

Západočeská univerzita  
Fakulta aplikovaných věd

Diplomová práce

**Metoda rozkladu oblasti - porovnání  
přístupů založených na primární a  
duální formulaci**

2014

Jana Hůrková

# Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Doc. Ing. Josefu Daňkovi, Ph.D. za jeho ochotu zodpovídat všechny moje dotazy a především za čas, který mi věnoval během konzultací.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci na téma *Metoda rozkladu oblasti - porovnání přístupů založených na primární a duální formulaci* vypracovala samostatně a použila jsem pouze uvedenou literaturu.

V Plzni 22.5.2014

.....

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
1.1	Úvod . . . . .	6
1.2	Přehled metod . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Metody bez překrývání</b>	<b>9</b>
2.1	Řešená úloha . . . . .	9
2.2	Rozdělení uzlů . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Primární metody</b>	<b>12</b>
3.1	Úloha Schurova doplňku . . . . .	12
3.2	Dekompozice úlohy na jednotlivé podoblasti . . . . .	14
3.3	Vztah globálního a lokálního Schurova doplňku . . . . .	16
3.4	Metoda Balancing domain decomposition pro řešení úlohy Schurova doplňku . . . . .	18
3.5	Algoritmus BDD metody . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Duální metody</b>	<b>20</b>
4.1	Formulace úlohy . . . . .	20
4.2	Regularizace singulární matice . . . . .	25
4.3	Algoritmus metody Total FETI . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Implementace a testování</b>	<b>27</b>
5.1	Řešená úloha . . . . .	27
5.2	Oblast . . . . .	28
5.3	Diskretizace . . . . .	29
5.4	Přečíslování . . . . .	29
5.5	Matice tuhosti . . . . .	29
5.6	Implementace primární metody . . . . .	31

<i>OBSAH</i>	5
5.7 Implementace duální metody . . . . .	35
5.8 Výsledky . . . . .	39
<b>6 Závěr</b>	<b>44</b>

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Úvod

Numerické metody se používají k řešení úloh, u kterých je nalezení přesného řešení komplikované nebo zcela nemožné. Přímé řešení je často paměťově náročné a doba výpočtu roste spolu s velikostí dat. Proto se využívá iteračních metod, které jsou méně náročné, ale nemusí vždy konvergovat. Mnoho nelineárních problémů vede k numerickému řešení velkých neuspořádaných a řídkých lineárních systémů. Pro svou strukturu jsou tyto systémy často neřešitelné přímými metodami. Metody rozkladu oblasti (MRO) jsou oblíbené, protože nabízí možnost kombinovat přímé metody na podoblastech s iteračními metodami na rozhraní. Oblast, na které se úloha řeší a která často má velmi složitý tvar, je rozdělena na menší jednodušší podoblasti. Globální okrajová úloha se rozdělí na menší okrajové úlohy řešitelné na jednotlivých podoblastech, čímž dojde ke zmenšení úlohy. Rozdílné chování na různých částech oblasti lze pomocí MRO snadno implementovat. Problémy na podoblastech jsou nezávislé, tudíž je můžeme řešit paralelně. Metody rozkladu oblasti lze obecně rozdělit na metody s překrýváním a metody bez překrývání. Mezi metody s překrýváním patří Aditivní Schwarzova metoda a Alternující Schwarzova metoda. U těchto metod se podoblasti překrývají na větší ploše, zatímco u metod bez překrývání je společné pouze rozhraní. Existují dva základní přístupy metod bez překrývání - primární a duální formulace. Mezi primární metody patří Balancing domain decomposition (BDD), mezi duální pak metody třídy FETI (Finite element tearing and interconnect). Zatímco FETI-DP je hybridní metodou, kombinující primární a duální přístupy, me-

tody FETI-I, FETI-II nebo Total FETI jsou čistě duální. Tato práce se bude zabývat metodami bez překryvu, konkrétně metodou BDD a nejmodernější metodou třídy FETI - Total FETI. Nastíníme principy obou metod. Hlavní důraz bude kladen na jejich počítačovou implementaci v programu Matlab a jejich numerické testování.

## 1.2 Přehled metod

První metoda rozkladu oblasti s překrýváním byla představena v roce 1869 matematikem Hermanem Schwarzem, který pomocí ní řešil Poissonovu rovnici. Jednalo se o metodu dnes známou jako Alternující Schwarzova metoda. Hodnoty vypočtené na jedné oblasti se používají jako vstupní hodnoty pro iterační proces na oblasti druhé. Detaily o této metodě mohou být nalezeny v literatuře viz [1], [4]. Důkaz konvergence alternující Schwarzovy metody pro eliptické parciální diferenciální rovnice druhého řádu byl zveřejněn až roku 1951 ruským matematikem Solomonem Mikhlim. Tato metoda byla také paralelizována a to roku 1988 francouzským matematikem Pierre-Louisem Lionsem. Maksymilian Dryja a Olof B. Wudlund později roku 1989 představují aditivní Schwarzovu metodu, kde jsou hodnoty počítány na jednotlivých podoblastech a pak posčítávány do celkového řešení. O devět let později byla představena aditivní Schwarzova metoda s restrikcí, ve které autoři Xiao-Chuan Cai a Marcus Sarkis adaptovali klasickou aditivní metodu na metodu bez překryvu. Jak je vidět, Schwarzovy metody jsou zkoumány od 19. století až dodnes. Matematici stále hledají novější a rychlejší alternativy těchto metod.

Druhou velkou skupinou metod rozkladů oblastí jsou metody bez překrývání. Nejjednodušší metodou je metoda Balancing domain decomposition (BDD). Tato metoda řeší úlohu přímo bez použití Lagrangeových multiplikátorů. Řadí se tedy mezi metody primární. Jan Mandel napsal článek představující tuto metodu roku 1993 viz [16]. Paralelou k této primární metodě je duální metoda zvaná Finite element tearing and interconnect, neboli FETI, která využívá Lagrangeovy multiplikátory pro udržení spojitosti řešení na rozhraní. Tuto metodu uvedli roku 1991 matematici C.Farhat a F.X.Roux v článku [17]. Roku 2003 byla představena C.R.Dohrmannem derivace metody BDD zvaná Balancing domain decomposition by constraints (BDDC). Tato metoda měla být jednodušší primární metodou k duální FETI-DP. FETI-DP

formovaná roku 2000 C.Farhatem, M.Lesoinnem, P.LeTallecem, K.Piersonem a D.Rixenem je metodou hybridní, tedy kombinující na části oblasti primární přístupy a na zbytku přístup duální. Mezi další FETI metody patří FETI-I, FETI-II. FETI metody jsou v současnosti nejmodernějšími metodami. Články o nich vycházejí stále. Zkoumají se možnosti, jak je nejlépe paralelizovat a implementovat.



# Kapitola 2

## Metody bez překrývání

Jak již bylo zmíněno, v této práci se budeme soustředit pouze na metody rozkladu oblasti bez překrývání. Oblast je rozdělena na nepřekrývající se podoblasti, na jejichž rozhraní probíhá výměna informací, aby byla zachována spojitost řešení. Nastíníme 2 hlavní přístupy - primární a duální. Jako zástupce primárních metod jsme vybrali metodu Balancing domain decomposition method (BDD). Z duálních metod se soustředíme na v současnosti nejmodernější metodu této kategorie - Total finite element tearing and interconnect method (TFETI, Total FETI).

### 2.1 Řešená úloha

Po diskretizaci linearizované diferenciální rovnice na dané oblasti metodou konečných prvků (MKP) se řeší maticový algebraický systém

$$Ku = f, \tag{2.1}$$

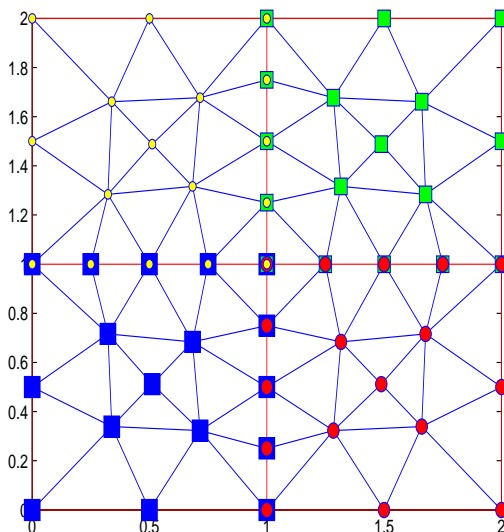
kde  $K$  je matice tuhosti,  $f$  vektor pravých stran a  $u$  vektor neznámých. Složky vektoru  $u$  se někdy nazývají stupně volnosti. Detaily o použití metody konečných prvků mohou být nalezeny v literatuře například [1],[2], [3] nebo [4].

