ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Normální rozdělení

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Markéta Cerhová

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: RNDr. Václav Kohout

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 31. března 2014

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat panu RNDr. Václavu Kohoutovi za pomoc při zpracování bakalářské práce. Rodině a blízkým přátelům za podporu a pomoc.

Obsah

Úvod

Pro svoji bakalářskou práci jsem si vybrala téma Normální rozdělní. V první části se zabývám historií a významnými vědci, kteří se podíleli na vývoji normálního rozdělení. V další části se snažím více přiblížit normální rozdělení tím, že zde popisuji některé jeho vlastnosti. Ve třetí části se zabývám centrálními limitními větami, které se využívají k výpočtům pravděpodobnosti. Poslední část zahrnuje příklady jak na normální rozdělení, tak na centrální limitní věty. Ke své práci jsem využívala program Mathematica. Pomocí tohoto programu jsem vytvořila grafy a spočítala několik příkladů.

Normální rozdělení je spojité rozdělení, na jehož objevení se podílelo několik nejvýznamnějších matematiků, jako byl Carl Gauss, Peirre Simon de Laplace a Pafnutij Lvovič Čebyšev.

Normální rozdělení je jedno z nevýznamnějších rozdělení, které má široké využití. Dokáže aproximovat jiné pravděpodobnostní rozdělení. Normální rozdělení má mnohá využití a to i v jiných oborech než je matematika. Například v biologie, psychologii a pedagogice.

Centrální limitní věty, kterými se zabývám ve třetí části bakalářské práci, jsou ve velmi velké spojitosti s normálním rozdělením. Pomocí centrálních limitních vět se velká skupina rozděleních za určitých podmínek blíží normálnímu rozdělení.

1. Historie normálního rozdělení

Normální nebo-li Gaussovo rozdělení. Během vývoje normálního rozdělení mělo normální rozdělení několik různých pojmenování. Vždy se nazývalo podle různých vědců, kteří se zasloužili jeho tvorbě. V minulosti se často nazývalo Gaussovo rozdělení nebo Laplaceovo rozdělení. Dále bylo pojmenované po Quetelovi nebo Maxwellovi. Nikdy se však normální rozdělení nejmenovalo po svém zakladateli Abrahamu de Moivre. Své nynější jméno vymysleli v Anglické škole biometrie, prosadil ho Karel Pearson.

Na vývoji normálního rozdělení se podílela spousta lidí z různých částí světa. Například z Anglie Pearson, z Ruska Čebyšev apod.

První zmínky, které napomohly vývoji normálního rozdělení, zveřejnil Galileo Galilei. Díky měření vzdáleností hvězd, zdůvodnil vzniklé náhodné chyby v astronomii. Tím v matematice vysvětlil, že výskyt malých chyb je pravděpodobnější než výskyt velkých chyb. Z toho vyplývá, že měření, které je v matematice používané, je náchylné k chybám. Tímto Galileo Galilei odhalil mnoho charakteristik normálního rozdělení. Jeho objevy napomohli vývoji normálního rozdělení, nejsou však považovány za první využití normálního rozdělení. První zmínkou o normálním rozdělení je považováno dílo od Abrahama de Moivreho „The Doctrine of Chance“. V tomto díle je i známá De Moivre-Laplace limitní věta. Proto je Abraham de Moivre považován za zakladatele normálního rozdělení.

De Moivre-Laplace limitní věta je speciální případ centrální limitní věty. Je založena na vztahu mezi binomickým rozdělením s parametry n a p a normálním rozložením pro n. Jeho užitečnost spočívá především v odhadu distribuční funkce $F(x)$ z binomického rozdělení do distribuční funkce normálního rozdělení. (Springer reference, 2013) Vzniká křivka, která se nyní nazývá Normální či Gaussova křivka.

De Moivre-Laplace věta: *Jestliže má náhodná veličina X binomické rozdělení B_i (n;p), pak*

$$lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np\,(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x), x \in R$$

$$\textit{tedy, } P\,(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right)$$

(ČVUT, Normální rozdělení)

Limitní věta má jméno také po známém vědci, který velmi přispěl vývoji pravděpodobnosti, Pierre Simon de Laplace. Laplace byl vědec, který žil v Paříži a zabýval se mimo jiné i pravděpodobností. Jeho dílo „Théorie analytice des Probabilités“ je složené z několika částí, v nichž se Laplace zabýval generováním funkcí, definováním pravděpodobnosti, Bayesovým pravidlem, aplikovanou pravděpodobností a chybami v měření.

Adrien-Maria Legrende se jako další zabýval problémy, které vyplývaly z pozorování v astronomii. V roce 1805 Legendre uvedl princip nejmenších čtverců. *Metoda nejmenších čtverců se používá při zpracování dat zatížených chybou pro nalezení nejvhodnějšího odhadu.(Natur.cuni, Metoda nejmenších čtverců)*

Nezávisle na Legendrovi práci v roce 1809 Carl Friedrich Gauss publikoval své dílo: „Theories Motes Corporum Coeletium,“ kde se zabýval principem nejmenších čtverců. Jeho dílo vedlo ke sporu mezi ním a Legendrem, kvůli prvenství tohoto objevu. Gauss se totiž touto problematikou zabýval od roku 1795. V té době mnoho vědců pracovalo bez toho, aby znali objevy a díla jiných vědců.

Po objevení metody nejmenších čtverců se několik let vývoj normálního rozdělení nijak neposunul dál.

Astronom Friedrich Wilhelm Bessel ve své knize „Hagen“ publikoval srovnání pozorovaných zbytků. Dále se zabýval ve své knize rozdělením celkových chyb, které odvodil z normálního rozdělení. Výsledkem rozdělení chyb bylo tvrzení, že chyba je výsledkem nekonečně velkých čísel, která jsou buď pozitivní, nebo negativní elementární chyby. Tento závěr vedl Bessela v roce 1838 k rozvoji hypotézy elementárních chyb. Hypotéza elementárních chyb byla zejména rozšířená mezi astronomy.

Hypotéza elementárních chyb: *Každé měření se skládá z několika úkonů, které dohromady dávají více vzájemně nezávislých příčin, z nichž každá může být zdrojem jiné* chyby. *Výsledná chyba ve výsledku měření je vždy algebraický součet elementárních chyb různého znaménka a velikosti.*

Zkušenost a statistické rozbory souborů měřických chyb *nás vedou k přesvědčení, že „každá náhodná chyba vznikla kombinací většího počtu* elementárních chyb *různé velikosti, jejichž znaménko je náhodné. (IngGeo, 2012)*

V dalších letech bylo několik vědců, kteří se svojí práci, i když byla z jiného oboru, dotkli pravděpodobnosti, normálního rozdělení. Jeden z nich byl matematický fyzik James Clierk Maxwell, který v roce 1860 publikoval svojí práci na téma: kinetická teorie plynu. Maxwell odvodil normální rozdělení z ortogonální veličiny rychlosti.

Boltzmann se svojí prací: „Moderní teorie statistické mechaniky“ navázal na Maxwella. Boltzmann se ve své práci snažil popsat pohyb plynů pomocí statistických funkcí, než pomocí deterministických funkcí.

Normální rozdělení a její křivka byla a je využívaná v mnoha oborech. Adolphe Quetelet využil normální křivku v astronomii. Quetelet nechtěl využít ke své práci Laplaceovu limitní větu a tak využíval symetrické binomické rozdělení.

Angličan Francis Galton byl vědec, který jako první využil Quetelovu práci ke své práci. Ve svém díle „Natural Inheritance“ využil aplikování normální křivky. Zakreslil data ve dvou rozměrech se stejnou intenzitou. Tato data se zobrazila do elipsové křivky. S pomocí matematika Hamiltona Dicksona, Galton vymyslel lineární regresní model, pojem korelace a rovnici dvojrozměrného normálního rozdělení, které spolu s elipsovou křivkou velice prospěly vývoji normálního rozdělení. Dále Galton pomocí svého pozorování dat v jiné frekvenci za pomocí logaritmů, definoval logaritmicko-normální rozdělení.

Carl Pearson byl významný anglický vědec, který působil v anglické škole biometrii. Pearson, vyvinul systém četnosti křivky v závislosti na parametru. Během jeho práce v Anglii byla práce Legendrea a Gausse nepozorovaná, protože Pearson se zabýval vícerozměrným normálním rozdělení.

V roce 1892 zoolog Weldon, který spolupracoval s Pearsonem, svým pozorováním přišel na zajímavou výjimku, která se vyskytovala mezi normálními křivkami. Tuto výjimku Weldon nazval: „dvou-hrbatá křivka.“ Tato křivka pro normální rozdělení byla problémem, který Carl Pearson v roce 1894 vyřešil. A to tím, že zavedl metodu momentů, jako techniky pro zavedení frekvenčního rozdělení.

Metoda momentů: je založena na rovnosti výběrových momentů a moment rozdělení. Nelze jednoznačně rozhodnout, která z metod dává lepší výsledky. Rozhodování provádíme podle konkrétní situace, nejčastěji rozhoduje jednoduchost získaných vzorců. Metoda momentů zohledňuje všechna data z výběru a volíme ji v případech, kdy je soustava věrohodných rovnic obtížně řešitelná. Pro základní rozdělení dávají obě metody shodné výsledky a v případě složitějších rozdělení můžeme jako další kritérium uvažovat, které vzorce jsou méně citlivé na zavlečené chyby do hodnot výběru. (ČVUT, Bodové odhady parametrů)

Tato práce vedla Pearsona k sepsání knihy v roce 1900 a založení „chí-kvadrát test dobré shody“ testu, který je pro nás základem moderní statistiky.

Chi-kvadrát test: *se používá pro zjištění, zda vzorek dat odpovídá předpokládanému rozdělení.*

-dělí se na dva testy – „ test of goodness-of-fit“ a „ test of independence“

Chi-kvadrát test dobré shody: *jde o neparametrický test, který se provádí při využití kategoriálních dat. (Statistics lectures,2012)*

V Anglické škole biometrie se Pearson zabýval různými problémy, kde využíval statistickou analýzu. Pro statistickou analýzu využíval velké datové soubory. Oproti tomu jeho studen W. S. Gasset, který pracoval v Guinessově společnosti v Dublinu, řešil zde různé problémy s pomocí malých datových souborů. Poté pracoval pod vedením Pearsona v biometrické laboratoři. Tato práce ho vedla k napsání práce: „The Probable Error of a Mean.“ V této knize odvodil t-rozdělení neboli studentovo rozdělení.

