0; 0]$, resp. $O = [0; 0; 1]$, je řešením soustavy rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, resp. soustavy $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.

Kromě násobnosti v počátku můžeme nyní také definovat násobnost průsečíku křivek v libovolném bodě Euklidovské roviny, tj. definujeme násobnost libovolného řešení soustavy rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.

Definice 4.2.7.: Nechť $f(x, y)$, $g(x, y)$ jsou nenulové polynomy a nechť $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ jsou jim odpovídající polynomy v projektivní rovině. Nechť dále $[a;\ b]$ je společný bod křivek f, g v Euklidovské rovině, tj. je řešením soustavy rovnic $f = 0$, $g = 0$. Potom násobností $I_{[a;b]}(f, g)$ průsečíku křivek $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ v bodě $[a;\ b]$ (resp. násobností řešení příslušné soustavy rovnic) je násobnost $I_{[a;b;1]}(F, G)$ průsečíku křivek $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ v bodě $[a;\ b;\ 1]$ (resp. násobnost řešení $[a;\ b;\ 1]$ soustavy $F = 0$, $G = 0$).

Průsečík dvou křivek můžeme pomocí vhodné transformace posunout do počátku soustavy souřadnic a pro výpočet násobnosti použít již známé vztahy z kapitoly 4.1. Definujme proto pojem transformace v projektivní rovině.

Definice 4.2.8.: Transformace projektivní roviny je prosté zobrazení projektivní roviny na sebe, které přiřazuje bodu $[x, y, z]$ bod $[x', y', z']$ tak, že platí:

$$x' = ax + by + cz,$$
$$y' = dx + ey + fz,$$
$$z' = gx + hy + iz,$$

kde $a, b, \dots, i$ jsou reálná čísla, a zároveň platí:

$$x = Ax' + By' + Cz',$$

$$y = Dx' + Ey' + Fz',$$

$$z = Gx' + Hy' + Iz',$$

kde $A, B, \dots, I$ jsou reálná čísla.

Příklad 4.2.9.: Transformace projektivní roviny daná následujícím předpisem

$$x' = x + 3z,$$
$$y' = y - 2z,$$
$$z' = z,$$

kde $z = 1$, posouvá soustavu souřadnic projektivní roviny o vektor $(3, -2, 1)$. Protože jde o prosté zobrazení projektivní roviny na sebe, můžeme psát také

$$x = x' - 3z',$$
$$y = y' + 2z',$$
$$z = z'.$$

Obrazem bodu $[x, y, 1]$ v projektivní rovině při této transformaci je bod $[x + 3, y - 2, 1]$. Obrazem bodu $[x, y]$ v Euklidovské rovině by byl bod $[x + 3, y - 2]$, což odpovídá posunutí souřadnic o vektor $(3, -2)$.

Příklad 4.2.10.: Mějme zadánu křivku $k = x^2 - y + 2 = 0$. Odpovídající křivkou v projektivní rovině je křivka

$$x^2 - yz + 2z^2 = 0.$$

Aplikujeme-li transformaci z příkladu 4.2.9., dostaneme předpis

$$(x' - 3z')^2 - (y' + 2z')z' + 2z'^2 = 0.$$

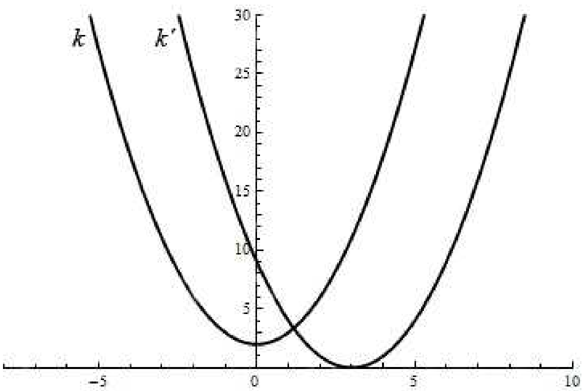
Po úpravě získáme rovnici

$$x'^2 - 6x'z' - y'z' + 9z'^2 = 0.$$

Volbou $z' = 1$ získáme rovnici křivky k' v Euklidovské rovině:

$$k' = x'^2 - 6x' - y' + 9 = 0,$$

která je obrazem křivky k v posunutí o vektor $(3;\ -2)$, viz. Obr. 3.