Matice  $K$  bývá řídká, obsahuje tedy pouze málo nenulových prvků. Rozložení těchto nenulových prvků je dáno očíslováním uzlů. Přečíslujeme-li uzly, můžeme získat výhodnější tvar matice, například pásový.

Teorii i implementaci budeme ilustrovat na Poissonově rovnici, která popisuje průhyb tenké membrány, na kterou působí určitá síla. Operátor  $K$  reprezentovaný maticí tuhosti dává do souvislosti výchylky z výchozí polohy ve vertikálním směru reprezentované vektorem  $u$  se silou působící ve vertikálním směru reprezentované vektorem  $f$ .  $i$ -tá souřadnice vektoru  $u$  udává numericky vypočítanou hodnotu výchylky v  $i$ -tém uzlu.

## 2.2 Rozdělení uzlů

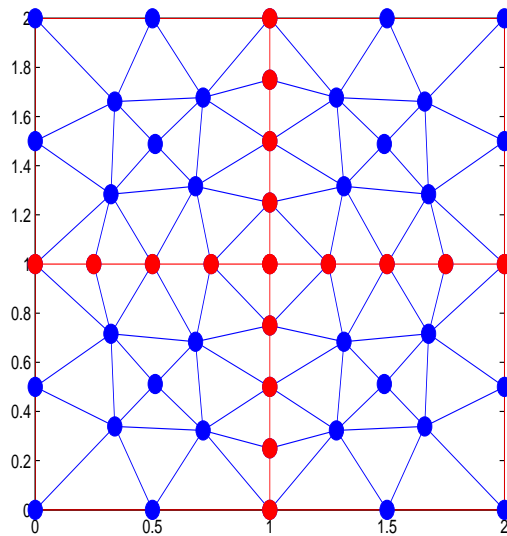
V naší testované úloze je původní zadaná oblast rozdělena na 4 nepřekrývající se podoblasti. Po vygenerování sítě triangulace každý uzel náleží právě jedné oblasti viz obrázek 2.1. Na tomto obrázku jsou barevně odlišeny uzly příslušné k jednotlivým podoblastem. Můžeme si povšimnout, že některé uzly jsou označeny více barvami. Můžeme rozlišovat 2 různé typy uzlů - hraniční a vnitřní.



Obrázek 2.1: Rozdělení uzlů do podoblastí

**Hraniční uzly** jsou uzly náležející více než jedné oblasti. Na obrázku 2.2 jsou označeny červeně.

**Vnitřní uzly** náleží pouze jedné oblasti. Na obrázku 2.2 jsou označeny modrou barvou. Při tomto rozdělení se uzly na obvodové hranici původní oblasti chápou jako uzly vnitřní. Toto je jeden z rozdílů oproti metodám s překrýváním.



Obrázek 2.2: Rozdělení uzlů na vnitřní a hraniční

# Kapitola 3

## Primární metody

V primárních metodách řešíme problém ve 2 fázích. Nejdříve spočteme řešení v uzlech na hranici a poté hledáme řešení ve vnitřních uzlech. Abychom mohli takto postupovat potřebujeme nejdříve řešit úlohu Schurova doplňku.

### 3.1 Úloha Schurova doplňku

Úlohou Schurova doplňku nazýváme redukci původní úlohy na úlohu, která se řeší pouze na rozhraní. Toho docílíme pomocí eliminace vnitřních uzlů. Tato redukce se v mechanice někdy nazývá statická kondenzace. Přeorganizujeme systém  $Ku = f$  tak, abychom získali výhodnější blokovou strukturu matice tuhosti. První blok  $K_{oo}$  bude odpovídat neznámým ve vnitřních uzlech příslušných postupně oblastem 1, 2, 3 a 4. Druhý blok  $K_{rr}$  pak bude odpovídat neznámým na rozhraní.

Řešíme soustavu:

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{or} \\ K_{ro} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o \\ \hat{f} \end{bmatrix}$$

kde  $u_r$  reprezentuje všechny neznámé v hraničních uzlech.

Pokud přečíslijeme uzly dle pravidla nejdříve vnitřní a poté hraniční, matice  $K_{oo}$  a vektory  $u_o, f_o$  mají následující strukturu:

$$K_{oo} = \begin{bmatrix} K_{oo}^1 & & & \\ & K_{oo}^2 & & \\ & & K_{oo}^3 & \\ & & & K_{oo}^4 \end{bmatrix},$$

$$u_o = \begin{bmatrix} u_o^1 \\ u_o^2 \\ u_o^3 \\ u_o^4 \end{bmatrix},$$

$$f_o = \begin{bmatrix} f_o^1 \\ f_o^2 \\ f_o^3 \\ f_o^4 \end{bmatrix},$$

kde  $u_o^i$  a  $f_o^i$  je restrikce vektorů  $u_o$  a  $f_o$  na podoblasti  $\Omega_i$  a  $K_{oo}$  je blokově diagonální matice s bloky  $K_{oo}^i$ , které odpovídají vnitřním uzlům podoblastí  $\Omega_i$ . Každý blok  $K_{oo}^i$  může být interpretován jako matice tuhosti na oblasti  $\Omega_i$  s Dirichletovými podmínkami na hranicích. Tyto matice tuhostí jsou regulární.

Řešíme soustavu:

$$K_{oo}u_o + K_{or}\hat{u} = f_o \quad (3.1)$$

$$K_{ro}u_o + K_{rr}\hat{u} = \hat{f} \quad (3.2)$$

Přenásobením první rovnice maticí  $K_{oo}^{-1}$ , vyjádřením  $u_o$  a dosazením do rovnice druhé získáme:

$$K_{oo}u_o + K_{or}\hat{u} = f_o \quad (3.3)$$

$$K_{ro}(K_{oo}^{-1}f_o - K_{oo}^{-1}K_{or}\hat{u}) + K_{rr}\hat{u} = \hat{f} \quad (3.4)$$

Po přeorganizování členů v rovnici (3.4) získáme soustavu:

$$K_{00}u_o + K_{or}\hat{u} = f_0 \quad (3.5)$$

$$(K_{rr} - K_{ro}K_{00}^{-1}K_{or})\hat{u} = \hat{f} - K_{ro}K_{00}^{-1}f_o. \quad (3.6)$$

Označíme  $S := K_{rr} - K_{ro}K_{oo}^{-1}K_{or}$  a  $\hat{g} := \hat{f} - K_{ro}K_{oo}^{-1}f_o$  a tím získáme soustavu:

$$K_{oo}u_o + K_{or}\hat{u} = f_o \quad (3.7)$$

$$\hat{S}\hat{u} = \hat{g} \quad (3.8)$$

V maticovém zápisu můžeme psát:

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{or} \\ 0 & \hat{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o \\ \hat{g} \end{bmatrix}.$$

$\hat{S}$  se nazývá Schurův doplněk a  $\hat{g}$  se nazývá kondenzovaná pravá strana.

## 3.2 Dekompozice úlohy na jednotlivé podoblasti

Původní problém bude řešen ve 3 krocích:

- 1) Nejdříve se eliminují vnitřní uzly z rovnice (??) pomocí Schurova doplněku.
- 2) Poté se vyřeší nová rovnice a tím se získají řešení na hraničních uzlech.
- 3) Tyto hodnoty se poté dosadí do pravé strany rovnice (??) a následně se tato rovnice vyřeší a tím se získá řešení i na vnitřních uzlech.

Problém po eliminaci lze tedy rozdělit na 2 úlohy:

První úloha

$$K_{oo}^i u_o^i = f_o^i - K_{or}^i u_r^i \quad (3.9)$$

se skládá ze 4 nezávislých úloh s předepsanými Dirichletovými podmínkami na rozhraní. Tyto nezávislé úlohy je tedy možné řešit paralelně.  $u_r^i$  je restrikce  $\hat{u}$  na hraniční uzly podoblasti  $\Omega_i$ .

Úloha Schurova doplněku  $\hat{S}\hat{u} = \hat{g}$  je menších rozměrů než úloha původní, ale přesto může být příliš velká či špatně podmíněná na to, aby ji bylo možné

řešit přímými metodami. Proto se využívají iterační metody. Výhodou je, že místo sestavení Schurova doplňku pro celou oblast je možné sestavit lokální Schurovy doplňky pro jednotlivé podoblasti. V každém kroku se řeší pouze lokální úlohy Schurova doplňku a dochází k výměně informací o hodnotách na hranicích mezi sousedními podoblastmi.