T-rozdělení: *využívá se nejčastěji ve statistice. Využívá se k vyvozování závěrů na základě malých vzorků. (Iastat.vse)* Poměr zkoumaných vzorků je rozdíl v normálním rozdělení.

V Anglické škole biometrie nedošlo k nijak velké a zásadní studii, která by se zabývala teorií pravděpodobnosti. Oproti tomu ruská škola Pafnutije Lvoviče Čebyševova a jeho žáků Markova a Ljapunova ano.

Od poloviny 19. Století Čebyševova škola aplikovala matematické zákony velkých čísel, centrální limitní větu a její vlastnosti. Zavedli pojem náhodné veličiny, kterým byli schopni odvodit podmínky pro standardní závislé veličiny stejně dobře, jako pro nezávislé náhodné veličiny. Problémy, které vyvstaly, dokázal Čebyšev vyřešit pomocí použití metody momentů.

Alexandr Andrejevič Markov opravil Čebyševovu větu. Čebyšeův druhý žák Alexandr Michajlovič Ljapunov dokázal centrální limitní teorii pomocí klasické analýzy a charakteristických funkcí. Díky tomuto důkazu se už nevyžaduje metoda momentů. Přesto však metoda momentů neupadla.

Pevným základem se stala práce: „Introduction to Mathematical Probability“ od Uspensky v které se nachází mnoho vět, které byly rozšířeny zejména v minulosti. Můžeme zde najít práci Bernsteina, Chinčin, Kolmogorova a práci vědců z ruské školy Majstrova, Adama a Čebyševova.

Statistika od roku 1915, pomocí Fishera, šla dopředu díky rozdělení korelačních koeficientů, absolutní odchylky v normálních vzorcích, regresního koeficientu, vícenásobné regrese a parciálních korelačních koeficientů.

V průběhu 20. století normální rozdělení hrálo důležitou roli ve statistické analýze. Od roku 1960 byla však větší pozornost věnovaná vymýšlení testů, zabývání se různými předpoklady a odhady.

1.2 Významní vědci

1.2.1 Abraham de Moivre

Abraham de Moivre byl francouzský matematik, který se narodil 26. května 1667. I když se zpočátku nevěnoval matematice, našel si k ní cestu a udělal velmi významný průlom do teorie pravděpodobnosti.

Pocházel z protestantské rodiny. Proto byl v jedenácti poslán na akademii u Sedanu, která byla protestantská. Zde studoval řečtinu. V roce 1598 byl vydán edikt, který měl zaručovat svobodu vyznání, poté Abraham de Moivre studoval v Saumuru. Kde studoval logiku. Ve svém volném čase se začal věnovat matematice. Poté, co se jeho rodiče přestěhovali do Paříže, změnil školu a začal studovat na College de Harcourt. Začal zde studovat matematiku a fyziku.

Po svých studiích se díky náboženskému přesvědčení dostal do vězení, kde strávil tři roky. A to proto, že Ludvík XIV. zrušil edikt, který zaručoval svobodu vyznání. Když po třech letech byl propuštěn, opustil Francii a odcestoval do Anglie. Usadil se v Londýně, kde soukromě učil matematiku.

Na návštěvě u vévody se dostal k dílu „Principia“ od Newtona. Pomocí tohoto díla, které studoval, se seznámil s Newtonem. Seznámení s Newtonem mu pomohlo dostat se i přes náboženskou diskriminaci do komise „ Royal Society“.

První práce, kterou vydal roku 1718, s názvem „ Metody výpočtu pravděpodobnosti událostí ve hře“ se stala průkopem pro vývoj teorie pravděpodobnosti. Významnou práci, která byla velkým přínosem, vydal až roku 1756 „The Doctrine of Chance“. V této práci se jako první přiblížil k normálnímu rozdělení.

I přes jeho velký přínos a znalosti se mu nikdy nepodařilo dostat post na univerzitě. A tak, protože byl jen soukromý učitel, zemřel Abraham de Moivre v chudobě.

1.2.2 Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon de Laplace byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik. Byl členem Francouzské akademie věd a královské společnosti v Londýně. Narodil se 23. března 1749.

Laplace nejdříve studoval ve vojenské škole, kde si všimli jeho nadání a tak ve svých šestnácti byl přijat na univerzitu v Caen. Po dvou letech odjel do Paříže, kde získal místo profesora matematiky na vysoké škole, díky jeho práci „ teorie o mechanice“, kterou zaslal známému vědci d´Alembertovi.

Dne 31. března 1773 byl Pierre Simon de Laplace zvolen do Akademie věd a v roce 1784 byl zvolen členem královské společnosti.

Laplace měl velký přínos astronomii, protože objevil či vyřešil spoustu problémů. Vyřešil stabilitu sluneční soustavy, vypočetl pohyb planet v souladu s newtonovskou mechanikou, navázal na Kanta a vymyslel teorii o vzniku sluneční soustavy. Ještě více však přispěl matematice a to zejména teorii pravděpodobnosti. Kniha „Traité de Mécanique Celéste“, je rozdělená na dvě části. První se zabývá diferenciálními rovnicemi a jejich řešením. V druhé části se zabýval mechanikou aplikovanou na studium planet. Objevují se zde takzvané Laplaceovy rovnice. Jeho další významné dílo „Théorie analytic des Probabilités“, kde se zabývá diferenciálními rovnicemi a aproximací různých vět z teorie pravděpodobnosti.

Laplace byl Napoleonem Bonaparte jmenován ministrem, poté členem senátu. Byl mu udělen hraběcí titul. Díky svým postojům a vědeckým úspěchům si vytvořil řadu nepřátel.

1.2.3 Johann Carl Friedrich Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss byl německý matematik a fyzik, který se narodil 30. dubna 1777. Pocházel z chudé rodiny. Svojí chytrostí se vyznačoval už jako malý, a proto začal studovat na gymnázium. Studoval matematiku a vědy. Pomocí vévody Karla II. dostal stipendium a mohl tak studovat na Collegium Carolinum. Dále studoval na univerzitě v Göttingenu.

Během svého studia nezávisle objevil Bodeho zákon, binomickou větu, aritmeticko-geometrický průměr, zákon kvadratické vzájemnosti a větu o prvočíslech. Ve své disertační práci se věnoval základním větám algebry.

Po svém studiu vydal v roce 1801 knihu „ Disquisitiones Arithmeticae“, kde se hlavně zabýval teorií čísel a zákonem kvadratické vzájemnosti.

Gauss pomohl Zachovi, astronomu, který objevil trpasličí planetu Ceres, tím, že vypočítal její pozici. Po této pomoci se stal profesorem astronomie a ředitelem hvězdárny, kde působil až do konce svého života. Poté publikoval dílo „ Theories Motes Corporum Coeletium“, kde se zabýval metodou nejmenších čtverců. Kvůli vydání této publikace se dostal do sporu s dalším významným vědcem a to Adrienem-Maria Legrendem, kvůli prvenství tohoto objevu.

Začal se věnovat různým průzkumům, které vedli k objevení normálního rozdělení. Poté se začal více věnovat diferenciální geometrii a zakřivení. Vše se objevuje v jeho dalším díle „Theorema egregium“.

Objevil a zabýval se neeuklidovkou geometrií, kterou však nepublikoval. Obával se, že by tím jeho pověst utrpěla. A proto své myšlenky korespondoval se svým přítelem Farkasem Balayem. Jeho syn János Bolayi v roce 1832 publikoval práci na téma neeuklidovská geometrie, která mohla být považována za Gaussovu práci.

V pozdějších letech svého života se věnoval i fyzice. Spolupracoval s profesorem fyziky Wihlelmem Weberem. Spolu zkonstruovali elektromagnetický telegraf. Poté Gauss nechal vybudovat magnetickou observatoř vedle hvězdárny.

Zemřel v roce 1855. Během svého života vydal nesčetně prací, byl velkým přínosem pro matematiku. Přes jeho velké úspěchy v tomto oboru ve svém osobním životě neměl takové štěstí. Byl dvakrát ženatý a měl šest dětí. Ze smrti své první ženy se nikdy nedostal a trpěl velkými depresemi.

2. Normální rozdělení

2.1 Základní pojmy

V následující části se budeme zabývat normálním rozdělením. K jeho definování potřebujeme zavést několik základních pojmů, které dále využijeme.

Definice náhodné veličiny: *Nechť* $\{\ \Omega, \acute{\alpha}, P\ \}$ *je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení X:* $\Omega \rightarrow R$ *nazveme náhodnou veličinou* $\Leftrightarrow \forall c \in R: X^{-1}(-\infty, c) \in\ \acute{\alpha}$.
(Kohout)

Pojem náhodná veličina je ekvivalentní s pojmem rozdělení. Tyto dva pojmy můžeme zaměnit, znamenají totéž.

Definice pravděpodobnostní funkce: *Pravděpodobnostní funkce je funkce, která každému reálnému x přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty:*

$$P(x) = P(X = x).$$

(Iastat.vse)

Definice distribuční funkce: *Nechť* $\{\Omega, \acute{\alpha}, P\}$ *je pravděpodobnostní prostor, nechť dále X je náhodná veličina. Distribuční funkcí této náhodné veličiny budeme rozumět zobrazení* $F: R \rightarrow R$, *definované vztahem:* $F: x \rightarrow P(\{\omega; X(\omega) < x\})$.
(Kohout)

Existují dva typy náhodných veličin. Náhodnou veličinu nazveme spojitou, jestliže její distribuční funkce je spojitá na celém svém oboru. Náhodnou veličinu nazveme diskrétní, jestliže její distribuční funkce je po částech spojitá.

