ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ZÁKLADNÍ GONIOMETRICKÉ VZTAHY A JEJICH VYUŽITÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kocourek

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: doc. RNDr Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2014

....

vlastnoruční podpis

Rád bych na tomto místě vyjádřil své poděkování vedoucímu své práce doc. RNDr Jaroslavu Horovi, CSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, ochotu a vstřícnost po celou dobu studia.

Zde se nachází originál zadání kvalifikační práce.

OBSAH

1 Úvod

Slovo goniometrie pochází z řeckého slova *gónia* – úhel a *metró* – měřit. Je to tedy oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi, jako je sinus, kosinus, tangens, kotangens a jejich využitím. Její nedílnou součástí je oblast matematiky, která se nazývá - trigonometrie (z řeckého slova *trigonón* – trojúhelník a *metren* – měřit). Trigonometrie je tedy odvětví, které studuje vztahy týkající se délky a úhlů v trojúhelníku.

Již první kmeny prvobytných kočovných pastevců se potřebovaly orientovat při stěhování po rozlehlých stepích. Proto se začaly pozorovat pohyby hvězd, střídání dne a noci či ročních období. Rozvoj mořeplavectví vedl k dalšímu prohlubování astronomických poznatků, které byly neobyčejně důležité. Například už astronomové ve 3. století věděli, že délky stran pravoúhlého trojúhelníku a úhly mezi těmito stranami mají pevné vztahy. Zpočátku náhodné, ale později soustavnější pozorování oblohy vedlo až k objevení vlastností koule, kruhu a směrových úhlů. Nesmíme však zapomínat, že pojem kruh v podobě hrnčířského kruhu nebo kola od vozu byl mnohým národům znám již dříve. Avšak astronomický pojem kružnice jakožto pomyslné čáry, kterou člověk začal dělit na stejné části, sestrojovat tětivy atd., byl nesrovnatelně významnější.

Astronomické výpočty byly brzy definovány jako goniometrické funkce, ty se dnes využívají v aplikované matematice, základních metodách matematické analýzy, jako je Fourierova transformace, nebo vlnové rovnice pomocí goniometrické funkce.

Na základě studia rozmanitě bohaté literatury věnované jednotlivým aspektům je tato bakalářská práce rozdělena do šesti kapitol.

První kapitola popisuje historii goniometrických funkcí v průběhu věků. V období starověku hovoříme o Thaletovu důkazu vět, ale největší pozornost však zastávají Ptolemaiovy výpočty délek tětiv. Zmíněno je zde i jeho největší dílo *Almagest* spolu s výpočtem jednotlivých délek tětiv. V druhé části této kapitoly se dozvíme, jakých výsledků v oblasti trigonometrie se dopouštěli středověcí indičtí a arabští matematikové, kteří stojí za vznikem goniometrických funkcí. Ve třetí části je zmíněn německý matematik a astronom Regiomontanus, který se zasloužil o sestavení astronomických a trigonometrických tabulek pro výpočet odvěsny pravoúhlého sférického trojúhelníku. V závěrečné částí této kapitoly je uvedeno, jaký přínos měl odlišný pohled na goniometrii jakožto goniometrické funkce, za který vděčíme Leonhardu Eulerovi, který této disciplíně dal novodobou podobu.

Druhá kapitola se ve své první části věnuje měření úhlů a vztahy mezi nimi. V druhé části najdeme definici goniometrických funkcí pomocí pravoúhlého trojúhelníka a jednotkové kružnice.

V třetí kapitole se zaobírá především platností a důkazy vět Euklidovým a věty Pythagorovy.

V první a druhé části čtvrté kapitoly uvádíme definici a odvození věty sinové a kosinové. Ve třetí části této kapitoly uvádíme vztahy mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu, které jsou přímým důsledkem Pythagorovy věty.

V první a druhé části čtvrté kapitoly uvádím definici a odvození věty sinové a kosinové. Ve třetí části této kapitoly popisuji vztahy mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu, které jsou přímým důsledkem Pythagorovy věty. Největší počet stran z této kapitoly je věnován goniometrickým vzorcům obecného trojúhelníku. Je zde uvedena většina známých vzorců, ať už pro součet či rozdíl úhlu, tak pro jeho násobek, které jsou i názorně odvozeny.

První část páté kapitoly zaujímají základní grafy goniometrických funkcí, které jsou ve druhé části doplněny o tabulky jejich základních vlastností a o hodnoty pro význačné úhly.

Kapitola šestá je poslední částí této bakalářské práce, která je věnována využití goniometrických funkcí v oblasti matematické analýzy. V této části je uvedeno vysokoškolské pojetí matematické analýzy a pohled na goniometrické funkce jako takové. Na názorném příkladu je zde uvedeno, jak pomocí Taylorova rozvoje mocninné řady, dovedeme s přesností určit hodnotu sin 1°. V druhé části je pak uvedeno vyjádření goniometrických funkcí pomocí diferenciálních rovnic, které splňují počáteční podmínky. Třetí část je věnována integrálnímu počtu, kdy goniometrické funkce využíváme jako vhodné pomocníky při substituci ať už určitých či neurčitých integrálů. Poslední část této kapitoly navazuje na problém, který byl vysloven v kapitole druhé. Pomocí výpočtů délky rovinné křivky se snažíme dokázat, jaké chyby se dopouštíme při výpočtech na středních školách.

2 HISTORIE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

2.1 POČÁTKY TRIGONOMETRIE VE STAROVĚKU

Vznik řecké matematiky souvisí s legendární postavou Thaléta z Milétu (asi 624 př. n. l. Milétos – okolo 548 př. n. l.), zakladatele první řecké školy ([1], str. 82). Thales se snažil rozumně a logicky vysvětlil jevy, a i proto na matematická tvrzení požadavek: nejen vyslovit, ale i dokázat.

Obrázek 1: Thales z Milétu

Jemu se připisují důkazy těchto vět:

1. průměr dělí kruh na dvě poloroviny
2. v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při základně stejné
3. vrcholové úhly jsou si rovny
4. dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se stranou a přilehlými úhly
   - (dnes tzv. věta usu)
5. úhel vepsaný do půlkruhu je pravý

Je však možné, že Thales „dokazoval” věty o rovnosti půlkruhů, úhlů a ostatních tří prvků trojúhelníka v prvních třech větách prostým přehýbáním obrázků, a že páté věty přidal ještě otočením obrázku okolo středu kružnice o 180° ([1], str. 83).

Řekové v daleko větší míře než Egypťané užívali obrazců. Za přímky už nepovažovali jen hranice pozemků, ale na výkresech zkoumali vlastnosti trojúhelníků, úhlů a kruhů. V tomto zkoumání začal mít důležitou úlohu pojem podobnosti ([1], str. 83).

Thaletovi se také připisují určité znalosti astronomické. Jako snad prvý použil kružítka a úhloměru, když změřil výšku pyramidy (nebo obelisku) pomocí vržených stínů pyramidy a své vlastní postavy a stanovil způsob, jak měřit vzdálenost lodě od břehu ([1], str. 83).

Nejdůležitější pro rozvoj trigonometrie v moderním slova smyslu byly práce starověkého řeckého astronoma, který pocházel z Nikaie v Bitýnii, Hipparcha (asi 190 – 120 př. n. l.).

Obrázek 2: Hipparchos

Hipparchos dělil kružnici na 360 stupňů a její průměr na 120 dílů; $\frac{1}{120}$ průměru pokládal za jednotku a její pomocí vyjadřoval délky tětiv. Části kružnice se pak nazývaly moiry, kdy třicet moir vytvářelo souhvězdí. V kruhu tak bylo 12 souhvězdí, což představovalo stejný počet jako na kružnici zvířetníku. Každá moira (jak kružnice, tak i průměru) se dělila na 60 prvých lept a ty se pak dále dělily na 60 druhých lept. Později se začalo v Alexandrii používat šedesátinných zlomků nejen v astronomii a k dělení kruhu, ale i k libovolným výpočtům ([1], str. 175).

2.1.1 PTOLEMAIOVY VÝPOČTY

Klaudios Ptolemaios (asi 85 – kolem 168 n. l.) byl pozoruhodný řecký astronom, geograf a optik, který svá pozorování konal v Alexandrii (od 26. 3. 127 n. l. – 2. 2. 141 n. l.).

Obrázek 3: Klaudios Ptolemaios

Mezi jeho největší dílo patří „Matematické pojednání”, které má pro dějiny astronomie podobný význam jako Euklidovy „Základy” pro dějiny matematiky. Záhy však toto dílo bylo označováno jako „Velké pojednání” nebo „Největší pojednání” a z arabské verze této knihy vznikl v latině název „Almagest”. Celé dílo obsahuje 13 knih a je výkladem všech astronomických poznatků té doby [2].

Prvá kniha „Almagest” začíná rovinnou a sférickou trigonometrii stručným výkladem vět nutných k sestavení tabulky tětiv (sinů) a k jejich užívání. Ptolemaios dělí kruh na 360 a jeho průměr na 120 shodných dílů (d) a vyjadřuje jejich zlomky v šedesátkové soustavě ([1], str. 180). Tak tětiva 60° = 60^d,

tětiva 90° = 2 . 60^2 = 7200 = 80^d 51´10´´

tětiva 120° = 3 . 60^2 = 10 800 = 103^d 55´23´´

tětiva 36° = 37^d 4´55´´

tětiva 72° = 70^d 32´3´´[1]

Tětivy 72° a 36° získal Ptolemaios „zlatým řezem” jako strany do kruhu vepsaných pravidelných pětiúhelníků a desetiúhelníků. Druhé odmocniny pak počítal metodou postupných odmocnin, založenou na vzorci

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Z těchto hodnot tak Ptolemaios získává další na základě věty

$$(chrd\alpha)^2 = \ (chrd\ 180° - \alpha)^2 = (průměr)^2,$$

která v dnešní trigonometrii odpovídá vzorci $(sin\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$ ([1], str. 180-181).

2.2 POČÁTKY TRIGONOMETRIE VE STŘEDOVĚKU

2.2.1 TRIGONOMETRIE V INDII

O důležitý rozvoj matematiky se postaraly práce indických matematiků v oblasti trigonometrie. Indové se opírali o práce helénistických autorů, ale přinesli také mnoho nového. Nejvíce ve svých pracích čerpali z Ptolemaiova učení výpočtu délky tětiv kružnice. Největší změnou bylo nahrazení tětivy sinem. Sama o sobě se taková změna nezdá příliš

[1] Zde používáme označení $1^d = \frac{1}{120}$ d (průměru), $1^{´} = (\frac{1}{120})^d$, $1^{´´} = (\frac{1}{120})^{´}$; v následujícím výkladu pak chrd značí délku příslušné tětivy (chordy).

důležitá, neboť tětiva oblouku φ se rovná dvojnásobku oblouku $\varphi/2$. Ve skutečnosti měl přechod od tětivy k poloviční tětivě dalekosáhlý význam, neboť umožnil přirozeně zavést různé funkce. V Indii byl položen základ trigonometrie jakožto nauky o trigonometrických veličinách, ačkoliv byla právě řešení trojúhelníků věnována malá pozornost ([3], str. 165-166).

Sinus, kosinus a také sinusversus (tj. rozdíl mezi poloměrem a kosinem), nacházíme v anonymních astronomických dílech „Siddhántás" a také „Árjabhattíja", kde nazvali délku poloviny tětivy – arddhadžíva (pro veličinu sinus). Později tento název zkrátili na džíva. Veličinu kosinus Indové nazývali kótidživa, tj. sinus zbytku (doplněk do 90°). Později, když byl tento název přeložen do arabštiny jako al-tamam a ve 12. století jako sinus residui. V 15. století Peurbach (1423 – 1461) a Regiomontanus (1436 – 1476) začali používat termín sinus complimenti, tj. sinus doplňku. Z tohoto termínu vznikl změnou pořadí a zkrácením cosinus, se kterým se poprvé setkáváme v roce 1620 u anglického astronoma Edmunda Cuntera (1581 – 1626) ([3], str. 166).

Slovem utkramadžíva nazývali Indové sinusversus. Ten se také ve 12. století objevil u překladatele Gherda z Cremony (1114 – 1187), který použil pro termín sinus (aby ho odlišil od sinusversu) název sinus rectus, tj. přímý sinus a poloměr kružnice nazýval sinus totus, tj. úplný sinus. Tento poslední termín se udržoval v evropských dílech, které se věnovaly trigonometrii až do Eulera. Ten svými pracemi definitivně prosadil pro poloměr trigonometrické kružnice hodnotu r = 1 ([3], str. 166).

První vztahy mezi trigonometrickými veličinami vyplynuly přímo z Pythagorovy věty.

Kromě nejjednoduššího vztahu

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

důležitou roli hrál vzorec pro sinus poloviny úhlu

$$sin^2\alpha + sinvers^2\alpha = (2sin\frac{\alpha}{2})^2 \text{ , nebo } sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(\frac{1-cos\,\alpha}{2})}.$$

Použití trigonometrie by bylo bez tabulek nemožné. První tabulku sinů a sinusversu nalézáme již v práci „Árjabhattíja" a „Súrja Siddhánta". V díle „Árjabhattíja" je uvedeno 24 hodnot těchto obou funkcí počínaje úhlem 3°45´ = 225´ a jeho celočíselnými násobky. Porovnáním s tabulkami od Ptolemaia můžeme konstatovat, že první indické tabulky nebyly tak přesné jako ty v Ptolemaiově „Almagestu" ([3], str. 167).

Charakteristickou zvláštností tabulek je míra trigonometrických veličin. V helénistické vědě se kružnice dělila na 360° a stupeň na 60´. Avšak alexandrijští astronomové dělili průměr kružnice na 120 (tzn. poloměr na 60) dílků a těmito díly a jejich šedesátinnými veličinami zlomky vyjadřovali tětivy. Indové pokládali poloměr kružnice rovný 3438 minutám. Toto číslo je však bezpochyby zaokrouhlená hodnota 3437,7…, kterou dostaneme pro poloměr z hodnoty $2\pi r = 21600'$, přičemž hodnota $\pi = 3{,}1416$ (tato hodnota je doložena v „Árjabhattíja”) ([3], str. 167).

