ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

LINEÁRNÍ ROVNICE PRO 2. STUPEŇ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Marie Černá

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Fy

Vedoucí práce: PhDr. Šárka Pěchoučková, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň,……………………2014

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí práce PhDr. Šárce Pěchoučkové, Ph.D., za odborné vedení práce, věcné připomínky, cenné rady a hlavně za trpělivost a čas, poskytnuté při zpracování této diplomové práce.

Dále bych ráda poděkovala ředitelce Masarykovy ZŠ v Žihli a paní učitelce matematiky, které mi umožnily realizovat na základní škole moji praktickou činnost.

Obsah

ÚVOD

Téma diplomové práce jsem si vybrala především proto, že mě lineární rovnice zaujaly již na základní škole a jejich řešení mně vždy bylo sympatické. K volbě tématu přispělo i to, že jsem svou první pedagogickou praxi na základní škole absolvovala v době, kdy žáci 8. ročníku probírali lineární rovnice a mohla jsem při procvičování tohoto učiva realizovat své nápady, a to v období, kdy v tematickém plánu dané školy byly v 8. ročníku probírány lineární rovnice.

Cíle práce jsou:

1. stručné objasnění teoretických poznatků o lineárních rovnicích
2. příprava pracovních listů týkajících se učiva o lineárních rovnicích, jejich realizace se žáky 8. ročníku a následná analýza činností
3. tvorba 3 didaktických her zaměřených na procvičování lineárních rovnic, realizace se žáky 8. ročníku a následná analýza.

V úvodu práce je malé ohlédnutí za historií lineárních rovnic, se kterými se lidé setkávali již od starověku a středověku. V návaznosti na to je již práce zaměřena na lineární rovnice, tak jak je známe v současnosti. U lineárních rovnic jsou vysvětleny základní ekvivalentní úpravy, postupy řešení, druhy lineárních rovnic od jednoduchých po složitější. V závěru teoretické části jsou ještě zmíněny soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými.

Praktická část obsahuje stručnou charakteristiku školy, aplikace 5 pracovních listů, kde ke každému nalezneme popis a zhodnocení, a další součástí jsou 3 didaktické hry zaměřené na procvičování a opakování lineárních rovnic.

Není-li uvedeno jinak, definice teoretické části jsou převzaty ze zdrojů uvedených v seznamu použité literatury. Rovnice nejsou převzaty z žádných zdrojů, avšak aplikovány pouze vlastní.

„A large class of mathematical problems is generally called „linear“. The simplex „linear problem“ is the following: Let a and b two given (real or complex) numbers; to find a number x that satisfies the equation

$$ax = b.“$$

([2], str.7, nebo [14], str. 7)

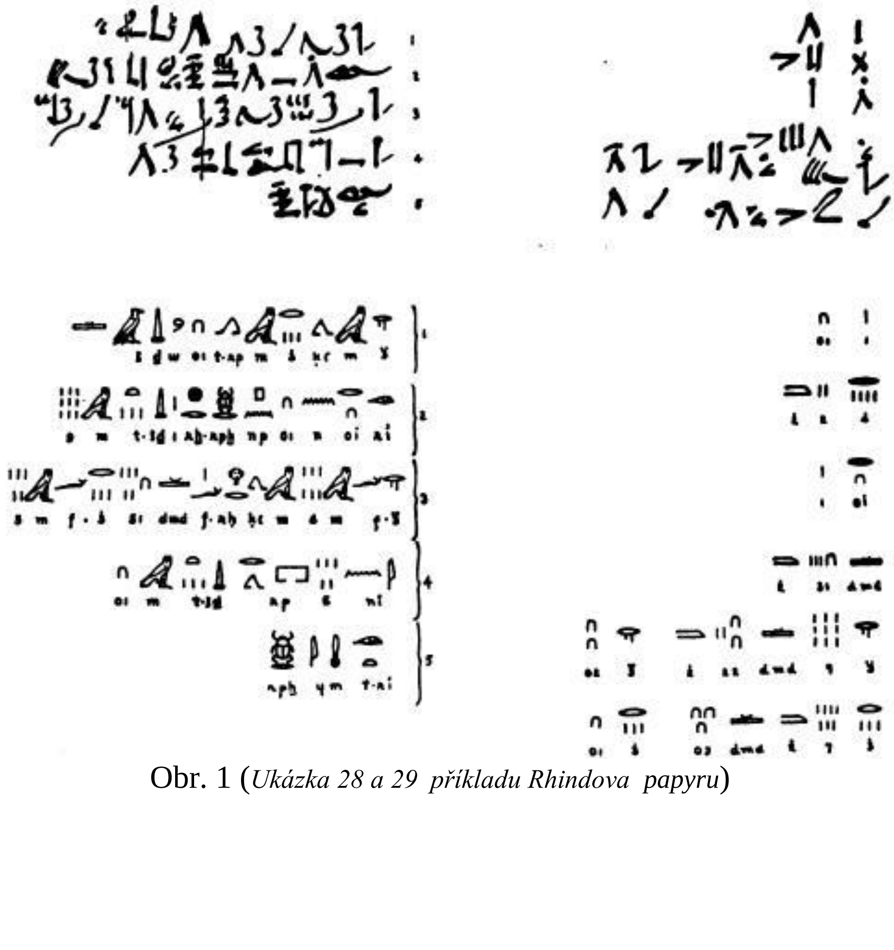
1. HISTORIE LINEÁRNÍCH ROVNIC

1.1. LINEÁRNÍ ROVNICE VE STAROVĚKU

1.1.1. Egypt

Již ve starém Egyptě se setkáváme s prvními příklady, které bývají zadávané nějakou podmínkou. Tyto typy příkladů vedou k úlohám o neznámém množství řešené za pomoci chybného předpokladu nebo přímým dělením. Staří Egypťané pro neznámé množství používali slovo *acha*, a díky tomu i tyto úlohy získaly svůj název. V dnešní době hovoříme o těchto typech úloh jako o lineárních rovnicích.

Výskyt popisovaných úloh se datuje již z 19. století př.n.l. a nejvíce jsou obsaženy v Hindově a Moskevském papyru (obr.1).



Obr. 1 (*Ukázka 28 a 29 příkladu Rhindova papyru*)

Příklad R28 přepíšeme do dnešní podoby takto:

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$$

([1], str.75)

Uvádí se, že řešení tohoto příkladu není kompletní. Postupnými úpravami, které používáme i v dnešní době při řešení rovnic, se v daném příkladu písař dostal až ke vztahu $\frac{10}{9}x = 10$. Zde následně odečetl od levé i pravé strany rovnice jednu desetinu a ve výsledku rovnice se mu objevilo číslo 9. Odečtení jedné desetiny však příklad zcela nevyřešilo, pouze prodloužilo jeho řešení a v závěru řešení se tak jako tak muselo hodnotou $\frac{10}{9}$ dělit. Pokud bychom však řešili rovnici v dnešní době, místo odčítání jedné desetiny od levé i pravé strany, bychom postupovali tak, že bychom danou rovnici vydělili devíti desetinami. V závěru bychom došli ke stejnému výsledku jako písař v dřívějších dobách.

Po příkladech zvaných *acha* se v Egyptě objevují i zmínky o úlohách zabývajících se množstvím chleba a piva, které bylo zapotřebí řešit v běžném každodenním životě. Označují se názvem *pesu*, což vyjadřuje kvalitu chleba či piva, které bylo možné vyrobit z jedné měřice zrna. Čím se hodnota pesu zvyšovala, tím byla kvalita chleba či piva nižší. Tyto typy příkladů také vedou k řešení úloh pomocí lineárních rovnic.

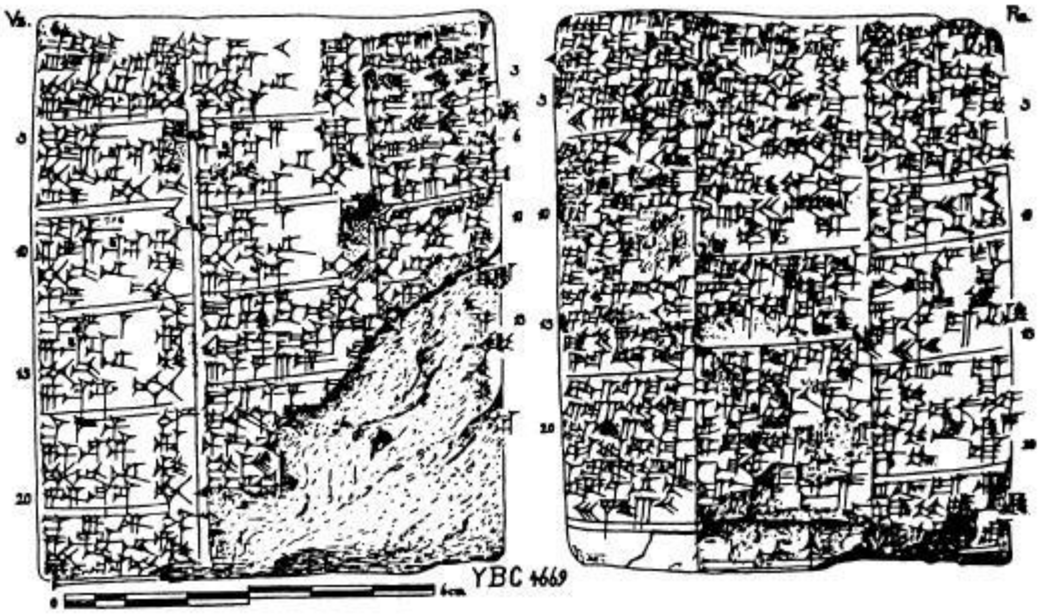
Vztah celkového počtu bochníků, resp. džbánů, použitého množství zrna a „kvality výrobku“, tj. pesu, lze vyjádřit takto:

$$celkový\ počet\ bochníků\ chleba = počet\ měřic\ obilí\ * pesu\ chleba$$
$$celkový\ počet\ džbánů\ piva = koeficient\ * počet\ měřic\ obilí\ * pesu\ piva$$

([1], str. 105)

1.1.2. Mezopotámie

Již v 18. století př.n.l. se v Mezopotámii objevují úlohy řešené za pomoci lineárních rovnic a to za éry Chammurabiho. Bohužel jich nebylo mnoho zaznamenáno, protože byly pokládány za primitivní. Ve většině případů je uvedeno pouze zadání úlohy a výsledek, proto těžko určujeme, jak mohly být rovnice řešeny v dřívějších dobách. Předpokládá se, že byly řešeny postupným vyloučením neznámých, substitucí nebo metodou chybného předpokladu. Možnou příčinou chybějících řešení mohlo být používání geometrické symboliky. Naše dnešní matematická symbolika nebyla v té době ještě vůbec aplikována.



Obr. 2 (starobabylónská tabulka YBC 4669)

Na starobabylónské tabulce YBC 4669 (obr. 2) nalezneme jednoduchý příklad:

$$\frac{2}{3}\ z\ \frac{1}{3}\ mých\ zásob\ jsem\ dal\ pryč.\ (7)\ zbylo. Jaké\ byly\ mé\ zásoby?\ (31;30)$$

([2], str. 16)

Pokud bychom zapsali výše zmiňovanou slovní úlohu jako rovnici a vyřešili bychom ji,

$$x-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)x=7$$

$$x-\frac{2}{9}x=7$$

$$\frac{9x-2x}{9}=7$$

$$\frac{7}{9}x=7$$

$$x=9$$

dojdeme k výsledku $x=9$. Tento výsledek však neodpovídá řešení uvedenému na tabulce pro tento úkol. Abychom došli ke správnému výsledku, který byl uveden jako řešení úlohy, museli bychom řešit rovnici ve tvaru

$$\frac{2}{9}x = 7$$

$$x = 31{,}5.$$

Výsledek $x = 31{,}5$ odpovídá již výsledku této úlohy. Je ale možné, že zadání příkladu nebo výsledek byl zapsán špatně.

Příkladů na výpočet množství zásob obilí, hmotnosti kamene apod. se na starobabylónských tabulkách objevuje celá řada.

Dochovala se i řada hliněných tabulek, na kterých jsou úlohy na řešení soustav lineárních rovnic (obr. 3). Zadání těchto úloh ve většině příkladů bylo velmi dlouhé.

Obr. 3 (VAT 8389)

Z tabulky VAT 8389 je úloha, kterou po zkrácení lze zapsat takto:

Máme dvě pole. Z plošné jednotky bur prvního pole sklidíme 4 gur obilí, z plošné jednotky bur druhého pole sklidíme 3 gur obilí. Sklizeň z prvního pole převyšuje sklizeň z druhého pole o $(8, 20) = 500$ *sila. Součet ploch polí je* $(30{,}0) = 1800$ *sar. Jaké jsou výměry obou polí?*

([1], str. 261)

Pro výpočet této úlohy bylo potřeba znát převodní jednotky, s čímž bylo při zadávání úloh počítáno. Takovýchto typů obdobných příkladů je mnoho.

Většina tabulek s těmito úlohami je v poničeném stavu, a tudíž si můžeme pouze domýšlet, jaké bylo znění úlohy či jaké je správné řešení.

1.2. Lineární rovnice ve středověku – Čína a Indie

Z čínských spisů se dochovala sbírka „Matematika v devíti knihách“, která obsahuje úlohy řešené pomocí lineárních rovnic. Toto dílo obsahuje práci mnoha matematiků z 1. tisíciletí př.n.l., přesné datum vzniku však není známo a ani o konkrétních autorech nemáme žádné zmínky. Možným autorem by mohl být úředník finanční služby Čang Cchang. Jednalo se spíše o encyklopedii matematických znalostí.

S lineárními rovnicemi se můžeme setkat ve více kapitolách, například v druhé knize jsou příklady na soustavy lineárních neurčitých rovnic, v šesté knize se také objevují příklady řešené pomocí lineárních rovnic. Nejvíce je však na metody řešení lineárních rovnic zaměřena 7. a 8. kniha. Postupy řešení se v těchto dvou knihách komplikují, avšak dochází ke zdokonalování metod řešení a vytváří se obecná pravidla pro řešení soustav lineárních rovnic.

Jedná se ve většině případů o úlohy týkající se „přebytku a nedostatku“ povětšinou finančních prostředků.

V roce 499 byl v Indii sepsán astronomický a matematický traktát Árjabhattija, který dostal jméno po svém autorovi. V tomto díle jsou zmíněny úlohy vedoucí k řešení lineárních rovnic s jednou neznámou. Libovolnou soustavu lineárních rovnic poté matematikové řešili kompenzační (srovnávací) metodou.

Dalším dílem z Indie je kniha „Koruna vědy“ od Bháskary II., která byla vydána kolem roku 1150. Tato kniha se skládá ze čtyř částí. O lineárních rovnicích je sepsána druhá část knihy nazvaná Bídžaganita.

2. TEORETICKÁ ČÁST

2.1. ROVNICE

Rovnici můžeme chápat jako rovnost dvou výrazů, ve kterých se musí vyskytovat alespoň jedna proměnná. Pro rovnice budeme místo proměnné užívat výrazu neznámá. Neznámou v rovnici označujeme malým písmenem, například $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ ...

$$3y^2 + 12 = 7y - 1 \qquad \textit{rovnice s neznámou } y$$

$$3x + 7 = 16 \qquad \textit{rovnice s neznámou } x$$

Levou stranou rovnice označujeme výraz nalevo od znaménka rovnosti, zapisujeme velkým písmenem L a do kulaté závorky za velké písmeno uvádíme neznámou (x). V našem případě $L(x) = 3x + 7$.

Pravou stranou rovnice označujeme výraz napravo od znaménka rovnosti, zapisujeme velkým písmenem P a do kulaté závorky za velké písmeno uvádíme neznámou (x). V našem případě $P(x) = 16$.

Obecně zapíšeme rovnici o jedné neznámé ve tvaru

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

$$\underbrace{3x + 7}_{\substack{\textit{levá strana}\\ \textit{rovnice}}} = \underbrace{16}_{\substack{\textit{pravá strana}\\ \textit{rovnice}}}$$

2.2. LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnicí rozumíme algebraickou rovnici 1. stupně, kterou lze zapsat v základním tvaru $ax + b = 0$, kde a, b jsou reálná čísla a x hledaná neznámá.

$$5x + 15 = 0$$

Rovnice nemusí být vždy v základním tvaru, ale jsme schopni ji na tento tvar upravit:

$$4x + 8 = 16$$

$$4x - 8 = 0$$

2.2.1. Ekvivalentní úpravy lineárních rovnic

Při řešení rovnic se snažíme nalézt všechna taková čísla, která při nahrazení neznámé dají platnou rovnost. Všechna taková čísla označujeme *kořenem* rovnice nebo také *řešením rovnice*.

Při řešení rovnic se snažíme na jednu stranu rovnice dostat veškeré členy s neznámou a na druhou stranu rovnice ostatní čísla. Při úpravách rovnice provádíme jen takové operace, které nezmění původní kořen rovnice. Takové úpravy rovnic nazýváme *ekvivalentní úpravy*.