Definice pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny: *Pro náhodnou veličinu X definujeme pravděpodobnostní funkci f (x) vztahem:*

$$f(x) = P(X = x), kde\ x \in R$$

(Homolová, Nagy, Texty k přednáškám)

Definice hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny: *Pro náhodnou veličinu X definujeme hustotu pravděpodobnosti f (x) pomocí distribuční funkce $F_x(x)$ vztahem:*

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

nebo v integrálním tvaru

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

(Texty k přednáškám, Homolová, Nagy)

2.2 Normální rozdělení

Rozdělení X, jehož hustota je dána vztahem:

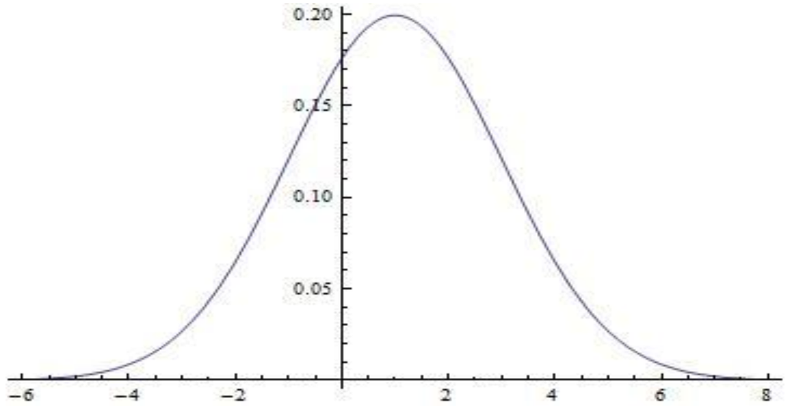
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

nazýváme normální rozdělení. Čísla x a μ jsou reálná, konstanta σ nabývá kladné hodnoty. Konstanta μ značí střední hodnotu náhodné veličiny X. Konstanta σ značí směrodatnou odchylku náhodné veličiny, která po umocnění σ^2 je rozptyl normálního rozdělení. Parametr μ určuje maximum křivky. Parametr σ určuje vzdálenost inflexních bodů od hodnoty μ. (inflexními body se budeme zabývat níže). Křivka je zvonovitého tvaru a je symetrická kolem μ.

Medián normálního rozdělení označujeme $\widetilde{x}$ nebo $x_{0,5}$.

Normální rozdělení označujeme pro náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Graf 1.: Hustota normálního rozdělení X~N(1,2)



Vyvození $E(X)$ a $VAR(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

Využijeme substituci: $\left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ x = t * \sigma + \mu \\ dx = \sigma dt \end{array} \right|$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t * \sigma + \mu) * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt =$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt =$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{0} t * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt + \sigma \int_{0}^{+\infty} t * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt$$

$$== \sigma * \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \mu * 1 = \sigma * 0 + \mu * 1 = \mu$$

Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt = 1$, protože je to integrál hustoty normálního rozdělení. A to se rovná 1.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

Využijeme substituci: $\left| \begin{matrix} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ x = t * \sigma + \mu \\ dx = \sigma dt \end{matrix} \right|$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t * \sigma + \mu)^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt =$$

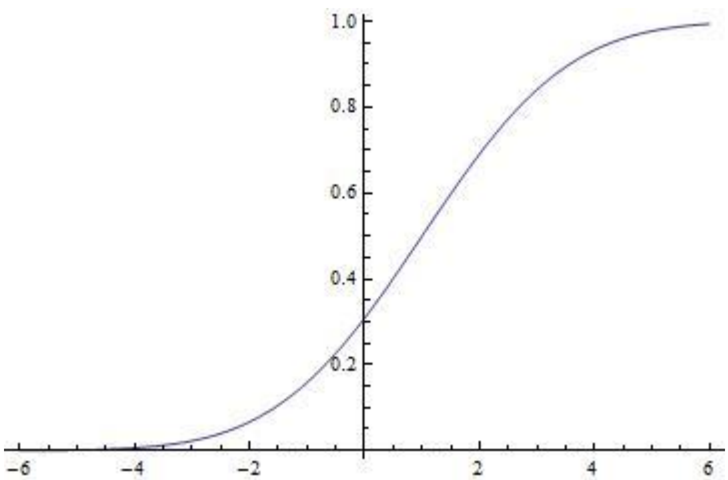
$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{0} t^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt + \sigma^2 \int_{0}^{+\infty} t^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma d$$
$$+ \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} * \sigma dt = \sigma^2 * 1 + \mu^2 * 1 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Symbolem $F(x)$ označujeme distribuční funkci této náhodné veličiny. Tu získáme pomocí integrace hustoty:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

<u>Graf 2.: Distribuční funkce normálního rozdělení X~N(1,2)</u>

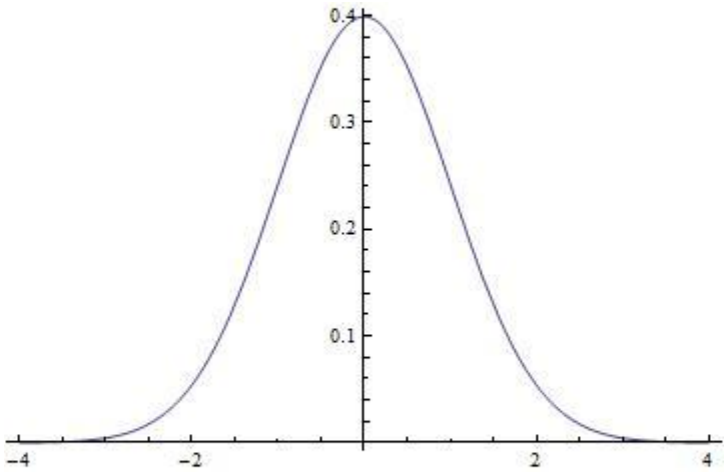


Normální rozdělení s parametry $E(X) = 0$ a $VAR(X) = 1$ nazýváme normované normální rozdělení. Hustota normovaného normálního rozdělení této náhodné veličiny Z je dána vztahem:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-z^2}{2}},$$

kde z je reálné číslo. Označení φ je specifické označení hustoty náhodné veličiny. Medián normovaného normálního rozdělení, které označujeme pro náhodnou veličinu $Z \sim N(0{,}1)$, je roven 0.

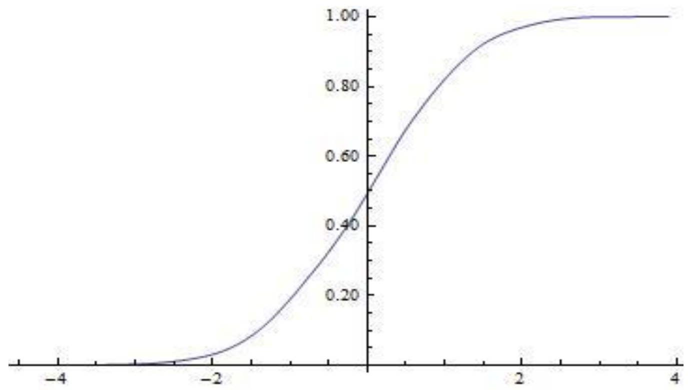
Graf 3.: Hustota normovaného normálního rozdělení Z~N(0,1)



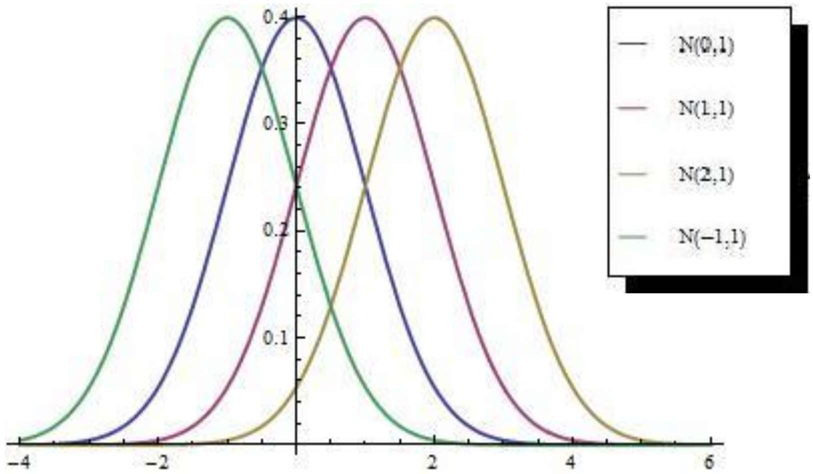
Symbolem $\Phi(z)$ označujeme distribuční funkci této náhodné veličiny. Stejně tak, jako distribuční funkci normálního rozdělení, získáme pomocí integrace hustoty:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz$$

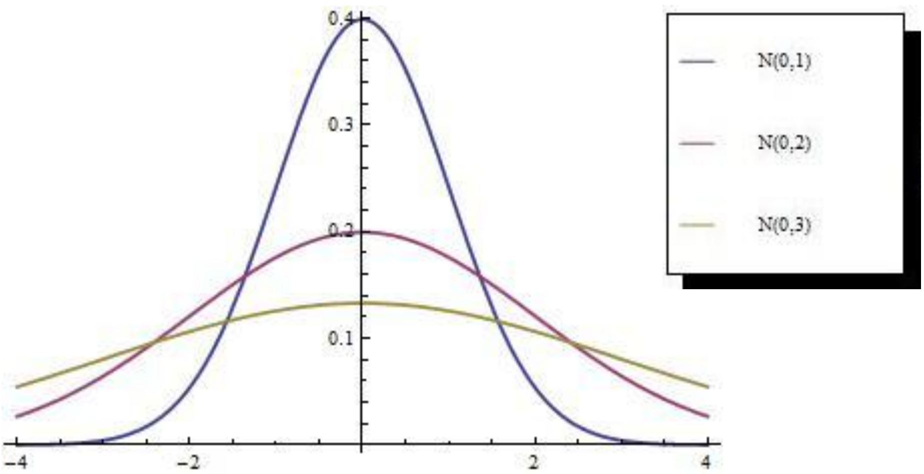
Graf 4.: Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení Z~N(0,1)



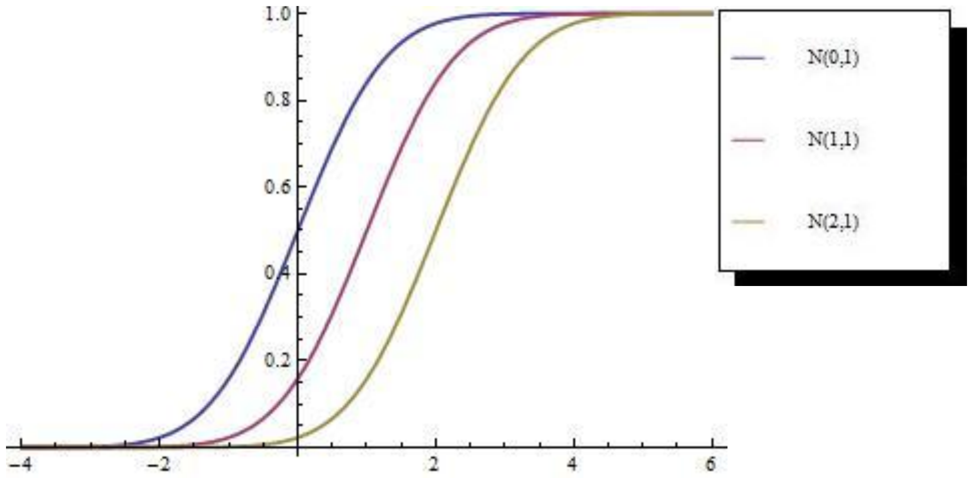
Graf 5.: Hustota normálního rozdělení s různým μ