Obr. 3

Příklad 4.2.11.: Transformace projektivní roviny může být zadána také následovně:

$$x' = z, \qquad y' = y, \qquad z' = x.$$

Lze snadno ověřit, že uvedené vztahy splňují podmínky definice 4.2.8. a jedná se tedy o transformaci projektivní roviny. Můžeme tedy říci, že libovolná permutace souřadnic bude vždy transformací projektivní roviny. Tento případ transformace využijeme při určování násobnosti společných bodů křivek v nekonečnu.

Věta 4.2.12.: Nechť transformace projektivní roviny na sebe zobrazuje bod $[x, y, z]$ na bod $[x', y', z']$. Nechť P je libovolný bod projektivní roviny a bod P' je jeho obraz v transformaci. Nechť jsou křivky $F'(x', y', z') = 0$, $G'(x', y', z') = 0$ obrazy křivek $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ v transformaci. Potom

$$I_P\big(F(x, y, z), G(x, y, z)\big) = I_{P'}\big(F'(x', y', z'), G'(x', y', z')\big),$$

tedy násobnost průsečíku křivek se transformací nezmění, tj. násobnost řešení soustavy rovnic $F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0$ se také transformací nezmění.

Následující věta říká, že násobnost libovolného řešení soustavy rovnic má stejné vlastnosti, jako násobnost řešení [0; 0] podle věty 4.1.2.

Věta 4.2.13.: Nechť $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$, $H(x,y,z) = 0$ jsou křivky a P je bod projektivní roviny. Potom platí následující vlastnosti:

(i) $I_P(F,G)$ je nezáporné celé číslo nebo $+\infty$;

(ii) $I_P(F,G) = I_P(G,F)$;

(iii) $I_P(F,G) \geq 1$ právě tehdy, když $P \in F$ a $P \in G$;

(iv) $I_P(F,G) = I_P(F, G + FH)$, jestliže $G + FH$ je homogenní polynom;

(v) $I_P(F, GH) = I_P(F,G) + I_P(F,H)$;

(vi) $I_P(F,G) = +\infty$, jestliže G je násobkem F a $P \in F$.

Důkaz (dle [4]): Pomocí vhodné transformace projektivní roviny můžeme bod P „posunout“ do počátku soustavy souřadnic. Definice 4.2.12. říká, že násobnost průsečíku křivek v bodě P je stejná jako násobnost průsečíku obrazů těchto křivek v bodě P', tj. v počátku soustavy souřadnic. Podle věty 4.2.6. platí, že provedeme-li zúžení křivek z projektivní do Euklidovské roviny, násobnost průsečíku v počátku se nezmění. Proto vlastnosti (i) – (vi) vyplývají z vlastností věty 4.1.2. a věty 4.1.4. □

Věta 4.2.14.: Nechť a, b jsou reálná čísla.

(i) Nechť $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ jsou homogenní polynomy a jejich zúžením do Euklidovské roviny je $f(x,y) = F(x,y,1)$, $g(x,y) = G(x,y,1)$. Potom

$$I_{[a;b;1]}\big(F(x,y,z), G(x,y,z)\big) = I_{[0;0]}\big(f(x+a, y+b), g(x+a, y+b)\big).$$

(ii) Jestliže $f(x,y)$, $g(x,y)$ jsou nenulové polynomy, potom

$$I_{[a;b]}\big(f(x,y), g(x,y)\big) = I_{[0;0]}\big(f(x+a, y+b), g(x+a, y+b)\big).$$

(iii) Nechť F a G jsou homogenní polynomy a $f(x,y) = F(x,y,1)$, $g(x,y) = G(x,y,1)$. Potom

$$I_{[a;b;1]}(F,G) = I_{[a;b]}(f,g).$$

Důkaz nebudeme provádět, je uveden v [4].