Říkáme, že dvě rovnice jsou ekvivalentní, pokud všechny nalezené kořeny jedné rovnice jsou i kořeny druhé rovnice.

Při výpisu jednotlivých kroků řešení rovnice zapisujeme vždy napravo od rovnice svislou čáru a za ní operaci, kterou v danou chvíli s rovnicí uskutečňujeme.

a) <u>Přičtení stejného čísla nebo členu s neznámou k oběma stranám rovnice</u>

Rovnice se nezmění, jestliže k oběma stranám rovnice přičteme stejné číslo nebo stejný člen s neznámou.

$$L(x) = P(x)$$
$$L(x) + c = P(x) + c$$

Používáme při řešení rovnic, kdy potřebujeme na jednu stranu rovnice umístit členy s neznámou a na druhou stranu rovnice ostatní čísla.

K oběma stranám rovnice *přičteme stejné číslo:*

$$x - 9 = 7 \qquad /+9$$

Na levé straně rovnice se číslo 9 odečítá. Aby nám na levé straně rovnice zůstal pouze násobek neznámé, musíme k oběma stranám rovnice přičíst číslo 9,

$$x - 9 + 9 = 7 + 9$$

v dalším kroku sečteme nebo opíšeme násobek neznámé a sečteme ostatní čísla na každé straně rovnice,

$$x = 16.$$

Docházíme k závěru, kde kořenem rovnice $x - 9 = 7$ je číslo 16.

Přičtení členu s neznámou:

$$\begin{aligned} -x - 8 &= -2x \qquad /+8 \\ -x - 8 + 8 &= -2x + 8 \\ -x &= 8 - 2x \qquad /+2x \\ -x + 2x &= 8 - 2x + 2x \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Kořenem rovnice $-x - 8 = -2x$ je číslo $x = 8$.

b) Odečtení stejného čísla nebo členu s neznámou k oběma stranám rovnice

Rovnice se nezmění, jestliže od obou stran rovnice odečteme stejné číslo nebo stejný člen s neznámou.

$$L(y) = P(y)$$
$$L(y) - c = P(y) - c$$

Operace obdobná operaci přičtení čísla nebo násobku neznámé.

Od obou stran rovnice *odečítáme stejné číslo:*

$$y + 8 = 10 \qquad /-8$$

Od obou stran rovnice odečteme číslo 8, abychom na levé straně rovnice získali pouze neznámou y,

$$y + 8 - 8 = 10 - 8$$

vypočteme jednotlivé strany rovnice,

$$y = 2.$$

Nalezená hodnota $y = 2$ je kořenem rovnice $y + 8 = 10$.

Odečtení členu s neznámou:

$$3y - 2 = 2y \qquad /+2$$
$$3y - 2 + 2 = 2y + 2$$
$$3y = 2y + 2 \qquad /-2y$$
$$y = 2$$

c) <u>Vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly</u>

Rovnice se nezmění, jestliže obě strany rovnice vynásobíme stejným číslem různým od nuly.

$$L(z) = P(z)$$
$$L(z) \cdot c = P(z) \cdot c$$

Používáme, pokud se nám vyskytují v rovnici zlomky nebo desetinná čísla. Tato úprava nám ulehčí počítání. Počítání s celými čísly je pro žáky jednodušší.

Zlomem v rovnici:

$$\frac{1}{3}z = 4 \qquad /\cdot 3$$

na levé straně dělíme, musíme tedy celou rovnici číslem 3 vynásobit,

$$3 \cdot \frac{1}{3}z = 4 \cdot 3$$

v dalším kroku roznásobíme jednotlivé členy a získáme

$$z = 12.$$

Kořenem rovnice $\frac{1}{3}z = 4$ je číslo $z = 12$.

Vyskytují-li se v *rovnici desetinná čísla:*

$$0{,}1z = 1{,}2 \qquad /\cdot 10$$

pro zjednodušení výpočtu danou rovnici vynásobíme číslem 10,

$$0{,}1z \cdot 10 = 1{,}2 \cdot 10$$

získáváme tedy kořen rovnice, kterým je

$$z = 12.$$

d) Vydělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly

Rovnice se nezmění, jestliže obě strany rovnice vydělíme stejným číslem různým od nuly.

$$L(v) = P(v)$$
$$\frac{L(v)}{c} = \frac{P(v)}{c}$$

Používáme ve většině případů v závěrečné fázi řešení lineárních rovnic, kdy nám zůstane libovolný násobek neznámé různý od nuly.

$$7v = 49 \qquad /:7$$

Obě strany rovnice vydělíme číslem 7

$$7v:7 = 49:7,$$

po vypočtení dostáváme kořen

$$v = 7.$$

e) Prohození obou stran rovnice

Rovnice se nezmění, jestliže zaměníme levou stranu rovnice za pravou a naopak.

$$L(w) = P(w)$$
$$P(w) = L(w)$$

Nejčastěji používáme v posledním kroku řešení rovnic, v době, kdy se snažíme neznámou dostat na levou stranu rovnice.

2.2.2. Zkouška

Po vyřešení rovnice máme povinnost provést zkoušku, kterou se přesvědčíme, že řešení rovnice jsme prováděli správně. Zkoušku provedeme dosazením kořene rovnice za neznámou do levé strany rovnice a následně i do pravé strany rovnice. Pokud po výpočtu vychází na levé i pravé straně rovnice stejná hodnota, nastává rovnost, a můžeme prohlásit, že nalezený kořen je správným řešením rovnice.

$$
\begin{aligned}
2x - 8 &= 7 + x \qquad /+8 \\
2x &= 7 + x + 8 \\
2x &= 15 + x \qquad /-x \\
2x - x &= 15 \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

Zkouška:

$$L(15) = 2x - 8 = 2 \cdot 15 - 8 = 30 - 8 = 22$$
$$P(15) = 7 + 15 = 22$$
$$L(15) = P(15)$$

2.3. ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Při hledání kořenů rovnic mohou nastat tyto případy:

a) $a \neq 0, b\ je\ libovoln\text{é}\ re\acute{a}ln\text{é}\ \check{c}\acute{\imath}slo$, kořenem rovnice je

$$x = -\frac{b}{a}$$

Daná rovnice má pouze jedno řešení (jeden kořen).

$$2x + 5 = 0$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

b) $a = 0, b = 0$, kořenem rovnice je libovolné reálné číslo. Existuje tedy nekonečně mnoho řešení.

$$3x - 4 = 3x - 4$$
$$0x = 0$$
$$0 = 0$$

c) $a = 0, b \neq 0$, daná rovnice pak nemá žádný kořen.

$$7x - 6 = 7x$$
$$0x = 6$$
$$0 = 6.$$

Docházíme k závěru, že musí nastat jedna ze tří možností řešení. Existují rovnice s jedním řešením, s nekonečně mnoho řešeními, ale i rovnice, které řešení nemají.

Řešení lineárních rovnic můžeme zapisovat několika způsoby:

a) **<u>Veškeré ekvivalentní úpravy zaznamenáváme samostatně a celé postupy řešení zapisujeme.</u>**

Během seznamování se s řešením lineárních rovnic si veškeré úpravy zapisujeme. Tento postup řešení je důležitý pro žáky, kteří nemají tu schopnost si danou operaci pouze představit a zapsat výsledek. Každý krok řešení realizujeme samostatně, zapíšeme možné součty, rozdíly, součiny nebo podíly, realizujeme další úpravy, až postupně dojdeme k danému výsledku.

$$4x + 12 = 47 - 3x \qquad /-12$$
$$4x + 12 - 12 = 47 - 3x - 12$$
$$4x = 35 - 3x \qquad /+3x$$
$$4x + 3x = 35 - 3x + 3x$$
$$7x = 35 \qquad /:7$$
$$7x:7 = 35:7$$
$$x = 5$$

Zkouška:

$$L(5) = 4 \cdot 5 + 12 = 20 + 12 = 32$$
$$P(5) = 47 - 3 \cdot 5 = 47 - 15 = 32$$

$$L(5) = P(5)$$

Tento postup žáci používají, dokud se nenaučí správně převádět jednotlivé hodnoty z jedné strany rovnice na druhou. Žáci však ekvivalentní úpravy brzy pochopí a je možné přejít ke kratšímu zápisu řešení rovnic.

b) **<u>Veškeré ekvivalentní úpravy zapisujeme, operace v mezikrocích počítáme zpaměti a následné upravené rovnice zapisujeme.</u>**

Pokud již umíme správně používat ekvivalentní úpravy, nemusíme si veškeré kroky řešení zapisovat, můžeme mezikroky řešit zpaměti a následně jen zapsat vyřešenou rovnici.

$$\begin{aligned} 4x + 12 &= 47 - 3x \qquad && /-12 \\ 4x &= 35 - 3x && /+3x \\ 7x &= 35 && /:7 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$L(5) = 4 \cdot 5 + 12 = 20 + 12 = 32$$
$$P(5) = 47 - 3 \cdot 5 = 47 - 15 = 32$$

$$L(5) = P(5)$$

Můžeme porovnat, že tento zápis řešení rovnice je opravdu kratší než předchozí zápis. Je možné zapsat více ekvivalentních úprav v jednom kroku, nesmíme však zapomenout na provedení všech těchto kroků při řešení. Se schopností touto metodou řešit lineární rovnice se žáci dostávají do fáze, kdy si již nemusejí zapisovat jednotlivé ekvivalentní úpravy. Umí si je představit a aplikovat zpaměti.

c) **<u>Nezapisujeme žádné ekvivalentní úpravy, počítáme zpaměti a upravené rovnice zapisujeme.</u>**

$$4x + 12 = 47 - 3x$$
$$7x = 35$$
$$x = 5$$

Zkouška:

$$L(5) = 4 \cdot 5 + 12 = 20 + 12 = 32$$
$$P(5) = 47 - 3 \cdot 5 = 47 - 15 = 32$$

$$L(5) = P(5)$$

Tato metoda nám opravdu ulehčí zápis řešení rovnice, avšak při řešení složitějších lineárních rovnic nemusí být vždy nejefektivnější. Má-li rovnice více členů, můžeme se bez zápisu úprav ztrácet ve výpočtu. Na základní škole spíše s žáky vždy úpravy zapisujeme.

2.4. DRUHY LINEÁRNÍCH ROVNIC A ZPŮSOBY JEJICH ŘEŠENÍ

Na druhém stupni základní školy se žáci setkávají s těmito typy rovnic:

2.4.1. Lineární rovnice s jednou neznámou

a) <u>Jednoduché lineární rovnice</u>

S tímto druhem lineárních rovnic se žáci setkávají poprvé v 8. ročníku základní školy. Pomocí jednoduchých typově stejných rovnic se snaží pochopit jednotlivé kroky v řešení.

Příklady jednoduchých lineárních rovnic:

1. $x + 8 = 14$

2. $21 = x - 4$

3. $3x + 9 = 2x - 7$

4. $x - 6 = 10$

5. $5x - 6 = 3 + 4x$

6. $3x - 6 = 12 - 3x$

7. $16 = x + 7$

8. $8 + 15x = 5x - 2$

9. $12 - 2x = 8 - 3x$

Řešení zadaných lineárních rovnic:

1. $x + 8 = 14 \quad /-8$
$x = 6$

4. $x - 6 = 10 \quad /+6$
$x = 16$

7. $16 = x + 7 \quad /-7$
$9 = x$
$x = 9$

Zkouška:

$L(6) = 6 + 8 = 14$ | $L(16) = 16 - 6 = 10$ | $L(9) = 16$
$P(6) = 14$ | $P(16) = 10$ | $P(9) = 9 + 7 = 16$
$L(6) = P(6)$ | $L(16) = P(16)$ | $L(9) = P(9)$

2. $21 = x - 4 \quad /+4$
$25 = x$
$x = 25$

5. $5x - 6 = 3 + 4x \quad /+6$
$5x = 9 + 4x \quad /-4x$
$x = 9$

8. $8 + 15x = 5x - 2 \quad /-8$
$15x = 5x - 10 \quad /-5x$
$10x = -10 \quad /:10$
$x = -1$

Zkouška:

$L(25) = 21$
$P(25) = 25 - 4 = 21$
$L(25) = P(25)$

$L(9) = 5 \cdot 9 - 6 =$
$= 45 - 6 = 39$
$P(9) = 3 + 4 \cdot 9 =$
$= 3 + 36 = 39$
$L(9) = P(9)$

$L(-1) = 8 + 15 \cdot (-1) =$
$= 8 - 15 = -7$
$P(-1) = 5 \cdot (-1) - 2 =$
$= -5 - 2 = -7$
$L(-1) = P(-1)$

3. $3x + 9 = 2x - 7 \quad /-9$
$3x = 2x - 16 \quad /-2x$
$x = -16$

6. $3x - 6 = 12 - 3x \quad /+6$
$3x = 18 - 3x \quad /+3x$
$6x = 18 \quad /:6$
$x = 3$

9. $12 - 2x = 8 - 3x \quad /-8$
$4 - 2x = -3x \quad /+2x$
$4 = -x \quad /:(-1)$
$x = -4$

Zkouška:

$L(-16) = 3 \cdot (-16) + 9 =$
$= -48 + 9 = -39$
$P(-16) = 2 \cdot (-16) - 7 =$
$= -32 - 7 = -39$
$L(-16) = P(-16)$

$L(3) = 3 \cdot 3 - 6 =$
$= 9 - 6 = 3$
$P(3) = 12 - 3 \cdot 3 =$
$= 12 - 9 = 3$
$L(3) = P(3)$

$L(-4) = 12 - 2 \cdot (-4) =$
$= 12 + 8 = 20$
$P(-4) = 8 - 3 \cdot (-4) =$
$= 8 + 12 = 20$
$L(20) = P(20)$

b) Lineární rovnice se závorkami

Pokud se v lineárních rovnicích vyskytují závorky, musíme dávat pozor při roznásobení závorek a změně znaménka. V prvním kroku řešení rovnice si pro usnadnění nejdříve vše roznásobíme a zjednodušíme obě strany rovnice. Následně pokračujeme obvyklým způsobem.

Lineární rovnice se závorkami:

1. $26 = 13 \cdot (x - 11)$

2. $(7 - 4x) \cdot (-9) = 9$

3. $2 \cdot (6x - 8) = 4 \cdot (x + 6)$

4. $3 \cdot (7 - 2x) = 5 \cdot (9 - 2x)$

5. $4 - 3 \cdot (8 + 6x) = (12x + 4) \cdot (-2)$

6. $5 - 4 \cdot (2 - 2x) = 3 \cdot (2x - 7)$

Řešení zadaných lineárních rovnic se závorkami:

1. $26 = 13 \cdot (x - 11)$

$26 = 13x - 143 \quad /+143$

$169 = 13x \quad /:13$

$13 = x$

$x = 13$

2. $(7 - 4x) \cdot (-9) = 9$

$-63 + 36x = 9 \quad /+63$

$36x = 72 \quad /:36$

$x = 2$

Zkouška:

$L(13) = 26$

$P(13) = 13 \cdot (13 - 11) =$

$= 13 \cdot 2 = 26$

$L(13) = P(13)$

$L(2) = (7 - 4 \cdot 2) \cdot (-9) =$

$= (7 - 8) \cdot (-9) = (-1) \cdot (-9) = 9$

$P(2) = 9$

$L(2) = P(2)$

3. $2 \cdot (6x - 8) = 4 \cdot (x + 6)$

$12x - 16 = 4x + 24 \quad /+16$

$12x = 4x + 40 \quad /-4x$

$8x = 40 \quad /:8$

$x = 5$

4. $3 \cdot (7 - 2x) = 5 \cdot (9 - 2x)$

$21 - 6x = 45 - 10x \quad /-21$

$-6x = 24 - 10x \quad /+10x$

$4x = 24 \quad /:4$

$x = 6$

Zkouška:

$L(5) = 2 \cdot (6 \cdot 5 - 8) =$

$= 2 \cdot (30 - 8) = 2 \cdot 22 = 44$

$P(5) = 4 \cdot (5 + 6) \quad =$

$= 4 \cdot 11 = 44$

$L(5) = P(5)$

$L(6) = 3 \cdot (7 - 2 \cdot 6) =$

$= 3 \cdot (7 - 12) = 3 \cdot (-5) = -15$

$P(6) = 5 \cdot (9 - 2 \cdot 6) \quad =$

$= 5 \cdot (9 - 12) = 5 \cdot (-3) = -15$

$L(6) = P(6)$

5. $4 - 3 \cdot (8 + 6x) = (12x + 4) \cdot (-2)$

$4 - 24 - 18x = -24x - 8$

$-20 - 18x = -24x - 8 \qquad /+20$

$-18x = -24x + 12 \qquad /+24x$

$6x = 12 \qquad /:6$

$x = 2$

6. $5 - 4 \cdot (2 - 2x) = 3 \cdot (2x - 7)$

$5 - 8 + 8x = 6x - 21$

$-3 + 8x = 6x - 21 \qquad /+3$

$8x = 6x - 18 \qquad /-6x$

$2x = -18 \qquad /:2$

$x = -9$

Zkouška:

$L(2) = 4 - 3 \cdot (8 + 6 \cdot 2) \;=$

$= 4 - 3 \cdot (8 + 12) = 4 - 3 \cdot 20 =$

$= 4 - 60 = -56$

$P(2) = (12 \cdot 2 + 4) \cdot (-2) =$

$= (24 + 4) \cdot (-2) = 28 \cdot (-2) =$

$= -56$

$L(2) = P(2)$

$L(-9) = 5 - 4 \cdot [2 - 2 \cdot (-9)] =$

$= 5 - 4 \cdot (2 + 18) = 5 - 4 \cdot 20 =$

$= 5 - 80 = -75$

$P(-9) = 3 \cdot [2 \cdot (-9) - 7] =$

$= 3 \cdot (-18 - 7) = 3 \cdot (-25)$

$= -75$

$L(-9) = P(-9)$

c) Lineární rovnice s desetinnými čísly

Pokud se v lineárních rovnicích vyskytují desetinná čísla, snažíme se je nejprve odstranit. Tím si ulehčíme počítání. Pro odstranění desetinných čísel nejprve celou rovnici násobíme, např.: $10, 100, \ldots$. Je-li v rovnici závorka na roznásobení a desetinná čísla se vyskytují uvnitř závorky, nejdříve danou rovnici upravíme a až poté se zbavujeme desetinných čísel.