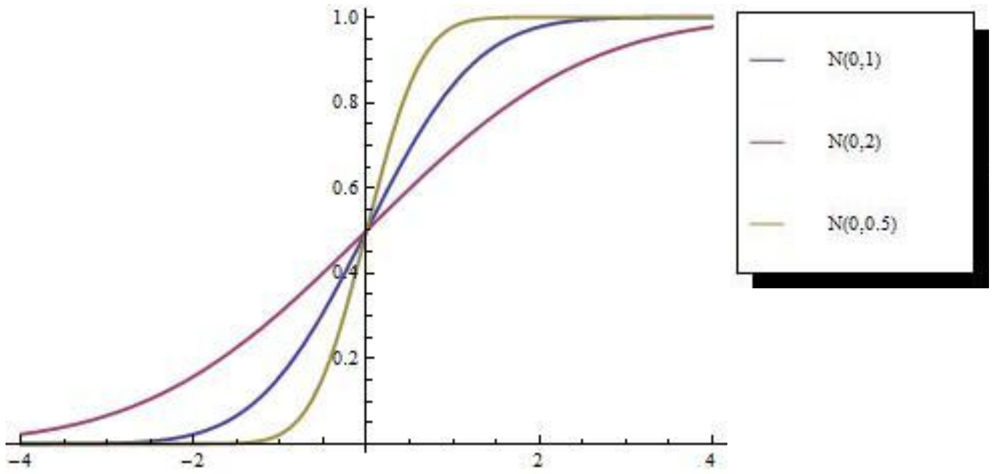
Graf 6.: Hustota normálního rozdělení s různou σ



Graf 7.: Distribuční funkce normálního rozdělení s různým μ



Graf 8.: Distribuční funkce normálního rozdělení s různou σ



2.2.1 Vlastnosti normálního rozdělení

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi normálního rozdělení, které jsou především čerpány z „*Handbook of the Normal Distribution*“ od Patel a Read.

Máme normální rozdělení, kde X je náhodná veličina. K jejich vyjádření použijeme pro nás již známé parametry a funkce jako $f(x) =$ hustota normálního rozdělení, $F(x) =$ distribuční funkce normálního rozdělení, $\varphi(x) =$ hustota normovaného normálního rozdělení, $\Phi(x) =$ distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, $E(X) =$ střední hodnota a $VAR(X) =$ rozptyl.

1. **Vlastnosti grafu funkce:**
   Graf funkce $f(x)$ je symetrický vzhledem k hodnotě $x = \mu$ a graf funkce $\varphi(z)$ je symetrický $z = 0$. Z toho vyplývají vlastnosti:

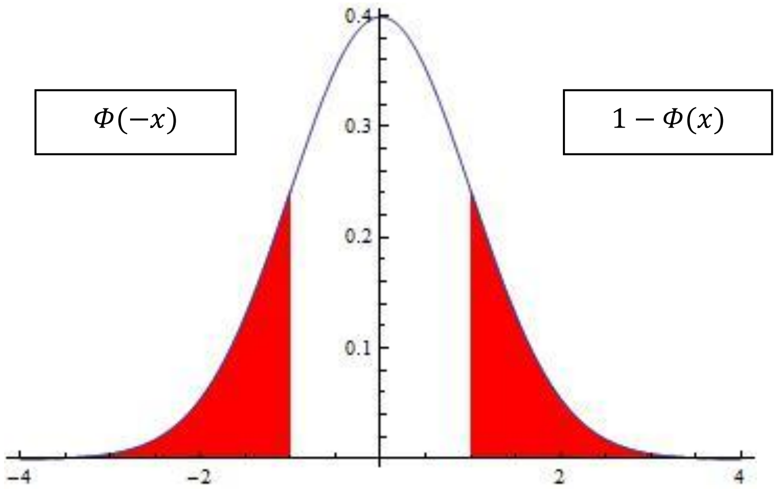
   $f\left(\frac{\mu - x}{\sigma}\right) = f(\frac{x - \mu}{\sigma})$

   $F(-x) = 1 - F(x + 2\mu)$

   $\varphi\ (-z) = \varphi\ (z)$

   $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Graf 9.: Vlastnost Φ(-z)=1-Φ(z)



2. **Lineární závislost:**
   Náhodné veličiny X a Z jsou lineárně závislé a jejich vztah je dán:

$$Z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$$

proto pro všechny X a Z platí:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) a\ \varphi(z) = f(\mu + \sigma z).$$

Důkaz: $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

$$F(\mu - \sigma z) + F(\mu + \sigma z) = 1$$

$$F(x + 2\mu) + F(-x) = \Phi\left(\frac{x+2\mu-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right) =$$

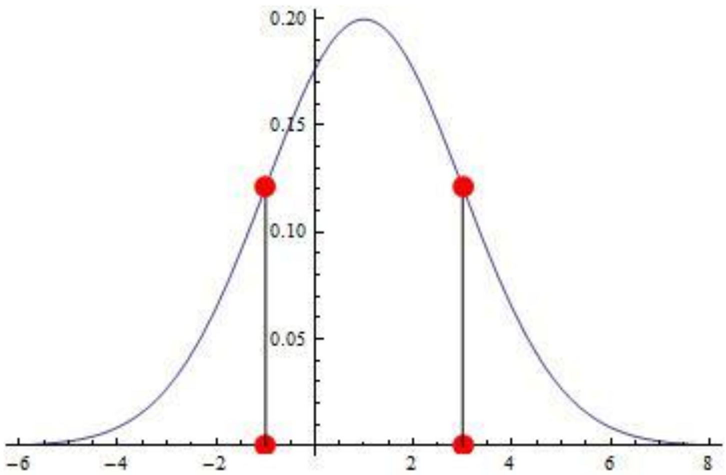
$$= \Phi(u) + \Phi(-u) = 1$$

3. **Medián:**

Medián náhodné veličiny X je roven hodnotě μ. Funkce $f(x)$ má dva inflexní body: $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$.

Podobné vlastnosti má i náhodná veličina Z. Její medián je roven 0 a funkce $\varphi(z)$ má dva inflexní body: $-\sigma$ a σ.

<u>Graf 10.: Inflexní body</u>



Důkaz: $F(x_{0,5}) = 0{,}5$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,5}-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}5$$

$$\frac{x_{0,5}-\mu}{\sigma} = 0$$

$$x_{0,5} = \mu$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$-1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = 1 \Rightarrow x = \mu + \sigma$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = -1 \Rightarrow x = \mu - \sigma$$

4. **Logkonkávnost hustoty normálního rozdělení:**
   Funkce $f(x)$ je hustota, která je logkonkávní.

   <u>Poznámka:</u> funkce je logkonkávní, jestliže je konvexní a zároveň je logaritmem jiné funkce.

Důkaz: $g(x)$ splňuje tuto podmínku: $g(x) = log\, f(x)$

$$f(x) \rightarrow g(x) = log\, f(x) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + log\, (\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$$

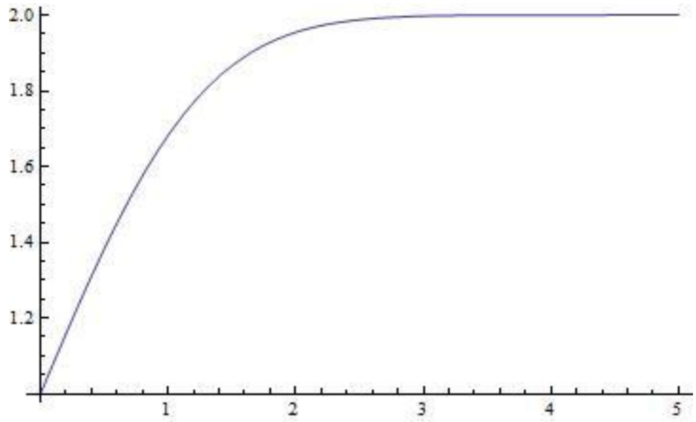
$$g''(x) = -\frac{1}{\sigma^2} < 0$$

5. **Chybová funkce:**
   Chybová funkce je speciální funkce, která není elementární. Označuje se erf a je definovaná vztahem: $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

   (otevřená encyklopedie, 2013)

   Užití chybové funkce: chybová funkce se dá využít všude, kde se používá distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Graf 11.: Chybová funkce



6. Lineární kombinace:

Nechť X je náhodná veličina typu $N(\mu, \sigma^2)$ a $Y = aX + b$, kde a, b jsou reálná čísla. Pak náhodná veličina Y je typu $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Důkaz: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$Y = aX + b$

Označme: $K(x) =$ distribuční funkce

$k(x) =$ hustota

$$K(x) = P(aX + b < x) = P\left(X < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$k(x) = \frac{1}{a} * f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

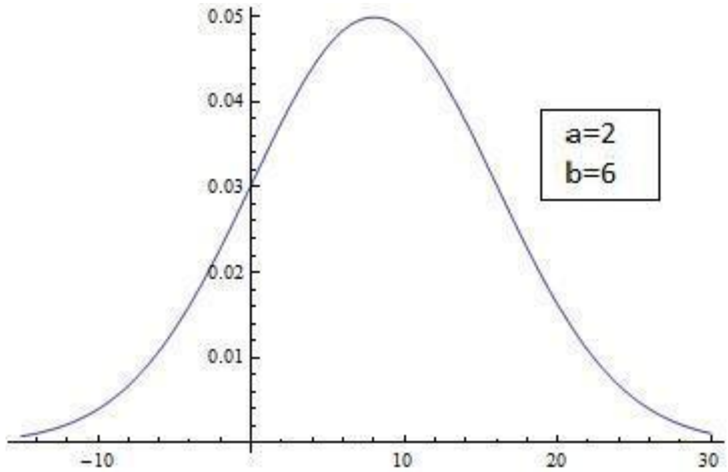
$$k(x) = \frac{1}{\sigma a\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$k(x) = \frac{1}{\sigma a\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-(a\mu+b))^2}{2\sigma^2 a^2}}$$

$$E(x) = a\mu + b$$

$$VAR(x) = \sigma^2 a^2$$

Graf 12.: Hustota Y~N(a+b,a^2*2), kde a=2,b=6



7. Opakovaná derivace hustoty $\boldsymbol{\varphi(x)}$:

Než-li se budeme zabývat vyjádření $\varphi(x)$ pomocí opakované derivace nebo pomocí polynomu, musíme definovat několik pojmů.