Věta 4.2.14. tedy velice zjednodušuje výpočet násobnosti libovolného průsečíku křivek v Euklidovské rovině, tj. násobnost libovolného řešení soustavy rovnic. Stačí vhodně posunout soustavu souřadnic a aplikovat vlastnosti kapitoly 4.1. Ukažme si ale, jak lze určit násobnost průsečíku dvou křivek v nekonečnu.

Příklad 4.2.15.: Určete násobnost průsečíku křivek $xy - 2x^2 - 1 = 0$, $y^2 + y - 4x^2 = 0$ v nekonečnu.

Řešení: Nejdříve rozšíříme obě křivky do projektivní roviny a určíme společný bod v nekonečnu. Homogenizací křivek jsou křivky

$$xy - 2x^2 - z^2 = 0,$$

$$y^2 + yz - 4x^2 = 0.$$

Připomeňme si, že body v nekonečnu mají souřadnice $[1;\ s;\ 0]$ nebo $[0;\ 1;\ 0]$, kde $s \in \mathbb{R}$. Určeme tedy, které body v nekonečnu leží na obou křivkách, dosazením jejich souřadnic do rovnic křivek. Dosazením bodu $[1;\ s;\ 0]$ získáme soustavu

$$s - 2 = 0,$$

$$s^2 - 4 = 0.$$

Je zřejmé, že získáváme vztah $s = 2$. Společným bodem křivek v nekonečnu je tedy bod [1; 2; 0]. Dále ověříme, zda je také bod [0; 1; 0] společným bodem v nekonečnu. Dosadíme tedy tyto souřadnice do rovnic křivek a získáme:

$$0 = 0,$$

$$1 = 0.$$

Druhá rovnost neplatí a bod [0; 1; 0] tedy není společným bodem zadaných křivek v nekonečnu.

Nyní určíme násobnost průsečíku křivek v bodě $[1;\ 2;\ 0]$. Použijeme transformaci z příkladu 4.2.11., kdy pouze vyměníme souřadnice x a z. Na základě věty 4.2.12. tedy můžeme počítat násobnost v bodě $[0;\ 2;\ 1]$, což již není bod v nekonečnu:

$$I_{[1;2;0]}(xy - 2x^2 - z^2, y^2 + yz - 4x^2) = I_{[0;2;1]}(zy - 2z^2 - x^2, y^2 + yx - 4z^2).$$

Volbou $a = 0$, $b = 2$ získáme na základě vlastnosti (i) z věty 4.2.14. následující vztah pro výpočet násobnosti:

$$I_{[0;2;1]}(zy - 2z^2 - x^2, y^2 + yx - 4z^2) =$$
$$= I_O\big((y+2) - 2 - x^2, (y+2)^2 + (y+2)x - 4\big) =$$
$$= I_O(y - x^2, y^2 + 4y + yx + 2x).$$

S využitím vět 4.1.7. a 4.1.9. z kapitoly 4.1. dopočítáme výslednou násobnost:

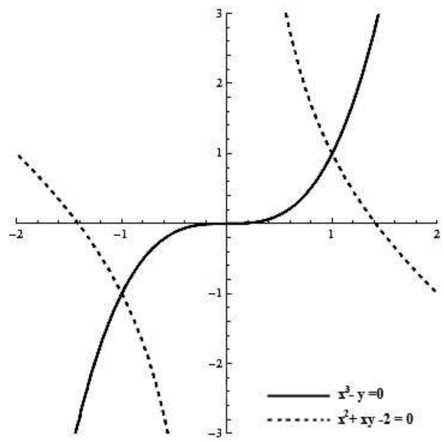
$$I_O(y - x^2, y^2 + 4y + yx + 2x) = I_O(y - x^2, x^4 + 4x^2 + x^3 + 2x) = 1.$$

Násobnost průsečíku křivek $xy - 2x^2 - 1 = 0$, $y^2 + y - 4x^2 = 0$ v nekonečnu je 1.

Příklad 4.2.16.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$x^2 + xy - 2 = 0,$$
$$x^3 - y = 0.$$

Určete dále násobnost jednotlivých řešení a násobnost společného bodu zadaných křivek v nekonečnu.