Lineární rovnice s desetinnými čísly:

1. $0{,}2 \cdot (5x - 7) = 0{,}6$

2. $0{,}3x - 0{,}5 = 0{,}25x - 6$

3. $7 \cdot (0{,}02x + 0{,}3) = 5 - 0{,}15x$

4. $0{,}7x - 1{,}6 = 3 \cdot (0{,}9 - 1{,}2x)$

5. $18 = 9 \cdot (0{,}3x + 0{,}8)$

6. $0{,}8 - 3{,}5x = 0{,}3 \cdot (6 - 10x)$

Řešení zadaných lineárních rovnic s desetinnými čísly:

1. $0{,}2 \cdot (5x - 7) = 0{,}6$

$$x - 1{,}4 = 0{,}6 \qquad /\cdot 10$$
$$10x - 14 = 6 \qquad /+14$$
$$10x = 20 \qquad /:10$$
$$x = 2$$

2. $0{,}3x - 0{,}5 = 0{,}25x - 6 \qquad /\cdot 100$

$$30x - 50 = 25x - 600 \qquad /+50$$
$$30x = 25x - 550 \qquad /-25x$$
$$5x = -550 \qquad /:5$$
$$x = -110$$

Zkouška:

$L(2) = 0{,}2 \cdot (5 \cdot 2 - 7) =$

$= 0{,}2 \cdot (10 - 7) = 0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6$

$P(2) = 0{,}6$

$L(2) = P(2)$

$L(-110) = 0{,}3 \cdot (-110) - 0{,}5 =$

$= -33 - 0{,}5 = -33{,}5$

$P(-110) = 0{,}25 \cdot (-110) - 6 =$

$= -27{,}5 - 6 = -33{,}5$

$L(-110) = P(-110)$

3. $7 \cdot (0{,}02x + 0{,}3) = 5 - 0{,}15x$

$$0{,}14x + 2{,}1 = 5 - 0{,}15x \qquad /\cdot 100$$
$$14x + 210 = 500 - 15x \qquad /-210$$
$$14x = 290 - 15x \qquad /+15x$$
$$29x = 290 \qquad /:29$$
$$x = 10$$

4. $0{,}7x - 1{,}6 = 3 \cdot (0{,}9 - 1{,}2x)$

$$0{,}7x - 1{,}6 = 2{,}7 - 3{,}6x \qquad /\cdot 10$$
$$7x - 16 = 27 - 36x \qquad /+16$$
$$7x = 43 - 36x \qquad /+36x$$
$$43x = 43 \qquad /:43$$
$$x = 1$$

Zkouška:

$L(10) = 7 \cdot (0{,}02 \cdot 10 + 0{,}3) =$

$= 7 \cdot (0{,}2 + 0{,}3) = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

$P(10) = 5 - 0{,}15 \cdot 10 =$

$= 5 - 1{,}5 = 3{,}5$

$L(10) = P(10)$

$L(1) = 0{,}7 \cdot 1 - 1{,}6 =$

$= 0{,}7 - 1{,}6 = -0{,}9$

$P(1) = 3 \cdot (0{,}9 - 1{,}2 \cdot 1) =$

$= 3 \cdot (0{,}9 - 1{,}2) = 3 \cdot (-0{,}3) = -0{,}9$

$L(1) = P(1)$

5. $18 = 9 \cdot (0{,}3x + 0{,}8)$

$18 = 2{,}7x + 7{,}2 \quad /\cdot 10$

$180 = 27x + 72 \quad /-72$

$108 = 27x \quad /:27$

$4 = x$

$x = 4$

6. $0{,}8 - 3{,}5x = 0{,}3 \cdot (6 - 10x) \quad /\cdot 10$

$8 - 35x = 3 \cdot (6 - 10x)$

$8 - 35x = 18 - 30x \quad /-8$

$-35x = 10 - 30x \quad /+30x$

$-5x = 10 \quad /:(-5)$

$x = -2$

Zkouška:

$L(4) = 18$

$P(4) = 9 \cdot (0{,}3 \cdot 4 + 0{,}8) =$

$= 9 \cdot (1{,}2 + 0{,}8) = 9 \cdot 2 = 18$

$L(4) = P(4)$

$L(-2) = 0{,}8 - 3{,}5 \cdot (-2) =$

$= 0{,}8 + 7 = 7{,}8$

$P(-2) = 0{,}3 \cdot [6 - 10 \cdot (-2)] =$

$= 0{,}3 \cdot (6 + 20) = 0{,}3 \cdot 26 = 7{,}8$

$L(-2) = P(-2)$

d) <u>Lineární rovnice se zlomky</u>

U rovnic, ve kterých se vyskytují zlomky, je vhodné tyto zlomky jako první odstranit. Odstranění zlomků provedeme vynásobením obou stran rovnice nejmenším společným násobkem jmenovatelů všech zlomků. Při násobení nesmíme zapomenout vynásobit veškeré členy rovnice.

Lineární rovnice se zlomky:

1. $27 = \frac{x}{3} + 6$ **2.** $\frac{3}{4}x + 8 = \frac{1}{2}$

3. $\frac{x-8}{2} + \frac{3x-4}{5} = 4$ **4.** $\frac{x-9}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot (1-x)}{12}$

5. $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{5x-3}{4}$ **6.** $\frac{x-5}{2} = 5 - \frac{1}{8}x$

Řešení zadaných lineárních rovnic se zlomky:

1. $27 = \frac{x}{3} + 6 \quad /\cdot 3$

$81 = x + 18 \quad /-18$

$63 = x$

$x = 63$

2. $\frac{3}{4}x + 8 = \frac{1}{2} \quad /\cdot 4$

$3x + 32 = 2 \quad /-32$

$3x = -30 \quad /:3$

$x = -10$

Zkouška:

$L(63) = 27$

$P(63) = \frac{63}{3} + 6 = 21 + 6 = 27$

$L(63) = P(63)$

$L(-10) = \frac{3}{4} \cdot (-10) + 8 =$

$= -\frac{30}{4} + 8 = -7{,}5 + 8 = 0{,}5$

$P(-10) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$L(-10) = P(-10)$

3. $\frac{x-8}{2} + \frac{3x-4}{5} = 4 \qquad /\cdot 10$

$5 \cdot (x-8) + 2 \cdot (3x-4) = 40$

$5x - 40 + 6x - 8 = 40$

$11x - 48 = 40 \qquad /+48$

$11x = 88 \qquad /:11$

$x = 8$

4. $\frac{x-9}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1-x}{4} \qquad /\cdot 12$

$2 \cdot (x-9) + 6 = 3 \cdot (1-x)$

$2x - 18 + 6 = 3 - 3x$

$2x - 12 = 3 - 3x \qquad /+12$

$2x = 15 - 3x \qquad /+3x$

$5x = 15 \qquad /:5$

$x = 3$

Zkouška:

$L(8) = \frac{8-8}{2} + \frac{3 \cdot 8 - 4}{5} =$

$= 0 + \frac{20}{5} = 4$

$P(8) = 4$

$L(8) = P(8)$

$L(3) = \frac{3-9}{6} + \frac{1}{2} =$

$= -1 + \frac{1}{2} = -0{,}5$

$P(3) = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -0{,}5$

$L(3) = P(3)$

5. $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{5x-3}{4} \qquad /\cdot 12$

$16x - 6 = 3 \cdot (5x - 3)$

$16x - 6 = 15x - 9 \qquad /+6$

$16x = 15x - 3 \qquad /-15x$

$x = -3$

6. $\frac{x-5}{2} = 5 - \frac{1}{8}x \qquad /\cdot 8$

$4 \cdot (x-5) = 40 - x$

$4x - 20 = 40 - x \qquad /+20$

$4x = 60 - x \qquad /+x$

$5x = 60 \qquad /:5$

$x = 12$

Zkouška:

$L(-3) = \frac{4}{3} \cdot (-3) - \frac{1}{2} =$

$= -4 - \frac{1}{2} = -4{,}5$

$P(-3) = \frac{5 \cdot (-3) - 3}{4} =$

$= \frac{-15 - 3}{4} = -\frac{18}{4} = -4{,}5$

$L(-3) = P(-3)$

$L(12) = \frac{12 - 5}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$P(12) = 5 - \frac{1}{8} \cdot 12 =$

$= 5 - \frac{12}{8} = 3{,}5$

$L(12) = P(12)$

e) <u>Složitější lineární rovnice</u>

Jedná se o rovnice s kombinací desetinných čísel, zlomků a závorek. Tyto typy rovnic představují pro žáky již větší problém při řešení. Více operací dohromady zavádí do řešení rovnic zmatek a žáci se často v jednotlivých krocích řešení ztrácí.

Složitější lineární rovnice:

1. $\frac{2}{5}(8 - 0{,}5x) = 2{,}1x + 10{,}1$

2. $\frac{3}{4}(x - 0{,}4) = \frac{2}{7}x - 3{,}55$

Řešení zadaných složitějších lineárních rovnic:

1. $\frac{2}{5} \cdot (8 - 0{,}5x) = 2{,}1x + 10{,}1$

$$\begin{aligned}
\frac{16}{5} - \frac{1}{5}x &= 2{,}1x + 10{,}1 && /\cdot 5 \\
16 - x &= 10{,}5x + 50{,}5 && /\cdot 10 \\
160 - 10x &= 105x + 505 && /-105x \\
160 - 115x &= 505 && /-160 \\
-115x &= 345 && /:(-115) \\
x &= -3
\end{aligned}$$

2. $\frac{3}{4} \cdot (x - 0{,}4) = \frac{2}{7}x - 3{,}55$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}x - 0{,}3 &= \frac{2}{7}x - 3{,}55 && /\cdot 28 \\
21x - 8{,}4 &= 8x - 99{,}4 && /\cdot 10 \\
210x - 84 &= 80x - 994 && /-80x \\
130x - 84 &= -994 && /+84 \\
130x &= -910 && /:130 \\
x &= -7
\end{aligned}$$

Zkouška:

$L(-3) = \frac{2}{5} \cdot [8 - 0{,}5 \cdot (-3)] =$

$L(-7) = \frac{3}{4} \cdot (-7 - 0{,}4) =$

$$= \frac{2}{5} \cdot (8 + 1{,}5) = \frac{2}{5} \cdot 9{,}5 = \frac{19}{5} = 3{,}8$$

$$P(-3) = 2{,}1 \cdot (-3) + 10{,}1 =$$

$$= -6{,}3 + 10{,}1 = 3{,}8$$

$$L(-3) = P(-3)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (-7{,}4) = -\frac{22{,}2}{4} = -5{,}55$$

$$P(-7) = \frac{2}{7} \cdot (-7) - 3{,}55 =$$

$$= -2 - 3{,}55 = -5{,}55$$

$$L(-7) = P(-7)$$

Na příkladu dvou vyřešených složitějších lineárních rovnic je zřejmé, že řešení těchto typů rovnic obsahuje více kroků. Díky delšímu postupu k nalezení kořene rovnice mnoho žáků dělá v příkladech zbytečné chyby.

2.4.2. Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

Lineární rovnicí s neznámou ve jmenovateli rozumíme rovnici, která obsahuje lomené výrazy, kde alespoň jeden má ve jmenovateli obsaženou neznámou. Uvedeme si jeden vzorový příklad:

$$5 = \frac{8x - 6}{x}$$

Před zahájením řešení lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli musíme nejprve určit podmínku, pro kterou bude mít lomený výraz smysl. Podmínky stanovíme tak, že každý jmenovatel obsahující neznámou musí být různý od nuly. V našem případě má lomený výraz

$$\frac{8x - 6}{x} \qquad smysl\,pro \qquad x \neq 0.$$

Tuto podmínku musíme zohlednit ve výsledku řešení. Při řešení se snažíme, stejně jako u lineárních rovnic se zlomky, dané zlomky odstranit. Abychom zlomek z výše uvedené rovnice odstranili, vynásobíme obě strany rovnice neznámou ze jmenovatele, tedy x, obecně však obě strany rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem všech jmenovatelů. Následující kroky při řešení rovnice již provádíme stejným způsobem jako u předchozích rovnic.

$$5 = \frac{8x - 6}{x} \qquad /\cdot x$$

$$5x = 8x - 6 \qquad /-8x$$

$$-3x = -6 \qquad /:(-3)$$
$$x = 2$$

Před provedením zkoušky musíme ověřit, zda kořen rovnice odpovídá stanovené podmínce.

$$2 \neq 0.$$

Kořen je platný, a tudíž musíme ještě provést zkoušku.

$$L(2) = 5$$
$$P(2) = \frac{8 \cdot 2 - 6}{2} = \frac{16 - 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$
$$L(2) = P(2).$$

Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli:

1. $\frac{32}{x} = \frac{8}{3}$ **2.** $\frac{7}{x} + 3 = \frac{4}{x}$

3. $\frac{11}{5x - 2} = \frac{13}{2 - 5x} + 3$ **4.** $\frac{6x + 7}{x + 3} = \frac{7 + 5x}{2x + 6}$

Řešení zadaných lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli:

1. $\frac{32}{x} = \frac{8}{3} \qquad /\cdot 3x \qquad pro\ x \neq 0$

$$3 \cdot 32 = 8x$$
$$96 = 8x \qquad /:8$$
$$x = 12$$

2. $\frac{7}{x} + 3 = \frac{4}{x} \qquad /\cdot x \qquad pro\ x \neq 0$

$$7 + 3x = 4 \qquad /-7$$
$$3x = -3 \qquad /:3$$
$$x = -1$$

Ověření podmínek:

$$12 \neq 0 \qquad\qquad -1 \neq 0$$

Zkouška:

$$L(12) = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$
$$P(12) = \frac{8}{3}$$
$$L(12) = P(12)$$

$$L(-1) = \frac{7}{-1} + 3 = -4$$
$$P(-1) = \frac{4}{-1} = -4$$
$$L(-1) = P(-1)$$

3. $\frac{11}{5x-2} = \frac{13}{2-5x} + 3 \quad /\cdot (5x-2)$

$11 = -13 + 3 \cdot (5x-2) \qquad pro\ x \neq \frac{2}{5}$

$11 = -13 + 15x - 6$

$11 = -19 + 15x \quad /+19$

$30 = 15x \quad /:15$

$x = 2$

4. $\frac{6x+7}{x+3} = \frac{7+5x}{2x+6} \quad /\cdot (2x+6)$

$2 \cdot (6x+7) = 7 + 5x \qquad pro\ x \neq -3$

$12x + 14 = 7 + 5x \quad /-5x$

$7x + 14 = 7 \quad /-14$

$7x = -7 \quad /:7$

$x = -1$

Ověření podmínek:

$2 \neq \frac{2}{5}$

$-1 \neq -3$

Zkouška:

$L(2) = \frac{11}{5 \cdot 2 - 2} = \frac{11}{8}$

$P(2) = \frac{13}{2 - 5 \cdot 2} + 3 = -\frac{13}{8} + 3 =$

$= \frac{-13+24}{8} = \frac{11}{8}$

$L(2) = P(2)$

$L(-1) = \frac{6 \cdot (-1) + 7}{-1+3} = \frac{-6+7}{2} = \frac{1}{2}$

$P(-1) = \frac{7 + 5 \cdot (-1)}{2 \cdot (-1) + 6} =$

$= \frac{7-5}{-2+6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(-1) = P(-1)$

2.4.3. Lineární rovnice se dvěma neznámými

Lineární rovnicí s dvěma neznámými x a y rozumíme algebraickou rovnici 1. stupně ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde koeficienty a, b a absolutní člen c jsou reálná čísla a $a \neq 0, b \neq 0$.