Ve 12. století indický matematik Bháskara (1114 – 1185) ve svém díle „Koruna vědy” sestavil tabulku s intervalem rovnému 1° počínaje sinem 1°, který považoval za 60´. Tento postup byl založen na vzorci pro sinus součtu nebo rozdílu, který lze při libovolném poloměru r zapsat ve tvaru

$$sin(\alpha \pm \beta) = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta \pm cos\,\alpha\,sin\,\beta}{r},$$

kde sin a cos označují sinus a kosinus pro kružnici o poloměru r. V případě poloměru $r = 3438$ a $sin\,1° = 60'$ Bháskara nachází

$$\frac{sin\,1°}{r} = \frac{10}{573}, \qquad \frac{cos\,1°}{r} = 1 - \frac{1}{6569}$$

(poslední hodnota dává pět správných desetinných míst) a nakonec

$$sin(\alpha \pm 1°) = sin\,\alpha - \frac{sin\,\alpha}{6569} \pm \frac{10\,cos\,\alpha}{573}.$$

Tabulky vytvořené Bháskarem, byly podstatně přesnější než tabulky Árjabhattovy ([3], str. 168-169).

Indové se věnovali i některým praktickým věcem, jako například měření výšek a vzdáleností. Tyto pravidla byla založena na měření stínu svislé tyče – gnómonu a na podobnosti trojúhelníků. Početní stránka těchto úloh předcházela zavedení funkcí tangenty a kotangenty. Jejich zavedení se však setkáváme až v první polovině 9. století u učenců arabského chalífátu ([3], str. 169).

2.2.2 TRIGONOMETRIE V ISLÁMSKÝCH ZEMÍCH

Trigonometrie v islámských zemích zaujímala důležité místo. Spojovala tak matematiku s hlavní přírodní vědou té doby – astronomií, dále pak s problematikou výpočtu kalendáře a s gnómonickou – vědou o slunečních hodinách. Než se však arabští matematikové začali zabývat řešením trigonometrických úloh, tak se seznamovali s pracemi svých předchůdců. Jako základ arabských trigonometrických znalostí tvořila díla starších kultur - jedna z indických „Siddhántas", Ptolemaiův „Almagest" a Menelaova „Sférika". Arabští učenci přispěli k rozvoji trigonometrie tím, že zavedli nové veličiny tangens, kotangens, ale také sekans a kosekans. Tyto veličiny se objevily v 9. století v islámských dílech v souvislosti s tětivami a oblouky vztahující se ke kruhu, jak tomu bylo u veličin sinus a kosinus ([3], str. 290-291).

Tangens, kotangens (a také sekans a kosekans) se zpočátku objevovaly nikoli jako čáry, které se vztahovaly ke kruhu, ale při srovnání stran pravoúhlého trojúhelníka. Tyto pojmy už byly známy za Ahmada ibn Abdalláha al-Marwázíma z Mesonu, kterého nazývali al-Habaš al Hásib a jeho společníků z „Domu moudrosti". Al Habaš sestavil tabulku hodnot s přesností na vteřiny (za předpokladu, že $h = 60' = 1°$). Tato tabulka, tj. tabulka hodnot kotangent

$$t = h.cotg\ \alpha = cotg\ \alpha$$

dovolovala určovat výšku Slunce z délky jeho stínu a naopak z výšky Slunce délku jeho stínu. Pro vodorovný gnómon, který byl kolmý k vertikální stěně, pak al-Habaš sestavil tabulku „obrácených stínů", tj. hodnot tangent

$$\tau = h.tg\ \alpha = tg\ \alpha.$$

Ačkoliv se později místo tg a $cotg$ používalo poměru hodnot sinu a kosinu, mnozí matematikové se rádi chopili této novinky, která přispěla k podstatnému zjednodušení trigonometrických výpočtů ([3], str. 292).

2.2.3 ROZVOJ TRIGONOMETRIE V EVROPĚ 15. – 17. STOLETÍ

Vynikajícím matematikem a astronomem druhé poloviny 15. století byl Johannes Müller z Königsbergu u Hassfurtu (1436-1476), který byl spíše znám podle latinského názvu svého rodiště, Regiomontanus ([3], str. 404).

Obrázek 4: Regiomontanus

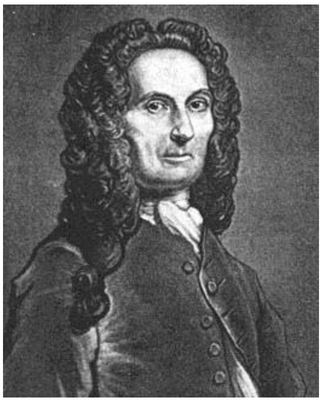
Ve svých trigonometrických dílech čerpal z arabské literatury, ale rovněž čerpal i z Ptolemaiova „Almagestu”. Důležitou úlohu v oblasti trigonometrie však hrály jeho vlastní dílčí výsledky a originální důkazy. Regiomontanus se zabýval sestavováním astronomických a trigonometrických tabulek, ale také překládal a vydával, jak cizí, tak i vlastní práce. V oblasti jeho prací je pro nás však důležitá „tabulka s dvojím vchodem”. Tabulka sloužila pro výpočet odvěsny a pravoúhlého sférického trojúhelníka podle vzorce

$$sin\, a = sin\, c\, .\, sin\, A,$$

kde A je protilehlý úhel a c je přepona. Veličiny c a A byly udávány v intervalu 1° ([3], str. 405-406).

Další postavou, která se zasloužila o přetvoření celé matematiky, a tedy i trigonometrie, do podoby, jak ji známe dnes, byl Abraham de Moivre (1667-1754). De Moivreovy práce byly ve své době dobře známé a díky nim byl přijat za člena několika učených společností.

Nová vlna zájmu o de Moivreovu osobu se zdvihla ve XX. století, kdy díky pečlivějšímu čtení jeho prací bylo prokázáno, že mu náleží priorita v řadě významných poznatků a matematických postupů do té doby obecně přičítaných jiným a také po nich pojmenovaných.



Obrázek 5: Abraham de Moivre

De Moivre je dnes obecně známý díky tomu, že jeho jméno nese důležitý vztah $(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)^n = cos\,n\alpha + i\,sin\,n\alpha.$ Tento vztah ve svých pracích sice používal a rozšířil jeho známost, ale ve výše uvedené formě jej však nikdy nenapsal. Slovní formulaci tohoto vztahu však jako první podal Francois Viète (1540-1603) ve své práci „Angulares Sectiones” z roku 1570, spočetl k němu odpovídající tabulky pro n = 2, 3, 4, 5 a používal je i v dalších pracích. Nynější forma vztahu i jeho důkaz jsou přičítány anglickému matematikovi a astronomovi Rogeru Cotesovi (1682-1716), exponenciální formu

$$e^{i\alpha} = cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha,$$

z niž de Moivreův vztah plyne automaticky, zavedl Leonhard Euler (1707-1783) v „Introductio in Analysin Infinitorum” ([4], str. 7).

2.3 LEONHARD EULER A JEHO PŘÍNOS GONIOMETRII

Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 v Basileji ve Švýcarsku a zemřel 18. září 1783 v Petrohradě [5].

Obrázek 6: Leonhard Euler

Napsal kolem 880 článků, desítky knih, tisíce vědeckých sdělení ve formě dopisů. Posunul hranice analytické geometrie a trigonometrie, kde jako první uvažoval o sinu, kosinu atd. jako o funkcích, ne jako o sečnách jako Ptolemaios. Byl to pravě L. Euler, kterému patří významný objev, že funkce sin t, cos t a e^t splňují v oboru komplexních čísel jednoduchý vztah, se kterým se mnozí z nás setkali již na střední škole

$$e^{it} = cos\, t + i\, sin\, t\,.$$

Zvolíme-li $z = it$, kde t je reálné číslo a dosadíme do rozvoje $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, které nám dá

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k}{k!} = \sum_{k=0,k\ sudé}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} + i \sum_{k=1,k\ liché}^{n} (-1)^{\frac{(k-1)}{2}} \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} + i$$
$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right).$$

Na posledním řádku jsou v závorkách Taylorovy rozvoje funkcí $cos\ t$ a $sin\ t$. Tím jsme dospěli k slavné Eulerově formuli $e^{it} = cos\, t + i\, sin\, t$. Je zřejmé, že platí i vzorec $e^{-it} = cos\, t - i\, sin\, t$, takže po sečtení a odečtení obou rovnic dostáváme důležité vyjádření funkcí sinus a kosinus pomocí exponenciály

$$cos\, t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad sin\, t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Pro $t = \pi$ nám z Eulerovy formule plyne další vztah $e^{i\pi} + 1 = 0$ [24].

.

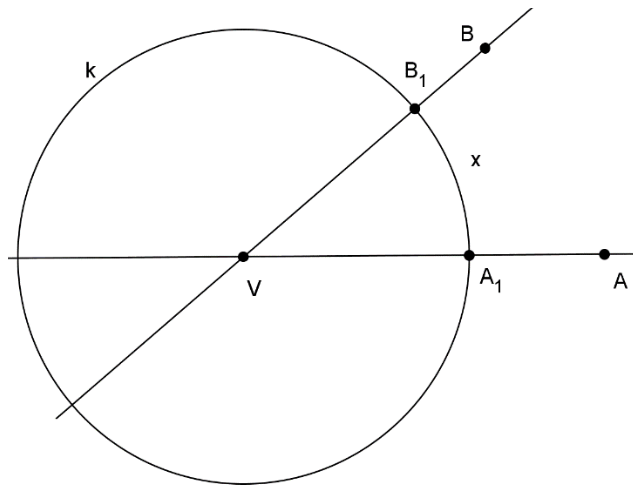
3 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

3.1 MĚŘENÍ ÚHLŮ (STUPŇOVÁ A OBLOUKOVÁ MÍRA)

Slovo goniometrie pochází z řečtiny a znamená měření úhlů, slovo trigon znamená trojúhelník. Velikost úhlu, kterou udáváme buď v míře obloukové, nebo v míře stupňové.

Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. Slovem uspořádaná dvojice míníme to, že zaleží na tom, kterou z polopřímek bereme jako první (nazýváme ji počátečním ramenem orientovaného úhlu) a kterou jako druhou (nazýváme ji koncovým ramenem úhlu). Společný počátek obou polopřímek se nazývá vrchol orientovaného úhlu. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým VB, pak značíme AVB (Obrázek 7) ([8], str. 103).

Nutné je však ještě zavést orientaci úhlů. Úhlům, které probíhaným v „kladném" smyslu (proti hodinovým ručičkám) přiřazujeme hodnotu kladnou, úhlům probíhaným ve smyslu „záporném" hodnotu zápornou.



Obrázek 7: Jednotková kružnice

a) Oblouková míra úhlu

Sestrojme v rovině AVB kružnici k, která má střed V a poloměr r = 1. Této kružnici říkáme jednotková kružnice se středem V. Její průsečíky s polopřímkami VA, VB označme po řadě A_1B_1 (Obrázek 7). Potom velikostí úhlu AVB v obloukové míře nazýváme délku toho oblouku A_1B_1 jednotkové kružnice k, který leží v úhlu AVB. Přitom jednotka délky oblouku A_1B_1 je dána poloměrem kružnice k. Jednotkový úhel obloukové míry se nazývá radián (značíme rad). Radián je úhel, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky $|\mathrm{A_1\,B_1}| = 1$ ([9], str. 146).

b) Stupňová míra úhlu

Velikost úhlu AVB ve stupňové míře nazýváme nezáporné číslo, jež vyjadřuje, kolikrát je úhel AVB větší (nebo menší) než jeden úhlový stupeň. Jednotkový úhel stupňové míry zvaný úhlový stupeň (značíme °) je úhel rovnající se $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Ve stupňové míře se často používá menších jednotek, např. úhlová minuta nebo úhlová vteřina. Úhlová minuta (značíme ´) je jedna šedesátina stupně a úhlová vteřina (značíme ´´) je jedna šedesátina minuty. Platí tedy $1° = 60' = 3600''$ ([9], str. 146).

c) Vztahy mezi velikostmi úhlů

Označíme-li číselnou hodnotou x, velikost daného úhlu v míře obloukové a n velikost téhož úhlu v míře stupňové. Pro plný úhel je $\alpha = 360°$, což odpovídá $x = 2\pi$ (délka jednotkové kružnice), pro přímý úhel je $\alpha = 180°$ neboli $x = \pi$. Obecně pak pro velikosti úhlu α v míře obloukové a x v míře obloukové platí vztah $\alpha : x = 180° : \pi$ ([9], str. 146).