Obr. 4

<u>Řešení:</u> Vidíme, že soustava rovnic je v jednom ze speciálních tvarů, které jsme uvedli v kapitole 2. Z druhé rovnice vyjádříme neznámou y a získáme $y = x^3$. Po dosazení do první rovnice dostáváme

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Upravíme na tvar

$$(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1) = 0.$$

Z tohoto tvaru získáváme hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Po dosazení do rovnic soustavy získáme také hodnoty $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Řešením soustavy rovnic jsou tedy uspořádané dvojice $[1; 1], [-1;\ -1]$.

Určeme nyní násobnost řešení $[1;\ 1]$. Na základě věty 4.2.14. můžeme psát:

$$I_{[1;1]}(x^2 + xy - 2, x^3 - y) = I_O\big((x+1)^2 + (x+1)(y+1) - 2, (x+1)^3 - (y+1)\big) =$$
$$= I_O(x^2 + xy + 3x + y, x^3 + 3x^2 + 3x - y).$$

Polynom $x^3 + 3x^2 + 3x - y$ je ve tvaru $y = p(x)$, a proto podle věty 4.1.7. platí následující rovnost:

$$I_O(x^2 + xy + 3x + y, x^3 + 3x^2 + 3x - y) =$$
$$= I_O(x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x, x^3 + 3x^2 + 3x - y).$$

Následně na základě věty 4.1.9. určíme

$$I_{[1;1]}(x^2 + xy - 2, x^3 - y) = 1.$$

Násobnost řešení $[1;\ 1]$ dané soustavy rovnic je rovno 1. Násobnost řešení $[-1;\ -1]$ je také 1 (při jejím výpočtu bychom postupovali stejně jako při hledání násobnosti řešení $[1;\ 1]$).

K tomu, abychom určili společný bod zadaných křivek v nekonečnu, musíme nejdříve provést jejich homogenizaci:

$$x^2 + xy - 2z^2 = 0,$$

$$x^3 - yz^2 = 0.$$

Do soustavy rovnic nyní dosadíme hodnoty $[1;\ s;\ 0]$ a $[0;\ 1;\ 0]$:

$$1 + s = 0, \qquad\qquad 0 = 0,$$

$$1 = 0, \qquad\qquad 0 = 0.$$

Vidíme, že žádný bod ve tvaru $[1;\ s;\ 0]$ není řešením dané soustavy rovnic. Společným bodem křivek v nekonečnu je pouze bod $[0;\ 1;\ 0]$. K určení jeho násobnosti využijeme takovou transformaci, kdy pouze vyměníme souřadnice y a z.

$$I_{[0;1;0]}(x^2 + xy - 2z^2, x^3 - yz^2) = I_{[0;0;1]}(x^2 + xz - 2y^2, x^3 - zy^2) =$$
$$= I_O(x^2 + x - 2y^2, x^3 - y^2) = I_O(\ x^2 + x - 2y^2 - 2(x^3 - y^2), x^3 - y^2) =$$
$$= I_O(x(-2x^2 + x + 1), x^3 - y^2) = I_O(x, x^3 - y^2) = I_O(x, -y^2) = 2.$$

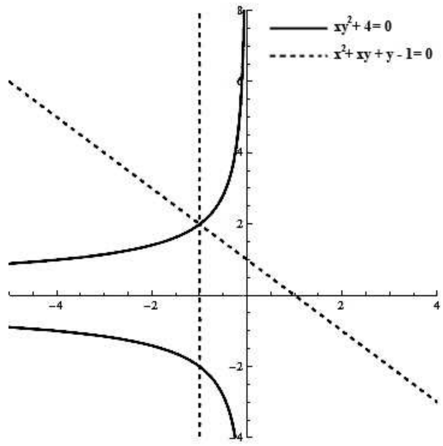
Násobnost společného bodu křivek $x^2 + xy - 2 = 0$, $x^3 - y = 0$ v nekonečnu je 2.