Lokální Schurův operátor  $S^i$  působí pouze na hraničních uzlech podoblasti  $\Omega_i$ . Problém omezený na oblast  $\Omega_i$  má formu:

$$\begin{bmatrix} K_{oo}^i & K_{or}^i \\ K_{ro}^i & K_{rr}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o^i \\ u_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o^i \\ f_r^i \end{bmatrix}.$$

kde  $u_r^i$  jsou neznámé na hranicích náležejících oblasti  $\Omega_i$ ,  $K_{rr}^i$ ,  $K_{ro}^i$  a  $K_{or}^i$  jsou lokálními příspěvky oblasti  $\Omega_i$  do globálních bloků  $K_{rr}$ ,  $K_{ro}$  a  $K_{or}$ .

Po eliminaci získáme soustavu:

$$\begin{bmatrix} K_{oo}^i & K_{or}^i \\ 0 & S^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o^i \\ u_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o^i \\ g^i \end{bmatrix},$$

kde  $S^i = K_{rr}^i - K_{ro}^i(K_{oo}^i)^{-1}K_{or}^i$  je lokální Schurův doplněk. V případě uvolněných oblastí (oblastí, které neobsahují ani část Dirichletových podmínek předepsaných na hranici) je Schurův doplněk singulární. V tomto případě nelze nalézt inverzní matici a musí dojít k regularizaci matice. O regularizaci matice se zmiňujeme v kapitole 4.

Úloha Schurova doplňku  $Su_r = g$  může být tedy rozložena na lokální úlohy, protože můžeme psát:

$$S = \begin{bmatrix} S^1 & & & \\ & S^2 & & \\ & & S^3 & \\ & & & S^4 \end{bmatrix},$$

$$u_r = \begin{bmatrix} u_r^1 \\ u_r^2 \\ u_r^3 \\ u_r^4 \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \\ g^4 \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Vztah globálního a lokálního Schurova doplňku

Pro snazší vysvětlení vztahu lokálního a globálního Schurova doplňku definujeme prostory  $\hat{W}$ ,  $W$ ,  $W^i$  a operátory  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^i$ .

$\hat{W}$  je prostor funkcí řešení rovnice (2.1), které jsou spojité na rozhraní. Funkce  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{W}$  je reprezentována vektorem  $\hat{u}$ , složeným z globálních hodnot na rozhraní.

$W^i$  je prostor funkcí z  $W$  které jsou příslušné oblasti  $\Omega_i$ . Funkce  $\mathbf{u}_r^i \in W^i$  je reprezentována vektorem  $u_r^i$ , který obsahuje hodnoty neznámé pouze na rozhraní podoblasti  $\Omega_i$ .

$W = W^1 \times W^2 \times W^3 \times W^4$  je prostor funkcí řešení na jednotlivých podoblastech. Tyto funkce mohou být na rozhraní i nespojitě. Funkce  $\mathbf{u}_r \in W$  je reprezentována vektorem  $u_r$ , který je sjednocením řešení na všech podoblastech.

Prostory  $\hat{W}'$ ,  $W^{i'}$  a  $W'$  jsou duální prostory k nim.

Operátor Schurova doplňku  $\hat{\mathbf{S}} : \hat{W} \rightarrow \hat{W}'$  je reprezentován Schurovým doplňkem  $\hat{S}$ , lokální operátor pak lokálním Schurovým doplňkem  $S^i$ .

Můžeme shrnout, že prostory  $\hat{W}$ ,  $W$  a  $W^i$  se týkají odchylek uzlů z výchozí polohy, které vedou k nulovým reakcím uvnitř oblasti, zatímco duální prostory pracují se silami (reakcemi) na rozhraní. Prostory  $W$ ,  $W^i$  pracují s nespojitými funkcemi na rozhraní, tedy pro jeden uzel na rozhraní může být řešení na různých podoblastech odlišné. Prostor  $W^i$  obsahuje vertikální výchylky pouze na podoblasti  $\Omega_i$ . Prostor  $W_i'$  reprezentuje reakce na rozhraní oblasti  $\Omega_i$ , kterou považuje za nezávislou na ostatních oblastech.

$\mathbf{R}^i : \hat{W} \rightarrow W_i'$  je operátor restrikcí z  $\Omega$  do  $\Omega_i$ . Tento operátor je reprezentován maticí  $R^i$ , která zachovává pouze komponenty vektoru, které náležejí uzávěru dané oblasti  $\Omega_i$ .



$\mathbf{R}^{iT} : \hat{W}^{i'} \rightarrow \hat{W}'$  je operátor, který naopak rozdistribuuje lokální hodnoty  $\Omega_i$  do globálních hodnot na  $\Omega$ . Je reprezentován transpozicí matice  $R^i$ .

$\mathbf{R} : \hat{W} \rightarrow W$  je operátor, který rozděluje globální proměnné na hraničních uzlech do lokálních proměnných nezávislých podoblastí. Je reprezentován maticí:

$$R = \begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \\ R^4 \end{bmatrix},$$

která  $m$ -krát kopíruje každou globální neznámou náležející  $m$  podoblastem.

$\mathbf{R}^T : W' \rightarrow \hat{W}'$  je transpozice operátoru  $\mathbf{R}$ , který sčítá hodnoty lokálních neznámých ze sousedních podoblastí.

Vztah mezi globálními a lokálními výchylkami je  $u_r = R\hat{u}$  a  $u_r^i = R_i\hat{u}$ .

Schurův doplněk  $\hat{S}$  a kondenzovaná pravá strana  $\hat{g}$  mohou být vyjádřeny jako:

$$\hat{S} = R^T S R = \sum R^{iT} S^i R^i \hat{g} = R^T g = \sum R^{iT} g^i,$$

kde

$$g^i = f_r^i - K_{ro}^i (K_{oo}^i)^{-1} f_o^i, \quad \hat{f} = \sum R^{iT} f_r^i.$$

Můžeme shrnout, že  $\mathbf{R}$  kopíruje hodnoty odchylek z globálního rozhraní na lokální rozhraní,  $\mathbf{R}^i$  kopíruje z globálních odchylek do lokálních odchylek,  $\mathbf{R}^T$  sčítá lokální reakce na rozhraní sousedních podoblastí, aby vytvořil globální vektor sil, který reprezentuje nerovnováhu reakcí na rozhraní a  $\mathbf{R}^{iT}$  vyjadřuje reakce na rozhraní podoblasti  $\Omega_i$ .

### 3.4 Metoda Balancing domain decoposition pro řešení úlohy Schurova doplňku

Předpokládáme, že každý blok matice  $S$  tvořený lokálními Schurovými doplňky  $S^i$  je regulární, aby bylo možné najít inverzní matici. Primární metoda je iterativní metodou na prostoru  $\hat{W}$  pro řešení úlohy Schurova doplňku.

Před tím, než zmíníme algoritmus metody, zavedeme nový operátor  $E$ , který bude skládat dohromady hodnoty na rozhraní.

$\mathbf{E} : W \rightarrow \hat{W}$  je operátor skládání lokálních řešení do globálních vektorů reprezentovaný maticí  $E$ .

$\mathbf{E}^T : \hat{W}' \rightarrow W'$  je operátor, který distribuuje globální hraniční síly do jednotlivých podoblastí, reprezentovaný maticí  $E^T$ .

Nejjednodušším příkladem  $\mathbf{E}$  je aritmetický průměr, kdy hodnoty v uzlu na rozhraní jsou aritmetickým průměrem hodnot ze všech podoblastí obsahujících tento uzel. Existuje více těchto voleb, ovšem všechny musí splňovat tutéž podmínku:

$$ER\hat{u} = \hat{u} \quad (3.10)$$

pro všechny vektory  $\hat{u} \in \hat{W}$ . Tedy pro každý vektor  $\hat{g} \in \hat{W}'$  musí platit:

$$R^T E^T \hat{g} = \hat{g}. \quad (3.11)$$

První podmínka nám říká, že pokud zkopírujeme globální hodnotu proměnné  $\hat{u}$  do lokálních pomocí operátoru  $\mathbf{R}$  a pak je opět rozdistribujeme pomocí operátoru  $\mathbf{E}$  získáme původní hodnotu. důsledkem je, že pokud rozdistribuuje síly na rozhraní vektoru  $\hat{g}$  do podoblastí pomocí operátoru  $\mathbf{E}^T$  a pak je opět sečteme pomocí operátoru  $\mathbf{R}^T$ , získáme původní síly.

### 3.5 Algoritmus BDD metody

Algoritmus metody BDD lze schematicky zapsat následovně:

Zvol libovolně  $\hat{u}^{(0)}$ .

Iteruj pro  $k := 0, 1, 2, \dots$

1. krok:

a)  $u_r^{(k)} := R\hat{u}^{(k)}$

b)  $g^{(k)} := Su_r^{(k)}$

c)  $\hat{r}^{(k)} := \hat{g} - R^T g^{(k)}$

Pokud je zvolená norma  $\hat{r}^{(k)}$  je dostatečně malá, zastav.

