



Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

Bakalářská práce

Analýza stability vybraných druhů kompozitních
nosníků

Vypracoval: Petr Hanzlík
Vedoucí práce: Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně s použitím pramenů a zdrojů uvedených na konci bakalářské práce.

V Plzni dne:

Podpis:

Poděkování

Při této příležitosti bych rád poděkoval vedoucímu práce Ing. Tomáši Kroupovi, Ph.D. za trpělivé a přívětivé vedení práce a členům oddělení pružnosti a pevnosti katedry mechaniky za připomínky a rady při prezentaci dílčích výsledků práce. Dále bych rád poděkoval rodině za materiální a psychickou podporu, která mi umožnila studium na Fakultě aplikovaných věd.

Abstrakt

Tato práce pojednává o ztrátě stability u vzpěru přímých prutů a kompozitních pásků a o matematických modelech, které k tomu byly využity. Ke stanovení kritické síly při ztrátě stability u přímých prutů bylo využito klasického analytického řešení a stabilitní MKP analýzy v softwaru Abaqus. Tyto výsledky byly porovnány. Ke stanovení kritické síly u kompozitních pásků byly provedeny dva experimenty s následujícím způsobem zatížení: zatížení posuvem, zatížení osovou silou. Dále byla u pásků provedena lineární a nelineární stabilitní MKP analýza v softwaru Abaqus. Získané výsledky byly analyzovány a poznatky využity pro řešení stability kompozitové lávky pro pěší a cyklisty.

klíčová slova: ztráta stability, kritická síla, klasické analytické řešení, metoda konečných prvků, lineární analýza stability, nelineární analýza stability

Abstract

This work deals with stability issue during buckling of direct beams and composite stripes and describes mathematical models that were used for analyses. Following methods were used for determination of critical load in case of direct beams: exact analytical solution for buckling of direct beams (Euler), FEM linear and nonlinear analysis performed in software Abaqus. For determination of critical load in case of composite stripes were carried out two experiments with different load schemes: loading by constant displacement, loading by axial force. Later on a linear and nonlinear FEM analysis was conducted. Obtained results were analysed and knowledge was used in stability analysis of composite pedestrian bridge.

key words: stability loss, critical load, exact analytical Euler solution for buckling of direct beams, finite element method, linear and nonlinear stability analysis

Obsah

1	Úvod	6
2	Matematické modely výpočtu ztráty stability	7
2.1	Význam F_{krit}	7
2.2	Analytický model výpočtu vzpěru přímých prutů	8
2.3	MKP modely vzpěru	12
2.3.1	Základní vztahy a značení	12
2.3.2	Materiálový model	14
2.3.3	Obecná úloha statiky	15
2.3.4	Lineární statická úloha	16
2.3.5	Nelineární statická úloha	16
2.3.6	Lineární analýza stability	17
2.3.7	Nelineární analýza stability	18
2.3.8	Konvergence při řešení nelineárních úloh	19
2.4	Odečítání hodnot kritické síly z grafu experimentu a nelineární analýzy	20
3	Porovnání kritických sil při ztrátě stability přímých prutů	20
3.1	Analytický výpočet	20
3.2	Výpočet pomocí MKP	21
3.3	Porovnání výsledků	22
4	Analýza vzpěru kompozitních pásků	26
4.1	Výroba vzorků	26
4.1.1	Prepreg	26
4.1.2	Pultruze	26
4.2	Experiment	27
4.2.1	Experiment I. - zatěžování posuvem	28
4.2.2	Experiment II. - zatěžování silou	29
4.3	Výpočtový model	30
4.3.1	Zavedení nesymetrie pro nelineární analýzu	32
4.4	Porovnání výsledků	32
5	Stabilita lávky	39
6	Závěr	41
	Literatura	41

1 Úvod

V posledních letech došlo k výraznému rozšíření kompozitních materiálů. Jejich nasazení je rozsáhlé zejména u tenkostěnných konstrukcí. Nicméně stále existuje mnoho neznámých faktorů, jenž ovlivňují chování těchto konstrukcí. Jedním z případů chování, které je ovlivněno těmito faktory, je oblast ztráty stability.

Nebezpečí se například skrývá v situaci, kdy může dojít k náhlé ztrátě funkčnosti konstrukce, aniž by se zatížení přiblížilo k materiálové pevnosti. V takových případech dochází například ke ztrátě stability, neboť o dané pevnosti nerozhodne pevnost materiálu, ale stabilitní stav rovnováhy sil[1]. Obecně může nastat ztráta stability nosného celku (globální ztráta stability) nebo pouze jedné, či více z jeho částí (lokální ztráta stability). Stabilitní problémy se vyskytují zejména u tenkostěnných konstrukcí, např. skořepin, desek nebo nosníků. Jeden ze základních případů stability je *vzpěr*. Se stabilitními problémy se setkáváme při konstrukcích kolejí a vozovek, lodí, mostů či letadel[6][7][8].

Například při nesprávné konstrukci kolejnice nebo vozovky může teplotní roztažnost materiálu způsobit ztrátu stability a následné vybočení konstrukce[7]. Trup lodě je během plavby namáhán statickým i dynamickým zatížením. Díky těmto zatížením dochází k lokálním ztrátám stability a to zejména u prvků, které jsou stlačovány, jako jsou příčné vzpěry nebo plátování trupu[6]. U mostních konstrukcí může například dojít ke ztrátě stability mostovky vlivem teplotní roztažnosti materiálu, nebo u nosného prvku vlivem výrobních nepřesností a druhem zatížení[7]. U letadel dochází ke ztrátě stability například u povrchu křídel kvůli jejich specifickému zatížení[9].