Z tohoto vztahu lze pro danou hodnotu α vypočítat příslušnou hodnotu x a naopak. Jako příklad bych pak uvedl nějaké elementární vztahy:

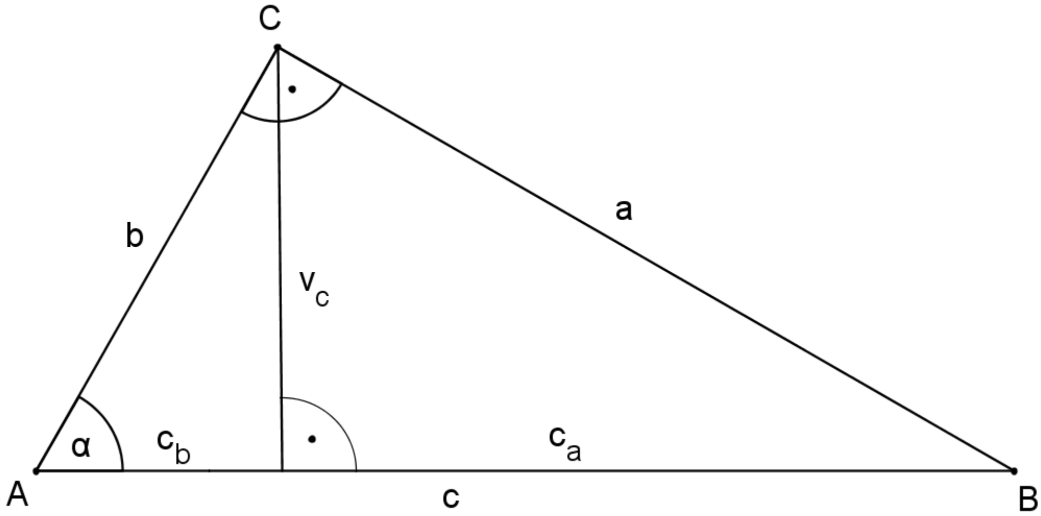
$$1\,rad = \frac{180°}{\pi} = 57°17'45'', \qquad 1° = \frac{\pi}{180} rad$$

Jako příklad bych pak uvedl několik hodnot, které jsou ve školní goniometrii hodně časté, a proto je dobré si je pamatovat:

$$360° = 2\pi, \qquad 180° = \pi, \qquad 90° = \frac{\pi}{2}, \qquad 60° = \frac{\pi}{3}, \qquad 45° = \frac{\pi}{4}, \qquad 30° = \frac{\pi}{6}.$$

3.2 DEFINICE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Na základní škole se každý z nás setkal s definicí goniometrických funkcí pomocí pravoúhlého trojúhelníka (Obrázek 8), kde úhel $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tuto definici bych bral jako elementární bod, na kterém se při nauce o goniometrických funkcí staví. Jednotlivé poměry mezi stranami jsou pak definovány následně:



Obrázek 8: Pravoúhlý trojúhelník

Sinus α je poměr protilehlé odvěsny k přeponě. $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$

Kosinus α je poměr přilehlé odvěsny k přeponě. $cos\,\alpha = \frac{b}{c}$

Tangens α je poměr protilehlé odvěsny k přilehlé odvěsně. $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$

Kotangens α je poměr přilehlé odvěsny k protilehlé odvěsně. $cotg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$

Sekans α je poměr délky přepony a délky odvěsny přilehlé tomuto úhlu. $sec\,\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{cos\,\alpha}$

Kosekans α je poměr délky přepony a délky odvěsny protilehlé tomuto úhlu. $csc\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{sin\,\alpha}$

Z definice pomocí pravoúhlého trojúhelníka je jasné, že není problém vypočítat jakýkoliv úhel α v intervalu $< 0; \frac{\pi}{2})$, resp. $< 0; 90°)$. Problém nastává v okamžiku, kdy je zadán úhel $\alpha > 90°$, např. zjištění hodnoty $\sin 120°$. Dnešní děti jsou na základních školách vybaveni kalkulačkami a není proto pro ně problém, zjistit tuto hodnotu. Jednoduše naťukají uvedenou hodnotu do kalkulátoru a okamžitě jim vyjde číslo 0,866025403. Hodnota tohoto čísla je omezená možností zobrazováním číslic na displeji kalkulačky, čímž dochází k zaokrouhlování a přibližné hodnotě.

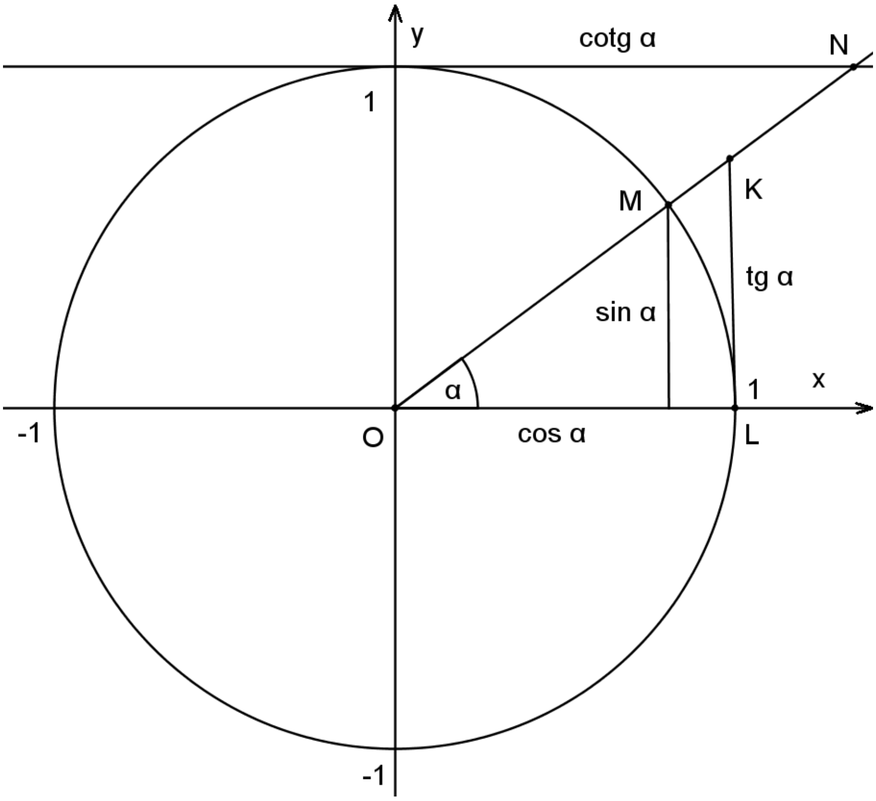
S tím, jak lépe vypočítat a zjistit hodnoty goniometrických funkcí se setkáváme až na středních školách, popř. gymnáziích, zavedením jednotkové kružnice (Obrázek 9). Dle následující věty si proto zavedeme základní goniometrické funkce v intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

Věta 3.2.1 (Goniometrické funkce obecného úhlu α):

Nechť α je velikost úhlu otočení polopřímky OL do polopřímky OM, kde M je bod kružnice se středem O a poloměrem $r = |OL| = 1$ (jednotková kružnice) ([6], str. 137).

Dle obrázku 9 platí:

$$O[0,0], C[1,0], B[x_B, y_B], F[x_F, y_F], D[x_D, y_D]$$



Obrázek 9: Jednotková kružnice

$$sin\,\alpha = y_M\,, kde\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$cos\,\alpha = x_M\,, \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = y_D\,, \text{kde } \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = y_F\,, \text{kde } \alpha \neq k\pi.$$

Zavedením jednotkové kružnice se nám otevřely možnosti pro určení jakéhokoli úhlu α v intervalu $< 0; 2\pi)$ a jeho libovolného násobku. S čím si však středoškolská goniometrie neví rady, je oblouk křivky, resp. délka oblouku celé kružnice. Délka kruhového oblouku (označíme l) se pak počítala podle následujícího vzorce:

$$l = \frac{2\pi r}{360}\alpha,$$

kde úhel α vymezoval středový úhel. S tím, jak měřit délku oblouku nějaké křivky se setkáváme až později a to na vysokoškolské matematice, zavedením integrálního počtu.

Co se však stane, budeme-li chtít vypočítat hodnotu funkce $\sin 1°$ s přesností menší než 10^{-6}? Na tohle je středoškolská matematika krátká a s řešením tohoto problému se lze setkat až po zavedení mocninných řad (kapitola 6.1).

4 GONIOMETRIE PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKU

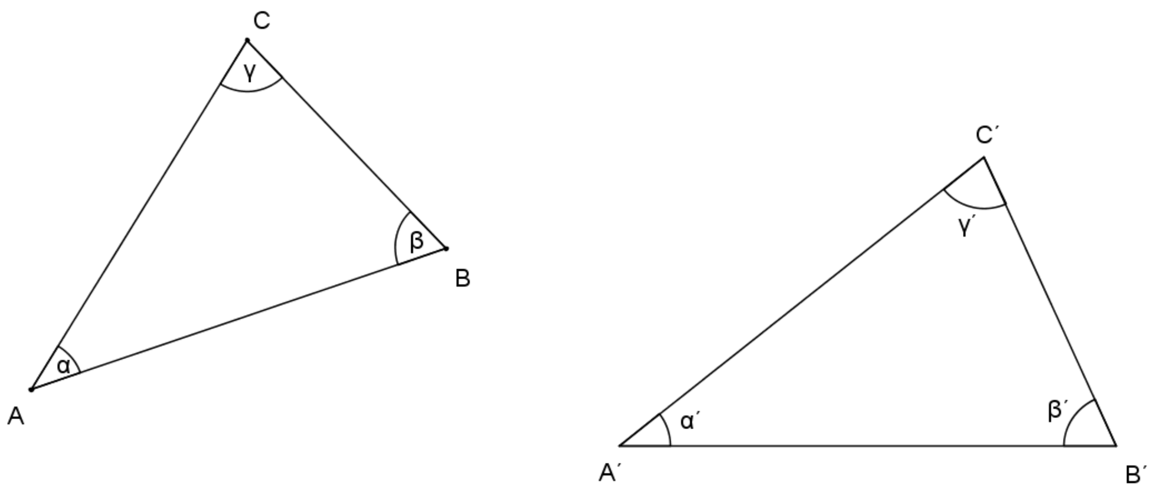
4.1 FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU

V předešlé kapitole jsme si definovali funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans ostrého úhlu velikosti α, kde $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$[2]. Zavedení těchto funkcí bylo nutné pro řešení pravoúhlých trojúhelníků.

4.1.1 SHODNOST TROJÚHELNÍKŮ

Dva trojúhelníky $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, A'B'C'$ se nazývají shodné trojúhelníky, jestliže je lze přemístit tak, že se úplně kryjí – mají shodné všechny strany i vnitřní úhly. Zápisem

$\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$ vyjadřujeme, že $\Delta\, ABC$ je shodný s $\Delta\, A'B'C'$, přičemž $AB = A'B'$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$, $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$ (Obrázek 10).



Obrázek 10: Shodnost trojúhelníků

Proto, abychom určili, zda jsou dva trojúhelníky shodné, není nutné ověřovat shodnosti všech šesti základních prvků (stran i úhlů). Stačí ověřit, zda je splněno některé z kritérií (postačujících podmínek) podle následujících vět o shodnosti trojúhelníků ([8], str. 359):

Věta 4.1.1: Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují:

a) ve všech třech stranách (věta *sss*)

b) ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném (věta *sus*)

[2] Tato formulace platí pro definici pomocí pravoúhlého trojúhelníka

c) ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich (věta *Ssu*)

d) v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých (věta *usu*)

4.1.2 PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

Dva trojúhelníky $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, A'B'C'$ se nazývají podobné, když jejich odpovídající si strany jsou úměrné, tj. existuje takové kladné číslo k[3], že platí:

$$A'B' = k\,.AB,\; B'C' = k\,.BC,\; A'C' = k\,.AC \text{ čili}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k.$$

Je-li $k > 1$, představuje podobnost zvětšení, je-li $0 < k < 1$, představuje zmenšení, pro $k = 1$ je to shodnost. Zápisem $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$ vyjadřujeme, že $\Delta\, ABC\ a\ \Delta\, A'B'C'$ jsou podobné, přičemž $A'B' = k\,.AB,\; B'C' = k\,.BC,\; A'C' = k\,.AC,\; \sphericalangle A' = \sphericalangle A,\; \sphericalangle B' = \sphericalangle B,\; \sphericalangle C' = \sphericalangle C$ ([8], str. 360).

Máme-li určit, zda jsou dva trojúhelníky podobné, není třeba ověřovat, zda všech šest základních prvků (strany a vnitřní úhly) splňuje podmínky, které plynou z podobnosti trojúhelníků. Stačí jen ověřit splnění některých kritérií vět o podobnosti trojúhelníků:

Věta 4.1.2 (Dva trojúhelníky jsou podobné):

a) shodují-li se ve dvou úhlech (věta uu)

b) jsou-li rovny poměry[4] dvou stran a shodné úhly jimi sevřené (věta *sus*)

c) jsou-li rovny poměry[4] dvou stran a shodné úhly proti delší z nich (věta *Ssu*)

4.2 PYTHAGOROVA VĚTA

Pythagorova věta byla pojmenována podle Pythagora ze Samu (okolo 570 př. n. l. – 510 př. n. l.) a popisuje vztah, který platí mezi délkami stran pravoúhlých trojúhelníků v rovině.

Věta 4.2.1 (Pythagorova): Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého rovinného trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

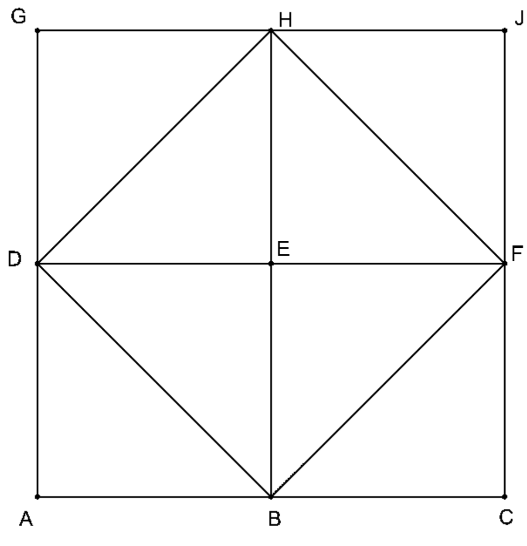
[3] Číslo k nazýváme poměr podobnosti.
[4] Poměrem stran trojúhelníka se rozumí podíl jejich velikostí.

4.2.1 ODVOZENÍ PYTHAGOROVY VĚTY

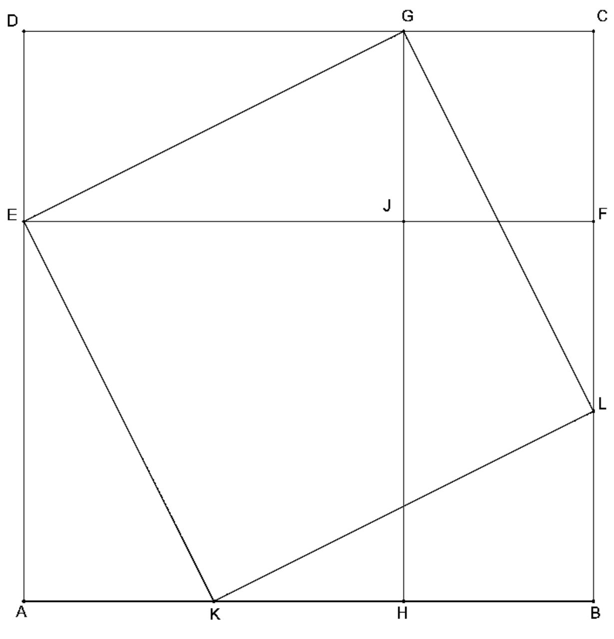
O tom, jak se původně Pythagorova věta dokazovala, můžeme vyslovovat jen domněnky. Je však možné, že byla zprvu dokázána jen pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, který bylo možné nacházet ve velmi starých ornamentech, ve tvaru čtvercové sítě doplněné uhlopříčkami ([1], str. 93).