Příklad 4.2.17.: Řešte nad $\mathbb{R}$ následující soustavu rovnic a určete násobnost jednotlivých řešení.

$$x^2 + xy + y = 1,$$

$$xy^2 + 4 = 0.$$

Určete dále násobnost průsečíku zadaných křivek v nekonečnu.



Obr. 5

Řešení: Pro řešení této soustavy rovnic využijeme výpočet rezultantu.

$$res_x\big(f(x,y),g(x,y)\big) = \begin{vmatrix} 1 & y & y-1 \\ y^2 & 4 & 0 \\ 0 & y^2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + y^4(y-1) - 4y^3 =$$

$$= y^5 - y^4 - 4y^3 + 16 = (2-y)^2(2+y)(y^2+y+2).$$

Z rovnosti $(2-y)^2(2+y)(y^2+y+2) = 0$ získáváme kořeny $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Nalezené hodnoty dosadíme do původní soustavy a získáme $x_1 = -1$, $x_2 = -1$. Řešením soustavy rovnic je množina $P = \{[-1;2],[-1;\ -2]\}$.

Řešení této soustavy bychom si mohli ulehčit tím, že pro výpočet rezultantu využijeme program Wolfram Mathematica 7.0:

$$In[1]:= \ Factor[Resultant[x\char`^2 + x*y + y - 1, x*y\char`^2 + 4, x]]$$

$$Out[1] = \ (-2+y)^2(2+y)(2+y+y^2).$$

Nyní určíme násobnost řešení $[-1;\ 2]$. Nejdříve posuneme řešení do bodu $[0;\ 0]$:

$$I_{[-1;2]}(x^2 + xy + y - 1, xy^2 + 4) =$$
$$= I_O((x-1)^2 + (x-1)(y+2) + y + 2 - 1, (x-1)(y+2)^2 + 4) =$$
$$= I_O(x^2 + xy, xy^2 + 4xy + 4x - y^2 - 4y).$$

Na základě vlastností násobnosti z věty 4.1.2. a dalších vět o násobnosti z kapitoly 4.1. provedeme následující úpravy:

$$I_O(x^2 + xy, xy^2 + 4xy + 4x - y^2 - 4y) =$$
$$= I_O\big(x^2 + xy, xy^2 + 4xy + 4x - y^2 - 4y - y(x^2 + xy)\big) =$$
$$= I_O(x(x+y), -y^2 + 4xy - x^2y - 4y + 4x) =$$
$$= I_O(x, -y^2 + 4xy - x^2y - 4y + 4x) + I_O(x+y, -y^2 + 4xy - x^2y - 4y + 4x) =$$
$$= I_O(x, x(4y - xy + 4) - y^2 - 4y) +$$
$$+ I_O\big(x+y, -y^2 + 4xy - x^2y - 4y + 4x + y(x+y)\big) =$$
$$= I_O\big(x, y(-y-4)\big) + I_O(x+y, 5xy - x^2y - 4y + 4x) =$$
$$= I_O(x,y) + I_O\big((5x - x^2 - 4)x + (5x - x^2 - 4)y, (5x - x^2 - 4)y + 4x\big) = 1 +$$
$$+ I_O\big((5x - x^2 - 4)x + (5x - x^2 - 4)y - (5x - x^2 - 4)y - 4x, (5x - x^2 - 4)y + 4x\big) =$$
$$= 1 + I_O(5xy - x^2y - 4y + 4x, 5x^2 - x^3 - 8x) =$$

$$= 1 + I_O\big(5xy - x^2y - 4y + 4x, x(5x - x^2 - 8)\big) = 1 + I_O(x(5y - xy + 4) - 4y, x) =$$
$$= 1 + I_O(-4y, x) = 2.$$

Řešení $[-1;\ 2]$ má tedy násobnost 2, tj. je dvojnásobné.

Analogicky určíme násobnost řešení $[-1;\ -2]$:

$$I_{[-1;\,-2]}(x^2 + xy + y - 1, xy^2 + 4) = I_O(x^2 + xy - 4x, xy^2 - 4xy + 4x - y^2 + 4y) =$$
$$= I_O(x(x + y - 4), xy^2 - 4xy + 4x - y^2 + 4y) = I_O(x, x(y^2 - 4y + 4) - y^2 + 4y) =$$
$$= I_O\big(x, y(-y + 4)\big) = 1.$$

Řešení $[-1;\ -2]$ je tedy pouze jednonásobné.