U nosníků a prutů existuje řada metod jak řešit jejich stabilitu. Klasické analytické řešení spočívá ve vyjádření momentu působícím v libovolném myšleném řezu a dosazením do diferenciální rovnice průhybové čáry. Tímto způsobem však lze řešit pouze jednoduché případy.

U vzpěru s proměnlivým průřezem nebo proměnlivým zatížením podél osy těchto těles je obtížné určit přesné řešení. Tak lze využít metody, které umožňují pouze přibližné řešení. Nejpoužívanější přibližné metody jsou: metoda energetická a metoda postupných aproximací průhybové čáry. Společným rysem těchto metod je odhad tvaru průhybové čáry[1], kterou vyjádříme trigonometrickými řadami. Podstatou energetické metody je srovnání změny vnitřní potenciální energie s prací vnější osové síly. Metoda postupné aproximace srovnává odhadovanou průhybovou čáru s tou, která by příslušela momentu excentricity osové síly.

V současné době nerozšířenější metodou pro řešení problémů mechaniky poddajných těles je metoda konečných prvků. Výhoda této metody je její univerzální aplikovatelnost. Princip metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do konečného počtu prvků. Zjišťované parametry (posuvy, natočení) se poté určují

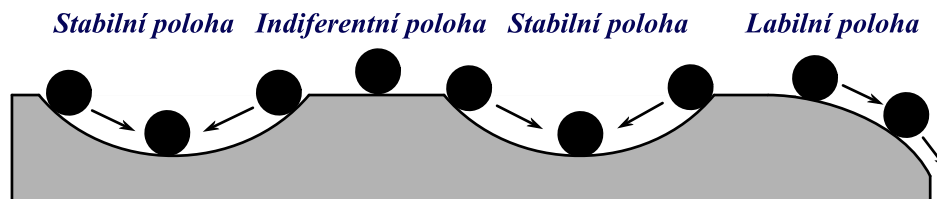
v jednotlivých uzlových bodech těchto prvků.

2 Matematické modely výpočtu ztráty stability

V této kapitole jsou popsány tři způsoby výpočtu kritické síly F_{krit} , při které dojde ke ztrátě stability. Analytický model je v práci použit pro výpočet kritické síly na přímých izotropních štíhlých prutech. Lineární i nelineární MKP¹ analýza je použita pro určení kritické síly na kompozitních páscích a pro určení kritického zatížení kompozitní lávky pro pěší a cyklisty.

2.1 Význam F_{krit}

Při postupném zatěžování se konstrukce může dostat do tří základních stavů rovnováhy[1]. Představme si například prut zatížený centrickým tlakem. Vychýlíme-li mírně tento prut z přímé polohy příčnou silou, tak po jejím odstranění se navrátí do přímé polohy. Tento stav se označuje jako *stabilní*. Se zvyšováním hodnoty zatížení se lze dostat do stavu, kdy tento prut, nuceně vychýlený z přímé polohy, se po odstranění boční vychylující síly nevrací zpět do přímé polohy, ale zůstává nadále prohnutý a má vedle původního stavu ještě další rovnovážné polohy. Tento stav se označuje jako *indiferentní*. Zatěžující síla tohoto stavu se označuje jako F_{krit} . Při velmi malém přírůstku k této síle dochází k velmi velkým posuvům a jakmile dosáhneme mezní osově síly F_{mez} , dojde k lomu. Tento stav těsně před lomem se označuje jako *labilní*.

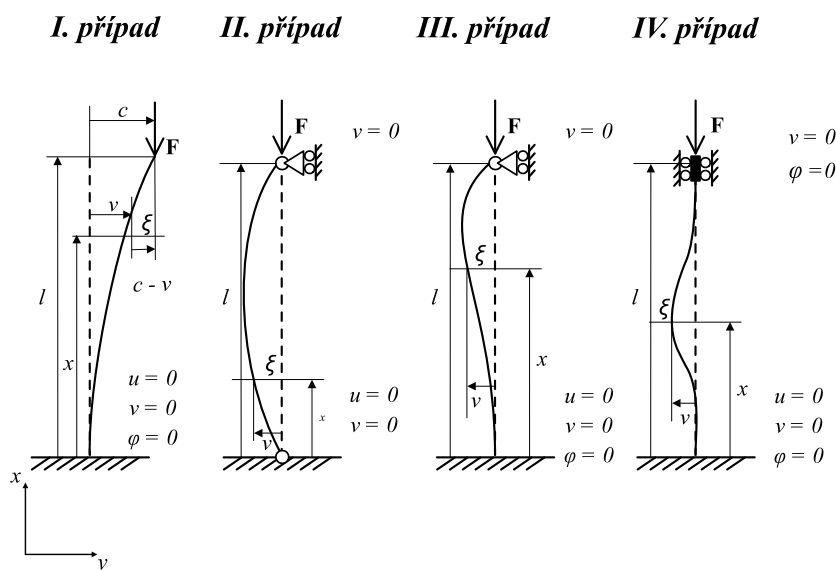


Obrázek 1: Ilustrace možných stavů rovnováhy konstrukce

¹MKP - metoda konečných prvků

2.2 Analytický model výpočtu vzpěru přímých prutů

V následující kapitole bylo využito poznatků ze skript: Pružnost a pevnost II[1]. V případě vzpěru přímých prutů se F_{krit} a F_{mez} zdatelně neliší. Uvažujeme tedy F_{krit} za mez nosnosti prutu. Velikost F_{krit} závisí na rozměrech prutu a na způsobu uložení tohoto prutu. Pro analytický výpočet uvažujeme štíhlý prut zatížený osovou silou, kde případný průhyb, například kvůli výrobním nepřesnostem, vyvolá přídatné ohybové momenty M , které zpětně ovlivní napětí i průhyb daného prutu.