V takové síti se objevuje, že se součet čtverců ABED a EFJH sestrojených z odvěsen trojúhelníka DEF rovná čtverci DBFH, jehož strana je přeponou tohoto trojúhelníka. Protože se všechny tyto čtverce skládají ze stejných trojúhelníků (Obrázek 11) ([1], str. 93).

Starověcí matematikové však mohli od tohoto zvláštního případu přejít k obecnému, tím že zkoumali čtverec ABCD rozdělený na dva různé čtverce AHJE a JFCG a dva stejné obdélníky KJGD a HBFJ (Obrázek 12). Čtverec EKLG se rovná čtverci ABCD zmenšenému o trojúhelníky AKE, KBL, LCG a GED, jejichž součet se rovná oběma trojúhelníkům. Současně se součet čtverců AHJE a JFCG rovná čtverci ABCD, od něhož je odečtena plocha obou těchto obdélníků. Tedy čtverec KLGE se rovná součtu čtverců AHJE a JFCG ([1], str. 93 - 94).



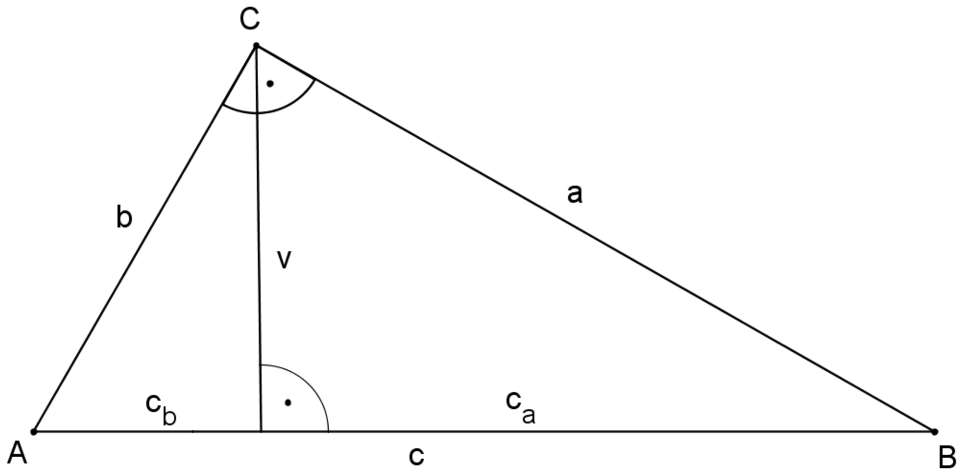
Obrázek 11



Obrázek 12

4.3 EUKLEIDOVY VĚTY

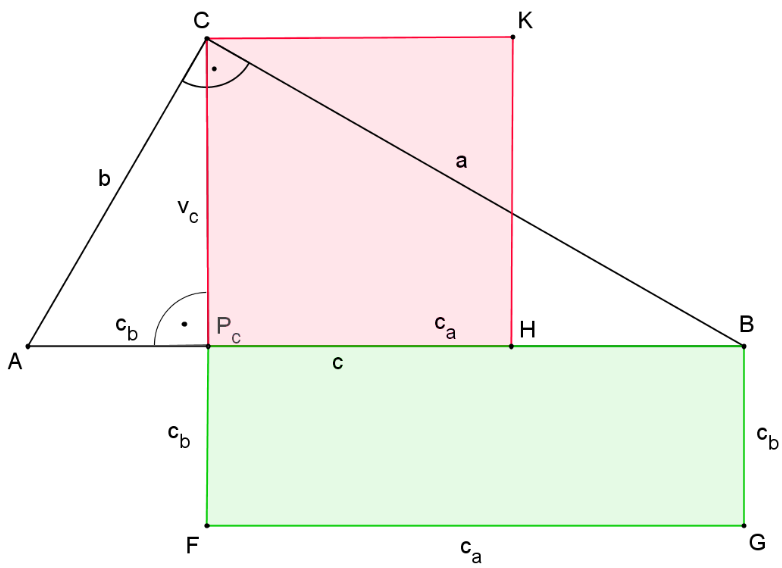
Jsou pojmenovány po známém řeckém matematikovi a geometrovi Eukleidovi (325 př. n. l. – 260 př. n. l), který většinu svého života strávil v Alexandrii v Egyptě. Eukleidovy věty jsou označení pro geometrická tvrzení o vlastnostech pravoúhlých trojúhelníků (Obrázek 13). Ve skutečnosti jsou Eukleidovy věty dvě ‑ Eukleidova věta o výšce a Eukleidova věta o odvěsně.



Obrázek 13: Pravoúhlý trojúhelník

Věta 4.3.1 (Eukleidova věta o výšce): Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony:

$$v^2 = c_a c_b.$$

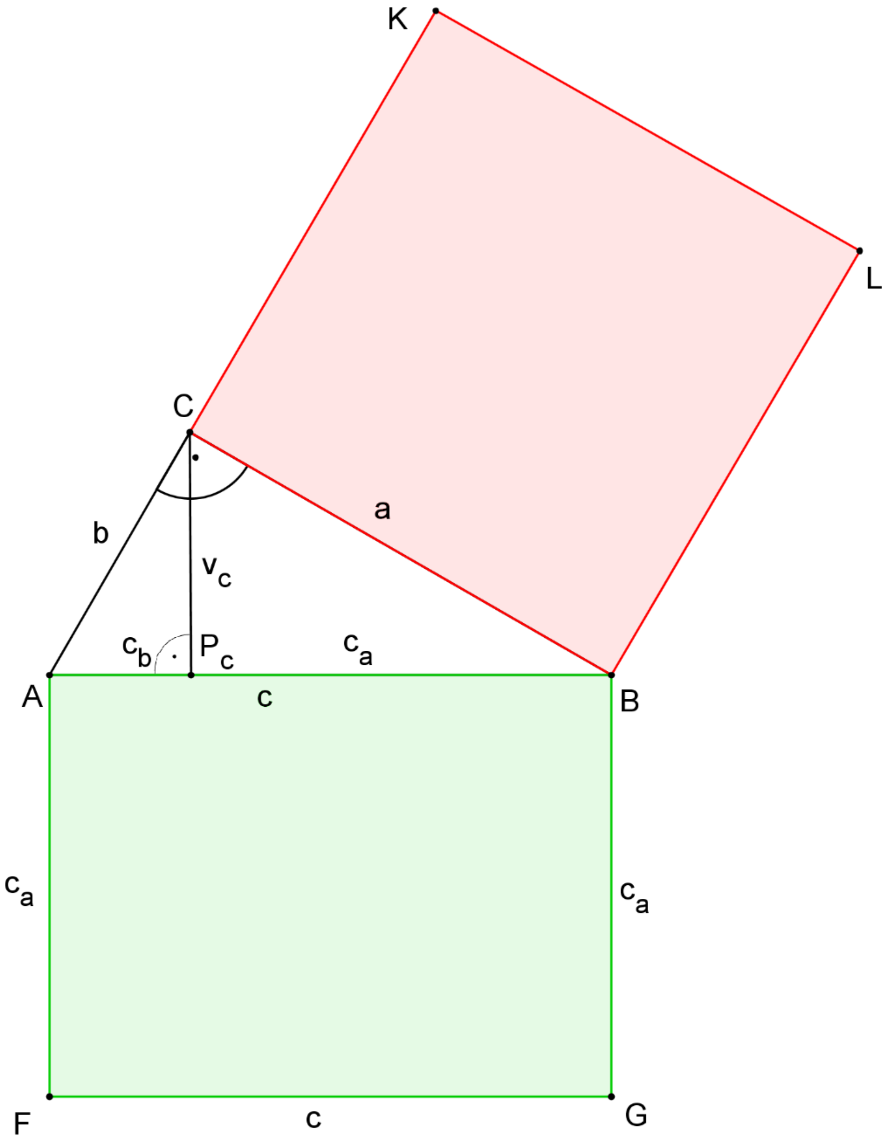


Obrázek 14: Eukleidova věta o výšce

Věta 4.3.2 (Eukleidova věta o odvěsně): Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé:

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$



Obrázek 15: Eukleidova věta o odvěsně

5 GONIOMETRIE OBECNÉHO TROJÚHELNÍKU

5.1 SINOVÁ VĚTA

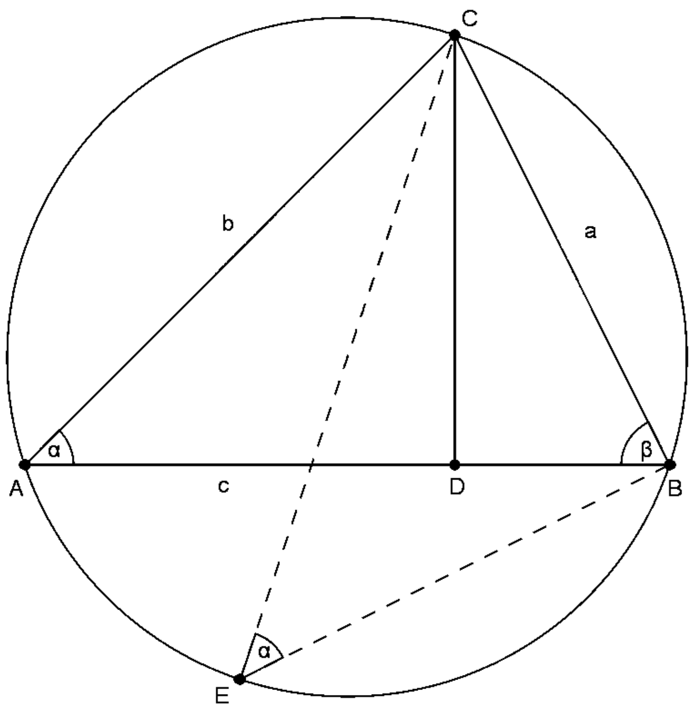
V trigonometrické praxi patří věta sinová mezi jedno z nejužívanějších tvrzení o rovinných trojúhelnících. Na rozdíl od běžných goniometrických funkcí platí v obecném trojúhelníku a udává nám vztah mezi délkami stran a úhly. Sinová věta nám říká, že poměr všech délek stran a hodnot sinů jim protilehlých úhlů je v daném obecném trojúhelníku konstantní.

Věta 5.1.1 (Sinová věta): V libovolném trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{neboli} \quad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

5.1.1 ODVOZENÍ SINOVÉ VĚTY

Spustíme-li z vrcholu C trojúhelníku ABC (Obrázek 16) na protilehlou stranu kolmici (výšku), rozdělí se tím trojúhelník ve dva pravoúhlé trojúhelníky o společné odvěsně CD (výšce) ([11], str. 22).



Obrázek 16: Věta sinová

Platí, že:

$$CD = b \sin\alpha \text{ v } \Delta \text{ ACD}$$

$$CD = a \sin\beta \text{ v } \Delta \text{ BCD},$$

přičemž $a \sin\beta = b \sin\alpha$ z čehož plyne poměr:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma\ .$$

Tato věta má platnost i v případě, že by jeden z úhlů byl tupý. Ze součinu:

$$a \sin\beta = b \sin\alpha \text{ dostaneme } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$a \sin\gamma = c \sin\alpha \text{ dostaneme } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

přičemž $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Poměr strany ku sinusu protilehlého úhlu téhož trojúhelníku je veličinou stálou.

Obrýsujeme-li trojúhelník ABC (Obrázek 16) kružnicí, stane se $\sphericalangle$ BAC $= \alpha$ obvodovým úhlem. Narýsujeme-li průměr CE a spojíme-li E s B, tak nám vznikne pravoúhlý trojúhelník EBC v němž, platí že $\sphericalangle$ BEC $= \sphericalangle$ BAC $= \alpha$ a pak BC $=$ a $= 2\text{R} \sin\alpha$ neboli $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

5.2 KOSINOVÁ VĚTA

Neboli někdy také věta Carnotova nám pomáhá vyřešit trojúhelník, kdy máme zadány dvě strany a úhel, který svírají, nebo když známe délky všech tří stran trojúhelníku.

Věta 5.2.1 (Kosinová věta): Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ a stranami $a,\ b,\ c$ platí:

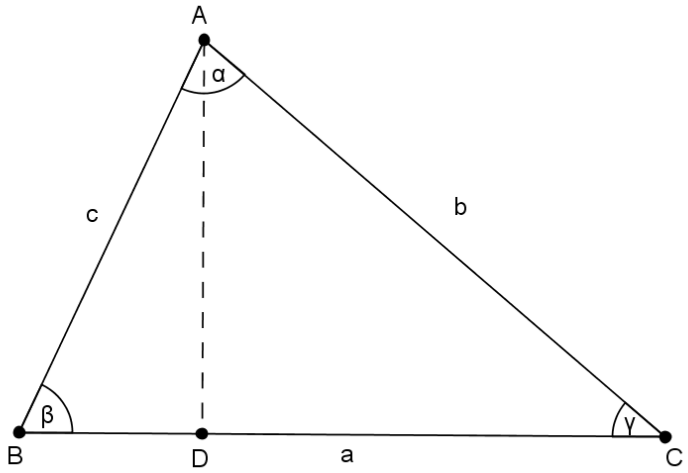
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma.$$

5.2.1 ODVOZENÍ KOSINOVÉ VĚTY

Výškou rozdělíme základnu trojúhelníku na dva úseky (Obrázek 17), které lze vyjádřit jako cosinus přilehlých úhlů ([11], str. 25):



Obrázek 17: Kosinová věta

1. $a = c\,cos\,\beta + b\,cos\,\gamma \qquad /a$
2. $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \qquad /b$
3. $c = b\cos\alpha + a\cos\beta \qquad /c$

První rovnici vynásobíme a, druhou b, třetí c a odečteme pak 2. a 3. od 1.,

$$a^2 = a.c\cos\beta + a.b\cos\gamma$$

$$b^2 = b.c\cos\alpha + a.b\cos\gamma$$

$$c^2 = b.c\cos\alpha + a.c\cos\beta$$

dostaneme $a^2 - b^2 - c^2 = -2b.c\,cos\,\alpha$ čili $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$.