Soustava rovnic má v projektivní rovině následující tvar:

$$x^2 + xy + yz - z^2 = 0,$$

$$xy^2 + 4z^3 = 0.$$

Dosazením $[1;\ s;\ 0]$, $[0;\ 1;\ 0]$ do této soustavy zjistíme, že společným bodem křivek v nekonečnu je bod $[0;\ 1;\ 0]$, který jediný vyhovuje soustavě rovnic. Použitím stejné transformace jako v předchozím příkladě získáváme vztah:

$$I_{[0;1;0]}(x^2 + xy + yz - z^2, xy^2 + 4z^3) = I_{[0;0;1]}(x^2 + xz + zy - y^2, xz^2 + 4y^3) =$$
$$= I_O(x^2 + x + y - y^2, x + 4y^3) = I_O((4y^3)^2 + 4y^3 + y - y^2, x + 4y^3) = 1.$$

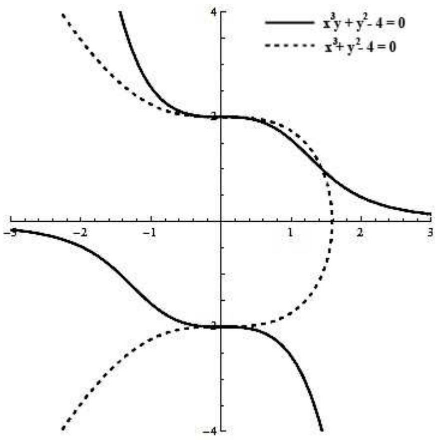
Násobnost průsečíku křivek $x^2 + xy + y = 1$, $xy^2 + 4 = 0$ v nekonečnu je 1.

Příklad 4.2.18.: Řešte nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$x^3 + y^2 = 4,$$

$$x^3y + y^2 = 4.$$

Určete dále násobnost jednotlivých řešení a násobnost průsečíku křivek v nekonečnu.



Obr. 6

<u>Řešení:</u> K řešení soustavy rovnic opět využijeme program Wolfram Mathematica 7.0. Můžeme určit rezultant polynomů $x^3 + y^2 - 4$, $x^3y + y^2 - 4$:

$$In[1] := \ Resultant[x\text{^}3 + y\text{^}2 - 4, x\text{^}3\ y + y\text{^}2 - 4, x]$$

$$Out[1] = \ (-4 + 4\ y + y\text{^}2 - y\text{^}3)\text{^}3.$$

Máme ale i jinou možnost, a to určit Gröbnerovu bázi ideálu $\langle x^3 + y^2 - 4, x^3y + y^2 - 4\rangle$:

$$In[2] := \ GroebnerBasis[\{x\text{^}3 + y\text{^}2 - 4, x\text{^}3\ y + y\text{^}2 - 4\}, \{x, y\}]$$

$$Out[2] = \ \{4 - 4\ y - y^2 + y^3, -4 + x^3 + y^2\}.$$

Ze vztahu $(-y^3 + y^2 + 4y - 4)^3 = ((2 - y)(y - 1)(y + 2))^3 = 0$ nebo ze soustavy rovnic

$$y^3 - y^2 - 4y + 4 = 0,$$

$$x^3 + y^2 = 4$$

získáme hodnoty $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, $y_3 = 1$. Dosazením těchto hodnot do původní soustavy rovnic získáme hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt[3]{3}$. Řešením zadané soustavy polynomiálních rovnic je tedy množina $P = \{[0; 2], [0; \ -2], [\sqrt[3]{3}; 1]\}$.