Definice ortogonálního polynomu: *Říkáme, že posloupnost polynomů $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost ortogonálních polynomů (v intervalu $\langle a, b\rangle$ s vahou v), jestliže φ_n je polynom stupně n a jestliže platí: $\int_a^b v(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$ pro m≠n.*

Zvláštní postavení mají ortogonální polynomy s vahou $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tyto polynomy se nazývají Čebyševovy polynomy 1. druhu. Čebyševovy polynomy 2. druhu jsou polynomu ortogonální s vahou $v(x) = \sqrt{1-x^2}$. Rekurentní vztah Čebyševových polynomů 1. druhu:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$
$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, n = 1,2, \dots$$

(Segethová, 1998)

Nechť $\left(-\frac{d}{dx}\right)^r \varphi(x) = H_r(x)\varphi(x)$, kde $H_r(x)$ je Čebyševův polynom.

Nyní se budeme zabývat druhou stranou této rovnice, kde využijeme Čebyševův polynom.

$$H_r(x) = x^r - \frac{\mathrm{r}^{(2)}}{2*1!} * x^{r-2} + \frac{\mathrm{r}^{(4)}}{2^2*2!} * x^{r-4} - \frac{r^{(6)}}{2^3*3!} * x^{r-6} + \cdots,$$

kde $\mathrm{r}^{(\mathrm{a})} = \mathrm{r}(\mathrm{r}-1)\dots.(\mathrm{r}-\mathrm{a}+1)$

První 9 polynomů je:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = x$

$H_2(x) = x^2 - 1$

$H_3(x) = x^3 - 3x$

$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

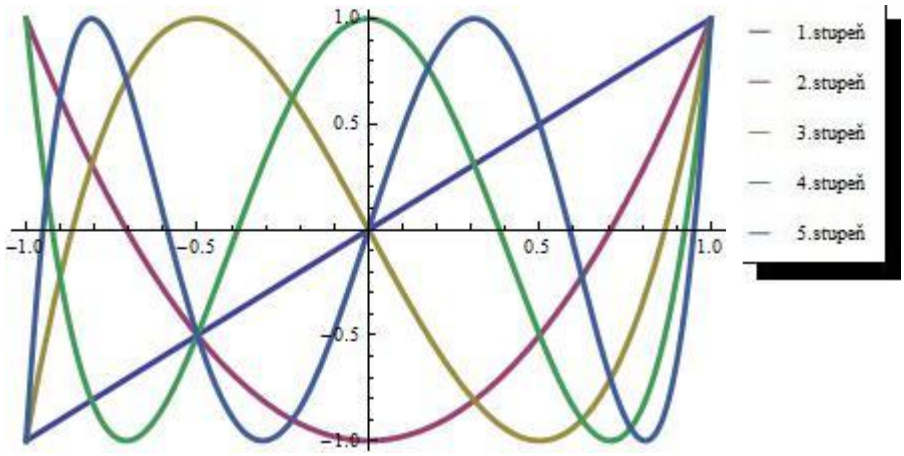
$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$

$H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$

$H_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$

$H_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$

Graf 13.:Čebyševovy polynomy do 5 stupně



Výrazy $H_r(x)$ vyššího stupně lze získat z opakování rekurentního vztahu:

$$H_r(x) = xH_{r-1}(x) - (r-1)H_{r-2}(x).$$

Pro výrazy $H_r(x)$, kde $r = 0, 1, 2, \dots, 27$.

(Kendall, 1977)

Nyní se budeme zabývat první částí rovnice, kde využijeme opakované derivování.

Nechť $\varphi^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\,\varphi(x)$.

Diferenciální rovnice:

(1) $\varphi^{(m+2)}(x) + x\varphi^{(m+1)}(x) + (m+1)\varphi^{(m)}(x) = 0$

Hodnota $\varphi^{(m)}(x), x = 0\ je$

(2) $\varphi^{(m)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m/2} * m!}{(\sqrt{2\pi}) * 2^{\frac{m}{2}} * \left(\frac{m}{2}\right)!}, \\ 0, \end{cases}$

$m = 2r, r = 0, 1, 2, \ldots.$

$m > 0$

(Abramowitz, 1964)

•Vyvození vztahu mezi (1) a (2):

Vydělíme $\varphi^{(m+2)}(x)$ a $\varphi^{(m)}(x)$ v bodě 0:

$$\frac{\varphi^{(m+2)}(0)}{\varphi^{(m)}(0)} = \frac{\frac{(-1)^{\frac{(m+2)}{2}} * (m+2)!}{(\sqrt{2\pi}) * 2^{\frac{(m+2)}{2}} * \left(\frac{m}{2}+1\right)!}}{\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} * m!}{(\sqrt{2\pi}) * 2^{\frac{m}{2}} * \left(\frac{m}{2}\right)!}} =$$

$$= \frac{(-1)^{(\frac{m}{2}+1)} * (m+2)(m+1)m!}{(\sqrt{2\pi}) * 2^{(\frac{m}{2}+1)} * \left(\frac{m}{2}+1\right)(\frac{m}{2})!} * \frac{\sqrt{2\pi}) * 2^{\frac{m}{2}} * \left(\frac{m}{2}\right)!}{(-1)^{\frac{m}{2}} * m!}$$

$$= -\frac{(m+2)(m+1)}{2(\frac{m}{2}+1)} = -\frac{(m+2)(m+1)}{2(\frac{m+2}{2})} = -(m+1)$$

Odtud můžeme vidět, že $\varphi^{(m+2)}(x)$ je o $(m+1)$ větší než $\varphi^{(m)}(x)$.

Důkaz diferenciální rovnice (1) pomocí matematické indukce:

Dosadíme za m=1: $\varphi^{(3)}(x) + x\varphi^{(2)}(x) + (2)\varphi^{(1)}(x) = 0$

Dosadíme za m=n: $\varphi^{(n+2)}(x) + x\varphi^{(n+1)}(x) + (n+1)\varphi^{(n)}(x) = 0$

Derivace dosazení za m=n:

$\varphi^{(n+3)}(x) + 1 * \varphi^{(n+1)}(x) + x\varphi^{(n+2)}(x) + 0 * \varphi^{(n)}(x) + (n+1)\varphi^{(n+1)}(x) = 0$

$\varphi^{(n+3)}(x) + x\varphi^{(n+2)}(x) + (n+2)\varphi^{(n+1)}(x) = 0$

Dosadíme za m=n+1: $\varphi^{(n+3)}(x) + x\varphi^{(n+2)}(x) + (n+2)\varphi^{(n+1)}(x) = 0$

Derivace n-té ho dosazení je stejná jako dosazení n+1 dosazení. Z toho vyplývá, že předpoklad je pravdivý.

•Vyvození $H_0(x)$ polynom pomocí vzorce:

$$H_0(x) = x^0$$

$$H_0(x) = 1$$

•Vyvození $H_9(x)$ polynom pomocí vzorce

$$H_r(x) = x^r - \frac{\mathrm{r}^{(2)}}{2*1!} * x^{r-2} + \frac{\mathrm{r}^{(4)}}{2^2*2!} * x^{r-4} - \frac{r^{(6)}}{2^3*3!} * x^{r-6} + \frac{r^{(8)}}{2^4*4!} * x^{r-8}$$

$$H_9(x) = x^9 - \frac{9^{(2)}}{2*1!} * x^{9-2} + \frac{9^{(4)}}{2^2*2!} * x^{9-4} - \frac{9^{(6)}}{2^3*3!} * x^{9-6} + \frac{9^{(8)}}{2^4*4!} * x^{9-8}$$

$$H_9(x) = x^9 - \frac{9(9-1)}{2} * x^7 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)}{8} * x^5 - \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)}{48} *$$
$$* x^3 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)(9-7)}{384} * x^1$$

$$H_9(x) = x^9 - \frac{72}{2} * x^7 + \frac{3024}{8} * x^5 - \frac{60480}{48} * x^3 + \frac{362880}{384} * x$$

$$H_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x$$

•Vyvození polynomu vyššího stupně, pomocí polynomů nižšího stupně:

$$H_9(x) = x * H_{9-1}(x) - (9-1) * H_{9-2}(x)$$

$$H_9(x) = x * H_8(x) - 8 * H_7(x)$$

$$H_9(x) = x(x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105) - 8(x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x)$$

$$H_9(x) = x^9 - 28x^7 + 210x^5 - 420x^3 + 105x - 8x^7 + 168x^5 - 840x^3 + 840x$$

$$H_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x$$

•Vyvození $\left(-\frac{d}{dx}\right)^1 \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi'(x) = -x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

•Vyvození $\left(-\frac{d}{dx}\right)^9 \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^1(x) = -x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^2(x) = (x^2 - 1) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^3(x) = -(x^3 - 3x) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^4(x) = (x^4 - 6x^2 + 3) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^5(x) = -(x^5 - 10x^3 + 15x) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

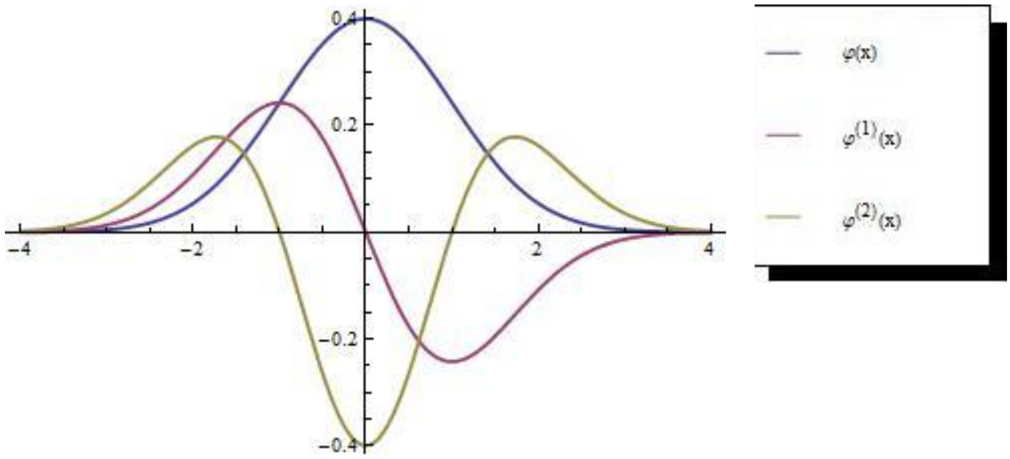
$$\varphi^6(x) = (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^7(x) = -(x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^8(x) = (x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi^9(x) = -(x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Graf 14.: Hustota a první dvě derivace ϕ(x)