Odečteme-li 1. a 3. od 2., dostaneme $b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos\beta$

1. a 2. od 3., dostaneme $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$.

Speciálním případem kosinové věty je věta Pythagorova a to pokud je úhel $\alpha = 90°$, pak je $\cos\alpha = 0$, a zbyde $a^2 + b^2 = c^2$.

Carnotova věta slouží k vypočtení strany trojúhelníku z druhých dvou stran a jimi sevřeného úhlu, nebo k vypočtení úhlu trojúhelníku ze tří stran, jestliže:

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ a velikost úhlu je určena cosinem ([11], str. 25).

5.3 VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI STEJNÉHO ÚHLU

Věta 5.3.1:

Označíme-li na jednotkové kružnici (Obrázek 18) vzdálenost $|OB| = x = \cos\alpha$ a vzdálenost $|OA| = y = \sin\alpha$, pak nám pomocí Pythagorovy věty vznikne:

$x^2 + y^2 = 1$, čímž dostáváme 1. rovnici:

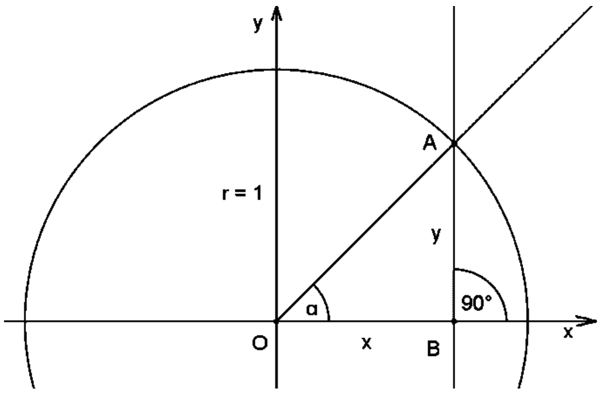
$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1\,.$$

Vydělíme-li 1. rovnici funkcí $\cos\alpha^2$, získáme tak 2. rovnici:

$$1 + (tg\ \alpha)^2 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}\,.$$

Vydělíme-li 1. rovnici funkcí $\sin\alpha^2$, získáme tak 3. rovnici:

$$1 + (cotg\ \alpha)^2 = \frac{1}{(\sin\alpha)^2}\,.$$



Obrázek 18: Jednotková kružnice

Věta 5.3.2:

Pro odvození rovnic v této větě budeme opět vycházet z jednotkové kružnice (Obrázek 18) a rovnice $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$. Po převedení funkce $\cos\alpha^2$ na pravou stranu této rovnice nám vznikne: $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$ a po následném odmocnění:

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \frac{|tg\ \alpha|}{\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\,\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathrm{cotg}\,\alpha)^2}}\,.$$

Po převedení funkce $\sin\alpha^2$ na pravou stranu této rovnice nám vznikne: $\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$ a po následném odmocnění:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-(\sin\alpha)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{tg}\,\alpha)^2}} = \frac{|cotg\ \alpha|}{\sqrt{1+(\mathrm{cotg}\,\alpha)^2}}.$$

Vydělíme-li rovnici $\sin\alpha^2 = 1-\cos\alpha^2$ funkcí $\cos\alpha^2$, tak nám vznikne:

$$|\mathrm{tg}\,\alpha| = \frac{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}{|\cos\alpha|} = \frac{|\sin\alpha|}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \frac{1}{|cotg\ \alpha|}.$$

Vyznačení absolutních hodnot ve větě 4.3.2 je nutné, neboť např. $\sin 30° = \sqrt{1-(\cos 30°)^2}$, ale $\sin 270° = -\sqrt{1-(\cos 270°)^2}$. O tom, kdy ze vzorce $|\sin\alpha| = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$ plyne pro určité α $\sin\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$ a kdy $\sin\alpha = -\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$, rozhodneme podle znaménka $\sin\alpha$ v jednotlivých kvadrantech (Tabulka 1). Podobně postupujeme u ostatních vzorců, kde se vyskytují absolutní hodnoty ([10], str. 75).

5.4 GONIOMETRICKÉ FUNKCE SOUČTU A ROZDÍLU ÚHLŮ, NÁSOBKU A POLOVINY ÚHLU

Věta 5.4.1:

Pro odvození následujících rovnic se nám hodí známý Eulerův vzorec, který jsme si uvedli v kapitole 1.3, $e^{it} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$. Teď stačí jen chytře zvolit t a dostaneme vzorec, jaký potřebujeme.

Položíme-li $t = \alpha + \beta$, tak dostaneme:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

čímž dostaneme:

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta).$$

Porovnáme-li reálnou a imaginární část, tak je zřejmé že:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Následující postup je podobný jako ten předchozí. Pokud $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, tak $\cos(-\beta) = \cos\beta$ – funkce kosinus je sudá a $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

$$e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\,(\cos\beta - \mathrm{i}\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

čímž dostaneme:

$$\cos(\alpha-\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

Opět porovnáme imaginární a reálnou část:

$$\boxed{\begin{gathered} sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta \\ cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta. \end{gathered}}$$

Pro odvození goniometrických funkcí součtu pro tangens a kotangens využijeme vzorce, které jsme si teď právě odvodili, kdy:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme $\cos\alpha\cos\beta$, čímž nám vznikne:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta} = \frac{\frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\frac{cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}}{1 - \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

Po přepsání levé a pravé rovnice nám vznikne požadovaný vzorec:

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$$

Podobně jako v předchozím případě budeme postupovat v případě $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$, kdy:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)} = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme $\cos\alpha\cos\beta$, čímž nám vznikne:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta},$$

neboli:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

V případě $\mathrm{cotg}(\alpha+\beta)$, kdy:

$$\mathrm{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme $\sin\alpha\sin\beta$, čímž nám vznikne:

$$\mathrm{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta-1}{\mathrm{cotg}\,\beta+\mathrm{cotg}\,\alpha},$$

nebo také:

$$\mathrm{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta-1}{\mathrm{cotg}\,\beta+\mathrm{cotg}\,\alpha}.$$

A v neposlední řadě, pak pro $\mathrm{cotg}(\alpha-\beta)$, kdy:

$$\mathrm{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme $\sin\alpha\sin\beta$, čímž nám vznikne:

$$\mathrm{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + 1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha},$$

nebo po přepsání první levé strany a nově vzniklé pravé platí, že:

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}.$$

Věta 5.4.2:

Položíme-li $t = 2\alpha$ a podle Eulerova vzorce:

$$e^{i2\alpha} = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha$$

$$e^{i2\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^2 = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^2 = cos^2\alpha - sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Dvě komplexní čísla se rovnají právě tehdy, rovnají-li se jejich reálné a imaginární části, proto dostáváme rovnice:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.$$

Položíme-li $t = 3\alpha$ a znovu použijeme Eulerova vzorce:

$$e^{i3\alpha} = \cos 3\alpha + \mathrm{i}\sin 3\alpha,$$

tak po porovnání imaginární a reálné části získáme:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

Věta 5.4.3:

$\sin n\alpha, \cos n\alpha$ pro přirozené n určíme z Moivreovy věty ([10], str. 75),

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\alpha(\mathrm{i}\sin\alpha)^{n-k}.$$

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \dots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \dots$$

Věta 5.4.4:

Pro odvození následujícího vzorce budeme vycházet ze vzorců, které jsme si odvodili před chvílí, a to:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme funkcí $cos^2\alpha$ a tím nám vznikne:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{cos^2\alpha}}{\frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}.$$

Po přepsání:

$$\boxed{\text{tg } 2\alpha = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}.}$$

Pro odvození vzorce pro $tg\ 3\alpha$ si nejprve vyjádříme $cos\ 3\alpha$ a $sin\ 3\alpha$ pomocí $cos\ \alpha$ a $sin\ \alpha$:

$$sin\ 3\alpha = sin(2\alpha + \alpha) = sin\ 2\alpha\ cos\ \alpha + cos\ 2\alpha\ sin\ \alpha =$$

$$= (2 \sin \alpha \cos \alpha)\ cos\ \alpha + (cos^2\alpha - sin^2\alpha)\ sin\ \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha\ cos^2\alpha + \sin \alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha = 3 \sin \alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha .$$

Po přepsání levé a pravé strany rovnice nám vznikne:

$$\boxed{sin\ 3\alpha = 3 \sin \alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha .}$$

$$cos\ 3\alpha = cos(2\alpha + \alpha) = cos\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sin\ 2\alpha\ sin\ \alpha =$$

$$= (cos^2\alpha - sin^2\alpha)\ cos\ \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha)\ sin\ \alpha =$$

$$= cos^3\alpha - sin^2\alpha\ cos\ \alpha - 2sin^2\alpha \cos \alpha = cos^3\alpha - 3sin^2\alpha \cos \alpha .$$

Po přepsání levé a pravé strany rovnice nám vznikne:

$$\boxed{cos\ 3\alpha = cos^3\alpha - 3sin^2\alpha \cos \alpha .}$$

Poté, co jsme si připravili rovnice $cos\,3\alpha$ a $sin\,3\alpha$, tak se konečně můžeme vrhnout na odvození $tg\ 3\alpha$:

$$\mathrm{tg}\ 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha\, cos^2\alpha - sin^3\alpha}{cos^3\alpha - 3sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme funkcí $cos^3\alpha$ a tím nám vznikne:

$$tg\ 3\alpha = \frac{\frac{3\,sin\,\alpha\, cos^2\alpha - sin^3\alpha}{cos^3\alpha}}{\frac{cos^3\alpha - 3sin^2\alpha\, cos\,\alpha}{cos^3\alpha}} = \frac{\frac{3\,sin\,\alpha}{cos\,\alpha} - \frac{sin^3\alpha}{cos^3\alpha}}{1 - \frac{3sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{3tg\ \alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.$$

Po přepsání levé a pravé strany rovnice nám vznikne:

$$\boxed{\mathrm{tg}\ 3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\ \alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}.}$$

Vzorec pro přirozené n funkce $\sin n\alpha, \cos n\alpha$ vychází z rovnic, které jsme si odvodili výše. Jedná se o tyto rovnice:

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

Podílem funkce $\sin n\alpha$ a funkce $\cos n\alpha$ získáme:

$$\mathrm{tg}\ n\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos n\alpha} = \frac{n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots}{\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots},$$

kde postupnou úpravou dojdeme ke vzorci:

$$\boxed{\mathrm{tg}\ n\alpha = \frac{n\ \mathrm{tg}\ \alpha - \binom{n}{3}\mathrm{tg}^3\alpha + \binom{n}{5}\mathrm{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - \binom{n}{2}\mathrm{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\mathrm{tg}^4\alpha - \binom{n}{6}\mathrm{tg}^6\alpha + \ldots}}$$

Věta 5.4.5:

Pro odvození následujícího vzorce budeme postupovat podobně, jako tomu bylo při odvození vzorce pro tg 2α. Nejprve si připravíme, již známe rovnice:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Podílem funkcí cos 2α a sin 2α nám vznikne:

$$cotg\ 2\alpha = \frac{cos\ 2\alpha}{sin\ 2\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme funkcí $sin^2\alpha$:

$$cotg\ 2\alpha = \frac{\frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{sin^2\alpha}}{\frac{2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{sin^2\alpha}} = \frac{cotg^2\alpha - 1}{2cotg\ \alpha}.$$

Po přepsání:

$$\boxed{cotg\ 2\alpha = \frac{cotg^2\alpha - 1}{2cotg\ \alpha}.}$$

Obdobně budeme pokračovat pro cotg 3α, kde:

$$sin\ 3\alpha = 3\sin\alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha$$

$$cos\ 3\alpha = cos^3\alpha - 3sin^2\alpha\cos\alpha$$

Podílem funkcí cos 3α a sin 3α nám vznikne:

$$cotg\ 3\alpha = \frac{cos\ 3\alpha}{sin\ 3\alpha} = \frac{cos^3\alpha - 3sin^2\alpha\ cos\ \alpha}{3\ sin\ \alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme funkcí $sin^3\alpha$:

$$cotg\ 3\alpha = \frac{\frac{cos^3\alpha - 3sin^2\alpha\ cos\ \alpha}{sin^3\alpha}}{\frac{3\ sin\ \alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha}{sin^3\alpha}} = \frac{\frac{cos^3\alpha}{sin^3\alpha} - \frac{3\ cos\ \alpha}{sin\ \alpha}}{\frac{3cos^2\alpha}{sin^2\alpha} - 1} = \frac{\mathrm{cotg}^3\alpha - 3\mathrm{cotg}\ \alpha}{3cotg^2\alpha - 1}$$

Po přepsání levé a pravé strany rovnice:

$$\boxed{cotg\ 3\alpha = \frac{cotg^3\alpha - 3cotg\ \alpha}{3cotg^2\alpha - 1}.}$$

Vzorec pro přirozené n funkce $\sin n\alpha, \cos n\alpha$ vychází z rovnic, které jsme si odvodili výše. Jedná se o tyto rovnice:

$$sin\ n\alpha = n\ sin\ \alpha\ cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} sin^3\alpha\ cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} sin^5\alpha\ cos^{n-5}\alpha - \ldots$$

$$cos\ n\alpha = cos^n\alpha - \binom{n}{2} sin^2\alpha\ cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} sin^4\alpha\ cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

Podílem funkce $\cos n\alpha$ a funkce $\sin n\alpha$ získáme:

$$cotg\, n\alpha = \frac{cos\, n\alpha}{sin\, n\alpha} = \frac{cos^n\alpha - \binom{n}{2} sin^2\alpha\, cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} sin^4\alpha\, cos^{n-4}\alpha - \ldots}{n\, sin\,\alpha\, cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} sin^3\alpha\, cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} sin^5\alpha\, cos^{n-5}\alpha - \ldots},$$

kde postupnou úpravou dojdeme ke vzorci:

$$\boxed{cotg\, n\alpha = \frac{cotg^n\alpha - \binom{n}{2} cotg^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} cotg^{n-4}\alpha - \ldots}{n\, cotg^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} cotg^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} cotg^{n-5}\alpha - \ldots}}$$

Věta 5.4.6:

V následující větě se budeme snažit dokázat, že pro každé reálné číslo x platí:

$$\boxed{\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}.}$$

Nejprve si vyjádříme funkci $\cos\alpha$ jako součet polovičních úhlů a poté použijeme součtové vzorce:

$$cos\,\alpha = cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = cos\frac{\alpha}{2} cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \left(1 - sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\, sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Nyní vezmeme první a poslední výraz:

$$cos\,\alpha = 1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2}$$

a následně vyjádříme druhou mocninu polovičního úhlu:

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

kde nám po odmocnění vznikne požadovaný vztah:

$$\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}.$$

Podobně se budeme snažit dokázat, že pro každé reálné číslo x platí:

$$\left|cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}.$$

Nejprve si vyjádříme funkci $cos\,\alpha$ jako součet polovičních úhlů a poté použijeme součtové vzorce:

$$cos\,\alpha = cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,.$$

Nyní vezmeme první a poslední výraz:

$$cos\,\alpha = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

a následně vyjádříme druhou mocninu polovičního úhlu:

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\,\alpha}{2}\,,$$

kde nám po odmocnění vznikne požadovaný vztah:

$$\boxed{\left|cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}\,.}$$

Poté, co jsme si odvodili vzorce pro $\sin\alpha$ a $cos\,\alpha$ polovičního úhlu, tak už nebude těžké přejít k odvození vzorců pro poloviční úhly funkcí $tg\,\alpha$ a $cotg\,\alpha$.