Určeme tedy násobnost řešení $[0;\ 2]$:

$$I_{[0;2]}(x^3 + y^2 - 4, x^3y + y^2 - 4) = I_O(x^3 + (y + 2)^2 - 4, x^3(y + 2) + (y + 2)^2 - 4) =$$
$$= I_O(x^3 + y^2 + 4y, x^3y + 2x^3 + y^2 + 4y) =$$
$$= I_O(x^3 + y^2 + 4y - (x^3y + 2x^3 + y^2 + 4y), x^3y + 2x^3 + y^2 + 4y) =$$

$$= I_O(-x^3y - x^3, x^3y + 2x^3 + y^2 + 4y) = I_O(x^3(-y-1), x^3y + 2x^3 + y^2 + 4y) =$$
$$= I_O(x^3, x^3(y+2) + y^2 + 4y) = I_O(x^3, y^2 + 4y) = 3I_O\big(x, y(y+4)\big) = 3I_O(x,y) = 3.$$

Stejným způsobem získáme násobnost řešení $[0;\ -2]$:

$$I_{[0;-2]}(x^3 + y^2 - 4, x^3y + y^2 - 4) = I_O(x^3 + (y-2)^2 - 4, x^3(y-2) + (y-2)^2 - 4) =$$
$$= I_O(x^3 + y^2 - 4y, x^3y - 2x^3 + y^2 - 4y) =$$
$$= I_O(x^3 + y^2 - 4y - (x^3y - 2x^3 + y^2 - 4y), x^3y - 2x^3 + y^2 - 4y) =$$
$$= I_O(3x^3 - x^3y, x^3y - 2x^3 + y^2 - 4y) = I_O(x^3(3-y), x^3(y-2) + y^2 - 4y) =$$
$$= I_O(x^3, x^3(y-2) + y^2 - 4y) = I_O(x^3, y^2 - 4y) = 3I_O\big(x, y(y-4)\big) = 3I_O(x,y) = 3.$$

Obdobně bychom zjistili, že násobnost řešení $[\sqrt[3]{3}; 1]$ je pouze 1.

Zadaná soustava rovnic má tedy v oboru reálných čísel trojnásobné řešení $[0;\ 2]$, trojnásobné řešení $[0;\ -2]$ a jednonásobné řešení $[\sqrt[3]{3}; 1]$.

Rozšiřme nyní křivky $x^3 + y^2 = 4$, $x^3y + y^2 = 4$ do projektivní roviny:

$$x^3 + y^2z - 4z^3 = 0,$$

$$x^3y + y^2z^2 - 4z^4 = 0.$$

Dosazením bodů v nekonečnu $[1;\ s;\ 0]$ a $[0;\ 1;\ 0]$ do vzniklé soustavy zjistíme, jaké společné body v nekonečnu leží na zadaných křivkách.

$$1 = 0, \qquad\qquad 0 = 0,$$

$$s = 0, \qquad\qquad 0 = 0.$$

Z těchto dvou soustav rovnic vidíme, že společným bodem křivek v nekonečnu je pouze bod $[0;\ 1;\ 0]$. Transformací, kterou využijeme pro výpočet násobnosti, bude opět záměna hodnot y a z.

$$I_{[0;1;0]}(x^3 + y^2z - 4z^3, x^3y + y^2z^2 - 4z^4) =$$
$$= I_{[0;0;1]}(x^3 + z^2y - 4y^3, x^3z + z^2y^2 - 4y^4) = I_O(x^3 + y - 4y^3, x^3 + y^2 - 4y^4) =$$
$$= I_O(x^3 + y - 4y^3 - (\, x^3 + y^2 - 4y^4), x^3 + y^2 - 4y^4) =$$
$$= I_O(y(4y^3 - 4y^2 - y + 1), x^3 + y^2 - 4y^4) = I_O\big(y, x^3 + y(y - 4y^3)\big) =$$
$$= I_O(y, x^3) = 3.$$

Násobnost průsečíku zadaných křivek v nekonečnu je 3.

Závěr

Cílem této práce bylo podat přehled o způsobech řešení soustav polynomiálních rovnic se dvěma neznámými a seznámit čtenáře s pojmem násobnosti jednotlivých řešení soustav rovnic.