$$3x + 8y = 24$$

Budeme hledat všechna řešení této rovnice. Řešením jsou veškeré uspořádané dvojice $[k, l]$, kde $k = x, l = y$ takové, že po jejich dosazení do původní rovnice získáme platnou rovnost. Nejedná se tedy o libovolné dvojice čísel, ale o hodnoty, které po dosazení do rovnice dávají rovnost stran. Lineární rovnice o dvou neznámých má v množině reálných čísel nekonečně mnoho řešení. Jsou to veškeré uspořádané dvojice čísel $[k, l]$, $k = x, l = y$, kde za hodnotu $k = x$ si dosadíme libovolnou hodnotu a hodnotu

$l = y$ dopočítáme. Tento postup můžeme použít i opačně, zvolíme si hodnotu $l = y$ a dopočítáme hodnotu $k = x$. Pokud se snažíme uvést uspořádanou dvojici pro libovolnou volbu jedné neznámé, budeme řešení zapisovat takto:

$$[k, l] = \left\{\left(x, 3 - \frac{3}{8}x\right); x \in R\right\}$$

nebo

$$[k, l] = \left\{\left(8 - \frac{8}{3}y, y\right); y \in R\right\}.$$

Řešení vzorového příkladu:

$$3x + 8y = 24$$

$$3x = 24 - 8y \qquad /:3 \qquad\qquad 8y = 24 - 3x \qquad /:8$$

$$x = 8 - \frac{8}{3}y \qquad\qquad y = 3 - \frac{3}{8}x$$

Nyní dosadíme do rovnice za neznámou x (y) výraz, který jsme si vyjádřili.

$$3 \cdot \left(8 - \frac{8}{3}y\right) + 8y = 24 \qquad\qquad 3x + 8 \cdot \left(3 - \frac{3}{8}x\right) = 24$$

$$24 - 8y + 8y = 24 \qquad\qquad 3x + 24 - 3x = 24$$

$$0 = 0 \qquad\qquad 0 = 0$$

Došli jsme k závěru $0 = 0$, tedy řešením jsou všechna reálná čísla. Řešení je tedy nekonečně mnoho. Pokud například dosadíme do dané rovnice $x = 0$ a nebo $y = 0$, získáme hned dvě uspořádané dvojice kořenů.

$$x = 0 \qquad\qquad y = 0$$

$$3x + 8y = 24$$

$$3 \cdot 0 + 8y = 24 \qquad\qquad 3x + 8 \cdot 0 = 24$$

$$8y = 24 \qquad /:8 \qquad\qquad 3x = 24 \qquad /:3$$

$$y = 3 \qquad\qquad x = 8$$

$$[x, y] = [0,3] \qquad\qquad [x, y] = [8,0]$$

Pro všechna ostatní řešení můžeme použít vyjádření $[k,l] = \left\{\left(x, 3 - \frac{3}{8}x\right); x \in R\right\}$,

respektive $[k,l] = \left\{\left(8 - \frac{8}{3}y, y\right); y \in R\right\}$ a vypočítat další možná řešení.

Zkouška se provádí obdobně jako u řešení lineárních rovnic s jednou neznámou. Vypočtené kořeny dosadíme do zadání rovnice, a musíme dostat rovnost.

Zkouška:

$$3x + 8y = 24$$

$L(0,3) = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 3 = 24$

$P(0,3) = 24$

$L(0,3) = P(0,3)$

$L(8,0) = 3 \cdot 8 + 8 \cdot 0 = 24$

$P(8,0) = 24$

$L(8,0) = P(8,0)$

Lineární rovnice se dvěma neznámými:

1. $3x + 9y = 27$

2. $7x - 5y = 15$

3. $2x - 4y = 64$

4. $2x + \frac{1}{3}y = 0$

Řešením zadaných lineárních rovnic se dvěma neznámými jsou uspořádané dvojice (pro volbu $\boldsymbol{k = x}$):

1. $[k,l] = \left\{\left(x, 3 - \frac{1}{3}x\right), x \in R\right\}$

2. $[k,l] = \left\{\left(x, \frac{7}{5}x - 3\right), x \in R\right\}$

3. $[k,l] = \left\{\left(x, \frac{1}{2}x - 16\right), x \in R\right\}$

4. $[k,l] = \{(x, -6x), x \in R\}$

Žáci na 2. stupni základní školy však tyto typy lineárních rovnic neřeší. Toto učivo se probírá až jako učivo středních škol a gymnázií.

2.5. SOUSTAVY DVOU ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

Dvojice rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2,}$$

se nazývá soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y. Koeficienty a_1, b_1, a_2, b_2 a absolutní členy c_1, c_2 jsou reálná čísla a platí $a_1 \neq 0$ nebo $b_1 \neq 0$ a $a_2 \neq 0$ nebo $b_2 \neq 0$. Konkrétní soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými může vypadat takto:

$$x - 4y = 12$$
$$\underline{3x + 4y = 8}$$

2.5.1. Metody řešení soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými

Pro vyřešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y hledáme všechny uspořádané dvojice reálných čísel $[x, y]$, které po dosazení do původní rovnice dají platnou rovnost. Obě rovnice oddělujeme od dalšího kroku řešení vodorovnou čarou.

a) <u>Metoda dosazovací</u>

Z jedné rovnice musíme vyjádřit neznámou a tu následně dosadíme do druhé rovnice. Získanou výslednou hodnotu dosadíme do vyjádřené neznámé a dopočteme druhý kořen soustavy rovnic. Tuto metodu je výhodné použít, pokud se vyskytuje v jedné z rovnic neznámá s koeficientem 1. Tento postup si ukážeme při řešení následující soustavy rovnic.

$$3x + 4y = 6$$
$$\underline{x + 2y = 7}$$

Z druhé rovnice vyjádříme neznámou x

$$x = 7 - 2y$$

a dosadíme do první rovnice.

$$3 \cdot (7 - 2y) + 4y = 6$$
$$21 - 6y + 4y = 6$$

$$21 - 2y = 6$$
$$-2y = -15 \qquad /:(-2)$$
$$y = \frac{15}{2}$$

V dalším kroku dosadíme výsledek $y = \frac{15}{2}$ do rovnice $x = 7 - 2y$.

$$x = 7 - 2 \cdot \frac{15}{2}$$
$$x = 7 - 15$$
$$x = -8$$

Zkouška:

$$L_1\left(-8, \frac{15}{2}\right) = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot \frac{15}{2} = -24 + 30 = 6 \qquad P_1\left(-8, \frac{15}{2}\right) = 6$$
$$L_2\left(-8, \frac{15}{2}\right) = -8 + 2 \cdot \frac{15}{2} = -8 + 15 = 7 \qquad P_2\left(-8, \frac{15}{2}\right) = 7$$

$$L_1\left(-8, \frac{15}{2}\right) = P_1\left(-8, \frac{15}{2}\right) \qquad L_2\left(-8, \frac{15}{2}\right) = P_2\left(-8, \frac{15}{2}\right)$$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice čísel $[x, y] = \left[-8, \frac{15}{2}\right]$.

b) <u>Metoda sčítací</u>

Sčítáme levé strany obou rovnic a pravé strany obou rovnic. U některých typů rovnic je potřeba rovnice před započetím sčítání upravit. Úpravu provádíme tak, aby koeficienty jedné neznámé byly v daných dvou rovnicích opačné. Pro tuto úpravu používáme ve většině případů násobení obou stran jedné z rovnic, případně obou stran obou rovnic reálným číslem tak, aby vznikly opačné koeficienty u jedné neznámé.

$$3y - 7x = 8$$
$$\underline{7x + 6y = 10}$$

Pokud sečteme levé strany rovnic a pravé strany rovnic, odstraníme člen s neznámou x.

$$3y - 7x + 7x + 6y = 8 + 10$$

$$9y = 18 \qquad /:9$$
$$y = 2.$$

Provedeme operaci sčítání tak, abychom odstranili člen s neznámou y.

$$\begin{aligned} 3y - 7x &= 8 \qquad /\cdot(-2) \\ \underline{7x + 6y} &\underline{= 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6y + 14x &= -16 \\ \underline{7x + 6y} &\underline{= 10} \\ 21x &= -6 \qquad /:21 \\ x &= -\frac{6}{21} \qquad /:3 \\ x &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$L_1\left(-\frac{2}{7},2\right) = 3\cdot 2 - 7\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = 6 + 2 = 8 \qquad P_1\left(-\frac{2}{7},2\right) = 8$$

$$L_2\left(-\frac{2}{7},2\right) = 7\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) + 6\cdot 2 = -2 + 12 = 10 \qquad P_2\left(-\frac{2}{7},2\right) = 10$$

$$L_1\left(-\frac{2}{7},2\right) = P_1\left(-\frac{2}{7},2\right) \qquad L_2\left(-\frac{2}{7},2\right) = P_2\left(-\frac{2}{7},2\right)$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice čísel $[x,y] = \left(-\frac{2}{7},2\right)$.

Často se metoda dosazovací a sčítací prolínají. Například u příkladu na metodu sčítací, bychom při hledání druhého kořene rovnice nemuseli opět používat metodu sčítací, ale mohli bychom použít metodu dosazovací.

c) <u>Metoda srovnávací</u>

Pokud lze jednoduše z obou rovnic dané soustavy vyjádřit stejnou neznámou, učiníme tak. Dosáhneme rovnosti obou neznámých, tedy $L_1 = L_2$, proto se musí rovnat i druhé strany rovnic $P_1 = P_2$, tudíž je můžeme touto metodou porovnat. Výpočty již provádíme jako při řešení lineární rovnice s jednou neznámou. Následující soustavu dvou lineárních rovnic zkusíme touto metodou vyřešit:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ \underline{x - 2y} &\underline{= -6} \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme neznámou x.

$$x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}y$$

$$\underline{x = -6 + 2y}$$

Levé strany rovnic se rovnají, musí se rovnat i pravé strany rovnic.

$$\frac{7}{3} - \frac{4}{3}y = -6 + 2y \qquad /-2y \quad /-\frac{7}{3}$$

$$-\frac{4}{3}y - 2y = -6 - \frac{7}{3}$$

$$\frac{-4y - 6y}{3} = \frac{-18 - 7}{3} \qquad /\cdot 3$$

$$-10y = -25 \qquad /(-10)$$

$$y = \frac{25}{10}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

V dalším kroku dosadíme $y = \frac{5}{2}$ do jedné z rovnic $x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}y$, $x = -6 + 2y$.

$$x = -6 + 2 \cdot \frac{5}{2}$$

$$x = -6 + 5$$

$$x = -1.$$

Zkouška:

$$L_1\left(-1, \frac{5}{2}\right) = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{5}{2} = -3 + 10 = 7 \qquad P_1\left(-1, \frac{5}{2}\right) = 7$$

$$L_2\left(-1, \frac{5}{2}\right) = -1 - 2 \cdot \frac{5}{2} = -1 - 5 = -6 \qquad P_2\left(-1, \frac{5}{2}\right) = -6$$

$$L_1\left(-1, \frac{5}{2}\right) = P_1\left(-1, \frac{5}{2}\right) \qquad L_2\left(-1, \frac{5}{2}\right) = P_2\left(-1, \frac{5}{2}\right)$$

Se soustavami lineárních rovnic se dvěma neznámými se setkávají žáci v 9. ročníku základní školy. Učí se je řešit metodou sčítací a dosazovací.

2.5.2. Řešení soustav lineárních rovnic

Při hledání kořenů rovnic mohou nastat tyto případy:

a) a_1 je $n - násobkem\ a_2$ a zároveň b_1 není násobkem b_2,

$$a_1 = n \cdot a_2 \ \wedge \ b_1 \neq n \cdot b_2,$$

potom daná soustava rovnic má právě jedno řešení.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 6 \\ \underline{2x - 3y} &\underline{= 12} \\ 3x &= 18 && \rightarrow \quad 6 + 3y = 6 \\ x &= 6 && \qquad\qquad y = 0 \end{aligned}$$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice čísel $[x, y] = [6{,}0]$.

b) a_1 je $n - násobkem\ a_2$ a zároveň b_1 je $n - násobkem\ b_2$, ale c_1 není násobkem c_2,

$$a_1 = n \cdot a_2 \ \wedge \ b_1 = n \cdot b_2 \ \wedge c_1 \neq n \cdot c_2,$$

potom daná soustava nemá žádné řešení.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 && \rightarrow y = 6 - 2x \\ \underline{6x + 3y} &\underline{= 7} \\ 6x + 3 \cdot (6 - 2x) &= 7 \\ 6x + 18 - 6x &= 7 \\ 0 \cdot x &= -11 \\ 0 &= -11 \end{aligned}$$

Již z řešení lineárních rovnic s jednou neznámou víme, že pro výsledek $0 = -11$ daná rovnice nemá žádné řešení. Můžeme konstatovat, že daná soustava rovnic nemá řešení.

c) a_1 je $n - násobkem\, a_2$ a zároveň b_1 je $n - násobkem\, b_2$, a c_1 je $n - násobkem\ c_2$,

$$a_1 = n \cdot a_2 \ \wedge \ b_1 = n \cdot b_2 \ \wedge c_1 = n \cdot c_2,$$

potom má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \qquad\qquad \rightarrow x = 3 - 2y \\ \underline{2x + 4y} &\underline{= 6} \\ 2 \cdot (3 - 2y) + 4y &= 6 \\ 6 - 4y + 4y &= 6 \\ 0 \cdot y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Můžeme o dané soustavě říct, že má nekonečně mnoho řešení, $[x, y] = \{(3 - 2y, y), y \in R\}$.

Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými mají buď jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, anebo daná soustava nemá žádné řešení.

3. PRAKTICKÁ ČÁST

Praktickou část diplomové práce jsem realizovala v rámci své praxe na Masarykově základní škole v Žihli, v 8. ročníku. Žáci měli probraný tematický celek Lineární rovnice a právě probíhalo opakování této látky.

V praktické části diplomové práce jsem se zaměřila na vytvoření pracovních listů a didaktických her, sloužících k opakování a prohlubování učiva o lineárních rovnicích a jejich ověření se žáky.

3.1. CHARAKTERISTIKA ZÁKLADNÍ ŠKOLY A CHARAKTERISTIKA TŘÍDY

Masarykova základní škola a mateřská škola v Žihli je menší škola, která je však plně organizována, tedy od 1. do 9. ročníku. Škola sdružuje základní školu, mateřskou školu, školní družinu a školní jídelnu. Činnost je organizována v hlavní budově školy a v odloučeném pracovišti. V hlavní budově probíhá vzdělávání a výchova žáků 1. – 9. ročníků a provoz školní družiny. V odloučeném pracovišti dochází k zajištění předškolního vzdělávání v mateřské škole a nachází se zde i školní jídelna. Ředitelka školy se snaží pro vylepšení materiálních a technických podmínek jednat se zřizovatelem školy a se soukromými subjekty. Technicky je tedy škola dobře vybavena. V každé učebně je počítač a dataprojektor. Zařízena je nově i učebna, ve které je instalována plně funkční interaktivní tabule.

Škola vzdělává přibližně 160 žáků. S průměrným počtem 17 žáků v každém ročníku umožňuje tato škola individuální přístup pedagoga k jednotlivým žákům.

Matematika se na druhém stupni základní školy vyučuje podle ucelené řady učebnic Matematika pro 6. až 9. ročník základní školy, nakladatelství Prometheus, vytvořené kolektivem O. Odvárko, J. Kadleček. Látka každého ročníku je v těchto učebnicích rozčleněna do tří ucelených částí.

V 8. ročníku je celkem 17 žáků, z toho 7 dívek a 10 chlapců. Z hlediska matematiky je třída průměrná, pouze 2 žáci dosahují nadprůměrných výsledků.

3.2. Aplikace pracovních listů

Všechny pracovní listy jsem vytvářela sama. Inspirovala jsem se náměty z učebnic a pracovních sešitů matematiky pro 8. ročník základní školy uvedených v seznamu použité literatury. Pracovní listy byly určeny pro samostatnou práci žáků.

Úkolem žáků je úspěšné vyplnění zadaných pracovních listů podle stručného zadání u každé úlohy. Žák si přečte zadání dané úlohy, prodiskutuje postup řešení s učitelem, případně lze vyřešit první příklad na tabuli jako vzorový. Po samostatném vyřešení další úlohy provede učitel s žáky kontrolu zápisem řešení na tabuli, případně probere celý postup řešení, pokud některá část činila žákům potíže. Stejný postup kontroly výsledků proběhne i po vyřešení následujících úloh. U popisu každé úlohy udávám časovou náročnost na její vyřešení. Nebude-li časová dotace při výpočtu řešení odpovídající, bude učitelem upravena. Odhad časové náročnosti vychází z dvojnásobku doby, kterou jsem k řešení dané úlohy potřebovala já.