Nechť pro každé reálné číslo $\alpha \neq (2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a platí, že:

$$\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}.$$

Pro odvození vyjádříme funkce sinus a kosinus pomocí vzorce pro poloviční úhly:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}\,,$$

kde nám po přepsání vznikne požadovaný vztah:

$$\boxed{\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}.}$$

Během úprav zlomku, nám vzniknou vzorce, které by se nám mohly hodit:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}\,.$$

Odvození pro kotangens polovičního úhlu bude podobné jako pro tangens polovičního úhlu. Opět budeme vycházet z vyjádření funkce sinus a kosinus pro poloviční úhly:

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}},$$

po přepsání:

$$\left|\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,.$$

Během úprav nám vzniknou vzorce, které není špatné si pamatovat:

$$cotg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\,.$$

5.5 SOUČET, ROZDÍL, SOUČIN GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ, MOCNINA GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Ze součtových vzorců lze též odvodit vzorce, pomocí nichž je možno součet nebo rozdíl sinů či kosinů upravit na součin. Aplikujeme-li součtové vzorce pro argumenty γ, δ a položíme-li $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$ čili $\alpha = \gamma + \delta,\ \beta = \gamma - \delta$, dostáváme sečtením, resp. odečtením součtových vzorců vzorce pro součet a rozdíl sinů a kosinů, kde α, β jsou libovolná reálná čísla ([8], str. 113):

Věta 5.5.1:

$$sin\,\alpha + sin\,\beta = sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left[sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] +$$

$$+ \left[sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] = 2\ sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\boxed{sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\ sin\frac{\alpha+\beta}{2}.cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left[sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] -$$

$$- \left[sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] = 2\ cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left[cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] +$$

$$+ \left[cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] = 2\ cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left[cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] -$$

$$-\left[cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] = -2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Věta 5.5.2:

$$tg\ \alpha + tg\ \beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\boxed{tg\ \alpha + tg\ \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$tg\ \alpha - tg\ \beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\boxed{tg\ \alpha - tg\ \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$cotg\ \alpha + cotg\ \beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{cotg\ \alpha + cotg\ \beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$cotg\ \alpha - cotg\ \beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{cotg\ \alpha - cotg\ \beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$tg\ \alpha + cotg\ \beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\sin\beta + \cos\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{tg\ \alpha + cotg\ \beta = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\ \alpha\ sin\ \beta}}$$

$$tg\ \alpha - cotg\ \beta = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} - \frac{cos\ \beta}{sin\ \beta} = \frac{sin\ \alpha\ sin\ \beta - cos\ \beta\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha\ sin\ \beta} = -\frac{cos(\alpha + \beta)}{cos\ \alpha\ sin\ \beta}$$

$$\boxed{tg\ \alpha - cotg\ \beta = -\frac{cos(\alpha + \beta)}{cos\ \alpha\ sin\ \beta}}$$

Věta 5.5.3:

Pro odvození věty 5.5.3 využijeme součtové a rozdílové vzorce goniometrických funkcí (kapitola 5.4.).

Sečteme rovnici 1. a 2.:

1. $sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)\ sin(\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$

2. $\underline{sin(\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta}$

$$= 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta\ .$$

Pravou stranu rovnice vydělíme dvěma, takže:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]\ .}$$

Tím jsme došli k prvnímu vzorci pro součin goniometrických funkcí. Ostatní vzorce budeme odvozovat na stejném principu.

3. $cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta$

4. $\underline{cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta}$

Odečteme rovnici 3. od 4. a poté pravou stravu vydělíme dvěma:

$$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta) = 2\ sin\ \alpha\ sin\ \beta$$

$$\boxed{sin\ \alpha\ sin\ \beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]\ .}$$

5. $cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$

6. $\underline{cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta}$

Sečteme 5. a 6. rovnice a vydělíme dvěma:

$$cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) = 2\ cos\ \alpha\ cos\ \beta$$

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]\ .}$$

$$7.\quad sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta - cos\,\alpha\, sin\,\beta$$

$$8.\quad \underline{sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta}$$

Sečteme 7. a 8. rovnice a vydělíme dvěma:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

$$\boxed{sin\,\alpha\, cos\,\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)]\,.}$$

$$tg\,\alpha\, tg\beta = \frac{sin\,\alpha\, sin\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta} = \frac{\frac{1}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}}{\frac{1}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}} = \frac{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\beta\, cos\,\alpha}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta} + \frac{sin\,\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta}{sin\,\alpha\, sin\,\beta} + \frac{sin\,\beta\, cos\,\alpha}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}} = \frac{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}}{\frac{cos\,\beta}{sin\,\beta} + \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}$$

$$\boxed{tg\,\alpha\, tg\beta = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}}$$

$$cotg\,\alpha\, cotg\beta = \frac{cos\,\alpha\, cos\,\beta}{sin\,\alpha\, sin\,\beta} = \frac{\frac{1}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{1}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}} = \frac{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\beta\, cos\,\alpha}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta}{sin\,\alpha\, sin\,\beta} + \frac{sin\,\beta\, cos\,\alpha}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta} + \frac{sin\,\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}} = \frac{\frac{cos\,\beta}{sin\,\beta} + \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}}{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}} = \frac{cotg\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta}$$

$$\boxed{cotg\,\alpha\, \mathrm{cotg}\beta = \frac{cotg\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta}}$$

$$tg\,\alpha\, cotg\beta = \frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, sin\,\beta} = \frac{\frac{1}{cos\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{1}{sin\,\alpha\, cos\,\beta}} = \frac{\frac{sin\,\alpha\, sin\,\beta + cos\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, sin\,\beta + cos\,\alpha\, cos\,\beta}{sin\,\alpha\, cos\,\beta}} =$$

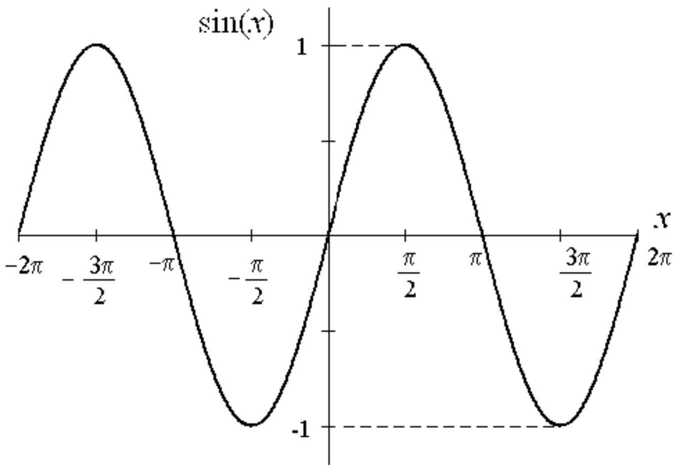
$$= \frac{\frac{sin\,\alpha\, sin\,\beta}{cos\,\alpha\, sin\,\beta} + \frac{cos\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, sin\,\beta}}{\frac{sin\,\alpha\, sin\,\beta}{sin\,\alpha\, cos\,\beta} + \frac{cos\,\alpha\, cos\,\beta}{sin\,\alpha\, cos\,\beta}} = \frac{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\beta}{sin\,\beta}}{\frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} + \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}} = \frac{tg\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta}{tg\,\beta + cotg\,\alpha}$$

$$\boxed{tg\,\alpha\, \mathrm{cotg}\beta = \frac{tg\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta}{tg\,\beta + cotg\,\alpha}}$$

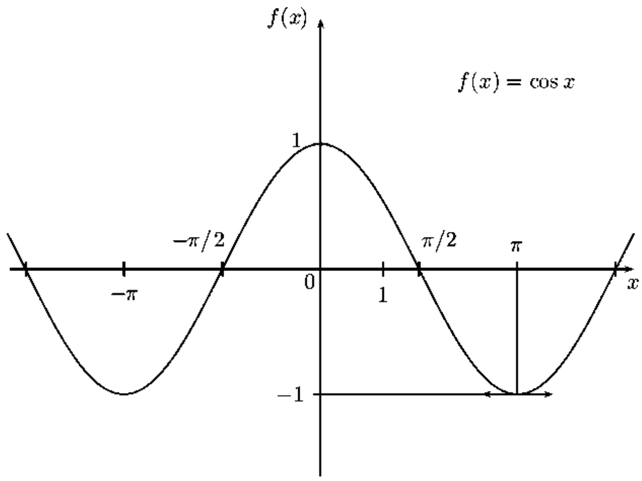
6 GONIOMETRICKÉ FUNKCE V OBORU ℝ[5]

6.1 GRAFY ZÁKLADNÍCH GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Na následujících obrázcích značí x velikost úhlu vyjádřeného v obloukové míře.

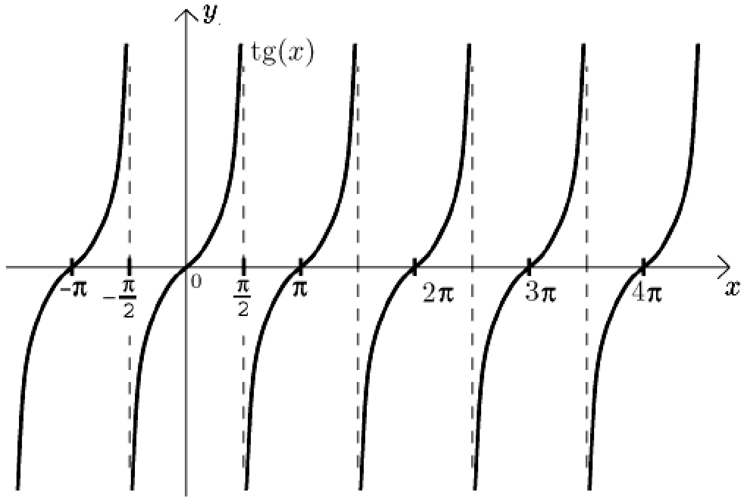


Obrázek 19: Graf funkce sin(x)

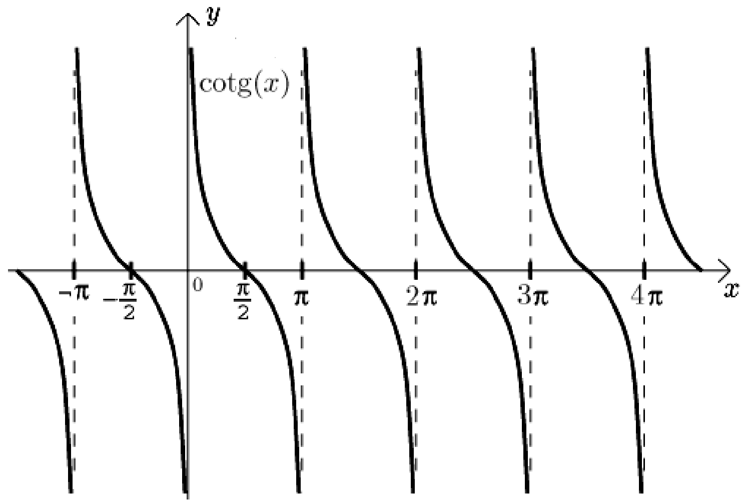


Obrázek 20: Graf funkce cos(x)

[5] ℝ - množina všech reálných čísel



Obrázek 21: Graf funkce tg(x)



Obrázek 22: Graf funkce cotg(x)

6.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Tabulka 1: Znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

Funkce	Kvadrant			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$tg\ \alpha$	+	−	+	−
$cotg\ \alpha$	+	−	+	−

Tabulka 2: Tabulka vlastností goniometrických funkcí[6]

Vlastnost \ Funkce	$y = \sin\alpha$	$y = \cos\alpha$	$y = \operatorname{tg}\alpha$	$y = \operatorname{cotg}\alpha$
Definiční obor funkce	$\alpha \in (-\infty, +\infty)$	$\alpha \in (-\infty, +\infty)$	$\left\{ \begin{matrix} \alpha \in \mathrm{R}, \\ \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \alpha \in \mathrm{R}, \\ \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}$
Sudost, lichost funkce	Lichá funkce	Sudá funkce	Lichá funkce	Lichá funkce
Periodičnost	Periodická s periodou $2k\pi$	Periodická s periodou $2k\pi$	Periodická s periodou $k\pi$	Periodická s periodou $k\pi$
Intervaly, v nichž je rostoucí	$< -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi >$	$< -\pi + 2k\pi, 2k\pi >$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$	nerostoucí
Intervaly, v nichž je klesající	$< \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi >$	$< 2k\pi, \pi + 2k\pi >$	neklesající	$(k\pi, \pi + k\pi)$
Nejmenší hodnota funkce	$y = -1\ pro$ $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$	$y = -1\ pro$ $x = (2k-1)\pi$	neexistuje	neexistuje
Největší hodnota funkce	$y = 1\ pro$ $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$	$y = 1\ pro$ $x = 2k\pi$	neexistuje	neexistuje
Argumenty, pro něž jsou $y = 0$	$\alpha = k\pi$	$\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\alpha = k\pi$	$\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

[6] V celé tabulce je k libovolné celé číslo.