Obrázek 2: Základní druhy vzpěru v indiferentním stavu

Základní případy vzpěru

Princip řešení je u všech čtyř základních případů vzpěru stejný. Nejprve vyjádříme moment v obecném myšleném řezu prutu a zavedeme jej do diferenciální rovnice průhybové čáry

$$v'''(x) = \frac{-M(x)}{EJ_{min}}, \quad (1)$$

kde $M(x)$ je vnitřní ohybový moment, E je modul pružnosti v tahu a J_{min} je minimální kvadratický moment průřezu stanovený k ose prutu. Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, které jsou dány fyzikálními vlastnostmi uložení na obou koncích prutu. Pro odvození jednotlivých případů vzpěru použí-

váme následující momenty $M^i(x)$ v myšleném řezu ξ (obr. 2)

$$M^I(x) = -F(c - v), \quad (2)$$

$$M^{II}(x) = Fv, \quad (3)$$

$$M^{III}(x) = Fv - H(l - x), \quad (4)$$

$$M^{IV}(x) = Fv - M_1, \quad (5)$$

kde H je reakční síla v kloubovém uložení u třetího prutu a M_1 je reakční moment v uložení čtvrtého prutu. Odvození vztahu pro výpočet F_{krit} ukážeme na I. případě vzpěru.

I. případ vzpěru - vetknutý prut s volným koncem

K určení kritické síly uvažujeme, že je prut vyhnut z přímé polohy tak, aby na volném konci vznikl průhyb c . Tento prut je ve stavu *indiferentním*, to znamená, že osová síla již dosáhla síly F_{krit} . V obecném řezu ξ vznikne průhyb v a ohybový moment (obr. 2)

$$M(x) = -F(c - v). \quad (6)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry má tvar

$$v''(x) = \frac{-M(x)}{EJ} = \frac{F}{EJ}(c - v). \quad (7)$$

Zavedeme substituci

$$\frac{F}{EJ} = \alpha^2. \quad (8)$$

Dosadíme do (7) a upravíme na tvar

$$v''(x) + \alpha^2 v = \alpha^2 c. \quad (9)$$

Poté lze výjádřit homogenní řešení

$$v_H = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x, \quad (10)$$

a partikulární řešení

$$v_p = c. \quad (11)$$

Celkové řešení diferenciální rovnice tedy je

$$v = v_H + v_p, \quad (12)$$

$$v = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + c, \quad (13)$$

kde A, B jsou integrační konstanty, které získáme z okrajových podmínek. V tomto případě takto:

$$x = 0; v = 0$$

$$0 = A \cos \alpha 0 + B \sin \alpha 0 + c \quad (14)$$

$$A = -c \quad (15)$$

$$x = 0; v' = 0$$

$$\varphi = v' = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x \quad (16)$$

$$0 = -\alpha A \sin \alpha 0 + \alpha B \cos \alpha 0 \quad (17)$$

$$B = 0 \quad (18)$$

Rovnice průhybové čáry má tvar

$$v = c(1 - \cos \alpha x). \quad (19)$$

Toto dále upravíme pomocí následujících vztahů:

$$x = l; v = c$$

$$c = c(1 - \cos \alpha l) \quad (20)$$

$$\cos \alpha l = 0 \quad (21)$$

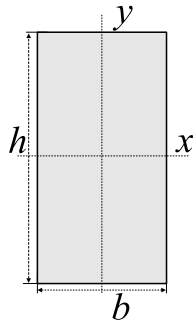
$$\alpha l = k\pi/2 \quad k = (1, 3, 5...) \quad (22)$$

Dosadíme do (22) za α z (8) a získáme vztah pro kritickou sílu F_{krit} pro $k = 1$ (minimální hodnota)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{4l^2}, \quad (23)$$

kde J_{min} je minimální kvadratický moment k ose, tzn. že v případě obdélníkového průřezu dle obrázku 3 má kvadratický moment průřezu hodnotu:

$$J_{min} = J_y = \frac{b^3 h}{12}. \quad (24)$$



Obrázek 3: Kvadratický moment

Odvození ostatních vzorců je analogické a při odvozování využíváme okrajové podmínky dle obrázku 2.

Postupně dospějeme k těmto vzorcům pro získání kritické síly F_{krit} pro I., II., III. a IV. případ vzpěru:

$$F_{krit}^I = \frac{\pi^2 E J_{min}}{4l^2}, \quad (25)$$

$$F_{krit}^{II} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad (26)$$

$$F_{krit}^{III} = \frac{2\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad (27)$$

$$F_{krit}^{IV} = \frac{4\pi^2 E J_{min}}{l^2}. \quad (28)$$

Na první pohled jsou vzorce pro výpočet kritické síly téměř identické. Proto je lze upravit do obecného vzorce

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_{red}^2}, \quad (29)$$

kde l_{red} je redukovaná délka prutu, jejíž hodnota se rovná vzdálenosti inflexních bodů průhybové čáry. Tento vzorec můžeme nadále upravit

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_{red}^2} = \mu \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}; \quad \mu = \left(\frac{l}{l_{red}} \right)^2, \quad (30)$$

kde μ je bezrozměrný délkový součinitel závisující na okrajových podmínkách a l je skutečná délka prutu. Hodnoty μ a l_{red} můžeme nalézt v tabulce 1.

Tabulka 1: Konstanty pro výpočet

Případ vzpěru	I	II	III	IV
μ	1/4	1	2	4
l_{red}	2l	1l	0.7l	0.5l

2.3 MKP modely vzpěru

V této kapitole bylo využito poznatků z literatury [2].