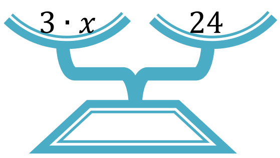
3.2.1. Pracovní list č. 1 – Řešení jednoduchých lineárních rovnic

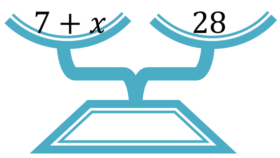
Úloha č. 1 – Úkolem každého žáka je podle hodnot na rovnoramenných vahách zapsat rovnici, která je na vahách znázorněna, následně danou rovnici vyřešit a provést zkoušku. Časovou náročnost pro řešení tohoto příkladu odhaduji na dobu 6 minut. Touto úlohou chci zjistit, zda žáci zvládnou sestavit jednoduchou lineární rovnici a následně ji vyřešit.

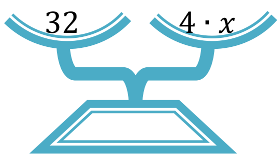
Úloha č. 2 – Při sestavování lineární rovnice pracují žáci s dvojicí rámečků. V jednom rámečku se vyskytuje neznámá ve formě růžového prasátka, doplněná případně ještě nějakou nominální hodnotou, v druhém rámečku je pak uvedená pouze nominální hodnota. Úkolem žáků je vypočítat hodnotu, která je uspořená uvnitř prasátka. Zapíší rovnici, následně jí vyřeší a provedou zkoušku. Žáci budou danou úlohu řešit v hodnotách, které jsou v každém rámečku uvedené. Časovou náročnost odhaduji na 7 minut.
(viz str. 42)

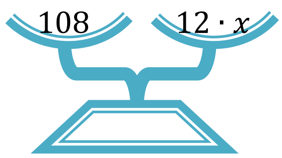
Pracovní list č. 1 – Řešení jednoduchých lineárních rovnic

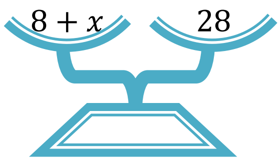
1. **Zapiš danou rovnici a vyřeš, jaké závaží umístit za x tak, aby nastala rovnost. Proveď zkoušku.**

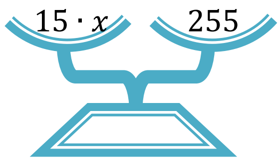


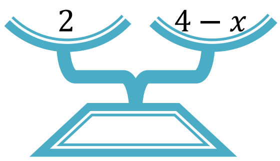


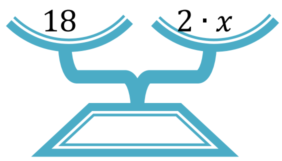




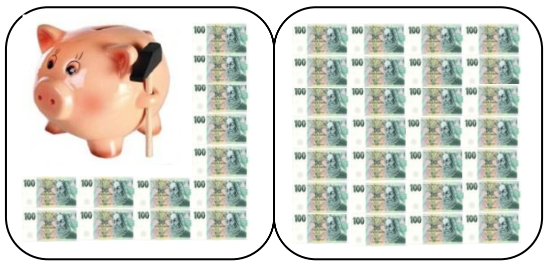




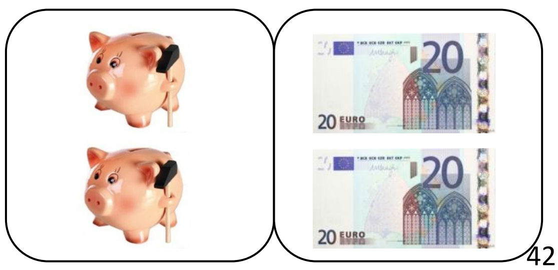




2. **Vypočítej, kolik korun obsahuje prasátko. Řeš pomocí lineárních rovnic. Sestav danou rovnici, vyřeš ji a proveď zkoušku.**





Zhodnocení řešení pracovního listu č. 1:

Pracovní list č. 1 byl určen pro žáky, kteří se teprve s lineárními rovnicemi seznamují, proto nedělal tento typ úkolů žákům problémy. Občas se třídou linula i poznámka typu „takové lehké". Bylo tedy vidět, že žáci mají dobré znalosti. Někteří žáci při plnění druhé úlohy počítali pouze počet korun zobrazený na daném obrázku, ale nezohlednili částku, kterou daná mince vyobrazuje, to znamená, že sestavili jinou rovnici a našli jiný kořen. Velmi zřídka se objevovaly chyby při uplatňování ekvivalentních úprav rovnice, tedy při převádění čísel z jedné strany na druhou.

Po vyplnění pracovního listu dostali žáci prostor pro vlastní sebehodnocení. Mohli ohodnotit, které operace jim dělají problémy, a na které se tedy zaměřit při opakování.

Vzhledem k tomu, že se s úkolem č. 2 žáci setkali poprvé, doporučila bych zjednodušení zadání úlohy těmito způsoby:

- pro znázornění peněžní částky bych použila pouze koruny
- snížila bych počet bankovek vyšších hodnot, aby se rovnice zjednodušily.

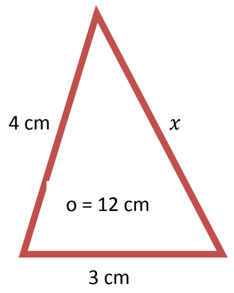
3.2.2. Pracovní list č. 2

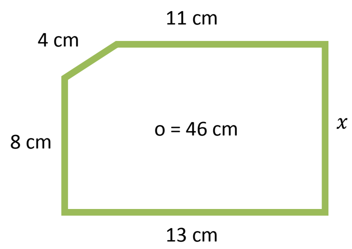
Úloha č. 1 – Před zahájením řešení je třeba společně zopakovat pojem obvod rovinného útvaru. V úloze jsou zadány geometrické útvary o různých délkách stran a obvod daného geometrického útvaru a úkolem je dopočítat pomocí lineárních rovnic délku zbývající strany, označenou písmenem x. Žáci sestaví pro daný útvar lineární rovnici, následně jí vyřeší a ověří správnost řešení. Časovou náročnost dané úlohy odhaduji na 6 minut.

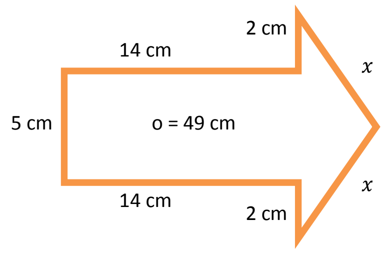
Úloha č. 2 – V pracovním listu jsou vyobrazeny různé druhy potravin, které si lidé mohou nakoupit v obchodě. U každého druhu potravin je uvedená cena za celkový nákup potravin. Úkolem žáků je vypočítat cenu jednoho kusu potravin pomocí lineární rovnice (zápis, řešení, zkouška). Na vyřešení této úlohy dostanou žáci čas 6 minut.
(viz str. 44)

Pracovní list č. 2

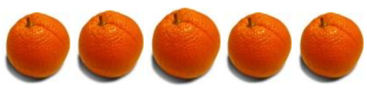
1. **Dopočítej délku zbývající strany daného geometrického útvaru, pokud znáš délky jednotlivých stran a obvod útvaru. Zapiš řešení pomocí rovnice, danou rovnici vyřeš a proveď zkoušku.**

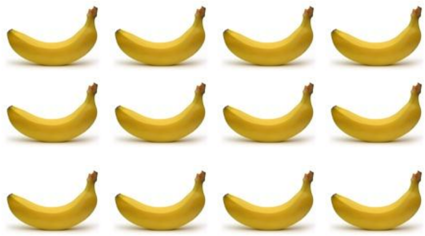






2. **Zapiš danou rovnici, znázorněnou na obrázku. Vypočítej cenu za jeden kus a proveď zkoušku.**

 stojí **39,- Kč**

 stojí **72,- Kč**

 stojí **140,- Kč**

 stojí **102,- Kč**

 stojí **46,- Kč**

Zhodnocení pracovního listu č. 2:

Vzhledem k tomu, že tyto úlohy byly voleny na sestavování jednoduchých lineárních rovnic a na procvičování základních ekvivalentních úprav, nedělaly žákům potíže. Někteří žáci se snažili řešit úlohy zpaměti a uváděli již konkrétní výsledek. Musela jsem je upozornit, že podle zadání úkolu je třeba sestavit lineární rovnici, vyřešit ji a provést zkoušku.

U žáků sklidila velký ohlas druhá úloha, kde se objevuje Coca-Cola a čokoláda Milka. Pozorovala jsem nadšení žáků, když v úkolu uviděli potraviny, které dobře z běžného života znají a které mají rádi. Avšak nastalo zde i menší zpomalení při řešení příkladu s pomeranči a příkladu s lízátky, kde vycházeli zlomky, tudíž zde museli použít písemné dělení. Avšak i to se žákům povedlo, a dané příklady vyřešili.

Z matematického hlediska se objevily jen chyby v ekvivalentních úpravách rovnic, podobně jako u předchozího pracovního listu. Zjistila jsem, že v prvním příkladu bylo pro žáky mnohem obtížnější sestavit lineární rovnici než vypočítat délku neznámé strany pomocí znalostí obvodu bez použití rovnice. Bylo by vhodnější zařadit jiný typ úlohy.

3.2.3. Pracovní list č. 3 – Myslím si číslo

Tento úkol plní žáci ve dvojicích. Jeden z žáků položí otázku podle vzorového zadání a dosadí konkrétní rovnici. Postupně se ve dvojicích žáci střídají. Žák zapíše lineární rovnici, vyřeší a provede zkoušku. Se spolužákem ve dvojici prokonzultuje postup řešení, zkontroluje a zhodnotí. V případě, že si žák neví rady, pokusí se rovnici vyřešit společně se spolužákem.

Po vyřešení všech příkladů z pracovního listu mají žáci za úkol vymyslet každý pro svého souseda další tři příklady tohoto typu. Tím si rozvíjí schopnost tvorby vlastních příkladů. Časová náročnost pro tento příklad je stanovená na 10 minut.
(viz str. 46)

Pracovní list č. 3 – Myslím si číslo

Myslím si číslo x =.... Když k němu přičtu (odečtu, vynásobím, vydělím) číslo 65, dostanu 170.

Jaké číslo si myslím?
$x = 105$

Doplň následující myšlenky tak, aby platila daná rovnost. Každou rovnici zapiš, vyřeš a proveď zkoušku.

$x =$ ___ $+$ 65 $=$ 170

$x =$ ___ $+$ 16 $=$ 58

$x =$ ___ $-$ 38 $=$ 22

$x =$ ___ $-$ 114 $=$ 47

$x =$ ___ $\cdot$ 13 $=$ 312

$x =$ ___ $\cdot$ 65 $=$ 170

$x =$ ___ $\div$ 17 $=$ 34

Zhodnocení pracovního listu č. 3:

Žáky tento pracovní list zabavil, protože rádi spolupracují mezi s sebou. Někteří charakterizovali úkol jako „kouzelnický“. Nejspíš je k tomu dovedl začátek věty „Myslím si číslo…“. Žáci hodnotili pracovní list jako jednoduchý a srozumitelný. Jeho vyplnění nedělalo žákům problémy. Občas se objevila chyba při zápisu diktované rovnice. Jelikož však žáci spolupracovali ve dvojicích, ihned druhý člen ze skupiny na chybu upozornil a řešení příkladu již probíhalo v pořádku.

Při kontrole příkladů se žáci hodnotili navzájem. Žáci byli při tomto hodnocení velice přísní. U většiny dvojic jsem zaslechla, pokud v příkladu bylo škrtáno, otázku typu „Co jsi tu nevěděl? Proč je tu škrtáno?“, čili opravdu otázky pokládané učitelem při zjišťování, co jim bylo v příkladech nesrozumitelné.

Slovní formulace podle zadání rovnice nedělala žákům problémy, stejně jako tvorba vlastního zadání. Z hlediska organizačního bych doporučovala dát každému žákovi ve dvojici jiné zadání, aby rovnice předem neviděli a museli je vytvářet sami.

3.2.4. Pracovní list č. 4 – Amerika

Tento materiál se nezaměřuje pouze na poznatky z matematiky, ale jsou zde i mezipředmětové vazby hlavně s předměty zeměpis a dějepis.

Žáci získají zajímavé informace o objevení Ameriky, její rozloze a obyvatelstvu. Pracovní list již neslouží k pochopení řešení lineárních rovnic, ale zaměřuje se na opakování a procvičování složitějších typů lineárních rovnic.

Každý žák řeší pracovní list samostatně. Žáci mají za úkol přečíst si text pracovního listu, vypočítat zadané lineární rovnice, ověřit správnost řešení každé rovnice a následně doplnit správné výsledky do připravených polí v textu. Čas na přečtení a vyřešení daného pracovního listu jsem pro žáky stanovila na 30 minut.
(viz str. 48)

Pracovní list č. 4 – Amerika

V každém příběhu doplňte číslo místo neznámé $x, y, z, \ldots$.

Amerika se skládá ze tří patrných částí - Severní Ameriky, Střední Ameriky a Jižní Ameriky. Severní a Jižní Amerika jsou považovány za dva samostatné kontinenty. Z geomorfologického hlediska se jedná o souvislou pevninskou masu, která se nachází na třech litosférických deskách - Severoamerické, Karibské (Středoamerické) a Jihoamerické. Celé území Ameriky leží na západní polokouli a zároveň na jižní i severní polokouli. Tradičním datem objevení Ameriky Evropany je rok $\boldsymbol{x}$ …………, kdy k břehům tohoto světadílu pod španělskými vlajkami přirazila flotila vedená Kryštofem Kolumbem. Z Evropy však s velkou pravděpodobností vstoupili na americkou půdu jako první Vikingové, a to již o několik stovek let dříve.

$$6 \cdot (3x - 19) - (-1) \cdot (-650) = 5 \cdot (2x + 172) + 2 \cdot (3x + 680)$$

Poloha - Amerika leží na západní polokouli, je protažena poledníkovým směrem od severu k jihu přes obě polokoule a na jihu se směrem od severu k jihu zužuje. Její maximální délka činí $\boldsymbol{x}$…………… km, šířka $\boldsymbol{y}$…………… km. Na severu je Amerika obklopena Severním ledovým oceánem, na východě Atlantským oceánem a na západě Tichým oceánem.

$$7x - 3 \cdot (4x + 1630) - 2 \cdot (1890 - 5x) = (-1) \cdot 1178 + 4 \cdot (x + 1752)$$

$$129 + 4 \cdot (y + 135) - 5 \cdot (6y - 199) = 124 - 7 \cdot (y + 630) - 18y$$

Populace - Populace Ameriky se skládá z potomků osmi velkých etnik. Indiáni, např. Inuité a Aleuté. Lidé s evropským původem, hlavně Španělé, Britové, Irové, Italové, Portugalci, Francouzi, Poláci, Němci, Nizozemci a Dáni. Mestici, kteří mají smíšený evropský a americký původ. Černoši, hlavně s původem v západní Africe. Mulati, kteří mají smíšený černošský a evropský původ. Zambové a Cafuzové, kteří mají smíšený černošský a indiánský původ. Asiaté, kteří mají původ ve východní, jižní nebo jihovýchodní Asii. Lidé z Blízkého východu. Američtí Asiaté, kteří mají smíšený asijský a americký původ. Celková populace Ameriky je $\boldsymbol{x}$………………. lidí.[1]

$$6000 \cdot (x - 75700) = 3000 \cdot (2x + 134600) - x$$

[1] Text materiálu použit ze zdroje [15]

Zhodnocení pracovního listu č. 4:

Žáci po rozdání pracovních listů ihned reagovali na typ lineárních rovnic. Třídou se ozývalo mnoho připomínek. Většině žáků připadly lineární rovnice dlouhé, bylo v nich mnoho počítání a vyšší čísla než u předchozích pracovních listů, které jsme řešili doposud. To se projevilo i při řešení těchto rovnic, žáci se v některých částech řešení ztráceli. Musela jsem apelovat na to, aby postupovali po jednotlivých krocích a nedělali více operací najednou.

Zde jsem u dvou žáků zjistila, že pokud se jedná o jednoduché lineární rovnice, jsou schopni tyto rovnice řešit. Pokud však mají řešit lineární rovnice, ve kterých se vyskytuje na každé straně více členů, začínají mít značný problém s orientací v příkladu a se stanovením postupu řešení.

Žáci řešili příklady samostatně, osobně jsem procházela třídou a kontrolovala práci studentů. Na výše zmiňované dva žáky jsem se zaměřila a snažila jsem se s nimi dané příklady řešit, a pomoct jim pochopit, že pokud se v rovnicích vyskytuje více členů najednou, je dobré si stejné členy sečíst, a rovnici tak zjednodušit.