Tabulka 3: Hodnoty goniometrických funkcí pro význačné úhly

Stupně / Radiány	0° / 0	30° / $\frac{\pi}{6}$	45° / $\frac{\pi}{4}$	60° / $\frac{\pi}{3}$	90° / $\frac{\pi}{2}$	120° / $\frac{2}{3}\pi$	135° / $\frac{3}{4}\pi$	150° / $\frac{5}{6}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$cotg\ \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Stupně / Radiány	180° / π	210° / $\frac{7}{6}\pi$	225° / $\frac{5}{4}\pi$	240° / $\frac{4}{3}\pi$	270° / $\frac{3}{2}\pi$	300° / $\frac{5}{3}\pi$	315° / $\frac{7}{4}\pi$	330° / $\frac{11}{6}\pi$
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$cotg\ \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

7 VYUŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V OBLASTI MATEMATICKÉ ANALÝZY

7.1 VYJÁDŘENÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ POMOCÍ ŘAD

Definice pomocí řad vychází z toho, že podle Taylorovy věty[7] platí:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{(n+1)}(x)\,,$$

kde výraz pro zbytek $R_{(n+1)}$ lze uvést v několika tvarech (Langrangeův, Cauchyův nebo integrální tvar), které tu však nebudeme všechny uvádět. Pro uvedení funkcí $\sin x$, $\cos x$ je nutné také uvést, že tyto funkce mají derivaci všech vyšších řádů. Potom můžeme využít Taylorova vzorce (potažmo Maclaurinova vzorce).

Pro $a = 0, x \neq 0$ a libovolné $n \geq 0$ přechází Taylorova řada v řadu Maclaurinovu:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,.$$

Položme nejprve $f(x) = \sin x$, $f^{(0)}(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = cos\, x, \ldots$; pro $x = 0$ dostáváme po řadě hodnoty 0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; ... ([7], str. 293).

Ze všech derivací funkcí $\sin x$, $\cos x$, které vypočteme je vidět, že vyjdou buďto $\pm\sin x$ nebo $\pm \cos x$ a jejich hodnota je nejvýše rovna číslu 1. Podle Langrangeova tvaru platí, že:

$$\left|R_{(n+1)}\right| = \left|\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leq \frac{\left|x^{(n+1)}\right|}{(n+1)!}.$$

Volíme-li speciálně v Taylorově větě n sudé, $n = 2m$, dostáváme pro každé x a každé celé $m > 0$ ([7], str. 293):

$$sin\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{(2m+1)}\,,$$

$$\left|R_{(2m+1)}\right| \leq \frac{|x|^{(2m+1)}}{(2m+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)\,.$$

[7] Řada nese jméno po anglickém matematikovi Brooku Taylorovi, který ji publikoval v roce 1712.

Obdobně budeme postupovat i v následujícím případě, kdy pro každé x a každé celé $m \geq 0$ dostaneme:

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{(2m+2)},$$

$$\left|R_{(2m+2)}\right| \leq \frac{|x|^{(2m+2)}}{(2m+2)!} \quad (-\infty < x < +\infty)\,.$$

V neposlední řadě zde zbývá uvést dva rozvoje základních goniometrických funkcí, kterými jsou $tg\ x$ a $cotg\ x$ ([10], str. 568):

$$tg\,x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$cotg\,x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + \ldots \qquad (0 < |x| < \pi)\,.$$

V kapitole 2.2 jsme vyslovili myšlenku, jaké by to bylo vypočítat hodnotu funkce sin 1° s chybou menší než 10^{-5}. Až do teď jsme k tomu neměli připravené potřebné nástroje, na které byla středoškolská matematika krátká. Na následujícím příkladu si ukážeme, jak na to.

Příklad 7.1.1: Vypočtěte sin 1° s chybou menší než 10^{-5}. [8]

Do rozvoje $sin\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$ dosadíme $x = \frac{\pi}{180}$ a dostáváme alternující

$$\text{řadu}\ \frac{\pi}{180} - \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^9}{9!} - \ldots$$

$$\frac{\pi}{180} \cong 0{,}017\ 453, \qquad \frac{\pi}{180^3 3!} \cong 8{,}978x10^{-8}.$$

Abychom určili sin 1° s chybou menší než 10^{-5}, stačí sečíst první dva členy řady

$$sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{180^3 3!} \cong 0{,}017453.$$

[8] [15], str. 96, upraveno

7.2 VYJÁDŘENÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ POMOCÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Vyjádření goniometrických funkcí lze i pomocí diferenciálních rovnic. Funkce sinus a kosinus jsou výsledkem diferenciální rovnice 2. řádu a to:

$$y'' + y = 0.$$

U výše zmíněné rovnice ještě definujeme počáteční podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$, které určují funkci $y = \sin\varphi$ jednoznačně.

Nejdříve si určíme charakteristickou rovnici:

$$\alpha^2 + 1 = 0,$$

ze které si určíme hodnoty $\alpha_{1,2}$, jenž splňují danou rovnost:

$$\alpha_{1,2} = \pm i = 0 + 1i.$$

Fundamentálním řešením zadané rovnice je:

$$y_1 = e^{0.\varphi} \cdot cos\, 1\varphi = cos\,\varphi$$

$$y_2 = e^{0.\varphi} \cdot sin\, 1\varphi = sin\,\varphi.$$

Obecným řešením tedy bude:

$$y = C_1 \cdot cos\,\varphi + C_2 \cdot sin\,\varphi.$$

Z počátečních podmínek, které byly definovány na začátku nám plyne

$y(0) = 0$:

$$y = C_1 \cdot cos\,\varphi + C_2 \cdot sin\,\varphi$$

$$0 = C_1 \cdot cos\,0 + C_2 \cdot sin\,0$$

$$0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$$

$y'(0) = 1$:

$$y = C_1 \cdot cos\,\varphi + C_2 \cdot sin\,\varphi$$

$$y' = C_1' \cdot cos\,\varphi - C_1 \cdot sin\,\varphi + C_2' \cdot sin\,\varphi + C_2 \cdot cos\,\varphi$$

$$1 = C_1' \cdot cos\,0 - C_1 \cdot sin\,0 + C_2' \cdot sin\,0 + C_2 \cdot cos\,0$$

$$1 = C_1' \cdot 1 - C_1 \cdot 0 + C_2' \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot 1 - C_1 \cdot 0 + C_2{}' \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow \; C_2 = 1.$$

Vypočtené hodnoty konstant C_1 a C_2 dosadíme do obecného řešení, z čehož plyne:

$$\boxed{y = \sin\varphi.}$$

Pro vyjádření funkce $y = cos\,\varphi$ je třeba změnit počáteční podmínky a to:

$y(0) = 0, y'(0) = 0.$ Pro výpočet kosinu budeme postupovat stejným způsobem jako v předešlém případu. Obecné řešení bude stejné jako v případě $y = \sin\varphi$, a proto můžeme rovnou přejít k:

$y(0) = 1$:

$$y = C_1 \cdot cos\,\varphi + C_2 \cdot sin\,\varphi$$

$$1 = C_1 \cdot cos\,0 + C_2 \cdot sin\,0$$

$$1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \; \rightarrow \; C_1 = 1$$

$y'(0) = 0$:

$$y = C_1 \cdot cos\,\varphi + C_2 \cdot sin\,\varphi$$

$$y' = C_1{}' \cdot cos\,\varphi - C_1 \cdot sin\,\varphi + C_2{}' \cdot sin\,\varphi + C_2 \cdot cos\,\varphi$$

$$0 = C_1{}' \cdot cos\,0 - C_1 \cdot sin\,0 + C_2{}' \cdot sin\,0 + C_2 \cdot cos\,0$$

$$0 = C_1{}' \cdot 1 - C_1 \cdot 0 + C_2{}' \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

$$0 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + C_2{}' \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow \; C_2 = 0.$$

Vypočtené hodnoty konstant C_1 a C_2 dosadíme do obecného řešení, z čehož plyne:

$$\boxed{y = cos\,\varphi.}$$

7.3 GONIOMETRICKÉ SUBSTITUCE

Věta 7.3.1 (Substituce)**:** $h(x) = z$

Nechť $f(x)$ má v intervalu (a, b) tvar $f(x) = g\big(h(x)\big)h'(x)$, kde $h'(x)$ je spojitá v (a, b) a $g(z)$ je spojitá pro všechna $z = h(x)$, probíhá-li x na interval (a, b) . Pak

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(h(x)\big)h'(x)\,dx = \int g(z)\,dz = G(z) + C,$$

kde ve výsledku je potřeba dosadit $z = h(x)$.

Věta 7.3.2 (Substituce)**:** $x = \varphi(z)$

Nechť $f(x)$ je spojitá v intervalu (a, b). Nechť $x = \varphi(z)$ je funkce (proměnné z) rostoucí, resp. klesající na odpovídajícím intervalu (α, β) a mající v (α, β) spojitou derivaci $\varphi'(z)$.

Nechť pro $z \in (\alpha, \beta)$ je $a < \varphi(z) < b$. Označme $z = \psi(x)$ funkcí inverzní k funkci $x = \varphi(z)$. Pak

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(\varphi(z)\big)\varphi'(z)\,dz = H(z) + C,$$

kde ve výsledku je potřeba dosadit $z = \psi(x)$.

Při použití integrace substitucí záleží na obratnosti a zkušenosti, abychom předem viděli, v jaký integrál přejde substitucí integrál původní. Na ukázku si uvedeme několik příkladů, kdy pomocí substituce nahradíme část funkce, funkcí goniometrickou. Podrobněji k tomuto tématu naleznete v [10], kde je celá řada příkladů z goniometrických funkcí.

Příklad 7.3.1: Vypočtěte následující integrál $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. [9]

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = \sin z \\ dx = \cos z\,dz \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin^2 z}\cos z\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos z| \cos z\ \,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 z\ \,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos z|\cos z\ \,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dz + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\sin 2z]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

[9] [10], str. 439, upraveno

Příklad 7.3.2: Vypočtěte následující integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$ [10]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} x = \sin z \\ dx = \cos z\, dz \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{\sin z \cos z}{\sqrt{1-sin^2 z}} dz = \int_0^1 \frac{\sin z \cos z}{\sqrt{cos^2 z}} dz =$$

$$= \int_0^1 \frac{sin\, z}{|cos\, z|} dz = \int_0^1 \frac{sin\, z}{cos\, z} dz = \left| \begin{matrix} y = cos\, z \\ dy = -sin\, z\, dz \end{matrix} \right| = \int_1^{cos\,1} \frac{-dy}{y} = \int_{cos\,1}^1 \frac{dy}{y} =$$

$$[ln|y|]_{cos\,1}^1 = ln|1| - ln|cos\,1| = -ln|cos\,1|$$

Zvláštním použitím goniometrických substitucí jsou integrály, které lze převést na integrály z racionálně lomených funkcí. Zejména se jedná o tento typ:

$$\int R(cos\, x, sin\, x) dx,$$

kde $R(u, t)$ je racionální funkcí proměnných u a t ([13], str. 451-452).

Univerzální substitucí v tomto případě integrálu je nahrazení:

$$z = tg\frac{x}{2},$$

z níž plyne (použitím vztahu $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}}$)

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2\, dz}{1+z^2}.$$

Příklad 7.3.3: Vypočtěte následující integrál $\int \frac{1-sin\,x+cos\,x}{5\,sin\,x\,cos\,x} dx.$ [11]

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{5 \sin x \cos x} dx = \left| \begin{matrix} z = tg\frac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2} \\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} & dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}}{5\frac{2z}{1+z^2}\frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2\,dz}{1+z^2} = \frac{2}{5}\int \frac{1-z}{z(1-z^2)} dz = \frac{2}{5}\int \frac{dz}{z(1+z)} =$$

[10] [10], str. 438, upraveno
[11] [13], str. 452

$$\frac{2}{5}\int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}\right)dz=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{z}{1+z}\right|+C=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}\right|+C, \text{kde } C\in\mathbb{R}\,.$$

Ne vždy se nám, ale podaří uplatnit tuto univerzální substituci. A tomu bývá v případě:

Je-li funkce $R(\cos x, sin\, x)$ lichá vzhledem k funkci $\sin x$, tj. platí-li $R(\cos x, sin\, x) = -R(\cos x, -sin\, x)$, lze k racionalizaci integrálu $\int R(cos\, x, sin\, x)\, dx$ použít substituce $\cos x = z$. Je-li funkce $R(\cos x, sin\, x)$ lichá vzhledem k funkci $cos\, x$, tj. platí-li $R(cos\, x, sin\, x) = -R(-\, cos\, x, sin\, x)$, lze použít substituce $sin\, x = z$.

Je-li funkce $R(\cos x, sin\, x)$ sudá vzhledem k oběma funkcím tj. platí-li $R(\cos x, sin\, x) = -R(-\cos x, -sin\, x)$, lze použít substituce $\mathrm{tg}\, x = z$ ([10], str. 414).