V první části práce jsme uvedli některé speciální tvary soustav, k jejichž řešení nebylo zapotřebí zavádění nových metod, a ke každému speciálnímu tvaru jsme uvedli ilustrační příklad. Pro řešení dalších soustav polynomiálních rovnic jsme již museli zavést nové metody, kterými byly rezultanty a Gröbnerovy báze. K zavedení pojmu Gröbnerova báze bylo zapotřebí definovat uspořádání termů a uvést způsob dělení polynomů se dvěma neznámými. Téměř všechna tvrzení byla v této části demonstrována na příkladech, což napomáhá srozumitelnosti práce. Protože se této problematice věnovalo již mnoho autorů, jsou místo důkazů jednotlivých vět uváděny pouze odkazy na tyto autory. Zjistili jsme také, že výpočet rezultantů i Gröbnerových bází je mnohem rychlejší a efektivnější s pomocí matematických programů.

Ve druhé části práce věnované násobnostem řešení soustav polynomiálních rovnic jsme nejdříve zavedli násobnost řešení [0; 0] a vyslovili jsme její základní vlastnosti. Použití těchto vlastností jsme také demonstrovali na příkladech. Díky transformaci souřadnic jsme byli schopni určit násobnost libovolného řešení soustavy polynomiálních rovnic a násobnost průsečíku algebraických křivek v nekonečnu. V této druhé části práce jsou již uvedené také důkazy jednotlivých vět.

S určováním násobnosti řešení jsem se během studia nikdy nesetkala, a proto pro mne bylo zpracovávání zejména této části velice zajímavé a přínosné. Doufám, že hlavně tato část bude přínosná i pro čtenáře, protože této problematice se zatím nevěnovalo mnoho českých autorů.

Resumé

This work is devoted to ways of solving systems of polynomial equations in two variables and determining the multiplicity of solutions of these systems.

In the first part are first defined the fundamental concepts that are at work subsequently use. The rest of this part is focused on solving systems of polynomial equations. First there are present some types of systems, to deal with them is enough knowledge of mathematics at the primary and secondary schools. Afterwards, the reader is acquainted with the methods of solving arbitrary systems of polynomial equations in two variables, which are the methods of resultants and Groebner basis.

In the second part of the thesis is defined the multiplicity of solutions of systems of equations. First it is only a multiplicity of solution [0; 0], which is later, with the introduction of coordinate transformation, extends to an arbitrary solution of systems of polynomial equations in two variables.

Seznam literatury

[1] BECKER, Thomas et al. *Gröbner Bases: a computational approach to commutative algebra*. New York: Springer, 1993, xxii, 574 s. Graduate texts in mathematics. ISBN 0-387-97971-9.

[2] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010, 435 s. ISBN 978-80-7378-135-4.

[3] BICAN, Ladislav. *Algebra: (pro učitelské studium)*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001, 110 s. ISBN 80-200-0860-8.

[4] BIX, Robert. *Conics and Cubics: a concrete introduction to algebraic curves*. New York: Springer, 1998, x, 289 s. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 0-387-98401-1.

[5] COX, David, LITTLE, John a O'SHEA, Donal. *Ideals, Varieties, and Algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 2nd ed. New York: Springer, 1997, xiii, 536 s. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 0-387-94680-2.

[6] DRÁBEK, Jaroslav a HORA, Jaroslav. *Algebra. Polynomy a rovnice*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001, 125 s. ISBN 80-708-2787-4.

[7] ERNESTOVÁ, Martina. *Algoritmické metody pro řešení soustav polynomiálních rovnic*. Plzeň, 1999. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta pedagogická.

[8] GLOC, Jaromír. Řešení rovnic a nerovnic. *ROVNICE A NEROVNICE* [online]. 2008 [cit. 2014-03-30]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/reseni.html#soustavy

[9] HORA, Jaroslav. O řešení soustav algebraických rovnic pomocí Gröbnerových bází v programech Maple a Mathematica. In: *Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu: sborník ze semináře kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum, 1998, s. 12-27. ISBN 80-7020-040-5.

[10] HORA, Jaroslav. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole. III. díl*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2001, 74 s. ISBN 80-7020-092-8.

[11] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1953, 488 s.

Seznam obrázků