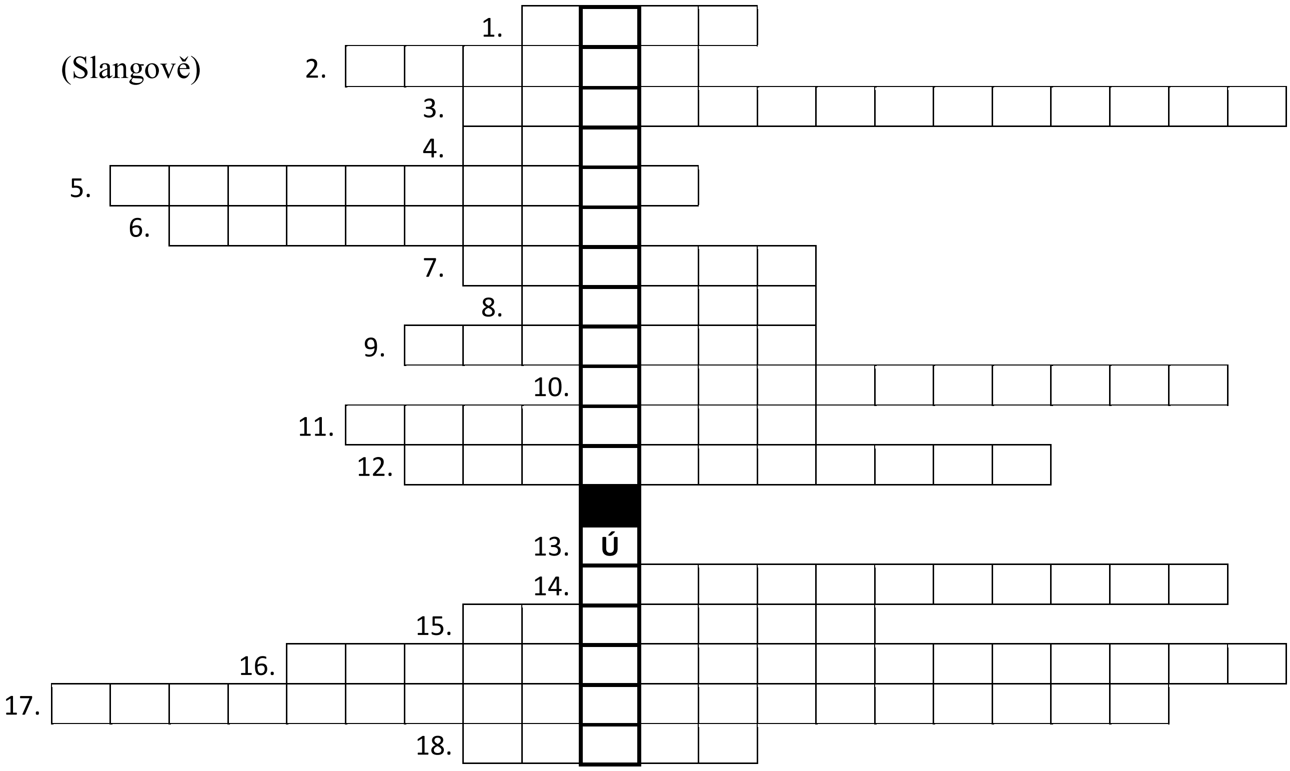
Po vyřešení pracovního listu jsem s žáky prošla výsledky. Čtyři žáci zapsali postupy řešení příkladů na tabuli, aby si všichni mohli zkontrolovat správnost řešení. Ukázalo se, že rovnice byly pro žáky náročné. Většina žáků nedošla ke správnému řešení. Problémy jim činilo i numerické počítání, proto jsem při společné kontrole dovolila žákům počítat s kalkulačkou. Vhodnější by bylo zařadit do textu jednodušší rovnice nebo pracovat frontálně.

3.2.5. Pracovní list č. 5 - Křížovka

Křížovka je tvořena sedmnácti prázdnými řádky. Jejich doplnění se provede po vyřešení sedmnácti lineárních rovnic obsažených v druhé části pracovního listu. Úkolem žáků je vyřešit lineární rovnice, zkontrolovat si správnost řešení a výsledky zapsat do odpovídajících řádků. Tím žák získá tajenku. Na doplnění tohoto pracovního listu mají žáci 45 minut, tedy celou vyučovací hodinu.

Učitel při práci žáků prochází mezi žáky, kontroluje postupy řešení, případně poskytuje pomoc při jakémkoliv problému.
(viz str. 50)

Pracovní list č. 5 - Křížovka
Úkol: Vyřeš rovnici a doplň její kořen do křížovky (slovně).



Tajenka: Operace prováděné při řešení lineárních rovnic: ……………………………………

1. $3 \cdot (x - 21) = 9 \cdot (x - 11)$
2. $\frac{6x}{15} - 5 = 6 + \frac{x-29}{3}$ (Slangově)
3. $27x - 73 = 13 \cdot (2x + 2)$
4. $8x - 12 = 15 - x$
5. $2x - \frac{5x}{4} - 19 = 20$
6. $6 \cdot (x - 3) = 5x + \frac{47+2x}{3}$
7. $\frac{2x+650}{3} = \frac{5\cdot(-89500)+1701x}{2550}$
8. $3 \cdot (x - 7) - 2 \cdot (3x - 8) = 5 \cdot (3 - x)$
9. $20x - 69 = 100 + 7x$
10. $\frac{2x+7}{3} = \frac{3x-1}{4}$
11. $5x - 17 = 2 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (-11)$
12. $60 = \frac{x}{17}$
13. - - - - - - - - - - - - - -
14. $6 \cdot (x - 8) + 7 \cdot (4 - 2x) = 3x + 3 \cdot (12 - 4x)$
15. $3x + 12 = 3 \cdot (2x - 10)$
16. $\frac{x+168}{3} = 2 + \frac{3x}{6}$
17. $\frac{x}{14} = \frac{4x}{57} + 1$
18. $2 = \frac{2x}{4}$

Zhodnocení pracovního listu č. 5:

Žáci hodnotili pracovní list jako středně těžký, avšak srozumitelný. V pracovním listu jsou obsaženy i lineární rovnice se zlomky, což většině žáků dělalo problémy. Neměli potíže najít nejmenší společný násobek, ale spíše správně roznásobit všechny členy rovnice.

Nejprve jsem měla v plánu, že kontrolu správnosti řešení křížovky provedu pouze podle tajenky. Bohužel žákům dělaly některé rovnice problémy, a tak jsem přistoupila k frontální výuce. V průběhu počítání jsem vyvolávala k tabuli a každý žák vyřešil sám, případně s pomocí návodných otázek, jednu rovnici. Ostatní žáci tak mohli provést kontrolu správnosti řešení pomocí tabule.

Ukázalo se, že největší problémy mají žáci s řešením rovnic se zlomky, a náročná se jevila také rovnice č. 7, která obsahovala vysoká čísla. Žáci zatím ještě neměli řešení lineárních rovnic zcela procvičené.

3.3. Aplikace didaktických her

Jakékoliv hry, ať už dětské hry, nebo hry didaktické, jsou prospěšné k rozvoji lidské osobnosti. Proto jsem tuto činnost zařadila do hodin matematiky zaměřených na lineární rovnice. Je důležité didaktické hry upravovat tak, aby odpovídaly vědomostem a schopnostem žáků. Zabráníme tomu, že by u žáků vznikal pocit neschopnosti řešit daný úkol, který by je zároveň odrazoval od spolupráce při řešení úkolu. U didaktických her je potřeba dbát na to, aby byl vytyčen konkrétní cíl, dobře vyložena přesná a jasná pravidla a po skončení hry vždy proběhlo zhodnocení, nejlépe ve formě pochvaly, která žáky dále motivuje.

Matematika se ve většině případů jeví jako nezábavná, pokusíme se ji proto trochu oživit a zařadit do ní matematické didaktické hry. Volila jsem spíše hry kolektivní a hru soutěživou. Didaktické hry jsem zvolila proto, aby žáci prováděli i jiné činnosti než pouze vyplňování pracovních listů. Většinu pracovních listů žáci vypracovávali samostatně, několikrát spolupracoval celý kolektiv. U didaktických her jsou většinou žáci rozděleni do menších či větších skupinek, buď hraje každý za sebe, nebo se snaží pomoci svou skupinu přiblížit k vítězství.

3.3.1. Pexeso

Cíl: Opakování a procvičování řešení lineárních rovnic.

Materiál: 32 kartiček pexesa (dvojici tvoří lineární rovnice a kořen rovnice)

Hráči: 2 – 4

Doba trvání hry: 20 minut (případně doba kratší)

Pravidla: Žáci rozdělí kartičky na karty s kořenem rovnice a na karty se zadáním rovnice. Z kartiček vytvoří dva čtverce 4 × 4, jeden čtverec ze zadání a jeden z kořenů rovnice.

Žáci si zvolí, kdo bude začínat pomocí hry „Kámen, nůžky, papír“. Směr hry je dán chodem hodinových ručiček, tedy pokračuje vždy hráč po levici.

Žák otočí jednu kartu se zadáním rovnice a jednu kartu s kořenem rovnice, pokud kořen rovnice odpovídá zadání, může si žák kartičky nechat a hraje znovu. Pokud tomu tak není, otočí kartičky nazpět a na řadu přichází další hráč. Vyhrává hráč s největším počtem správných dvojic kartiček.

$5x - 6 = 14$	$x = 4$	$7 + 2x = 25$	$x = 9$
$28 = 7x - 21$	$x = 7$	$76 - 3x = 34$	$x = 14$
$\frac{7x}{8} = 2x + 9$	$x = -8$	$3 - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{2} - 2x$	$x = -30$
$\frac{x}{4} = 9 - \frac{x}{5}$	$x = 20$	$27 + x = \frac{3x - 6}{2}$	$x = 60$
$4(x + 3) = 3(x - 12)$	$x = -48$	$21 = 7(x + 14)$	$x = -11$
$\frac{8x}{3} = 4 + \frac{x + 6}{6}$	$x = 2$	$9x - 16 = 7x$	$x = 8$
$\frac{x}{7} = 3x + 40$	$x = -14$	$\frac{x + 4}{2} = \frac{2x + 7}{8}$	$x = -4,5$
$7x - 6 = 3x - 2$	$x = 1$	$(-3)x = 12 - 4x$	$x = 12$

Zhodnocení:

Žáky jsem ve třídě rozdělila na skupinky po čtyřech. Žáci si spojili lavice do obdélníku, aby z nich vytvořili prostor pro rozložení hracích karet. Do každé skupinky dostali žáci 32 herních karet. Z jedné strany byly uvedeny číselné výrazy a na druhé straně kartiček se nacházel obrázek pohádkových postaviček. Ty jsem volila proto, aby si žáci tuto hru spojili s nějakým příjemným podnětem.

Žákům jsem oznámila, že se jedná o hru na procvičení a zopakování řešení lineárních rovnic. Úkolem žáků před zahájením herní činnosti bylo rozdělit hrací karty na karty se zadáním rovnice a na karty s výsledky. Z těchto dvou hromádek karet následně vytvořit dva čtverce o velikosti 4×4, z nichž jeden bude obsahovat právě rovnice a druhý kořeny. Následovala herní činnost. Žákům oznámila, že pravidla jsou stejná jako při hře pexeso. Žák otočí jednu kartu s rovnicí, vypočte ji a následně otočí další kartu s kořenem. Pokud se řešení rovnice shoduje s výsledkem uvedeným na kartě, karty si ponechá a pokračuje dál. Pokud se výsledek neshoduje, otočí karty zpět obrázkem nahoru a pokračuje další hráč. Žáky jsem upozornila na to, že je výhodné, aby si rovnici svého spoluhráče také vypočítali, jelikož jim bude sloužit k jeho kontrole a zároveň budou mít přehled, jaké je řešení rovnice, kdyby náhodou tuto kartu otočili opět oni. Poté bude lehčí, zaměřit se na hledání výsledku rovnice.

Při oznámení pravidel žáci začali s rozdělováním. Sice bylo řečeno, ať si z rozdělených karet udělají dva čtverce 4×4, avšak u většiny žáků spíš vznikaly různé obrazce. To naštěstí nijak neovlivnilo průběh hry. Před zahájením proběhla ve skupině hra „Kámen, nůžky, papír“. Určilo se tak, který z žáků začne hrát jako první. V průběhu hry občas dospěl žák, který byl na řadě, k řešení, které bylo uvedeno na kartičce, ale ostatní spoluhráči s kořenem nesouhlasili. V tomto případě jsem s žáky provedla kontrolu řešení dané rovnice ještě jednou. Ve většině případů jsme dospěli k závěru, že žák záměrně udělal v postupu řešení chybu. Stalo se to však jen ve čtyřech případech. Žáci si řešení rovnic zapisovali do sešitu.

Žáci hodnotili danou hru jako srozumitelnou a snadno pochopitelnou, nejspíš díky tomu, že každý žák pexeso ze svého dětství dobře zná. Jediné co bylo podle žáků složitější, bylo zapamatování si, kde byl umístěn daný výsledek, který zrovna po vyřešení rovnice hledali. Žáci se dle svých slov soustředili na vyřešení rovnice a poté již nedávali pozor, kde byl otočen jaký výsledek. Je pravděpodobné, že díky tomu hra trvala déle, než jsem čekala.

Obr. 4 - Pexeso

3.3.2. Běh do cíle

Cíl: Opakování a procvičování řešení lineárních rovnic.

Materiál: Herní plán, figurky, hrací kartičky místo kostky

Hráči: 2 – 5

Doba trvání hry: 45 minut (případně doba kratší)

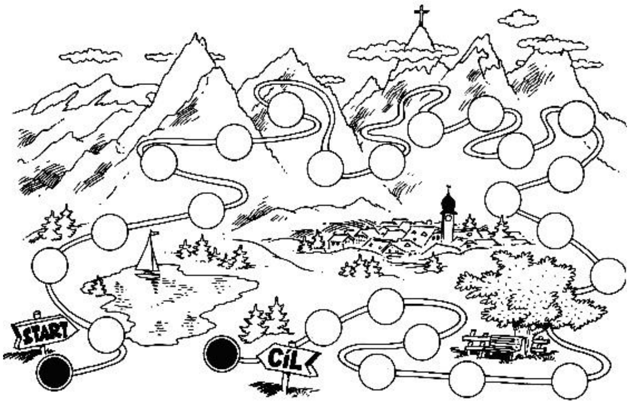
Pravidla: Místo hrací kostky dostanou žáci kartičky s lineárními rovnicemi (výsledky od 1 do 6). Výsledky z těchto kartiček určují posun figurky po herním plánu. Začíná žák, který vyhraje souboj „Kámen, nůžky, papír“. Směr hry je dán pomocí hodinových ručiček, následuje tedy hráč po levici.

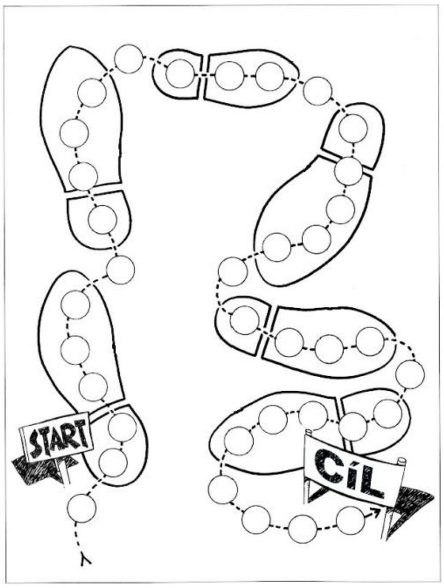
Žák si vezme kartu s lineární rovnicí, vyřeší ji a posune svou figurku o tolik, kolik mu vyšel kořen rovnice. Ostatní kontrolují jeho výpočet. Pokud je žákův výpočet chybný, zůstává stát na místě a předává svou kartu s lineární rovnicí následujícímu hráči, který řeší tuto rovnici. Pokud je jeho výpočet správný, postoupí o hodnotu kořenu rovnice a pokračuje další hráč. Ten si bere novou kartu s rovnicí.