Příklad 7.3.4: Vypočtěte následující integrál $\int \frac{1}{sin\, x} dx$.[12]

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=-\int\frac{1}{(1-cos^2 x)}(-\sin x)\,dx=\left|\begin{matrix} z=\cos x\\ dz=-\sin x\,dx\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{z^2-1}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1})\,dz=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C, \text{kde } C\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 7.3.5: Vypočtěte následující integrál $\int cos^5 x\, dx$ [13].

$$\int cos^5 x\,dx=\int cos^4 x\cos x\,dx=\int(1-sin^2 x)^2\cos x\,dx=\left|\begin{matrix} z=\sin x\\ dz=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\int(1-z^2)^2\,dz=\int(z^4-2z^2+1)dz=\frac{z^5}{5}-\frac{2}{3}z^3+z+C=$$

$$\frac{sin^5 x}{5}-\frac{2}{3}sin^3 x+\sin x+C, \text{kde } C\in\mathbb{R}\,.$$

S využitím součtových vzorců, pak lze u integrálů typu:

$$\int(cos\, mx, cos\, nx)dx,\ \int(sin\, mx, cos\, nx)dx,\ \int(\sin mx, sin\, nx)dx,$$

využít následujících vzorců, které nám mohou pomoci k výpočtům integrálů:

$$\int(cos\, mx, cos\, nx)dx=\frac{1}{2}\int(cos(m+n)\,x+cos(m-n)\,x)dx,$$

[12] [13], str. 453, upraveno
[13] [10], str. 415, upraveno

$$\int (sin\, mx, cos\, nx)dx = \frac{1}{2}\int (sin(m+n)\,x + sin(m-n)\,x)dx,$$

$$\int (sin\, mx, cos\, nx)dx = \frac{1}{2}\int (-\,cos(m+n)\,x + cos(m-n)\,x)dx.$$

Využití součtových vzorců se nám hodí i v následujícím případě a to u integrálů typu:

$$\int cos^2x\; dx, \qquad \int sin^2x\; dx,$$

kdy lze uvedené funkce přepsat ve tvaru:

$$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{cos\, 2x}{2}, \qquad sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2}.$$

7.4 DÉLKA ROVINNÉ KŘIVKY

Věta 7.4.1: Budiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Množinu všech bodů $[x, y]$ vyhovujících podmínkám $a \le x \le b,\ y = f(x)$ budeme nazývat křivkou a označíme ji pro krátkost písmenem *C*.

Pozn. Z analytické geometrie víme, jak počítat délku úsečky[14].

Sestrojme libovolné rozdělení *D* na intervalu $\langle a, b\rangle$ dělícími body $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < < b\ (n \ge 1)$ sestrojme body

$$[x_0, f(x_0)] = P_0, [x_1, f(x_1)] = P_1, \ldots, [x_n, f(x_n)] = P_n$$

znakem $K(D)$ značme lomenou čáru, sestrojenou z úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$

a znakem $L(D)$ označme délku lomené čáry $K(D)$, tj. součet délek úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$. Tímto způsobem je každému rozdělení *D* intervalu $\langle a, b\rangle$ přiřazeno určité kladné číslo $L(D)$ ([16], str. 121).

Věta 7.4.2: Budiž $f(x)$ funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, jež má vlastní derivaci $f'(x)$ ve všech bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, vyjma nejvýše v konečném počtu bodů; v těchto výjimečných bodech definujeme význam symbolu $f'(x)$ jakkoliv. Nechť existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

---

[14] Jsou-li $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ dva body, nazýváme délkou úsečky $\overline{P_1P_2}$ číslo $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ([16], str. 121).

Potom křivka C (definovaná jako množina všech bodů $[x, y]$, vyhovujících podmínkám $a \leq x \leq b,\ y = f(x)$) má konečnou délku danou rovnicí ([16], str. 121):

$$L\big(a, b, f(x)\big) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$ [15]

V kapitole 2.2 jsme si definovali goniometrické funkce pomocí pravoúhlého trojúhelníka a jednotkové kružnice. Pokud si vzpomeneme, tak nám v případě jednotkové kružnice nastal jeden malý problém. Pokud jsme chtěli přesně (a s určitou chybou) vypočítat délku oblouku *l*, který jsme nanesli na kružnici, tak jsme se středoškolskými znalostmi na tento příklad byli krátcí. Proto jsme si museli počkat, až budeme mít připravené potřebné nástroje, jak tento problém vyřešit. S pomocí výše zmíněných definic a vybaveni znalostmi z oblasti integrálního a diferenciálního počtu, se pokusíme na následujícím příkladu tento problém vyřešit.

Příklad 7.4.1: Vypočtěte délku oblouku křivky $y = sin\, x$ na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{180} \rangle$.

Funkci $y = f(x)$ nejdříve zderivujeme: $y' = cos\, x$, následně pak délku L vypočteme dosazením do vzorce:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{180}} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{180}} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx.$$ [16]

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{180}} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\, E(x|m)^{17} = \sqrt{2}\, E\left(\frac{\pi}{180} \middle| \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}024682$$

[15] Z definice Věty 1 a Věty 2 je zřejmé, že k tomu, abychom vypočítali délku rovinné křivky, tak potřebujeme znalosti derivování a integrálního počtu. Přesné definice najde čtenář v běžných učebnicích integrálního a diferenciálního počtu.
[16] Z uvedeného integrálu je vidět, že integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto se nám i pro jednoduché funkce stane, že neumíme příslušný integrál vypočítat. V takovém případě bude nutno použít nějakou numerickou metodu nebo některý matematický program (např. Derive, Maple, Mathematica).
[17] $E(x|m)$ je eliptický integrál druhého druhu s parametrem $m = k^2$. Více informací o této látce najdeme v doporučené literatuře [17], [18] (Kapitola XIX. Transformace a výpočet eliptických integrálů).

Příklad 7.4.2: Vypočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$. [18]

Uvažujme kružnici se středem v počátku o rovnici: $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud plyne:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},\ \text{přičemž}\ x \in \langle -r, r \rangle.$$

Vezmeme rovnici horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ a vypočítáme její derivaci

$y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Problém je v tom, že derivace není definována pro $x = r$ a $x = -r$.

Snadno najdeme parametrické rovnice kružnice. Z definice funkcí sinus a kosinus určíme polohu libovolného bodu $A = (x, y)$ ležícího na kružnici. Hledané parametrické rovnice kružnice budou: $x = r\,cos\,t,\ \ y = r\,sin\,t,\ \ kde\ \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Měníme-li úhel t od nuly do 2π, oběhne bod *A* celou kružnici. Pro výpočet délky kružnice použijeme následující větu:

Věta 7.4.3:

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak je délka této křivky [25]

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (r\,cos\,t)' = -r\,sin\,t$ a $\psi'(t) = (r\,sin\,t)' = r\,cos\,t$, dostáváme

$$s = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{[-r\,sin\,t]^2 + [r\,cos\,t]^2}\, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2(sin^2 t + cos^2 t)}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} r\, dt = r[t]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

[18] [25], str. 4

8 ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s pojmy goniometrie a trigonometrie. Následně pak ukázat, jak se v průběhu staletí měnil pohled a přístup na goniometrické funkce a jaký dopad měl tento pohled na novodobou goniometrii.

V první části jsem se snažil ukázat, jak přístupovali k těmto funkcím starověcí matematikové. Jejich poznatky se staly zdrojem informací pro další generace a díky jejich přínosu má goniometrie nynější podobu.

Ve druhé části jsme si definovali goniometrické funkce pomocí pravoúhlého trojúhelníka. Omezeni znalostmi ze základní školy a tím, že nejsme schopni zjistit jakýkoli úhel větší než 90° jsme zavedli definici pomocí jednotkové kružnice. Středoškolské učivo výrazně pozvedlo naše vědomosti, co se goniometrie jako takové týče. Avšak pro některé poznatky to bylo stále málo. Problém přišel s tím, že jsme nebyli schopni přesně zjistit velikost křivky, který nám vytkne středový úhel na libovolné kružnic o poloměru r. Až s pomocí vyšší matematiky jsme tento problém vyřešili v samém závěru šesté kapitoly.

Ve třetí části a čtvrté části jsme si odvodili známé věty, ze kterých jsme poté vycházeli při odvození vzorců pro goniometrické funkce.

V páté části jsou uvedeny základní goniometrické grafy a vlastnosti elementárních funkcí. Celá tato kapitola je vedena velice okrajově, protože odvození jednotlivých vlastností goniometrických funkcí by přesahovalo samotný rámec rozsahu této práce.

V poslední části jsme se snažili pohlížet na goniometrické funkce z oblasti vyšší matematiky. Samotná tato kapitola nám ukázala, jak se při znalostech ze základních a středních škol v oblasti matematiky dopouštíme chyb a některé věci uvádíme nepřesně. Tato kapitola se se měla snažit tyto chyby vyvrátit a za pomoci několika příkladů uvést na pravou míru.

Při zpracování této bakalářské práce jsem si uvědomil, jak moc se v nynější době upustilo od studování goniometrických funkcí a jejich náročnosti ve školství. Jako zlaté období goniometrie považuji začátek 20. století, kdy se nejvíce ve školní trigonometrii využívalo řešení pravoúhlých a kosoúhlých trojúhelníků výpočtem i konstrukcí. Krásným příkladem tohoto období je učebnice o trigonometrii, kterou uvádím v obsahu použité literatury[19]. Až do 70. let minulého století bylo vrcholem při řešení těchto úloh použití logaritmického pravítka. Avšak s nástupem moderní technologie se náhled na samotnou látku zjednodušil a s pomocí kalkulačky jsme bez sáhodlouhého přemýšlení schopni vypočítat jakoukoli hodnotu. Výrazně pokročilejším výpočtem je použití numerických metod, anebo některého z matematických programů, jakými jsou např. Derive, Maple, Mathematica. Avšak tento krok vyžaduje už jisté znalosti v oblasti vyšší matematiky.

[19] Schubert Eduard, *Trigonometrie: Řešení pravoúhlých a kosoúhlých trojúhelníků výpočtem i konstrukcí*, R. Promberger, Olomouc, 1907.

9 RESUMÉ

The aim of my bachelor's thesis was to acquaint the reader with the concepts, such as goniometry and trigonometry. Subsequently, to show how over the centuries has changed the view and access to the trigonometric functions and how this view has had an impact on the modern goniometry.

In developing this thesis, I realized how much nowadays abandoned the study of trigonometric functions and their performance in education. As the golden age of goniometry I consider beginning of the 20th century, when most in school trigonometry used the solution of rectangular and oblique triangles calculation and construction. A beautiful example of this period is a textbook on trigonometry, which I mentioned in the content of the literature[20]. Until the 70s of the last century was the highlight in solving these problems by using a slide rule.

However, with the advent of modern technology preview real substance simplified by using a calculator, we are able to think without thinking through an arbitrary value. Is significantly more advanced calculation using numerical methods, or any of the mathematical programs like Derive, Maple, Mathematica. However, this step does not require a knowledge of higher mathematics.

[20] Schubert Eduard, *Trigonometrie: Řešení pravoúhlých a kosoúhlých trojúhelníků výpočtem i konstrukcí*, R. Promberger, Olomouc, 1907.

10 SEZNAM LITERATURY

[1] Kolman Arnošt, *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[2] Šír Zbyněk, *Řecké matematické texty*, Oikoymenh, Praha, 2011.

[3] Juškevič Adolf Pavlovič, *Dějiny matematiky ve* středověku, Academia, Praha, 1977.

[4] Bečvářová, Martina; Bečvář, Jindřich, *Matematika v proměnách věků V.*, Matfyzpress, Praha, 2007.

[5] Felber Vítězslav, *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, vol. 37 (1908), issue 2, pp. 177a,177-192.

[6] Hudcová Milada, Kubičíková Libuše, *Sbírky úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*, Prometheus, Praha, 2006.

[7] Jarník Vojtěch, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha, 1984.

[8] Polák Josef, *Přehled středoškolské matematiky*, SPN, Praha, 1980.

[9] Polák Josef, *Přehled středoškolské matematiky*, SPN, Praha, 1991.

[10] Rektorys Karel a spolupracovníci, *Přehled užité matematiky*, Prometheus, Praha, 2000.

[11] Schubert Eduard, *Trigonometrie: Řešení pravoúhlých a kosoúhlých trojúhelníků výpočtem i konstrukcí*, R. Promberger, Olomouc, 1907.

[12] Zamarovský Peter, *Filosofie pro techniky díl. II*, ČVUT, Praha, 1998.

[13] Rektorys Karel a spolupracovníci, *Přehled užité matematiky 1*, Prometheus, Praha, 2000.

[14] Jirásek František, Braniš Karel, Horák Stanislav, Vacek Milan, *Sbírky úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU, 1. část*, Prometheus, Praha, 2001.

[15] Zach Jiří, Posloupnosti a řady (Sbírka příkladů a cvičení), ZČU, Plzeň, 1999.

[16] Jarník Vojtěch, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha, 1984.

[17] Jarník Vojtěch, *Integrální počet (II)*, Academia, Praha, 1984.

[18] Jarník Vojtěch, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha, 1984.

[19] Bušek I., Boček L., Calda E., *Základní poznatky z matematiky*, Prometheus, Praha, 1992.

[20] Děmidovič Boris Pavlovič, *Sbírka úloh z matematické analýzy*, Fragment, 2003.

[21] Odvárko Oldřich, *Goniometrie pro gymnázia*, Prometheus, Praha, 1994.

[22] Odvárko Oldřich, *Goniometrie – Sbírka úloh pro gymnázia*, Prometheus, Praha, 1997.

Internetové zdroje

[23] Smýkalová Radka, *Metody a užití goniometrických funkcí v elementární matematice*, Disertační práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2011.

Dostupné z: http://is.muni.cz/th/44284/prif_d/Dizertace_Radka_Smykalova.pdf

[24] Koutný František, *Leonhard Euler – spolutvůrce dnešní matematiky a mechaniky.*

http://www.zas.cz/download.php

[25] Kreml Pavel, Poláček Jiří, *Aplikace určitého integrálu – Délka oblouku křivky.*

http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_3_2.pdf

11 SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK

Seznam obrázků

Seznam tabulek