8. **Opakovaný integrál $\varphi(x)$**:

Nechť $I_n(x) = \int_x^{\infty} I_{n-1}(y)dy,\ \ n \geq 0$

Kde $I_{-1}(x) = \varphi(x)$

- $I_{-n}(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n-1} * \ \varphi(x) = (-1)^{n-1}\ \ \varphi^{(n-1)}(x), n \geq -1$
- $\left(\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} - n\right) I_n(x) = 0$
- $(n+1)I_{n+1}(x) + xI_n(x) - I_{n-1}(x) = 0, n > -1$
- $I_n(x) = \int_x^{\infty} \frac{(y-x)^n}{n!}\ \Phi(y)dy,\ \ n > -1$
- $I_n(0) = I_{-n}(0) = \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\, 2^{\frac{-1+n}{2}}\right]^{-1}$

•Vyvození $I_0(x)\ a\ I_1(x)$:

$$I_{-1}(x) = \varphi(x)$$

$$I_0(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 - \Phi(x)$$

$$\big(I_0(x)\big)' = -\varphi(x)$$

$$I_1(x) = \int_x^{+\infty} I_0(x)\,dx = \int_x^{+\infty}\left(\int_y^{+\infty} \varphi(y)dy\right)dx$$

$$(I_1(x))' = I_0(+\infty) - I_0(x) = -I_0(x)$$

$$\big(I_1(x)\big)'' = -\big(-\varphi(x)\big) = \varphi(x)$$

$$I_2(x) = \int_x^{+\infty} I_1(x)\,dx$$

$$(I_2(x))' = I_1(+\infty) - I_1(x) = -I_1(x)$$

$$\left(\mathrm{I}_2(x)\right)'' = -\varphi(x)$$

9. Rozvoj hustoty a distribuční funkce do řady:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{(-x^2)^n}{2^n * n!}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{(-u^2)^n}{2^n * n!} du = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * (-1)^n \int_{-\infty}^{x} \frac{u^{2n}}{2^n * n!} du =$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * (-1)^n * \left[\frac{\mathrm{u}^{2n+1}}{(2n+1)*2^n*n!}\right]_{-\infty}^{\mathrm{x}} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * (-1)^n * \frac{\mathrm{x}^{2n+1}}{(2n+1)*2^n*n!}$$

Pomocí řady můžeme vypočítat limitu a určit konvergenci:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{(-x^2)^n}{2^n*n!} = 0$$

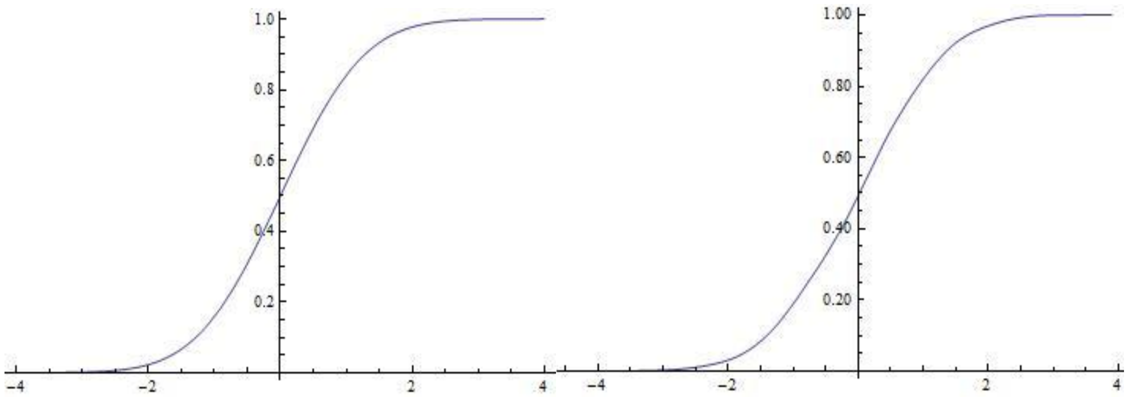
$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{\left(-x^2\right)^n}{2^n*n!}\right| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * (-1)^n * \frac{\mathrm{x}^{2n+1}}{(2n+1)*2^n*n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * (-1)^n * \frac{\mathrm{x}^{2n+1}}{(2n+1)*2^n*n!}\right| = 0$$

Řady jsou v každém bodě konvergentní a absolutně konvergentní. Tyto vlastnosti nám poskytují tu možnost, že při práci můžeme pracovat s těmito polynomy, když si zvolíme dostatečně velké n na místo samotného $\varphi(x)$.

Graf 15. a 16.: Polynom 50-tého stupně a distribuční funkce N(0,1)



Podobnost polynomu nám umožňuje využití místo distribuční funkce. Můžeme pomocí polynomu vypočítat kvantily. Pro další výpočty budeme používat polynom padesátého stupně. Například, když dosadíme 1,96 pomocí polynomu padesátého stupně, můžeme vypočítat kvantil, které se na několika desetinných místech shodují. 1,96 je hodnota pro 97,5 kvantil.

Tabulka 1.: Kvantilů normovaného normálního rozdělení a polynomů 50-tého stupně

%	N (0,1)	Polynom	%	N (0,1)	Polynom	%	N (0,1)	Polynom
1%	-2,32635	-2,32635	35,5%	-0,371856	-0,371856	70%	0,524401	0,524401
5,5%	-1,59819	-1,59819	40%	-0,253347	-0,253347	75,5%	0,690309	0,690309
10%	-1,28155	-1,28155	45,5%	-0,113039	-0,113039	80%	0,841621	0,841621
15,5%	-1,01522	-1,01522	50%	0	0	85,5%	1,05812	1,05812
20%	-0,841621	-0,841621	55,5%	0,138304	0,138304	90%	1,28155	1,28155
25,5%	-0,658838	-0,658838	60%	0,253347	0,253347	95,5%	1,6954	1,6954
30%	-0,524401	-0,524401	65,5%	0,398855	0,398855	99%	2,32635	2,32635

Tabulka je sestrojená pomocí programu Mathematica.

Příkaz pro kvantil normovaného normálního rozdělní v tomto programu je:

$$\text{Quantile}[\text{NormalDistribution}[0,1], 0.01]$$

$$-2.3263478740408408$$

Příkaz pro výpočet kvantilu pomocí polynomu 50-tého stupně:

$$\text{NSolve}[\text{pol}[0,1,50,x] == 0.01, x]$$

$$\{x \to -2.326347874040829\}$$

3. Centrální limitní věty

3.1 Charakteristické funkce

Nejdříve musíme uvést charakteristické funkce, protože charakteristické funkce a její vlastnosti se využívají k dokazování centrálních limitních vět.

Definice: *Řekneme, že* f *je komplexní funkce,* $f: R \to c$ *(kde c je množina komplexních čísel) tj.* $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$*, jestliže* f_1, f_2 *jsou reálné funkce jedné proměnné. Integrálem funkce* f *na reálném oborou budeme chápat:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx + i * \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Definice: *Nechť* f *je hustota spojité náhodné veličiny (P je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny) X. Charakteristickou funkcí náhodné veličiny X nazveme funkci* $\varphi: R \to c$ *definovanou vztahem:*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} * f(x)dx \;\; resp. \varphi(t) = \sum_k e^{itx} k * P(X = x_k).$$

Vlastnosti charakteristické funkce: *Nechť* φ *je charakteristická funkce náhodné veličiny X. Potom platí: 1.* $\varphi(0) = 1$

2. $|\varphi(t)| \leq 1, kde\ t \in R$

3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$*, kde* $\overline{\varphi}$ *je komplexně sdružená funkce k funkci* φ *a* $t \in R$

4. φ *je stejnoměrně spojitá na R*

(Kohout)

Důkaz: viz Kohout

3.2 Centrální limitní věty

Centrální limitní věty popisují limity pravděpodobností odchylek náhodné veličiny od jejich středních hodnot.

(Friesl, Pravděpodobnost a statistika)

Centrální limitní věta pro stejně rozdělení náhodné veličiny: *Nechť* $\{X_n\}$ *je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou* $E(X_n) = \mu$ *a rozptylem* $VAR(X_n) = \sigma^2$*. Označme dále* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$*. Potom pro všechny* $x \in R$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

Důkaz: Potřebné věty k důkazu:

Věta 1.: *Nechť X je náhodná veličina,* φ *je její charakteristická funkce, nechť dále a, b jsou reálná čísla. Potom náhodná veličina Y=a*X+b, má charakteristickou funkci rovnou* $\varphi_Y(t) = e^{itb} * \varphi(at)$.

Věta 2.: *Nechť* φ_i *jsou charakteristické funkce nezávislých náhodných veličin* $X_i, i = 1, \dots, n$*. Nechť dále* φ *je charakteristická funkce* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$*. Potom* $\varphi(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(t)$*.*

Věta 3.: *Nechť X je náhodná veličina,* $E(X) = 0$ *a* $VAR(X) = \sigma^2, \sigma^2 > 0$*. Nechť dále je* φ *charakteristická funkce náhodné veličiny X. Potom označme* $r(t) = \varphi(t) - 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}$*.*

(kohout)

Důkaz provedeme pomocí aparátu charakteristických funkcí. Symbolem H_n *označíme náhodnou veličinu* $H_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$*. Je zřejmé, že takovéto náhodné veličiny mají střední hodnotu nula a rozptyl rovný jedné. Důkaz bude dokončen, jestliže dokážeme, že posloupnost charakteristických funkcí náhodných veličin* H_n *bude konvergovat k charakteristické funkci N (0, 1). Tedy* $lim\, \varphi_{H_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$*.*

Označme dále G_n *náhodnou veličinu* $G_n = X_n - \mu$*, charakteristická funkce této náhodné veličina bude označena*φ_{G_n}*. Podle předpokladu jsou náhodné veličiny* X_n *nezávislé, jsou tedy nezávislé i náhodné veličiny* G_n*, navíc jsou stejně rozdělené. Podle věty 1 a věty 2 je možno určit charakteristickou funkci náhodné veličiny* H_n *takto:*

$$\varphi_{H_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{G_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = (\varphi_{G_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)) \qquad (3)$$

Pro výpočet charakteristické funkce G_1 použijeme větu 3. Ověříme nejdříve její předpoklady: $E(G_1) = 0, VAR(G_1) = \sigma^2$. Tedy podle věty 3 můžeme hodnotu φ_{G_1} psát:

$$\varphi_{G_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2 n} + r\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + nr\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{n} \qquad (4)$$

dosadíme – li hodnotu (4) do vztahu (3)máme celkem

$$\varphi_{G_n}(t) = \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + nr\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{n}\right)^n \qquad (5)$$

Zřejmě limita výrazu $-\frac{t^2}{2} + nr\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ pro t pevné je rovna $-\frac{t^2}{2}$. Použijeme – li dále klasickou limitu $lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^{lim\, a_n}$, za předpokladů konvergence posloupnosti $\{a_n\}$. Závěrem je tedy $\varphi_{H_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Tím jsme prokázali, že posloupnost distribučních funkcí náhodných veličin H_n konverguje k distribuční funkci N (0,1). Protože je výsledná distribuční funkce Φ spojitá ve všech reálných číslech, platí konvergence pro libovolné reálné číslo
(kohout)

Pokud znormujeme distribuční funkci binomického rozdělení s parametry n a p, hodnota S_n konverguje k distribuční funkci N (0,1). Tuto centrální limitní větu můžeme využít pro výpočet $P(S_n)$, kde n nabývá vysokých hodnot.