2.3.1 Základní vztahy a značení

V této kapitole bude použito následující značení a vztahy:

E_1	Modul pružnosti v tahu ve směru 1 v souřadnicovém systému materiálových os $O(1, 2, 3)$ (u jednosměrového kompozitu se jedná o směr vláken)
E_2	Modul pružnosti v tahu ve směru 2 v souřadnicovém systému materiálových os $O(1, 2, 3)$
ν_{12}	Poissonovo číslo v rovině kompozitu
G_{12}	Smykový modul pružnosti v rovině kompozitu
G_{13} a G_{23}	Příčné smykové moduly pružnosti
$\boldsymbol{\sigma}$	Vektor napětí
\mathbf{C}	Matice materiálových konstant v souřadnicovém systému materiálových os (elastický tangent, obecně závislá deformacích, napětovém stavu, vrstvení materiálu)
$\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$	Matice pro přepočítání posuvů na deformace (lineární a nelineární část)
$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}$	Vektor malých deformací (pro velké se zápis liší pro různé typy prvků a využívá prvků matice \mathbf{B}_{NL})
$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$	Zkosení v souřadnicovém systému $O(1, 2, 3)$
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Deformace v souřadnicovém systému $O(1, 2, 3)$

\mathbf{T}_σ	Transformační matice pro napětí
\mathbf{T}_ε	Transformační matice pro deformace
\mathbf{Q}	Matice materiálových konstant v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$
t	Čas
Δt	Časový krok
i	Číslo iterace
λ	Faktor zatížení
$\hat{\mathbf{u}}$	Vektor posuvů (natočení) v uzlech elementů
$\Delta \hat{\mathbf{u}}$	Vektor přírůstku posuvů (natočení) v uzlech elementů
\mathbf{H}	Matice interpolačních funkcí v elementu
$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}$	Vektor posuvů (natočení) uvnitř elementu (zde je $\hat{\mathbf{u}}$ myšleno jen v rámci elementu)
$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}), \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$	Matice a vektor napětí složený z prvků tenzoru napětí (dle typu úlohy se jedná o Cauchyovo, Piola-Kirchofovo nebo inženýrské napětí)
V	Objem přes který se integruje
S	Plocha přes kterou se integruje
$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV$	Vektor napětí vnitřních sil
$\mathbf{M}_F, \Delta \mathbf{M}_F$	Matice tuhosti vnitřních sil
$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_C$	Vektor vnějších zatížení skládající se z vektoru objemových sil, plošných sil a bodových sil
$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV$	Vektor objemových sil
$\mathbf{M}_B = \int_V \mathbf{H}^T \frac{\partial \mathbf{f}^B}{\partial \mathbf{u}} dV$	Matice tuhosti zatížení objemových sil se změnou posuvů
$\Delta \mathbf{M}_B = \int_V \mathbf{H}^T \frac{\partial \Delta \mathbf{f}^B}{\partial \mathbf{u}} dV$	Matice tuhosti přírůstku zatížení objemových sil se změnou posuvů
$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^T \mathbf{f}^S dS$	Vektor plošných sil
$\mathbf{M}_S = \int_S \mathbf{H}^T \frac{\partial \mathbf{f}^S}{\partial \mathbf{u}} dS$	Matice tuhosti zatížení plošných sil
$\Delta \mathbf{M}_S = \int_S \mathbf{H}^T \frac{\partial \Delta \mathbf{f}^S}{\partial \mathbf{u}} dS$	Matice tuhosti přírůstku zatížení plošných sil se změnou posuvů

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}$	Matice tuhosti složená z lineární a nelineární části
$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV$	Matice lineární tuhosti
$\mathbf{K}_{NL} = \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_{NL} dV$	Matice nelineární tuhosti
$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_L + \mathbf{M}_F - \mathbf{M}_B - \mathbf{M}_S$	Matice tuhosti s předpětími a předzatíženími
$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{M}_F - \Delta \mathbf{M}_B - \Delta \mathbf{M}_S$	Přírůstek matice tuhosti s předpětími a předzatíženími

Zde jsou vztahy uvedeny spíše ilustračně, v reálném případě se integrály se vypočtou na ploše nebo objemu prvků. Následně jsou celkové vektory zatížení nebo matice tuhosti tvořeny součtem přes všechny prvky struktury. Pro kompozity (vrstvené materiály) probíhá integrace i po tloušťce materiálu a ne jen v „klasických integračních bodech“ a poté například konstitutivní vztah bude mít trochu jiný tvar než (31).

2.3.2 Materiálový model

Konstitutivní vztah pro jednu vrstvu kompozitního materiálu má tvar[3]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (31)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor napětí, \mathbf{C} je matice materiálových konstant a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor deformací. Následující vztah výjádřený v souřadnicovém systému materiálových os $O(1, 2, 3)$, který lze využít například pro tlusté skořepiny, lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} & \frac{E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix}.$$

Pro výpočet matice materiálových konstant \mathbf{Q} v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$

je nutno využít transformačních matic pro napětí \mathbf{T}_σ a pro deformace \mathbf{T}_ε

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 2 \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -2 \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ -2 \sin \phi \cos \phi & 2 \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

kde ϕ označuje natočení souřadnicového systému. Matici materiálových konstant v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$ lze získat vztahem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (32)$$

ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix}.$$

Pro sestavení celkové matice materiálových konstant musíme prvky matice \mathbf{Q} , které přísluší jednotlivým vrstvám integrovat po tloušťce modelu. Poté lze obdržet konstitutivní vztah ve formě závislosti deformační roviny kompozitu (skořepiny) a její křivosti a výsledných momentů sil. Více informací lze nalézt ve skriptech [3] popřípadě v manuálu [4].

2.3.3 Obecná úloha statiky

V následujících krátkých kapitolách bude ukázáno, jak je formulována obecná úloha statiky a detailněji popsána úloha lineární a nelineární statiky i s nastíněním způsobu řešení, tak aby bylo možno snadno pochopit rozdíl oproti problémům statiky, které jsou rozněž ukázány.