2. krok:  $\Delta r^{(k)} := E^T \hat{r}^{(k)}$

3.krok:  $\Delta u_r^{(k)} := S^{-1} \Delta r^{(k)}$

4.krok:  $\Delta \hat{u}^{(k)} := E \Delta u_r^{(k)}$

5.krok:  $\hat{u}^{(k+1)} := \hat{u}^{(k)} + \Delta \hat{u}^{(k)}$

Tato metoda může být paralelizována a její části počítány pro každou oblast zvlášť. Konkrétně se jedná o kroky 1b) a 3, které jsou plně paralelizovatelné. Detaily implementace tohoto algoritmu budou zmíněny v kapitole implementace a testování. Další informace je možné najít v literatuře, např. [9].

Hodnoty řešení na rozhraní  $\hat{u}$ , dosadíme do rovnice (3.9) a vyřešíme ji přímou metodou.

# Kapitola 4

## Duální metody

V duálních metodách se zadaná úloha řeší nejdříve pro síly na rozhraní a pomocí nich, se pak počítá průhyb v uzlech. Spojitost na rozhraní je řešena pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Rozdělíme oblast na 4 nepřekrývající se podoblasti (v našem případě) a představíme nové lepící podmínky (Lagrangeovy multiplikátory) na uměle vytvořených hranicích mezi podoblastmi.

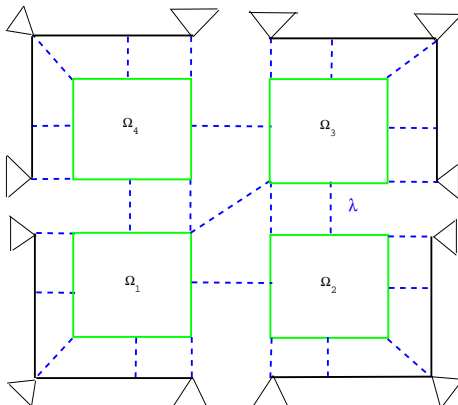
### 4.1 Formulace úlohy

U metody Total FETI, na které budeme teorii ilustrovat, se okrajové podmínky váží pomocí Lagrangeových multiplikátorů místo běžného přístupu, kdy se okrajové podmínky projeví již při sestavování matice tuhosti a vektoru pravých stran. Celkové působení Lagrangeových multiplikátorů může být ilustrováno obrázkem 4.1, na kterém jsou znázorněny modře.

Po diskretizaci  $\bar{\Omega}$  pomocí metody konečných prvků na  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_4$  a po přečíslování uzlů navržených v kapitole 1 (vnitřní uzly jsou očíslovány jako první, poté hraniční uzly) řešíme úlohu:

$$\min_u \frac{1}{2} u^T K u - f^T u, \quad Bu = c, \quad (4.1)$$

kde  $K = \text{diag}(K_1, K_2, K_3, K_4)$  je symetrická semidefinitně pozitivní blokově diagonální matice tuhosti řádu  $n$ ,  $B$  je  $m \times n$  matice vazeb s plnou hodností,  $f \in \mathbb{R}^n$  je vektor zatížení a  $c \in \mathbb{R}^m$  je vektor podmínek na vazby. Více informací o podobě těchto matic může být nalezeno v literatuře [17], [18].



Obrázek 4.1: Využití Lagrangeových multiplikátorů

Diagonální bloky  $K_i$  korespondují s podoblastmi  $\Omega_i$ . Tyto bloky jsou pozitivně semidefinitní řídké matice. Protože můžeme výchytky chápat jako pohyby tuhých těles víme jádra těchto matic. Toto je velkou výhodou, protože všechny bloky mohou být efektivně regularizované a následně rozložené užitím Choleského rozkladu. Vektor zatížení  $f$  popisuje síly působící na uzly.

Matice  $B$  s řádky  $b_i$  a vektor  $c$  s hodnotami  $c_i$  zaručují předepsané Dirchletové podmínky a také spojitost na rozhraní. Aby byla dodržena tato spojitost, musí platit podmínka  $b_i u = c_i = 0$ , kde  $b_i$  jsou vektory řádu  $n$  tvořené hodnotami  $0, 1, -1$  na odpovídajících pozicích.

Minimalizační úloha (4.1) může být řešena pomocí Lagrangeových multiplikátorů značených  $\lambda$ . Úlohu můžeme přeformulovat jako:

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u + \lambda^T (B u - c) \quad (4.2)$$

Tato úloha je ekvivalentní s následující úlohou sedlového bodu:

$$L(\bar{u}, \lambda) = \sup_{\lambda} \inf_u L(u, \lambda). \quad (4.3)$$

Ekvivalentně řečeno hledáme dvojici vektorů  $(\bar{u}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , které splňují:

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ c \end{bmatrix},$$

kde

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} K & B^T \\ B & O \end{bmatrix}.$$

Postačující a nutné podmínky pro jednoznačnost řešení této úlohy jsou:

$$\text{Ker} B^T = o \quad (4.4)$$

$$\text{Ker} K \cap \text{Ker} B = o. \quad (4.5)$$

Podmínka (4.4) je podmínkou na plnou řádkovou hodnost matice  $B$ . Báze jádra  $\text{Ker} K$  může být přímo zkonstruována pomocí pohybů tuhých těles. Můžeme sestavit matici  $R$ , jejíž sloupce jsou tvořeny bázovými vektory  $\text{Ker} K$ . Platí, že  $R \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $l = n - \text{rank}(K)$ . Ve 2D je báze každé podoblasti  $\Omega_i$  tvořena bloky:

$$\begin{bmatrix} -y_t & 1 & 0 \\ x_t & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pro  $t = 1, 2, \dots, n_i$ , kde  $n_i$  je počet uzlů sítě dané podoblasti.

Rovnice (4.1) je splněna za podmínek:

$$f - B^T \bar{\lambda} \in \text{Im} K \quad (4.6)$$

$$\bar{u} = K^\dagger (f - B^T \bar{\lambda}) + R \bar{\alpha} \quad (4.7)$$

pro odpovídající  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^l$  a odpovídající pseudoinverzní matici  $K^\dagger$ .

**Definice 1** *Pseudoinverzní matice (zobecněná inverze) je matice splňující podmínku  $K^\dagger K = K$ .*

Ekvivalentní zápis podmínky (4.6) je:

$$R^T(f - B^T\bar{\lambda}) = o.$$

Dosadíme-li vztah (4.7) do (4.1), získáme:

$$-BK^\dagger B^T\bar{\lambda} + BR\bar{\alpha} = c - BK^\dagger f.$$

Pokud shrneme podmínky (4.8) a (4.8), hledáme dvojici vektorů  $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$  splňující:

$$\mathcal{S} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix},$$

kde

$$\mathcal{S} := \begin{bmatrix} BK^\dagger B^T & -BR \\ -R^T B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

je (negativní) Schurův doplněk k matici  $K$ ,  $d := BF^\dagger f - c$  a  $e := -R^T f$ .

Pokud  $S$  a  $\mathcal{A}$  jsou obě regulární, můžeme nejdříve vypočítat  $(\bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  vyřešením (4.1) a toto pak dosadit do (4.7) a tím najít neznámé průhyby  $\bar{u}$ .

Jak jsme již zmínili, krokem 1 je vyřešit rovnici (4.1). Pro zjednodušení popisu zavedeme nové značení:

$$F := BK^\dagger B^T, \quad G := -R^T B^T.$$

Potom můžeme soustavu (4.1) přepsat na:

$$\begin{bmatrix} F & G^T \\ G & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix},$$

Dále zavedeme ortogonální projektor na prostor jádra  $\text{Ker}G$ , následovně:

$$P_G := I - Q_G,$$

kde  $Q_G := G^T(GG^T)^{-1}G$  je ortogonální projektor na prostor vzorů  $ImG^T$ . Zmiňme ještě, že projektor  $Q_G$  je ortogonální, pokud platí  $Q_G^2 = Q_GQ_G = Q_G$ .

Aplikací projektoru  $P_G$  na první rovnici soustavy (4.1) získáme:

$$P_GF\lambda = P_Gd, \quad G\lambda = e. \quad (4.8)$$

Tyto 2 rovnice je možné zapsat jako jednu pokud řešení  $\bar{\lambda}$  rozdělíme na dvě složky:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{Im} + \bar{\lambda}_{Ker}, \quad (4.9)$$

kde  $\bar{\lambda}_{Im} \in ImG^TR$  a  $\bar{\lambda}_{Ker} \in KerG$ .