Ljapunovova věta: *Nechť $(X_n)_n$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin. Nechť $a_n = E(X_n)$ je střední hodnota, $\sigma_n^2 = VAR(X_n)$ je rozptyl a $b_n = E(|X_n - a_n|^3)$ třetí centrální momenty náhodný veličiny X_n, $a_n \in R, \sigma_n^2$, $b_n \in R^+, n = 1, 2, \ldots$. Položme*

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} X_n\,, B_n^2 = \sum_{n=1}^{n} \sigma_n^2$$

Nechť je splněná Ljapunovova podmínka:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{n=1}^{n} E(|X_n - a_n|^3) = 0$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{B_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in R$$

(Riečan, Lenárt, 1984)

Důkaz: viz Riečan, Lenárt, 1984

Náhodné veličiny nejsou stejné jako v centrální limitní větě stejně rozdělených náhodných veličin, proto pro platnost centrální limitní věty musí být splněna Ljapunovova podmínka.

Lindebergova-Lévyho věta: *Nechť X_1, X_2, je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou $E(X_n) = \mu$ a s konečným kladným rozptylem $VAR(X_n) = \sigma^2$. Pak*

$$\epsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

má při $n \to \infty$ asymptoticky rozdělení $N(0, \sigma^2)$.

(Anděl, 1978)

Důkaz: viz Anděl, 1978

Lokální Moivre-Laplaceova věta: *Nechť $\{S_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin typu binomického rozdělení s parametry (n, p). Označme $x_{n,k} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, n \geq 1, k = 0, 1, \ldots n$. Nechť $lim_{n\to\infty} \sqrt{npq} \to +\infty$ a nechť dále je $|x_{n,k}| \leq A$, kde $0 < A < +\infty$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(S = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} * e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}} = 1$$

stejnoměrně na kruhu se středem v počátku souřadnic a s poloměrem A.

Integrální Moivre-Laplaceova věta: *Nechť jsou splněny podmínky předchozí věty. Nechť* $a \leq b$ *jsou reálná čísla. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

(kohout)

Důkaz: viz Kohout

Moivre-Laplaceova věta dokazuje, že při určitých podmínkách a velkém počtu nezávislých pokusů binomické rozdělení konverguje k normálnímu rozdělení.

4. Příklady

Příklady v této kapitole jsou čerpány především z publikace *„Sbírka příkladů ze statistiky (Statistika A)"* od Artlová, Bílková.

Příklad na pravděpodobnostní funkci diskrétní náhodné veličiny:

Příklad 1.: Hodnota náhodné veličiny X je libovolné číslo náhodně vybrané z oboru přirozených čísel. Náhodný jev A nastane při výběru kladného lichého čísla. Vypočítejte pravděpodobnost jevu A, jestliže pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X má tvar $P(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Řešení: Náhodný jev A nastane tehdy, když náhodný jev A je roven součtu hodnot pravděpodobnostní funkce kladných lichých čísel.

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) + \ \ldots$$

S toho můžeme vidět, že se jedná o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = \frac{1}{2}$ a kvocient $q = \frac{1}{4}$. Pravděpodobnost náhodného jevu je:

$$P(A) = S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Příklady na využití normálního rozdělení:

Příklad 2.: Doba potřebná k uzavření láhve s kompotem na automatickém stroji má normální rozdělení se střední hodnotou 2 sekundy a se směrodatnou odchylkou 0,9 sekund. S jakou pravděpodobností bude tato doba převyšovat 3 sekundy?

Řešení: $E(X) = \mu = 2$

$$VAR(X) = \sigma^2 = 0{,}81$$

$$P(X > 3) = ?$$

Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$$

Dosadíme:

$$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{0{,}9}\right) = 1 - \Phi(1{,}11) =$$

Pomocí programu Mathematica najdeme $\Phi(1{,}11)$:

$$= 1 - 0{,}864334 = 0{,}13566 = 13{,}566\%$$

Příklad 3.: Jaká musí být šířka nejkratšího intervalu normy, aby s pravděpodobností ne větší než 0,07186 byl zhotoven výrobek s kontrolovaným rozměrem mimo normu, jestliže odchylky od požadované hodnoty mají normální rozdělení se střední hodnotou 0 mm a se směrodatnou odchylkou 5 mm?

Řešení: Pravděpodobnost, že výrobek bude zhotoven v normě je $P(X > 0{,}07186) =$

$= 1 - 0{,}07186) = 0{,}92814$. Protože střední hodnota je 0, hustota pravděpodobnosti je symetrická podle x= 0, můžeme využít vlastnost distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$.

Nejdříve musíme získat normovanou náhodnou veličinu U. Protože pro náhodnou veličinu X je pravděpodobnost $P(X) = P(X = x) = 0$, platí $P(X < x) = P(X \leq x) = F(x)$.

Pro normovanou náhodnou veličinu tedy platí:

$$P(U < u) = P(U \leq u) = \Phi(u).$$

Tím jsme získali normovanou náhodnou veličinu a můžeme dosadit:

$$P(-u \leq U \leq u) = P(-u < U < u) = \Phi(u) - \Phi(-u) = \Phi(u) - \big(1 - \Phi(u)\big)$$
$$= 2\Phi(u) - 1$$

Z toho vyplývá:

$$P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(u) - 1 = 0{,}92814$$

Vyřešíme rovnici:

$$2\Phi(u) - 1 = 0{,}92814$$

$$\Phi(u) = 0{,}96407$$

Z tabulky kvantilů zjistíme:

$$u = 1{,}8$$

Protože jsme nalezli hodnotu u:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = u * \sigma + \mu$$

$$x = 1{,}8 * 5 + 0 = 9$$

Zjistili jsme x, které můžeme dosadit:

$$P(-9 \leq X \leq 9) = 0{,}92814$$

Z toho plyne, že nejkratší interval je 18 mm. 9 mm + 9 mm = 18 mm.

Příklad 4.: Určete 95% kvantil normovaného normálního rozdělení.

Řešení: 95% kvantil můžeme najít v tabulce kvantilů normovaného normálního rozdělení. Bez použití tabulky můžeme kvantil vypočítat pomocí programu Mathematica.

Příkaz v Mathematice by vypadal následovně:

Quantile[NormalDistribution[0,1],0.95]

Vyjde nám: 1,64485

Stejně můžeme postupovat u kterýchkoliv kvantilů.

Příklad 5.: Při prodeji vánočních kaprů má hmotnost kapra v jedné z kádí přibližně normální rozdělení se střední hodnotou 2,3 kg a se směrodatnou odchylkou 0,3 kg. Jaký podíl kaprů v této kádi přesáhne svojí hmotností 2,5 kg?

Řešení: $\mu = 2{,}3$

$\sigma = 0{,}3$

$P(X > 2{,}5) = ?$

Dosadíme do vyjádření distribuční funkce:

$$P(X > 2{,}5) = 1 - P(X \leq 2{,}5) = 1 - F(2{,}5) = 1 - \Phi\left(\frac{2{,}5 - 2{,}3}{0{,}3}\right) = 1 - \Phi(0{,}66) =$$

$$= 1 - 0{,}74857 = 0{,}25143 = 25{,}143\%$$

Příklad 6.: Bylo zjištěno, že pevnost v tahu určitého druhu výrobku má normální rozdělení se střední hodnotou 200 jednotek a se směrodatnou odchylkou 40 jednotek. Každý výrobek je před expedicí testován a ty výrobky, jejichž pevnost v tahu je větší než 220 jednotek, jsou označovány za velmi kvalitní. Vypočítejte pravděpodobnost vyrobení velmi kvalitního výrobku.

Řešení: $E(X) = \mu = 200$

$\sigma = 40$

$P(X > 220) = ?$

$$P(X > 220) = 1 - P(X \leq 220) = 1 - F(220) = 1 - \Phi\left(\frac{220 - 200}{40}\right) = 1 - \Phi(0{,}5) =$$

$$= 1 - 0{,}691462 = 0{,}308538 = 30{,}85\%$$

Příklad 7.: Náhodná veličina X má rozdělení N (2, 9). Určete $P(X < 5)$.

Řešení: $\mu = 2$

$\sigma = 3$

$P(X < 5) = ?$

$$P(X < 5) = F(5) = \Phi\left(X < \frac{5 - 2}{3}\right) = \Phi(1) = 0{,}841345 = 84{,}1345\%$$

Příklad 8.: Měření dálkového rozměru je zatíženo systematickou chybou 0,5 mm a náhodnou chybou s normálním rozdělením pravděpodobnosti s rozptylem 0,09 mm^2. Určete pro jakou hodnotu σ bude celková chyba jednoho měření v mezích 0,5 – σ až 0,5 + σ s pravděpodobností 0,95.

Řešení: $\mu = 0{,}5$

$\sigma = 0{,}3$

$P(0{,}5 - \sigma \leq X \leq 0{,}5 + \sigma) = 0{,}95$

$$P(0{,}5 - \sigma \leq X \leq 0{,}5 + \sigma) = F(0{,}5 + \sigma) - F(0{,}5 - \sigma) =$$
$$= \Phi\left(\frac{(0{,}5 + \sigma) - 0{,}5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{(0{,}5 - \sigma) - 0{,}5}{0{,}3}\right) = \Phi\left(\frac{\sigma}{0{,}3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{0{,}3}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{\sigma}{0{,}3}\right) - 1 = 0{,}95$$

Vypočteme rovnici:

$$2\Phi\left(\frac{\sigma}{0{,}3}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{0{,}3}\right) = 0{,}975$$

$$\left(\frac{\sigma}{0{,}3}\right) = u_{0{,}975}$$

Z tabulky můžeme zjistit, že 0,975 = 1,960, z toho plyne:

$$\sigma = 1{,}960 * 0{,}3$$

$$\sigma = 0{,}588$$

Chyba v měření může nastat v mezích $\langle -0{,}088; 1{,}088 \rangle$ mm.