Při řešení statické úlohy musí platit rovnováha sil

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (33)$$

Vektor vnitřních sil lze napsat ve tvaru

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = {}^t \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}. \quad (34)$$

S použitím matice tuhosti ${}^t\mathbf{K}$, která odpovídá stavu struktury v čase t , lze $\Delta\mathbf{F}$ aproximovat jako

$${}^t\mathbf{K} \doteq \frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{u}}, \quad (35)$$

a tedy

$$\Delta\mathbf{F} \doteq {}^t\mathbf{K}\Delta\hat{\mathbf{u}}, \quad (36)$$

poté lze zapsat obecný problém statiky ve tvaru

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}.} \quad (37)$$

Vyřešením pro $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ dostaneme aproximaci posuvů (natočení)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \doteq {}^t\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}}. \quad (38)$$

2.3.4 Lineární statická úloha

V tomto typu úlohy uvažujeme lineární závislost mezi posuvy a deformacemi a konstantní matice materiálových konstant \mathbf{C} . Poté lze rovnici (37) přepsat takto

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}_L\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}.} \quad (39)$$

Vyřešením pro $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ dostaneme výsledný vektor posuvů (natočení)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} = {}^t\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}}. \quad (40)$$

2.3.5 Nelineární statická úloha

V případě uvažování nelineární závislosti mezi posuvy a deformacemi nebo matice materiálových konstant \mathbf{C} , která je závislá například na deformacích (posuvech uzlů) a nebo obojího, lze rovnici (37) přepsat takto

$$\boxed{({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}.} \quad (41)$$

Vyřešením pro $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ dostaneme aproximaci posuvů (natočení)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \doteq {}^t\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}}. \quad (42)$$

Z důvodu nelineárních závislostí v řešené rovnici je nutné řešit tento problém iteračně, například Newton-Raphsonovou metodou:

$$\boxed{\begin{aligned} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_L^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL}^{(i-1)})\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \\ {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \end{aligned}} \quad (43)$$

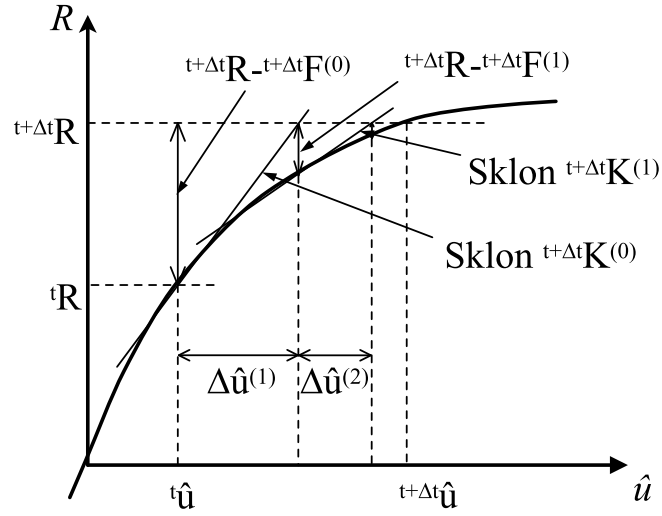
kde

$${}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(0)} = {}^t\Delta\hat{\mathbf{u}}, \quad (44)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{K}_L^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_L, \quad (45)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{K}_{NL}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_{NL}, \quad (46)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}. \quad (47)$$



Obrázek 4: Ilustrace Newton-Raphsonovy metody

2.3.6 Lineární analýza stability

Úloha lineární analýzy stability spočívá ve výpočtu vlastního čísla λ , které po přepočtu (závisí na druhu zatížení) udává velikost síly, kdy dojde ke ztrátě stability. Vlastní číslo λ získáme z následující rovnice

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}_0 + \lambda\Delta\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (48)$$

pro nás bývá nejdůležitější první vlastní číslo λ_1 a jemu příslušný první (normovaný) tvar ztráty stability ($\bar{\mathbf{u}}$). Kritické zatížení získáme ze vztahu

$$\mathbf{R}_{krit} = {}^t\mathbf{R} + \lambda_1\Delta\mathbf{R}. \quad (49)$$

2.3.7 Nelineární analýza stability

Výsledkem této metody je graf závislosti síly na posuvu dle naší volby. V případě uvažování nelineární závislosti mezi posuvy a deformacemi nebo matice materiálových konstant \mathbf{C} , která je závislá například na deformacích (v důsledku tedy na posuvech uzlů) a nebo obojího a v případě, že se provádí výpočet, kdy struktura může ztratit stabilitu, tzn. když hodnota zatížení od určitého bodu při zvyšování posuvů může i klesat, lze problém (37) přeformulovat takto

$$\boxed{({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}.} \quad (50)$$

Vyřešením pro $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ dostaneme aproximaci posuvů (natočení)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \doteq {}^t\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}}. \quad (51)$$

Z důvodu nelineárních závislostí v řešené rovnici je nutné řešit tento problém iteračně, například metodou konstantní délky oblouku:

$$\boxed{\begin{aligned} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_L + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL})^{(i-1)}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= ({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)})\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \\ {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \\ {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)}, \end{aligned}} \quad (52)$$

přičemž musíme dodat ještě jednu rovnici ($f(\Delta\lambda^{(i)}, \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) = 0$) aby byl problém řešitelný. Tato rovnice je definovaná pomocí tzv. délky oblouku Δl a parametru β (oba parametry zadává uživatel).

$$\boxed{(\lambda^{(i)})^2 + \frac{(\hat{\mathbf{u}}^{(i)})^T \hat{\mathbf{u}}^{(i)}}{\beta} = (\Delta l)^2.} \quad (53)$$