Neznámou  $\bar{\lambda}_{Im}$  lze pak snadno spočítat jako:

$$\bar{\lambda}_{Im} = G^T(GG^T)^{-1}e. \quad (4.10)$$

Dosazením vztahu (4.9) do (4.8) získáme rovnici, kterou musí  $\bar{\lambda}_{Ker}$  splňovat a sice:

$$P_GF\bar{\lambda}_{Ker} = P_G(d - F\bar{\lambda}_{Im}), \quad \bar{\lambda}_{Ker} \in KerG. \quad (4.11)$$

Jakmile víme řešení  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{Im} + \bar{\lambda}_{Ker}$ , můžeme vypočítat globální vektor  $\bar{\alpha}$  vyřešením následující rovnice:

$$\bar{\alpha} = (GG^T)^{-1}G(d - F\bar{\lambda}). \quad (4.12)$$

Nalezení řešení průhybů  $\bar{u}$  duální Total FETI metodou lze tedy najít ve 4 fázích. Nejdříve najdeme  $\bar{\lambda}_{Im}$  vyřešením rovnice (4.10). Poté nalezneme  $\bar{\lambda}_{Ker}$  pomocí (4.11). Jejich sečtením získáme výslednou  $\bar{\lambda}$ , kterou poté dosadíme do (4.12). Posledním krokem bude dosazení  $\bar{\alpha}, \bar{\lambda}$  do vztahu (4.7), čímž nalezneme neznámou  $\bar{u}$ .

Jedním z problémů, které nastanou při řešení touto metodou je fakt, že matice tuhosti  $K_i$  jsou singulární. Toto je způsobeno tím, že všechny oblasti jsou uvolněné a okrajové podmínky jsou dány až maticemi vazeb  $B_i$  a vektory



$c_i$ . Protože matice tuhosti nejsou regulární, není možné k nim najít inverzní matice. Místo inverzních matic k nim naleznem pseudoinverzní matice, což uděláme ve dvou krocích. Nejdříve zregularizujeme matice  $K_i$  a poté k nim nalezneme matice inverzní.

## 4.2 Regularizace singulární matice

Předpokládejme, že  $M$  je symetrická pozitivně semidefinitní matice, která odpovídá jedné z podoblastí. Zvolíme  $k$  uzlů nagenované sítě, které jsou buď těsně vedle sebe nebo neleží poblíž žádné přímky. Tyto uzly se nazývají fixační uzly. V 1D  $k \geq 1$ , ve 2D  $k \geq 2$  a ve 3D  $k \geq 3$ . Submatice  $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$  matice tuhosti  $K_i$  definovaná množinou indexů ostatních uzlů a jejich průhybů  $\mathcal{J}$  je nesingulární. Tato submatice může být chápána jako matice tuhosti tělesa, které je zafixované ve zvolených bodech. Označme množinu indexů  $k$  zafixovaných uzlů  $\mathcal{I}$ .

Matici  $M$  je možné přeorganizovat pomocí permutační matice

$$PAP^T = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{J}\mathcal{I}} \\ M_{\mathcal{I}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \end{bmatrix},$$

kde bloky  $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $M_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $r = n - s$ ,  $s = 2kin$  2D,  $s = 3kin$  3D a  $P$  je permutační matice.

Na takto přeskupenou matici lze použít Choleského rozklad

$$\begin{bmatrix} M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{J}\mathcal{I}} \\ M_{\mathcal{I}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \end{bmatrix} = LDL^T,$$

kde

$$L = \begin{bmatrix} I & O \\ M_{\mathcal{I}\mathcal{J}}M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad D = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} & O \\ O & S \end{bmatrix}.$$

$S = M_{\mathcal{I}\mathcal{I}} - M_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{-1}M_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$  je Schurův doplněk k matici tuhosti zafixovaných uzlů  $M_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ .

**Věta: 1** *Nechť je dáno libovolné  $\rho > 0$  a nechť  $Q$  je ortogonální projektor na  $\text{Ker}S$ .*

$$M_\rho = P^T \begin{bmatrix} M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{J}\mathcal{I}} \\ M_{\mathcal{I}\mathcal{J}} & M_{\mathcal{I}\mathcal{I}} + \rho Q \end{bmatrix} P$$

*je symetrická pozitivně definitní matice a  $M_\rho^{-1}$  je zobecněná inverze (pseudoinverzní matice) k matici  $M$ . K násobení matice inverzní s libovolným vektorem můžeme použít standardní Choleského rozklad.*

Důkaz této věty a návod ke konstrukci projektoru  $Q$  lze najít v literatuře [18]. Zjednodušeně řečeno přičteme číslo ke zvoleným pozicím na hlavní diagonále původní matice.

### 4.3 Algoritmus metody Total FETI

Algoritmus této metody je zapsán následujícím schématem.

Krok 1a: Sestavíme matice  $G := -R^T B^T$ ,  $d := BK^\dagger f - c$ ,  $e := -R^T f$ .

Krok 1b: Vypočteme  $\bar{\lambda}_{Im} := G^T (GG^T)^{-1} e$ .

Krok 1c: Sestavíme vektor  $\tilde{d} := d - F\bar{\lambda}_{Im}$ .

Krok 1d: Vypočteme  $\bar{\lambda}_{Ker}$  vyřešením  $P_G F \bar{\lambda}_{Ker} = P_G \tilde{d}$  na  $\text{Ker}G$ .

Krok 1e: Sestavíme vektor lagrangeových multiplikátorů  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{Im} + \bar{\lambda}_{Ker}$ .

Krok 2: Vypočteme  $\bar{\alpha} := (GG^T)^{-1} G(d - F\bar{\lambda})$ .

Krok 3: Vypočteme výsledné průhyby  $\bar{u} := K^\dagger (f - B^T \bar{\lambda}) + R\bar{\alpha}$ .

Krok 1d se řeší pomocí metody předpodmíněných gradientů. Jako předpodmínovač použijeme nejjednodušší volbu, matici  $F^{-1}$ .

Pro uspíšení výpočtu a zmenšení řešených úloh, chceme algoritmus paralelizovat. Všechny části kroku 1 jdou řešit na jednotlivých podoblastech. Jakmile najdeme hodnoty Lagrangeových multiplikátorů, další kroky již řešíme globálně.

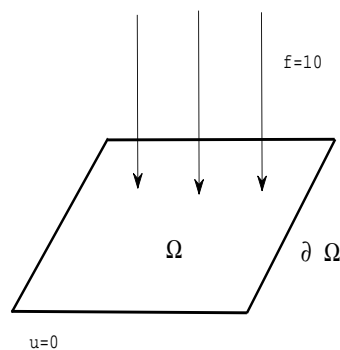
Algoritmus předpodmíněných gradientů může být nalezen v literatuře [18]

# Kapitola 5

## Implementace a testování

V této kapitole nastíníme, jak se obě metody implementují. Uvedeme řešenou úlohu, na které testování probíhalo, použitou diskterizaci, příklady sestavených matic, které je obtížné nalézt v literatuře, a také obrázky řešení nalezeného pomocí obou metod. V části Výsledky uvedeme tabulky porovnávající testované vlastnosti obou metod a obrázky řešení. Všechny naše obrázky vykresují výchyly směrem nahoru, přestože dle schématu řešené úlohy by měly být směrem dolů. Důvodem je pouze estetické hledisko.

### 5.1 Řešená úloha



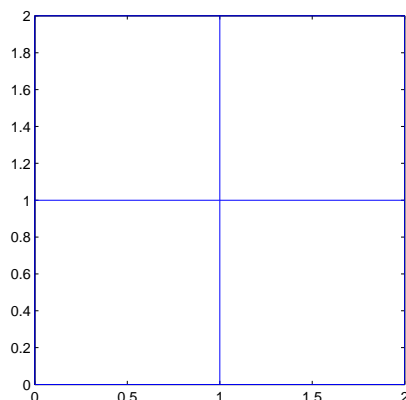
Obrázek 5.1: Zadaná úloha

Testovaná úloha je popsána rovnicemi:

$$\begin{aligned} -Lu &= 10 \quad \text{na } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jedná se tedy o Laplaceovu rovnici s pravou stranou rovnou 10. Tato rovnice popisuje průhyb tenké membrány, na kterou se působí silou 10 jednotek. V testované úloze se uvažuje pouze skalární případ, kde výchylky z výchozí polohy jsou pouze ve svislém směru. Na všech hranicích zadané oblasti byly použity homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, které říkají, že membrána je po svém obvodu zafixována ve výchozí poloze.