Karty místo kostky:

$2x-14=x-8$	$x+\frac{2x-6}{2}-5=\frac{6x+2}{4}-6$	$x-\frac{6}{4}=\frac{5}{2}$	$\frac{x}{3}+6=7$	$19+x=21$	$2x+3+x=7-x$
$2x+72=84$	$2\cdot(5x-8)=2\cdot(x+4)+3x+1$	$7\cdot(x-2)=3x+2$	$7\cdot(-2-4x)=2\cdot(-9x-22)$	$4x-5=2x-1$	$31x-17=24x-10$
$2x=18-x$	$\frac{x}{5}=1$	$3\cdot(x-6)=9x-2\cdot(x+17)$	$-3\cdot(x+8)=-33$	$\frac{x}{2}+7=10-x$	$\frac{x+8}{2}=\frac{20-2x}{4}$
$\frac{3x}{9}-\frac{2x+1}{3}=\frac{-3x-45}{27}$	$x-1=2\cdot(x-3)$	$15\cdot(x+2)=6\cdot(2x+7)$	$-18x-56=-110$	$2x-(-9)=13$	$3\cdot(2x-4)=2\cdot(x-4)$
$16x-12=48+6x$	$25x=125$	$x-3=13-3x$	$14x=42$	$\frac{x}{6}-\frac{2}{3}=3x-\frac{19}{3}$	$38x=38$

Herní plány:



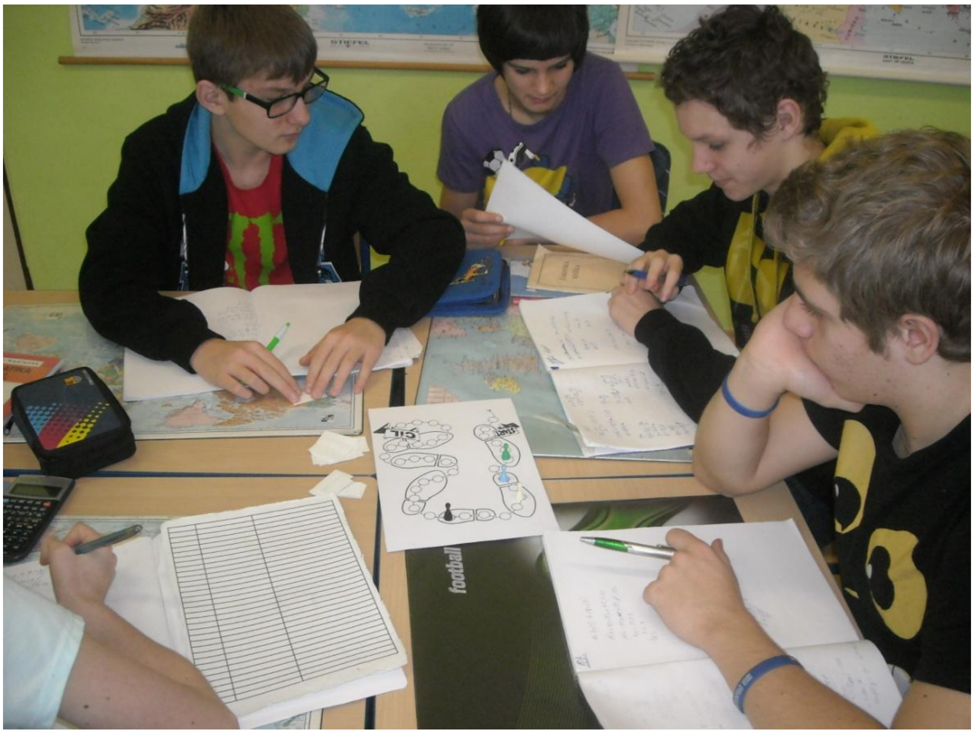


(volně podle [7], str. 54, 58)

Zhodnocení:

Žáky jsem opět rozdělila do skupin po čtyřech, v jedné skupině byl jeden žák navíc. Ten ode mne v průběhu hry získal výsledky a pomáhal s kontrolou hry. Žáci obdrželi jeden z herních plánů uvedených v horní části této stránky. Do každé skupiny dále žáci dostali kartičky s lineárními rovnicemi. Hlavním úkolem hry bylo opakování řešení lineárních rovnic zábavnou formou. Hra začínala roztřelem ve formě „Kámen, nůžky, papír“ pro určení prvního hráče. Poté si žák vzal z hromádky jednu kartu, která plnila funkci kostky, rovnici na kartě vyřešil a postoupil o tolik políček, kolik mu vyšlo řešení rovnice. Po vyřešení rovnice pokračoval další hráč. Výsledky příkladů byly v rozsahu číselné stupnice od 1 do 6. To bylo předem všem žákům oznámeno. Danou rovnici počítali všichni žáci, aby kontrola zda nějaký z žáků nepodvádí byla dostatečná. V průběhu hry jsme já a jeden žák procházeli mezi skupinkami a prováděli kontrolu výsledků.

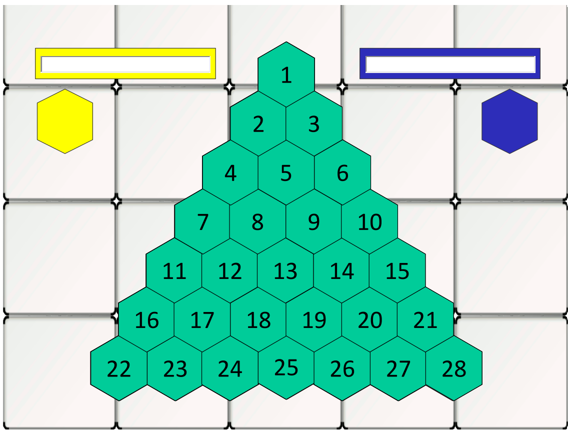
Tato hra se žákům líbila. Ptali se, zda se mají spoluhráče vyřazovat ze hry jako při „Člověče, nezlob se“. Z časových důvodů jsem tento herní prvek nedovolila. Žáci řešili rovnice do sešitu.

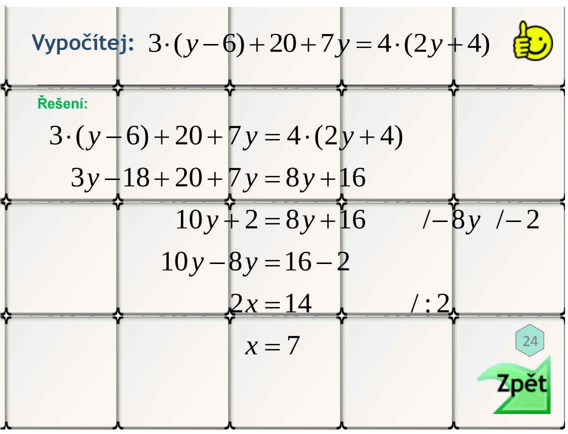


Obr. 5 – Běh do cíle

3.3.3. AZ – Kvíz [2]

Cíl:	Opakování a procvičování řešení lineárních rovnic.
Materiál:	Pdf prezentace, měřič času
Hráči:	2 -10
Doba trvání hry:	45 minut (případně doba kratší)
Pravidla:	Žáci se rozdělí na dvě skupiny a postupně se střídají ve vybírání si jednoho herního pole z 28 možných. Pod každým polem je ukryta lineární rovnice. Pokud žáci vyřeší danou rovnici správně, získají políčko a pokračuje druhá skupina. Pokud není jejich odpověď správná, může si vzít políčko druhá skupina, zodpovědět správné řešení a tím získat pole pro sebe. Žáci mohou políčko po předchozí skupině odmítnout a vybrat si jiné. Pokud nikdo nezíská dané pole, mohou o něj skupiny soutěžit v rozstřelu, ve kterém získají náhradní rovnici. Kdo bude první znát řešení, přihlásí se. Na každou rovnici měli žáci dvě minuty. Úkolem žáků je propojit všechny tři strany obrazce.





Úvodní strana hry AZ kvíz

Ukázka rovnice

[2] Tento materiál byl vytvořen dle zdroje [16] a přepracován k použití pro lineární rovnice.

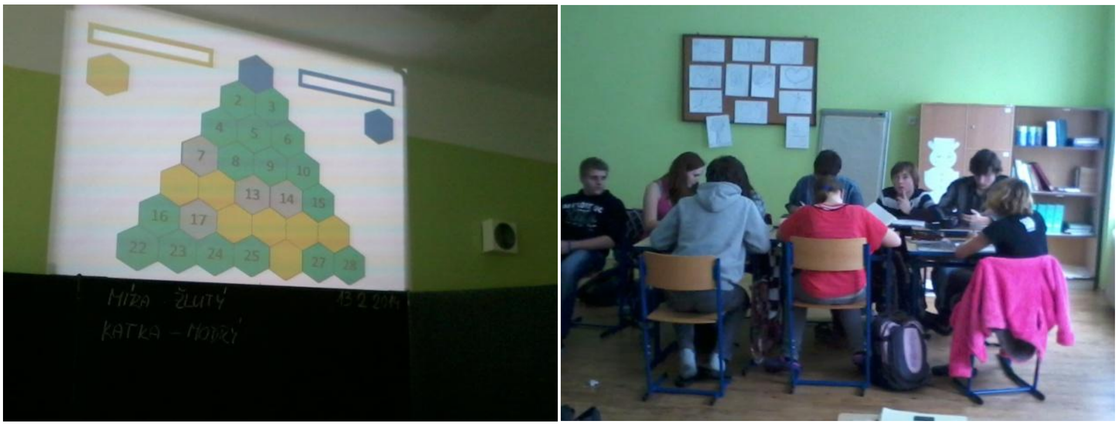
Zhodnocení:

Žáci nepředpokládali, že by daná hra mohla opravdu odpovídat televizní soutěži AZ kvíz. Po spuštění hry bylo vidět jejich překvapení.

Žáky jsem rozdělila do dvou skupina po osmi. V každé skupině si žáci zvolili jednoho zástupce, který za svou skupinu vystupoval, tedy oznamoval číslo pole, které chtějí odkrýt, a poté sděloval řešení rovnice. Bylo výhodné si zvolit jednoho zástupce z každého družsta, aby nedocházelo ke zbytečnému překřikování. Žáci museli vzájemně spolupracovat, a i když ne všichni chtěli odkrýt stejné políčko, dokázali udělat kompromis a na jedné variantě se domluvit. Podobně tomu bylo v situaci, kdy každému vycházel jiný výsledek. Žáci se museli rozhodnout, komu budou důvěřovat a který výsledek zvolí. Ve žluté skupině byl zástupce Míra, v modré skupině Katka. I přes to, že v modré skupině bylo dle mého názoru více žáků se schopností lépe řešit lineární rovnice, tato skupina nevyhrála. Žáci měli na řešení rovnice 2 minuty, což pravděpodobně modrou skupinu hodně ovlivňovalo. Žlutá skupina, která zůstala v klidu a nepodlehla časovému nátlaku, vyhrála. Žáci řešili rovnice do sešitu.

Žáci dobře hodnotili připravenost hry. Líbila se jim možnost spolupráce na řešení příkladů. Jedinou výtku měli k rovnicím, jejichž součástí byly zlomky. Žáci měli při řešení těchto rovnic často problémy. A ve hře AZ – kvíz bylo rovnic se zlomky poměrně hodně.

Po skončení hodiny mě zastavil Jan, a vyjádřil svůj údiv nad svým pochybením, i přes to, že lineárním rovnicím rozumí. Lineárním rovnicím rozumí a toto se mu ve většině případů nestává. Podle mého názoru na něj negativně působil tlak soutěže.



Obr. 6 – AZ-kvíz

3.4. Celkové hodnocení práce se žáky

Na základě realizace 5 pracovních listů a 3 didaktických her se žáky jsem zjistila, že žáci 8. ročníku uvedené základní školy:

- dovedou sestavit jednoduché lineární rovnice o jedné neznámé a s drobnými nedostatky v používání ekvivalentních úprav je vyřešit
- nemají ještě dostatečně procvičené řešení složitějších typů lineárních rovnic
- mají potíže s řešením rovnic se zlomky.

ZÁVĚR

Ukázka rovnic z dob starého Egypta a Mezopotámie umožnila se ohlédnout po možných dřívějších typech lineárních rovnic. V této práci jsem se však spíše zabývala objasněním lineárních rovnic používaných dnes. Cílem bylo seznámení čtenářů s postupy řešení lineárních rovnic, možnými druhy lineárních rovnic. Tato část nám objasnila učivo od lineárních rovnic s jednou neznámou (jednoduché lineární rovnice, lineární rovnice se závorkami, lineární rovnice s desetinnými čísly, lineární rovnice se zlomky, složitější lineární rovnice), přes lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli až po lineární rovnice s dvěma neznámými. S ohledem na to, že součástí práce jsou i rovnice se dvěma neznámými, mohli čtenáři proniknout i do problematiky soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými.

K pochopení a procvičení tohoto tématu pomohlo užití pracovních listů a didaktických her. Aplikace těchto materiálů proběhla na Masarykově ZŠ v Žihli s 8. ročníkem naprosto bezproblémově. Čtenář se mohl v praktické části se všemi materiály seznámit a bylo podáno i zhodnocení každého materiálu.

Předpokládám, že všechny popisované materiály jsou jasné a srozumitelné, a mohou sloužit učitelům matematiky na základních školách jako materiály pro tematický celek lineárních rovnic.

RESUMÉ

This thesis deals with the theory of linear equations. The main objective is to penetrate the theory of linear equations and subsequent application in practical activities and tasks.

From the beginning of the work is a little look back at the history of linear equations with which to meet people since ancient times and the Middle Ages. Following this work is already focused on linear equations, as we know it today. For linear equations explains the basic equivalent modification, procedures for solving linear equations, types of linear equations from simple to complex. At the end of the theoretical part are still contained a system of linear equations with two unknowns.

The practical part contains 5 worksheets, where each can find a description and evaluation, and other features 3 educational games aimed at training and repetition of linear equations.

SEZNAM LITERATURY A ZDROJŮ

[1] BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M., VYMAZALOVÁ, H. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s., sv. 23. ISBN 80-719-6255-4

[2] BEČVÁŘ, J. *Z historie lineární algebry*. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 519 s., sv. 35. ISBN 978-807-3780-364

[3] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 127 s. ISBN 978-80-7238-684-0.

[4] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 112 s. ISBN 978-80-7238-689-5.

[5] COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M. *Matematika pro osmý ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, 208 s. ISBN 80-7168-722-7.

[6] COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007, 221 s. ISBN 978-80-7168-995-9.

[7] ETZOLD, H., PETZSCHLER, I. *Nápadník aktivit a her do hodin matematiky*. 1. vyd. Brno: Edika, 2013, 120 s. ISBN 978-802-6601-746.

[8] CHARVÁT, J., ZHOUF, J., BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Dotisk 4.vyd. Praha: Prometheus, 2010, 223 s. ISBN 987-80-7196-362-2

[9] JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1977, 448 s. 21-036-78, 509-21-857.

[10] KUBEŠOVÁ, N., CIBULKOVÁ, E. *Matematika: přehled středoškolského učiva.* 1. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2006, 239 s. ISBN 80-86872-03-X

[11] MIKULČÁK, J. *Přehled učiva matematiky základní školy.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993, 257 s. ISBN 80-04-26357-7.

[12] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012, 83 s. ISBN 978-80-7196-435-3.

[13] PÁLKOVÁ, M., ZEMEK, V. *Průvodce matematikou 1, aneb, Co byste měli znát z numerické matematiky ze základní školy.* 1. vyd. Brno: Didaktis, 2009, 200s. ISBN 978-80-7358-085-8.

[14] SCHWERDTFEGER, H. *Introduction to linear algebra and the theory of matrices,* Noordhoff N.V., Groningen, Holland, 1950.

[15] *Amerika* [online]. [cit. 2014-3-18]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Amerika>.