Počáteční podmínky pro iterační proces jsou

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{u}^{(0)} = {}^t\Delta\mathbf{u}, \quad (54)$$

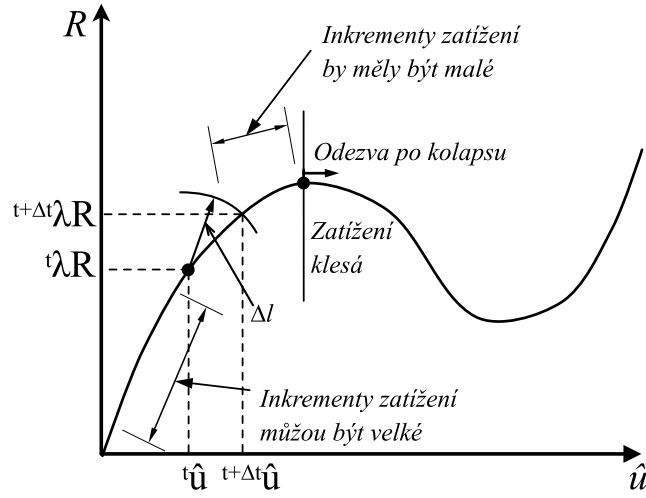
$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(0)} = {}^t\lambda, \quad (55)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{K}_L^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_L, \quad (56)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{K}_{NL}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_{NL}, \quad (57)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}. \quad (58)$$

Metoda konstantí délky oblouku není jediná metoda řešící tento problém.



Obrázek 5: Ilustrace metody konstantní délky oblouku

2.3.8 Konvergence při řešení nelineárních úloh

Ukončení iteračních procesů pro určení $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ se provede po splnění vybraného konvergenčního kritéria.

Poměr přírůstků posuvů

$$\frac{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}\|_2} \leq \epsilon_D \quad (59)$$

Poměr rozdílu reakcí

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}\|_2} \leq \epsilon_F \quad (60)$$

Poměr energií (kombinace posuvů a reakcí)

$$\frac{(\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)})^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)})}{(\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(1)})^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F})} \leq \epsilon_E \quad (61)$$

Čísla ϵ_D , ϵ_F a ϵ_E musí být dostatečně malá.

2.4 Odečítání hodnot kritické síly z grafu experimentu a nelineární analýzy

Získání hodnoty kritické síly z grafu experimentu, či nelineární analýzy je problematické, neboť určit hodnotu kritické síly jednoznačně je vzhledem ke tvaru křivky obecně komplikované. Proto určujeme pouze sílu přibližnou. Pro přibližné určení síly byla určena následující konvence: sílu odečítáme v místě, kde se velikost gradientu křivky začne na svém okolí viditelně měnit. Zde je ovšem nutno brát v potaz měřítko, ve kterém grafy zobrazujeme.

3 Porovnání kritických sil při ztrátě stability přímých prutů

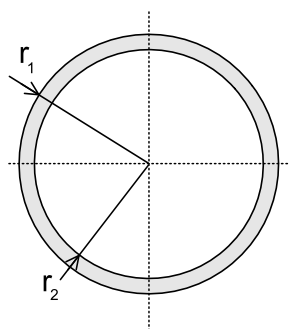
Cílem této kapitoly bylo porovnat analytické a MKP řešení v případě vzpěru přímých prutů pro všechny čtyři případy namáhání a uložení.

3.1 Analytický výpočet

K výpočtu hodnot kritické síly byly použity vztahy (25) až (28), kde dosadíme za $J_{min} = \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4)$. Ostatní konstanty jsou uvedeny v tabulce 3.