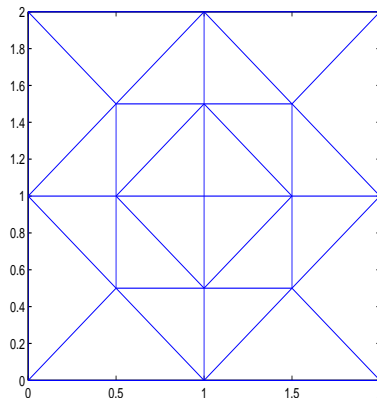
## 5.2 Oblast



Obrázek 5.2: Zadaná oblast

Zadanou oblastí byl čtverec o rozměrech  $2 \times 2$ . Tato oblast se skládá ze 4 podoblastí, kde každá sama o sobě je čtvercem s rozměry  $1 \times 1$ . Na těchto podoblastech se hledá řešení při paralelizaci algoritmů. Nageerování těchto podoblastí a potřebných údajů proběhlo užitím PDE Toolboxu v Matlabu.

### 5.3 Diskretizace



Obrázek 5.3: Triangulace pro velikost=1

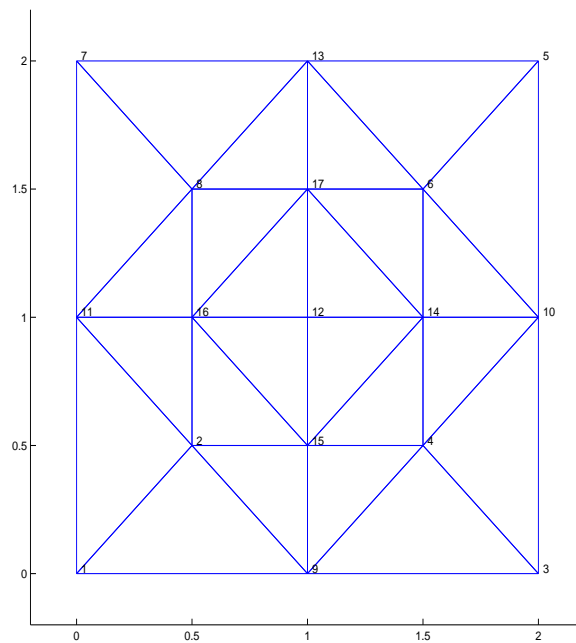
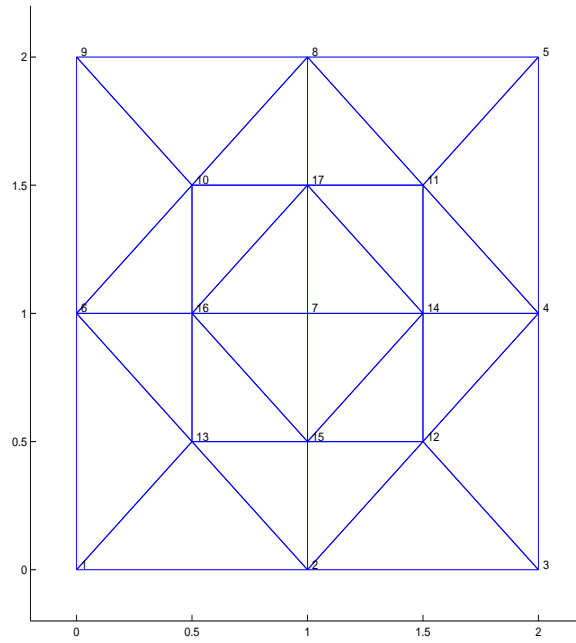
Na zadané oblasti se provedla diskretizace pomocí metody konečných prvků a byla nagenеровána síť triangulace. Na obrázku je příklad takové sítě pro volenou maximální velikost strany trojúhelníka rovnou jedné. Maximální velikost strany trojúhelníka generované sítě je vstupním parametrem přiloženého m-file.

### 5.4 Přechíslování

Uzly nagenеровané sítě jsou automaticky očíslované. Jak jsme v textu uvedli, rádi bychom je měli očíslované dle pravidla nejdříve vnitřní a pak hraniční. Tedy prvním krokem implementace bylo toto nové přechíslování uzlů jednotlivých podoblastí, viz obrázek 5.8.

### 5.5 Matice tuhosti

Dále jsme vygenerovali matice tuhostí. K tomuto jsme využili zabudované funkce programu Matlab (asema). V okamžiku, kdy máme toto připravené, implementace primární a duální metody se liší. Popíšeme je tedy každou zvlášť.



Obrázek 5.4: Porovnání automaticky generovaného číslování a nového přechíslování

## 5.6 Implementace primární metody

Před tím, než přistoupíme přímo k implementaci uvedeného algoritmu, potřebujeme sestavit matice  $R_i$  a  $E_i$ , tedy matice pomocí kterých budeme hledat restrikcí všech uzlů dané oblasti na hraniční a matice díky kterým budeme naopak po vypočtení schopni hodnoty rozdistribuovat do globálního vektoru, aniž bychom některý uzel sečetli víckrát. Toto ošetříme pomocí užití aritmetického průměru. Níže uvádíme příklady těchto matic pro diskretizaci o velikosti 1, viz obrázky 5.5, 5.6.

R1 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

R2 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R3 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R4 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.5: Matice  $R_i$  pro diskretizaci o velikosti 1

V tomto okamžiku jsme schopni udělat **krok 1a**. V **kroku 1b**, není nutné setrojit Schurovy doplňky  $S_i$ . Vyjdeme s toho, že víme

$$S^i = K_{rr}^i - K_{ro}^i (K_{oo}^i)^{-1} K_{or}^i.$$

$$\begin{array}{cc}
 E1 = & E2 = \\
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0.2500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5000 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5000 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} & 
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0.2500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5000 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5000 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \\
 E3 = & E4 = \\
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0.2500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5000
 \end{array} & 
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0.2500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5000 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5000
 \end{array}
 \end{array}$$

Obrázek 5.6: Matice  $E_i$  pro diskretizaci o velikosti 1

Pokud tedy v kroku 2 hledáme  $S^i u_r^i$ , hledáme

$$(K_{rr}^i - K_{ro}^i (K_{oo}^i)^{-1} K_{or}^i) u_r^i.$$

Označme  $x_i := K_{oo}^{i-1} K_{or}^i u_r^i$  a  $b_i := K_{or}^i u_r^i$ . Pak stačí, když nalezneme  $x_i$  a dosadíme ho do  $g = K_{rr}^i u_r^i - K_{ro}^i x_i$ .

Po zavedení nového značení, kde  $x_i = K_{oo}^{i-1} K_{or}^i u_r^i$  platí, že  $x_i = K_{oo}^{i-1} b_i$ . Toto je ekvivalentní s  $K_{oo}^i x_i = b_i$ . Matici  $K_{oo}$  známe a můžeme najít její LU rozklad  $K_{oo}^i = L_i U_i$ .

Pak máme rovnici  $L_i U_i x_i = b_i$ . Tuto soustavu pomocí LU rozkladu umíme řešit a výsledný vektor je  $x_i = U_i (L_i b_i)$ . Nyní pouze dosadíme za  $x_i$  a máme vyřešený krok 1b.



Pro realizaci **kroku 1c** potřebujeme sestavit lokální kondenzované vektory pravých stran  $\hat{g}_i$ . I zde budeme aplikovat postup zmíněný výše pro použití inverzní matice. Protože krok 1c není plně paralelizovatelný, musíme nejdříve nalézt lokální vektory  $g_i$  a  $\hat{g}_i$  a pak je posčítat, abychom získali globální verze těchto vektorů. Pak nalezneme jejich rozdíl. Pokud je norma tohoto rozdílu malá, proces ukončíme. Pokud je stále velká, tedy oba vektory jsou příliš rozdílné, jejich rozdíl opět rozdistribuuujeme do podoblastí a můžeme přistoupit ke kroku 2.

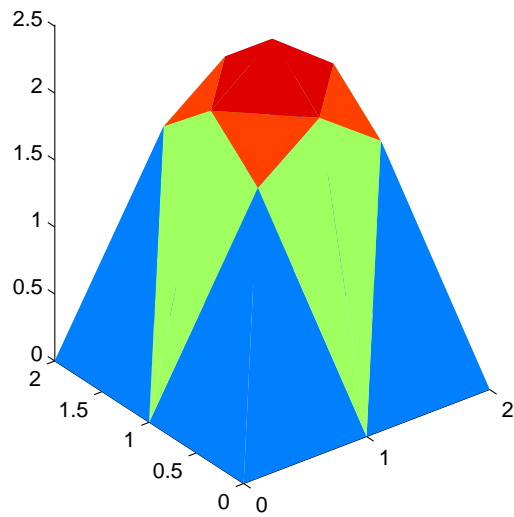
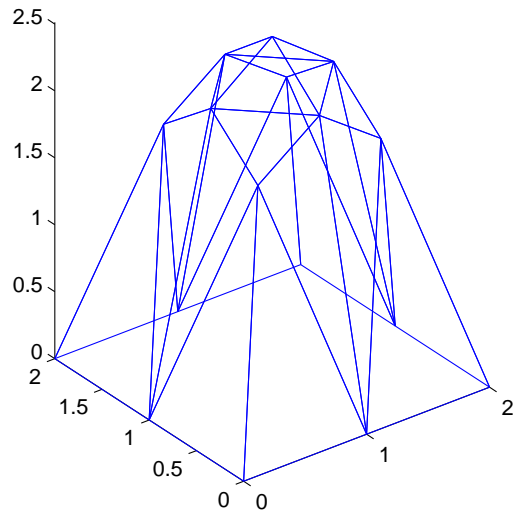
U **kroku 2** postupujeme velmi podobně jako u kroku 1c. Ani zde není možná plná paralelizace, tudíž lokální vektory opět sčítáme pro získání globálních vektorů.