[16] AZ-kvíz [online]. 3. 6. 2011. [cit. 2014-2-11]. Dostupný z WWW: <http://dum.rvp.cz/materialy/az-kviz-rovnice.html>.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1

Andrea Sarglová

Pracovní list č. 1 – Řešení jednoduchých lineárních rovnic

1. **Zapiš danou rovnici, a vyřeš, jaké závaží umístit za x tak, aby nastala rovnost. Proveď zkoušku.**

$108 = 12x$
$9 = x$

$3x = 24 \quad /:3$
$x = 8$
$L(8) = 3 \cdot 8 = 24 \quad P(8) = 24$

$7 + x = 28 \quad /-7$
$x = 21$
$L(21) = 7 + 21 = 28 \quad P(21) = 28$

$32 = 4x \quad /:\cancel{8}4$
$8 = x$

$108 = \cancel{12x} \quad /:12$
$8 = \cancel{x}$
$L(8) = 108$
$P(8) = 12 \cdot 8 = 96$

$8 + x = 28 \quad /-8$
$x = 20$
$L(20) = 8 + 20 = 28$
$P(20) = 28$

$15x = 255 \quad /:15$
$x = 17$
$L(17) = 15 \cdot 17 = 255$
$P(17) = 255$

$15 \cdot 17 = 105 + 150 = 255$

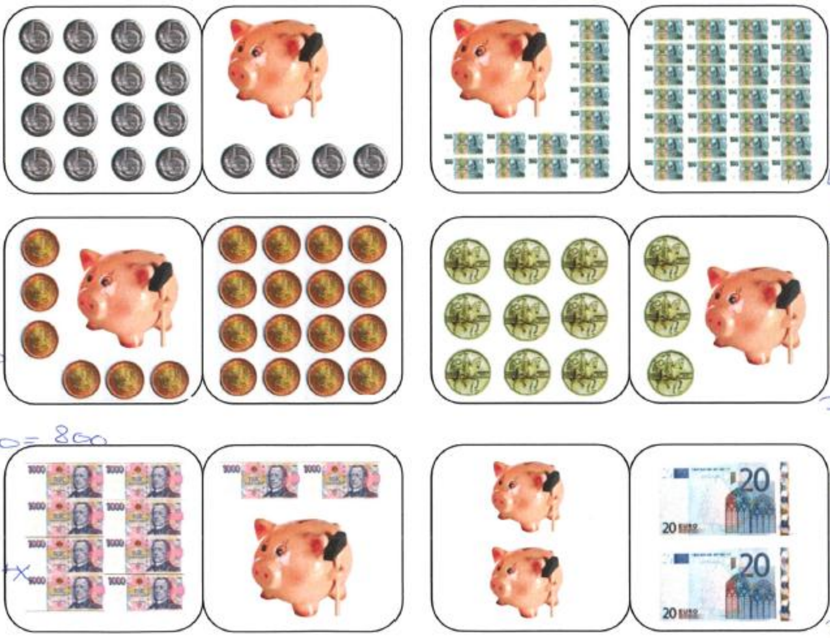
$2 = 4 - x \quad /+x$
$2 + x = 4 \quad /-2$
$x = 2$
$L(2) = 2 \quad P(2) = 4 - 2 = 2$

$18 = 2x \quad /:2$
$9 = x$

2. **Vypočítej, kolik korun obsahuje prasátko. Řeš pomocí lineárních rovnic. Sestav danou rovnici, vyřeš jí a proveď zkoušku.**

$80 = x + 20$
$60 = x$
$L(60) = 60$
$P(60) = 60 + 20 = 80$

$x + 1300 = 2800 \quad /-1300$
$x = 1500$
$L(1500) = 1500 + 1300 = 2800$
$P = 2800$



~~300~~
$300 + x = 800$
$x = 500$
$L = 300 + 500 = 800$
$P = 800$

$120 = 60 + x$
$120 = x$
$P = 60 + 120 = 180$

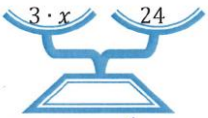
$8000 = 2000 + x$
$6000 = x$

$2x = 40$
$x = 20$
$L(20) = L \cdot 20 = 40$
$P(20) = 40$

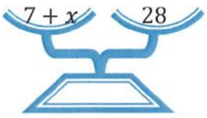
Vojtěch Šimek

Pracovní list č. 1 – Řešení jednoduchých lineárních rovnic

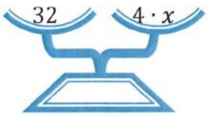
1. **Zapiš danou rovnici, a vyřeš, jaké závaží umístit za x tak, aby nastala rovnost. Proveď zkoušku.**



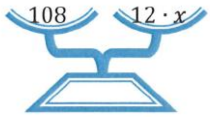
$3x = 24$ /:3
$x = 8$
$L(8) = 3 \cdot 8 = 24$
$P(8) = 24$



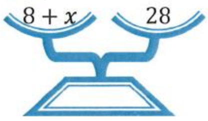
$7 + x = 28$ /−7
$\cancel{x = 22}$
$L(22) = 7 + 22 = 29$
$\cancel{P(22) = 28}$



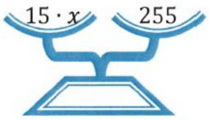
$\cancel{32 = 4 \cdot x}$ /:4
$128 = x$
$\cancel{L = 32}$
$\cancel{P = 4 \cdot 128 =}$



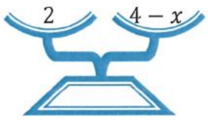
$108 = 12x$



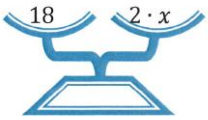
$8 + x = 28$ /−8
$x = 20$
$L = 8 + 20 = 28$
$P = 28$



$15x = 255$ /:15
$x = 255 : 15$
$x = 17$
$L = 15 \cdot 17 = 255$



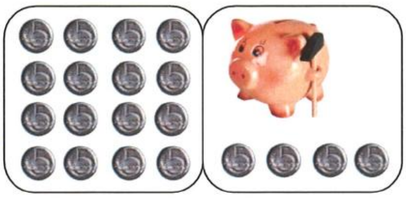
$2 = 4 - x$ /−4
$-2 = -x$



$18 = 2x$ /·2
$36 = x$
$L = 18$
$P = 2 \cdot 36 = 72$

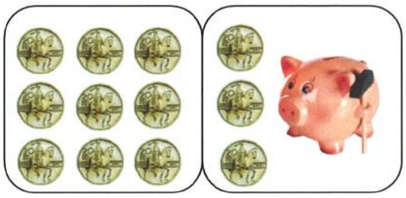
2. **Vypočítej, kolik korun obsahuje prasátko. Řeš pomocí lineárních rovnic. Sestav danou rovnici, vyřeš jí a proveď zkoušku.**

$80 = x + 20$ /−2
$60 = x$
$L(60) = 80$
$P(60) = 60 + 20 =$
$= 80$



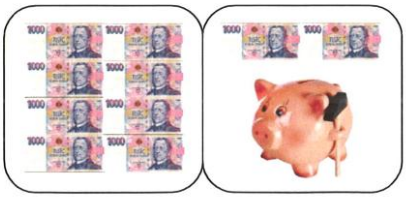
$x + 13 = \cancel{28}$ /−13
$\cancel{x = 16}$
$L = 16 + 13 =$
$\cancel{P = 28}$

$300 + x = 800$ /−300
$x = 500$
$L = 300 + 500 = 800$
$P = 800$



$9 = 3 + x$
$6 = x$
$L = 9$
$P = 3 + 6 =$
$= 9$

$8 = 2 + x$ /−2
$6 = x$
$L = 8$
$P = 2 + 6 = 8$



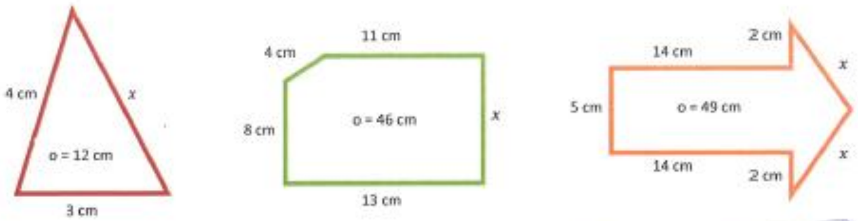
$2x = 40$ /:2
$x = 20$

Příloha 2

Katka M...

Pracovní list č. 2

1. **Dopočítej délku zbývající strany daného geometrického útvaru, pokud znáš délky jednotlivých stran a obvod útvaru. Zapiš řešení pomocí rovnice, danou rovnici vyřeš a proveď zkoušku.**



$4+3+x=12$

$7+x=12 \quad /-7$

$x=5$

$L(5)=4+3+5=12$

$P(5)=12$

$13+2+4+11+x=46$

$36+x=46 \quad /-36$

$x=10$

$L=36+10=46$

$P=46$

$\cancel{5+14+14+2=x+x}$

$\cancel{35=2x \quad /:2}$

$\cancel{17,5=x}$

$L=$

$5+14+14+2+2+x+x=49$

$37+2x=49 \quad /-37$

$2x=12 \quad /:2$

$x=6$

2. **Zapiš danou rovnici, znázorněnou na obrázku. Vypočítej cenu za jeden kus a proveď zkoušku.**

stojí **39,- Kč**

$5x=39 \quad /:5$

$x=7,8$

$39:5=7,8$
40
0

stojí **72,- Kč**

$72=12x \quad /:12$

$6=x$

stojí **140,- Kč**

$5x=140 \quad /:5$

$x=28$

stojí **102,- Kč**

$3x=102 \quad /:3$

$x=34$

stojí **46,- Kč**

$4x=46 \quad /:4$

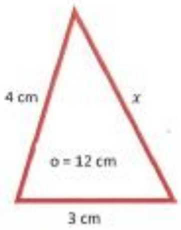
$x=11,5$

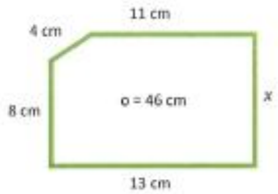
$46:4=11,5$
20

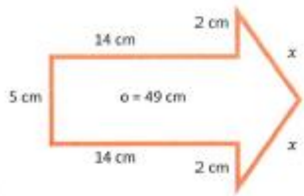
Jan Opavský

Pracovní list č. 2

1. **Dopočítej délku zbývající strany daného geometrického útvaru, pokud znáš délky jednotlivých stran a obvod útvaru. Zapiš řešení pomocí rovnice, danou rovnici vyřeš a proveď zkoušku.**







$4+3+x=12$
$7+x=12 \;/-7$
$x=5$
$L(5)=4+3+5=12$
$P(5)=12$

$13+11+4+8+x=46$
$36+x=46 \;/-36$
$x=10$
$L(6)=13+11+4+8+6=46$
$P(6)=46$

$5+14+14+2+2+x+x=49$
$37+2x=49 \;/-37$
$2x=12 \;/:2$
$x=6$
$L(6)=37+2\cdot 6=49$
$P(6)=49$

2. **Zapiš danou rovnici, znázorněnou na obrázku. Vypočítej cenu za jeden kus a proveď zkoušku.**

stojí **39,- Kč**

$5x=39 \;/:5$ $\quad 39:5=7,8$
$x=7,8$
$L(7,8)=5\cdot 7,8=39$
$P(7,8)=39$

stojí **72,- Kč** $12x=72 \;/:12$
$x=6$

stojí **140,- Kč** $5x=140 \;/:5$
$x=28$
$L=5\cdot 28=140$
$P=140$

stojí **102,- Kč** $3x=102 \;/:3$
$x=34$
$L(34)=3\cdot 34=102$
$P=102$

stojí **46,- Kč** $4x=46 \;/:4$ $\quad 46:4=11,5$
$x=11,50$
$L=4\cdot 11,50=46$
$P=46$

Příloha 3

ADÉLA KUBA

Pracovní list č. 3 – Myslím si číslo

Myslím si číslo x = …. Když k němu přičtu (odečtu, vynásobím, vydělím) číslo 65, dostanu 170.

Jaké číslo si myslím?
$x = 105$

Doplň následující myšlenky tak, aby platila daná rovnost. Každou rovnici zapiš, vyřeš a proveď zkoušku.

x = ___ + 65 = 170

$x + 65 = 170 \quad /-65$
$x = 170 - 65$
$x = 105$
$L = 105 + 65 = 170$
$P = 170$

x = ___ + 16 = 58

$x + 16 = 58 \quad /-16$
$x = 42$

x = ___ − 38 = 22

$x - 38 = 22 \quad /+38$
$x = 60$
$L = 60 - 38 = 22 \quad P = 22$

x = ___ − 114 = 47

$x - 114 = 47 \quad /+114$
$x = 161$
$L = 161 - 114 = 47$

x = ___ · 13 = 312

$x \cdot 13 = 312 \quad /:13$
$x = \frac{312}{13} = 24$

$312 : 13 = 24$
52

x = ___ · 65 = 170

$x \cdot 65 = 170 \quad /:65$
$x = 2{,}615$

x = ___ ÷ 17 = 34

~~$x : 17 = 34 \quad /\cdot 17$~~
~~$x =$~~

$34 \cdot 17$
238
340

Příloha 4

Haidarová Monika

Pracovní list č. 4 – Amerika

V každém příběhu doplňte číslo místo neznámé $x, y, z, \ldots$

Amerika se skládá ze tří patrných částí - Severní Ameriky, Střední Ameriky a Jižní Ameriky. Severní a Jižní Amerika jsou považovány za dva samostatné kontinenty. Z geomorfologického hlediska se jedná o souvislou pevninskou masu, která se nachází na třech litosférických deskách - Severoamerické, Karibské (Středoamerické) a Jihoamerické. Celé území Ameriky leží na západní polokouli a zároveň na jižní i severní polokouli. Tradičním datem objevení Ameriky Evropany je rok ***x*** …1492…, kdy k břehům tohoto světadílu pod španělskými vlajkami přirazila flotila vedená Kryštofem Kolumbem. Z Evropy však s velkou pravděpodobností vstoupili na americkou půdu jako první Vikingové, a to již o několik stovek let dříve.

$$6 \cdot (3x - 19) - (-1) \cdot (-650) = 5 \cdot (2x + 172) + 2 \cdot (3x + 680)$$

Poloha - Amerika leží na západní polokouli, je protažena poledníkovým směrem od severu k jihu přes obě polokoule a na jihu se směrem od severu k jihu zužuje. Její maximální délka činí ***x***…14500… km, šířka ***y***…5950… km. Na severu je Amerika obklopena Severním ledovým oceánem, na východě Atlantským oceánem a na západě Tichým oceánem.

$$7x - 3 \cdot (4x + 1630) - 2 \cdot (1890 - 5x) = (-1) \cdot 1178 + 4 \cdot (x + 1752)$$
$$129 + 4 \cdot (y + 135) - 5 \cdot (6y - 199) = 124 - 7 \cdot (y + 630) - 18y$$

Populace - Populace Ameriky se skládá z potomků osmi velkých etnik. Indiáni, např. Inuité a Aleuté. Lidé s evropským původem, hlavně Španělé, Britové, Irové, Italové, Portugalci, Francouzi, Poláci, Němci, Nizozemci a Dáni. Mestici, kteří mají smíšený evropský a americký původ. Černoši, hlavně s původem v Západní Africe. Mulati, kteří mají smíšený černošský a evropský původ. Zambové a Cafuzové, kteří mají smíšený černošský a indiánský původ. Asiaté, kteří mají původ ve Východní, Jižní nebo Jihovýchodní Asii. Lidé z Blízkého východu. Američtí Asiaté, kteří mají smíšený asijský a americký původ. Celková populace Ameriky je ***x***…858000000… lidí.

$$6000 \cdot (x - 75700) = 3000 \cdot (2x + 134600) - x$$

[14] Zdroj text: http://cs.wikipedia.org/wiki/Amerika

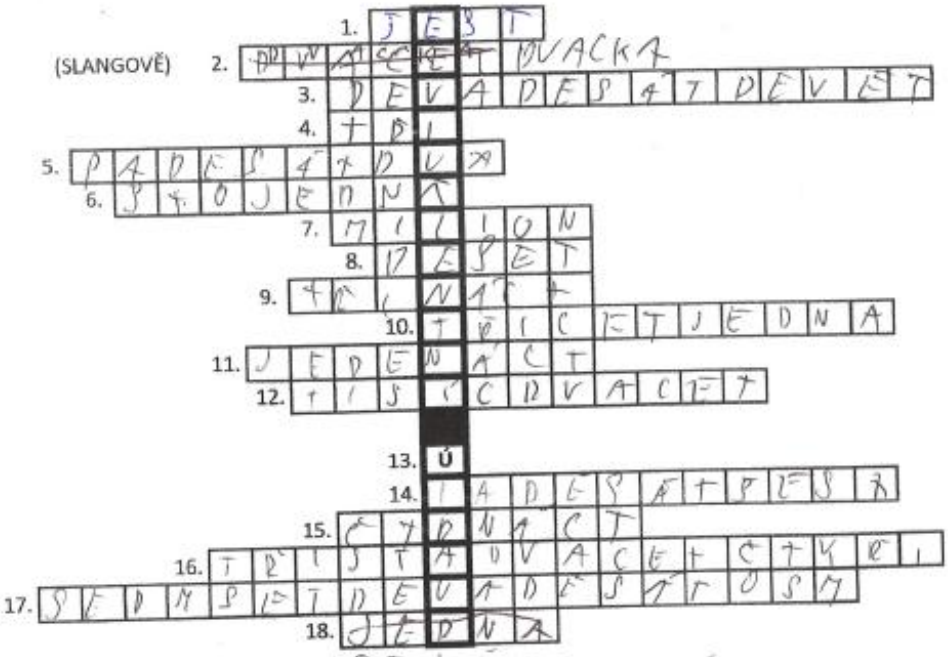
Příloha 5

Jméno: VOJTA FINK

Ročník: 8. Ki.

Pracovní list č. 1 - křížovka

Úkol: Vyřeš rovnici a doplň její kořen do křížovky (slovně).



Tajenka: Operace prováděné při řešení lineárních rovnic: CTYRI EKVIV

1. $3 \cdot (x-21) = 9 \cdot (x-11)$
2. $\frac{6x}{15} - 5 = 6 + \frac{x-29}{3}$ (Slangově)
3. $27x - 73 = 13 \cdot (2x+2)$
4. $8x - 12 = 15 - x$
5. $2x - \frac{5x}{4} - 19 = 20$
6. $6 \cdot (x-3) = 5x + \frac{47+2x}{3}$
7. $\frac{2x+650}{3} = \frac{5 \cdot (-89500)+1701x}{2550}$
8. $3 \cdot (x-7) - 2 \cdot (3x-8) = 5 \cdot (3-x)$
9. $20x - 69 = 100 + 7x$
10. $\frac{2x+7}{3} = \frac{3x-1}{4}$
11. $5x - 17 = 2 \cdot (x-3) - 2 \cdot (-11)$
12. $60 = \frac{x}{17}$
13. ---------------
14. $6 \cdot (x-8) + 7 \cdot (4-2x) = 3x + 3 \cdot (12-4x)$
15. $3x + 12 = 3 \cdot (2x-10)$
16. $\frac{x+168}{3} = 2 + \frac{3x}{6}$
17. $\frac{x}{14} = \frac{4x}{57} + 1$
18. $2 = \frac{2x}{4}$ /·4