Tabulka 3: Parametry modelu

E	200 GPa
r_1	10.0 mm
r_2	8.0 mm
l	1.0 m



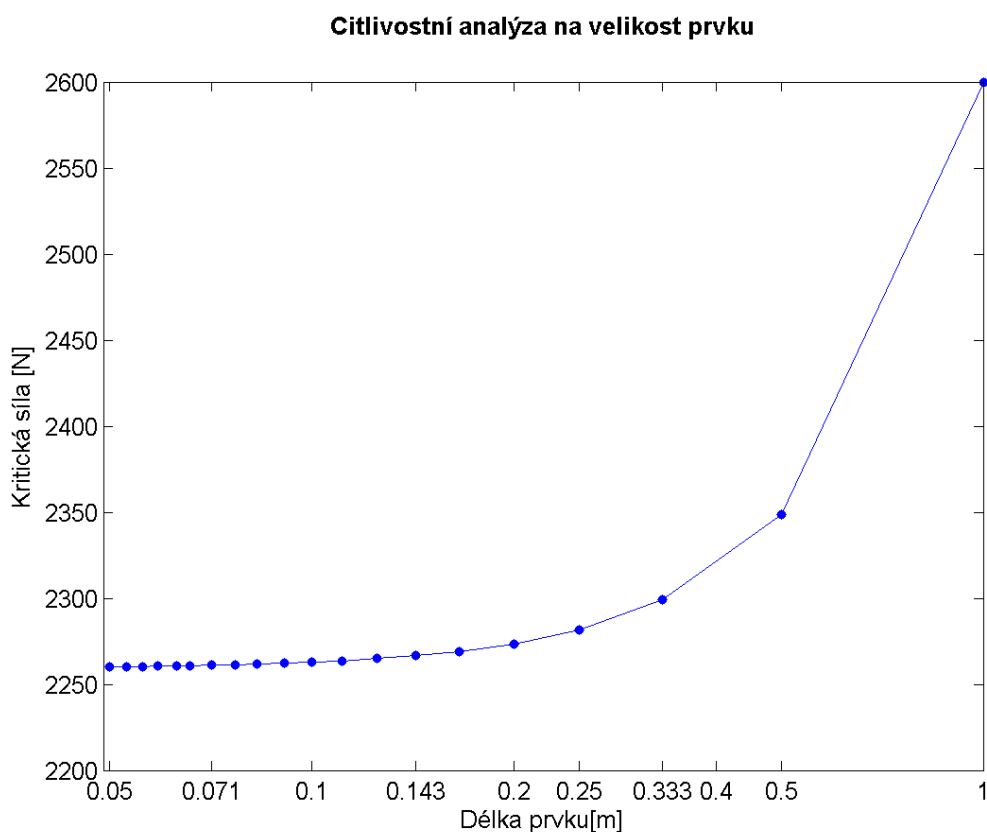
Obrázek 6: Průřez prutu

3.2 Výpočet pomocí MKP

Model byl vytvořen v MKP softwaru Abaqus. Zde byly parametricky vytvořeny čtyři nosníky z prvků typu *beamB31*. Všechny čtyři nosníky byly zkonstruovány se stejnými geometrickými a materiálovými vlastnostmi. Každý nosník měl mezikruhový průřez dle přiloženého obrázku 6, jehož rozměry můžete nalézt v tabulce 3. Dále byly definovány okrajové podmínky a prut byl osově zatížen silou F .

Citlivostní analýza na velikost prvku

Nejprve byla opakovaně provedena lineární analýza pro I. prut s použitím prvků o různých délkách a následně byla sestavena grafická závislost výsledků této analýzy. Z těchto výpočtů vyplývá, že hodnoty kritické síly jsou citlivé na velikost prvku, avšak jakmile dosáhneme určité délky, v našem případě 0.1 m (10 prvků po délce nosníku), hodnoty kritických sil se příliš nemění. Graf lze nalézt na obrázku 7.



Obrázek 7: Citlivostní analýza na velikost prvku

Zvolená velikost prvku

Pro lineární i nelineární analýzu byly použity prvky s velikostí 0.05 m (20 prvků po délce nosníku) a hodnoty kritických sil zaznamenány a porovnány s analytickým řešením.

Zavedení nesymetrie do modelu pro nelineární analýzu

Při této analýze jsou, na rozdíl od předchozí, uvažovány velké deformace. Zde je nutno zavést do modelu určitou nesymetrii[4], například zavedením boční síly F_{vych} dle obrázku 8. Tato síla, která je řádově menší než kritická zatěžující síla F_{krit} , způsobí vychýlení nosníku a umožní tak ztrátu jeho stability. Dále je nutno nastavit výpočet tak, aby zatížení přesáhlo F_{krit} a došlo tak ke zhroucení vzorku[4].



Obrázek 8: Zatížení nelineárního modelu

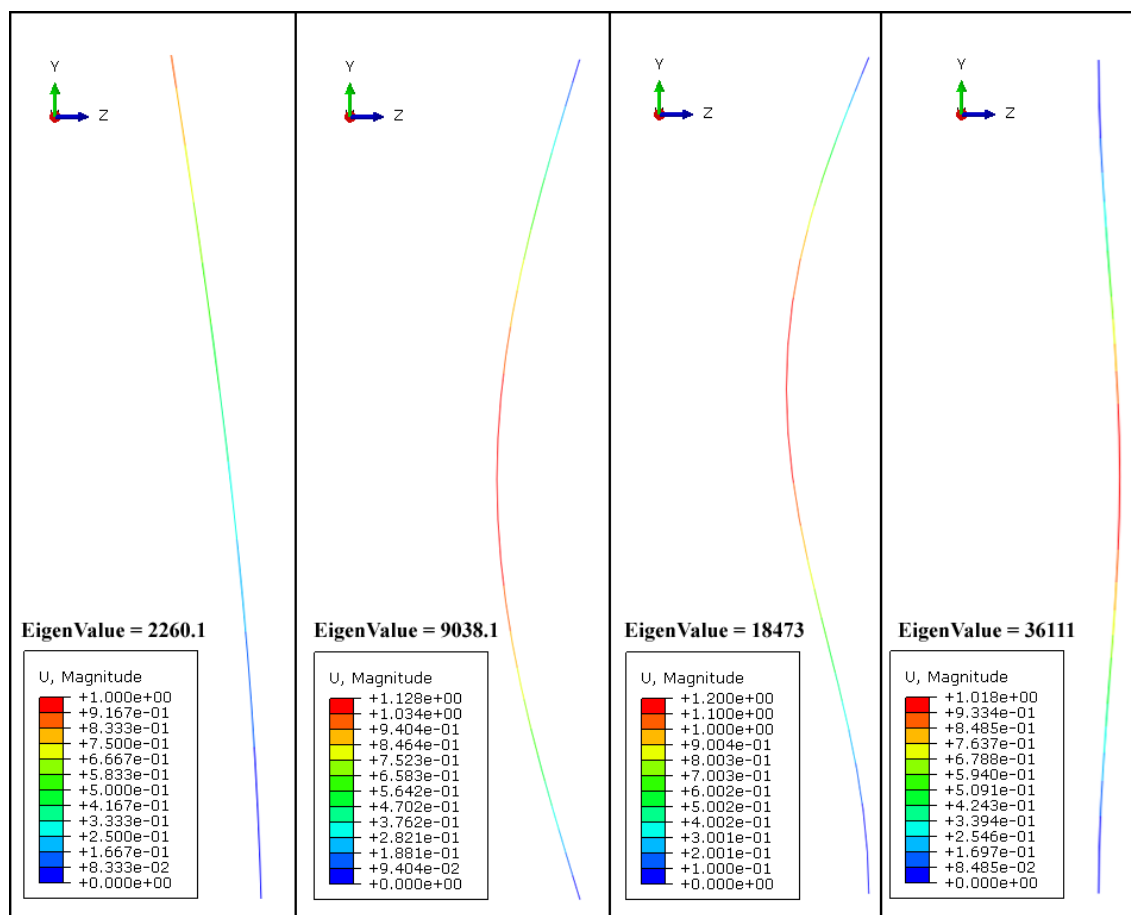
3.3 Porovnání výsledků

Hodnoty F_{krit} získané pomocí jednotlivých typů analýz provedených v MKP softwaru Abaqus nalezneme v tabulce 4. Rozdíl mezi hodnotami lineárního výpočtu a analyticky vypočtenými hodnotami se pohybuje do 1.4 %. Největší rozdíl hodnot analytického a nelineárního výpočtu byl nalezen u prutu IV a to 6.04 %.