**Krok 3** vyžaduje opět nalezení inverzní matice, tedy opět použijeme přístup s LU rozkladem a tím zjednodušíme výpočet. Tento krok je plně paralelizovatelný a řešitelný separovaně na každé podoblasti zvlášť.

V **kroku 4** vytvoříme globální verzi lokálních řešení získaných v kroku 3 a tento globální vektor v posledním kroku dosadíme a tím získáme výsledný vektor průhybů pro danou iteraci.

Po zastavení cyklu máme výsledek pro hraniční uzly jednotlivých podoblastí. Abychom našli průhyb i na vnitřních uzlech, použijeme zpětný chod a vypočtené hodnoty dosadíme do (3.9). Dosazením získáme výsledná lokální řešení, které poskládáme do globálního vektoru.

Na obrázku 5.7 uvádíme vypočtené řešení pomocí metody BDD pro velikost rovnou 1.



Obrázek 5.7: Řešení získané metodou BDD pro velikost strany = 1

## 5.7 Implementace duální metody

Implementace začala sestavením všech potřebných matic. Pokud jsou  $B_i$  matice vazeb odpovídající podoblastem  $\Omega_i$ , pak globální matice je  $B = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ ]$ .

Na obrázku 5.8 je příklad matice  $B_i$  pro diskretizaci uvedenou na obrázku 5.3. Tyto matice zde ukazujeme, protože ve všech člancích je uvedeno, z jakých čísel se matice skládají, ale jen v málo je možné najít konkrétní příklady.

Dále bylo třeba sestavit báze vektory pohybů tuhých těles  $R_i$ . Protože řešíme skalární úlohu, báze vektory jsou jednotkové vektory sestavené ze samých jedniček. Pokud bychom potřebovali sestavit globální matici  $R$ , sestavili bychom ji z vektorů  $R_i$  umístěných na hlavní diagonále.

Na obrázku 5.9 je matice báze vektorů pro diskretizaci na obrázku 5.3.

Jakmile máme sestavené tyto základní matice, můžeme přikročit ke **kroku 1a**, tedy sestavíme matice  $G, F$  a vektor  $e$ .

**krok 2** je možné řešit lokálně pro každou oblast  $\Omega_i$  zvlášť. Více detailů v literatuře [15].

Jakmile víme řešení  $\bar{\lambda}_{Im}$ , můžeme realizovat **krok 1c**, tedy sestavit vektor  $\tilde{d}$ .

Nejnáročnějším výpočtem celého algoritmu je **krok 1d**, nalezení řešení  $\bar{\lambda}_{Ker}$ . Jak jsme již uvedli v kapitole 3, použijeme algoritmus metody předpodmíněných gradientů s předpodmiňovačem  $F^{-1}$ . Předpodmíněné gradienty aplikujeme na každou podoblast zvlášť. V tomto kroku musíme být opatrní, protože všechny podoblasti mají stejný předpodmiňovač. Toto je dáno tím, že projektor  $P_G$  funguje globálně a nelze jeho účinek paralelizovat. Dalším zajímavým detailem je fakt, že nepotřebujeme sestavovat lokální matice  $F_i$ , protože tím bychom ztratily informace o účinku  $GG^T$ . Jakmile použijeme tyto globální matice místo lokálních, jak bychom čekali, použijeme standardní algoritmus metody předpodmíněných sdružených gradientů.

V tomto okamžiku je již možné sestavit výsledné vektory  $\bar{\lambda}^i = \bar{\lambda}_{Im}^i + \bar{\lambda}_{Ker}^i$ . Protože kroky 2 a 3 probíhají už na globální úrovni, pracujeme již s globálním vektorem Lagrangeových multiplikátorů  $\bar{\lambda}$ , který získáme sečtením lokálních vektorů  $\bar{\lambda}^i$ .

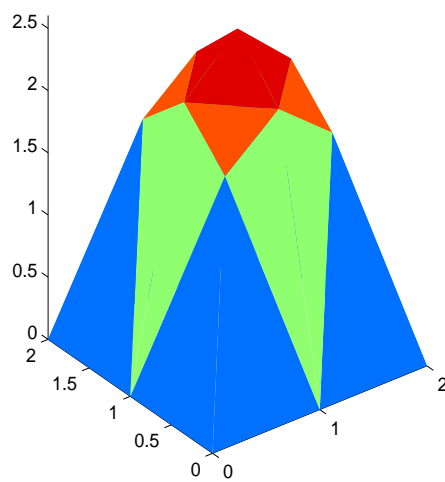
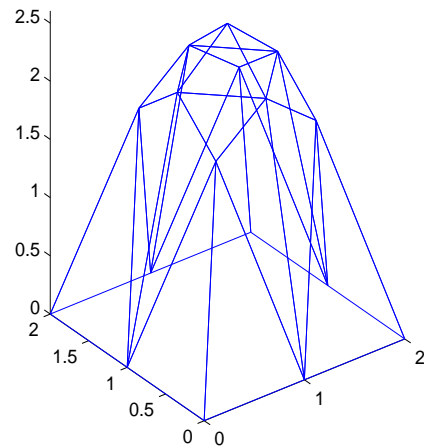


R =

1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1

Obrázek 5.9: Matice pohybů tuhých těles pro síť o velikosti=1

V krocích 2 a 3 už na nás nečekjí žádné potíže, pouze vše známé dosadíme a získáme výsledné řešení. Toto řešení nakonec vykreslíme.



Obrázek 5.10: Řešení pomocí Total FETI pro síť s velikostí = 1

Řešení vypočtené metodou Total FETI pro diskretizaci na obrázku 5.3 je uvedeno na obrázku 5.10.

## 5.8 Výsledky

Z popisu implementace vyplývá, že obě metody mají jak své pro tak i své proti. U obou metod je výhodou zmenšení velikosti úlohy tím, že problém řešíme na jednotlivých podoblastech zvlášť a výsledné řešení pak skládáme z lokálních. Primární metoda vyžaduje komplikovanější sestavení matice tuhosti vzhledem k okrajovým podmínkám, zatímco duální metody toto zpracovávají až pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Protože bychom rádi porovnali tyto dvě metody na základě výpočtů, testovali jsme obě na počet iterací. Také uvádíme rozdíl řešení získaných jednotlivými metodami pro zvolené triangulace.

Jak je vidět z obrázků 5.10 a 5.7, řešení získaná pomocí obou metod vypadají velmi podobně. Podívejme se tedy na rozdíl řešení. V tabulce 5.1 můžeme najít hodnoty euklidovských norem rozdílů řešení získaných metodami BDD a Total FETI pro různé triangulace. Jak je z této tabulky patrné, norma rozdílu se zvětšuje s rostoucí jemností sítě. Zastavovací podmínkou obou metod bylo, že euklidovská norma rozdílu dvou po sobě jdoucích řešení je menší než 0.01. Vidíme tedy, že norma se sice zvětšuje, ale řádově odpovídá zastavovací podmínce. Pokud bychom zastavovací podmínku zmenšili, i norma rozdílu by se zmenšila.

velikost	počet trojúhelníků	norma rozdílu
1	24	0.0140
0.7	32	0.0117
0.5	80	0.0240
0.25	208	0.0262
0.1	1296	0.0383

Tabulka 5.1: Norma rozdílu řešení v závislosti na dané triangulaci

Zkoumali jsme také rozdíly v počtech iterací. V tabulce 5.2 můžeme vidět porovnání počtu iterací cyklů metody BDD a Total FETI.

velikost	počet trojúhelníků	počet iterací
1	24	14
0.7	32	17
0.5	80	10
0.25	208	9
0.1	1296	9

Tabulka 5.2: Počet iterací metody BDD v závislosti na dané triangulaci

Z tabulek 5.2, 5.3 vyplývá, že použijeme-li primární přístup, počet iterací se zmenšuje při zvětšování počtu trojúhelníků. Také vidíme, že po nějaké době se počet iterací již nemění. Na druhou stranu, použijeme-li duální přístup, počet iterací roste spolu s počtem trojúhelníků. Podotkněme, že každá metoda je rozdílně implementována. V metodě BDD je pouze jeden iterační cyklus pro všechny oblasti, zatímco u metody Total FETI má každá oblast svůj iterační cyklus. Jak vidíme, tak počet iterací v jednotlivých oblastech se příliš neliší. Díky rozdílné implementaci je porovnávání obtížné. Při testování duální metody se ukázalo, že její výpočet trvá déle než výpočet BDD, což je způsobeno faktem, že jsme výpočty prováděli na jednom počítači. Při každém průběhu metody se počítalo ve čtyřech cyklech. Pokud by se úloha řešila paralelně výpočet by se urychlil.