Příklad na využití Lindebergovy-Lévyho věty:

Příklad 9.: Zaměstnanec jistého závodu pravidelně jezdí do zaměstnání i zpět metrem. Je známo, že doba čekání na příjezd metra se pohybuje v mezích 0 až 3 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba čekání zaměstnance na příjezd metra během 23 pracovních dnů bude kratší než 80 minut?

Řešení: Náhodná veličina X_i, kde i = 1,2,…,46. To jest počet pracovních dnů, během kterých jede do zaměstnání a zpátky. Jedná se o rovnoměrné rozdělení R (0,3) s hustotou:

$$f(x_i) = k, 0 < x_i < 3,$$

$$= 0, jinak$$

Vypočteme konstantu k:

$$1 = \int_0^3 f(x_i)dx_i = \int_0^3 kdx_i = k\int_0^3 dx_i = k[x_i]_0^3 = 3k$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_i:

$$E(X_i) = \int_0^3 x_i * f(x_i)dx_i = \int_0^3 x_i * \frac{1}{3}dx_i = \frac{1}{3}\int_0^3 x_i dx_i = \frac{1}{3}\left[\frac{{x_i}^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

$$E(X_i^2) = \int_0^3 x_i^2 * f(x_i)dx_i = \int_0^3 x_i{}^2 * \frac{1}{3}dx_i = \frac{1}{3}\int_0^3 x_i^2 dx_i = \frac{1}{3}\left[\frac{x_i^3}{3}\right]_0^3 = 3$$

$$VAR(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Podle Lindebergovy-Lévyho věty lze rozdělení aproximovat normálním rozdělení, protože n je velké, n=46. Aproximace normálním rozdělení:

$$N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(46 * \frac{3}{2}; 46 * \frac{3}{4}\right) = N(69; 34{,}5)$$

Nyní můžeme zjistit pravděpodobnost pomocí distribuční funkce:

$$P(X < 80) = F(80) = \Phi\left(\frac{80 - 69}{\sqrt{34{,}5}}\right) = \Phi(1{,}873) = 0{,}96926 = 96{,}926\%$$

Příklady na centrální limitní větu:

Příklad 10.: Zatížení letadla s 64 místy nemá překročit 6000 kg. Jaká je pravděpodobnost, že při plném obsazení bude tato hodnota překročena, má-li hmotnost cestujících střední hodnotu 90 kg a směrodatnou odchylku 10 kg?

Řešení:

Pomocí centrální limitní věty:

$$n = 64$$

$$S_n > 6000$$

$$E(X) = \mu = 90$$

$$\sigma = 10 \Rightarrow VAR(X) = \sigma^2 = 100$$

$$P(S_n > 9000) = ?$$

$$P(S_n > 9000) = 1 - \Phi\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{6000 - 64 * 90}{\sqrt{64 * 100}}\right) = 1 - \Phi(3)$$
$$= 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135$$

Příklad 11.: Obchodní oddělení zásilkového domu zaslalo na 1000 náhodně vybraných adres nabídkový katalog. Určete pravděpodobnost, že získá aspoň 275 objednávek, předpokládáme-li, že návratnost objednacích karet je 0,3.

Řešení:

Pomocí centrální limitní věty:

$$n = 1000$$

$$p = 0{,}3$$

$$q = (1 - p) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

$$P(S_n < 275) = ?$$

$$P(S_n < 275) = \Phi\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{275 - 1000 * 0{,}3}{\sqrt{1000 * 0{,}3 * 0{,}7}}\right) = \Phi(-1{,}725) = 0{,}004565$$

Pomocí programu Mathematica:

$$\text{adresy} = 1000;$$

$$\text{navratnost} = 0.3;$$

$$\text{odpovedi} = 275;$$

$$\text{prav1} = \text{CDF[BinomialDistribution[adresy, navratnost], odpovedi]}$$

Výsledek: 0.04459258821290896

Příklad 12.: Počet závad jistého typu elektrického spotřebiče během záruční doby popisuje Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 0{,}2$. Jaká je pravděpodobnost, že po prodeji 75 spotřebičů bude více než 15 reklamací během záruční doby?

Řešení:

Pomocí centrální limitní věty:

$\lambda = 0{,}2$

$VAR(X) = E(X) = 75$

$P(X > 15) = ?$

$$P(X > 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - \Phi\left(\frac{15 - 0{,}2 * 75}{\sqrt{0{,}2 * 75}}\right) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 =$$

$$= 50\%$$

Pomocí programu Mathematica:

$$\text{lambda} = 0.2;$$

$$\text{spotrebice} = 75;$$

$$\text{reklamace} = 15;$$

$$\text{prav2} = \text{CDF}[\text{PoissonDistribution}[\text{spotrebice} * \text{lambda}], \text{reklamace}]$$

Výsledek: 0.5680895756085438

Příklad 13.: Předpokládáme, že počet chyb na stránce jisté knihy je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 0{,}9$. Určete pravděpodobnost, že na 30 náhodně vybraných stranách bude celkem maximálně 20 chyb.

Řešení:

Pomocí centrální limitní věty:

$\lambda = 0{,}9$

$VAR(X) = E(X) = 30$

$P(X \leq 20) = ?$

$$P(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 - 0{,}9 * 30}{\sqrt{0{,}9 * 30}}\right) = \Phi(-1{,}347) = 0{,}088508 = 8{,}85\%$$

Pomocí programu Mathematica:

$$\text{lambda} = 0.9;$$

$$\text{strany} = 30;$$

$$\text{chyb} = 20;$$

$$\text{prav3} = \text{CDF}[\text{PoissonDistribution}[\text{strany} * \text{lambda}], \text{chyb}]$$

Výsledek: 0.10146841010008698

Z příkladů 11. - 13. můžeme vidět, že první postup, kdy dostaneme přibližný výsledek, je dostatečně přesný, můžeme jej použít. Pokud nemáme možnost využití softwaru jako v druhém postupu.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo přiblížení normálního rozdělení a jeho vlastností, propojení normálního rozdělení a centrálních limitních vět. Dále využití softwaru Mathematica pro znázornění grafů a výpočtů. Pomocí grafu nebo vyvození jsem ukázala jednotlivé vlastnosti. Pro rozšíření bych se mohla zabývat vícerozměrným normálním rozdělením a rozděleními vyvozenými z normálního rozdělení.

Resumé

In this Bachelor paper I deal with normal distribution. In the first chapter I describe its history and lives of important scientists. In the second chapter I deal with properties of normal distribution. The third chapter introduces several central limit theorem, that are used for calculation of probability. In the last chapter can be found examples of central limit theorem and normal distribution. Graphs and some calculations, used in this paper, are created in the program Mathematica. The aim of this paper is to approach and demonstrate normal distribution.

Zdroje informací

Seznam literatury

ABRAMOWITZ, M. a STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions*, 1964. Washington: National Bureau of Standards.

ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika.* Vydání první. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1978. 352 s.

ANDĚL, Jiří. *Statistické metody.* Vydání třetí. Praha: Matfyzpress, 2003. 298 s. ISBN 80-86732-08-8.

ARTLOVÁ, Markéta, BÍLKOVÁ, Diana. *Sbírka příkladů ze statistiky (Statistika A).* Vydání první. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1996. 272 s. ISBN 80-7079-727-4.

KENDALL, M. G. a STUART, A. The Advanced Theory of Statistics, 1977. New York: Macmillan.

RIERČAN, Beloslav, LENÁRT, Cyril. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Vydání první. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1984. 320 s.

Elektronické zdroje

ČVUT. Bodové odhady parametrů. [online]. [cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/prucha/mstp/5pu.pdf

ČVUT. Normální rozdělení. [online]. [cit. 29. 8. 2013]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/prucha/ubmip/p8u.pdf

Friesl, Michal. Pravděpodobnost a statistika hypertextově, 2014 [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/tit.html

History. Abraham de Moivre, 2004. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html

History. Johann Carl Friedrich Gauss, 1996. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Gauss.html

History. Pierre Simon Laplace, 1999. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Laplace.html

HOMOLOVÁ, Jitka, NAGY, Ivan. *Texty k přednáškám.* Pravděpodobnost. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/pst-prednasky.pdf

Iastat. Distribuční funkce. [online]. [cit. 13.1.2014]. Dostupné z: http://iastat.vse.cz/Dfunkce.htm

Iastat vše. T rozdělení. [online]. [cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://iastat.vse.cz/Student.htm

Iastat.vše. Diskrétní náhodná veličina. [online]. [cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://iastat.vse.cz/Diskretnv.htm

IngGeo. Teorie chyb, 2012. [online]. [cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://inggeo.fsv.cvut.cz/wiki/doku.php?id=04_teorie_chyb:0402_zakonitosti_nahodnych_chyb

Kohout. Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: https://www.kohout.zcu.cz/KOHOUT/info_soubory/zimnisemestr/pravdtyd.htm

Math. Chi-square statistics. [online].[cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://math.hws.edu/javamath/ryan/ChiSquare.html

Otevřená encyklopedie. Chybová funkce, 2013. [online]. [cit. 2. 4. 2014]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Chybov%C3%A1_funkce

Natur.cuni. Metoda nejmenších čtverců. [online].[cit. 29.8.2013]. Dostupné z: http://web.natur.cuni.cz/~bayertom/Mmk/mnc.pdf

Patel J. K., Read C. B.: *Handbook of the Normal Distribution (Statistics, a Series of Textbooks and Monographs)* [online]. Dekker New York, 1982. [cit. 2. 4. 2014]. ISBN 0-8247-1541-1.

SEGETHOVÁ, Jitka. *Základy numerické matemati*ky. [online]. Praha: Karolinum, 1998. [cit.2. 4. 2014]. ISBN 80-7184-596-5. Dostupné z: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~vejtek/studium/files/numerika/ZNM-Seghetova.pdf

Springer reference. De Moivre- Laplace tvorem, 2013. [online].[cit. 29.8.2013]. dostupné z: http://www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/61032.html

Statistics lestures. Chi-square test for goodness of fit, 2012. [online]. [cit. 29.8:2013]. Dostupné z: http://www.statisticslectures.com/topics/goodnessoffit/

Seznam grafů

Seznam tabulek

Tabulka a grafy byly zpracovány pomocí programu Mathematica.