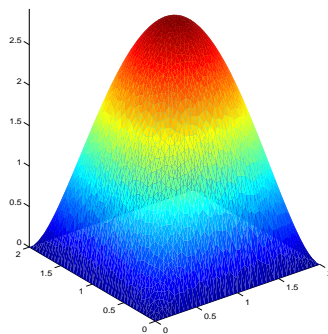
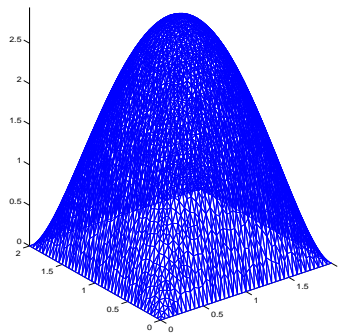
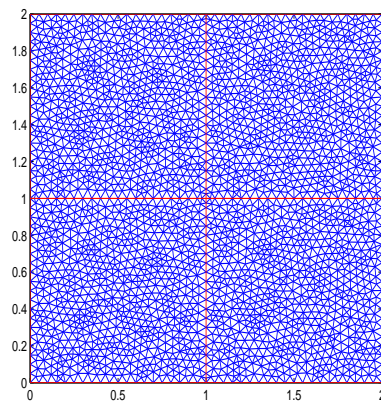
velikost	počet trojúhelníků	iterace v $\Omega_1$	iterace v $\Omega_2$	iterace v $\Omega_3$	iterace v $\Omega_4$
1	24	8	8	8	8
0.7	32	8	8	8	8
0.5	80	12	12	12	12
0.25	208	13	16	13	13
0.1	1296	19	14	14	19

Tabulka 5.3: Počet iterací na jednotlivých podoblastech v závislosti na dané triangulaci

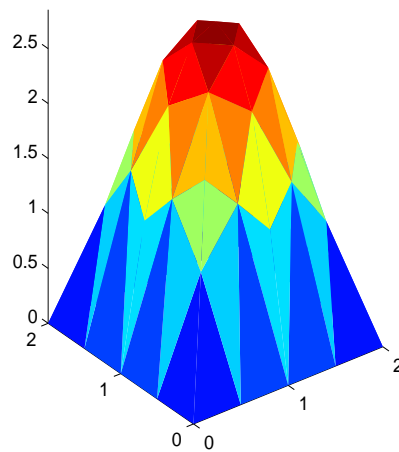
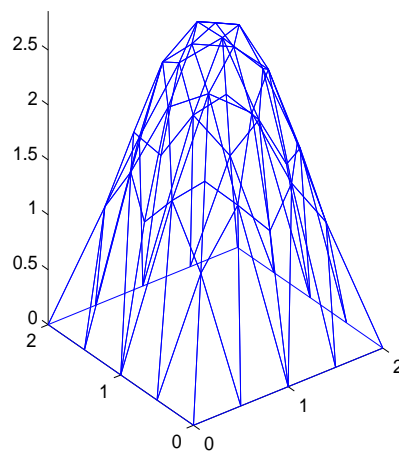
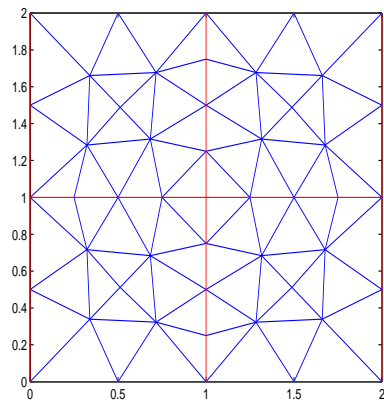
Porovnávání obou metod vzhledem k době výpočtu není relevantní, protože ačkoliv jsme úlohu paralelizovali, počítali jsme ji na jednom počítači, tedy výpočet nebyl urychlen. Dalším důvodem je opět rozdílná implementace.



Závěrem uvádíme obrázky řešení pro náhodně vybranou volbu velikosti strany trojúhelníka, viz obrázky 5.11, 5.12. Na obrázcích si lze povšimnout, že spolu s jemnější triangulací dochází k vyhlazení, přesně jak jsme očekávali.



Obrázek 5.11: Řešení nalezené metodou BDD pro velikost  $h = 0.05$



Obrázek 5.12: Řešení nalezené metodou Total FETI pro velikost = 0.5

# Kapitola 6

## Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s oběma metodami. Uvedli jsme hlavní principy obou metod včetně algoritmů řešení. Teorii jsme testovali na zvolené úloze, kterou byla Poissonova rovnice s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Porovnali jsme normu odchylek řešení získaných oběma metodami. Testovali jsme obě metody na počet iterací v závislosti na počtu trojúhelníků triangulace. Výsledky byly uvedeny formou tabulek. Vykreslili jsme sítě a řešení pro náhodně zvolené hodnoty maximálních velikostí stran trojúhelníků triangulace. Obě metody jsou v současné době stále zdokonalovány a hlavní důraz je kladen na jejich co nejefektivnější paralelizaci.

# Literatura

- [1] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol50, Longman Scientific & Technical Harlow, copublished in the United States with John Wiley & Sons, New York, 1990, ISBN 0-582-05666-7
- [2] Y.W. Kwon, H. Bang: *The Finite Element Method Using MATLAB*, CRC Press, Boca Raton, 2000, ISBN 0-8493-0096-7
- [3] L. Čermák: *Algoritmy metody konečných prvků*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno, 2000, ISBN 80-214-1679-1
- [4] J. Hůrková *Metoda rozkladu oblasti s překrýváním pro lineární problémy ve 2D* Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, Plzeň, 2010
- [5] Smith Barry, Bjorstad Petter E., Gropp William: *Domain Decomposition Pararrel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press (United Kingdom), 2004
- [6] A.Toselli, O.Windlung: *Domain decomposition Methods-Algorithms and Theory* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005
- [7] P.Gosselet, CH.Rey: *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics* 2007
- [8] Z.Dostál, D.Horák, R.Kučera: *Total FETI - an easier implementable variant of the FETI method for numerical solution of elliptic PDE* Communications in Numerical Methods in Engineering, Volume 22, Issue 12, pp 1155-1162, 2006

- [9] M.Okrouhlík: *Numerical methods in computational mechanics* Institute of Thermomechanics, Prague, 2008
- [10] Martin Menšík *Nepřesná FETI metoda založená na rozšířených Lagrangejích* Diplomová práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra matematiky, Ostrava, 2009
- [11] C.Farhat, M.Gérardin: *On the general solution by a direct method of a large/scale singular system of linear equations: Application to the analysis of floating Structure* International journal for numerical methods in engineering, Vol.41, pp 675-696, 1998
- [12] C.M.Augustin, G.A.Holzapfel, O.Steinbach: *Classical and all-floating FETI methods for the simulation of arterial tissues* SpezialForschungsBereich F32, Austria, 2013
- [13] C.Farhat, M.Lesoinne, P.LeTallec, K.Pierson, D.Rixen: *FETI-DP: a dual-primal unified FETI method -part I: A faster alternative to the two-level FETI method* International journal for numerical methods in engineering, Vol.50, pp1523-1544, 2001
- [14] T.Kozubek, M.Jarošová, M.Menšík, A.Markopoulos: *Hybrid Total FETI method* Partnership for Advance Computing in Europe, Ostrava
- [15] T.Kozubek, D.Horák, V.Hapla *FETI Corase Problem Parallelization Strategies and Their Coparison* Partnership for Advance Computing in Europe, Ostrava
- [16] J.Mandel: *Balancing domain decomposition method* Communications in Numerical Methods in Engineering, Volume 9, pp 233-241, 1993
- [17] C.Farhat, F.X.Roux: *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algoritihm* International journal for numerical methods in engineering, Vol.32, pp1205-1227, 1991.
- [18] T.Kozubek, V.Vondrák, M.Menšík, D.Horák, Z.Dostál, V.Hapla, P.Kabelíková, M.Čermák: *Total FETI domain decomposition method and its massively parallel implementation* Advances in Engineering Software, Vol.60, pp 14-22, 2013