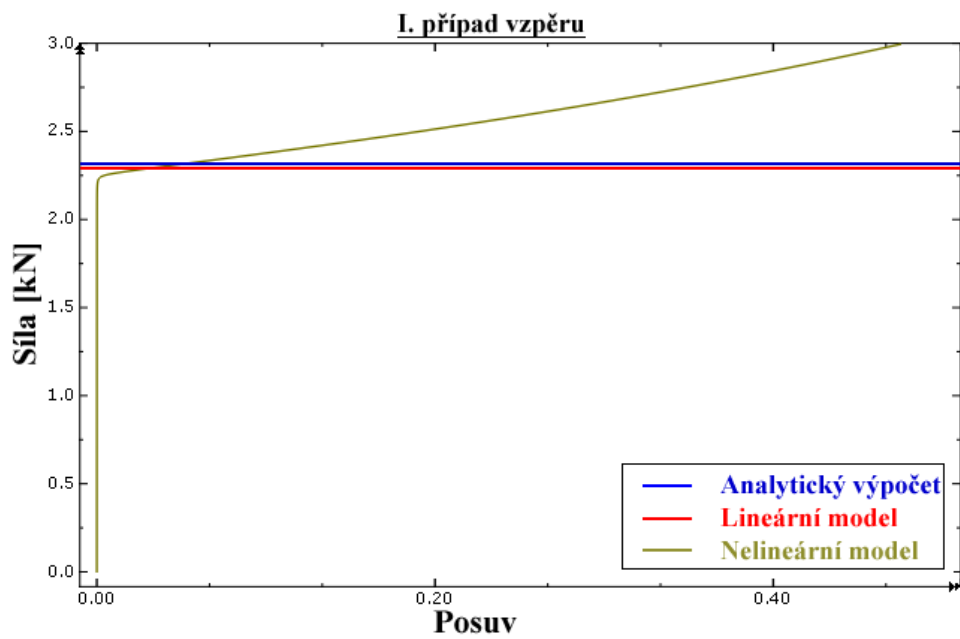
Tabulka 4: Porovnání výsledků

	I. případ	II. případ	III. případ	IV. případ
F_{krit} Analytické	2288.3	9153.05	18679.7	36612.2
F_{krit} Lineární výpočet	2260.1	9038.1	18473	36111
% rozdíl hodnot	1.24 %	1.27 %	1.12 %	1.39 %
F_{krit} Nelineární výpočet	2240	8890	17900	34400
% rozdíl hodnot	1.90 %	2.87 %	4.17 %	6.04 %

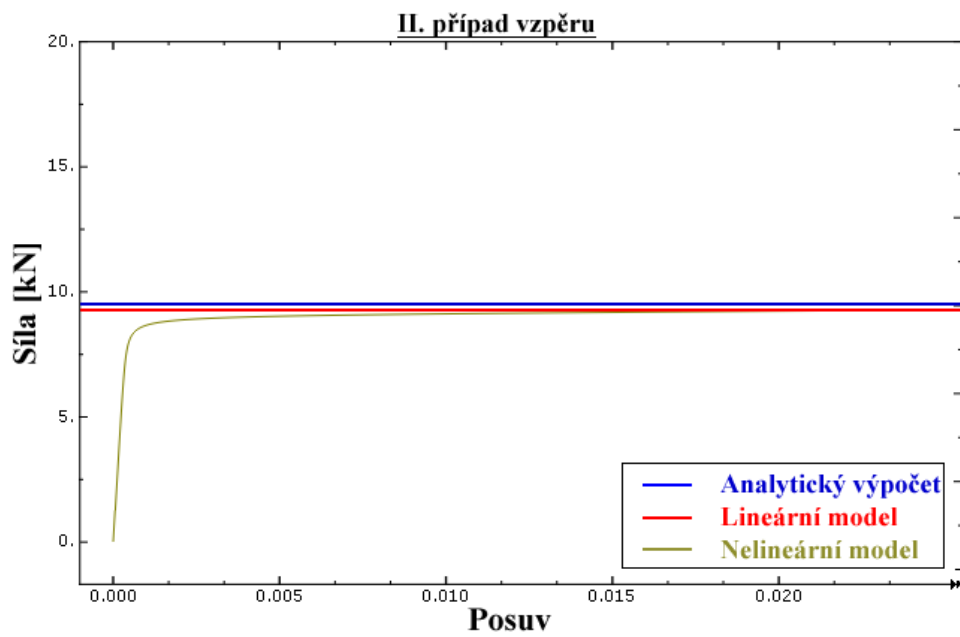
Porovnání výsledků všech analýz lze také nalézt na obrázcích 10, 11, 12 a 13. Na grafu pro první případ vzpěru (obrázek 10) je vidět, že po překročení F_{krit} dále znatelně roste zatížení a posuv a nedochází ke kolapsu prutu. Tento jev může být způsoben skutečností, že první prut nemá žádné boční vedení jako ostatní pruty a dochází u něj po ztrátě stability ke klasickému ohybu.



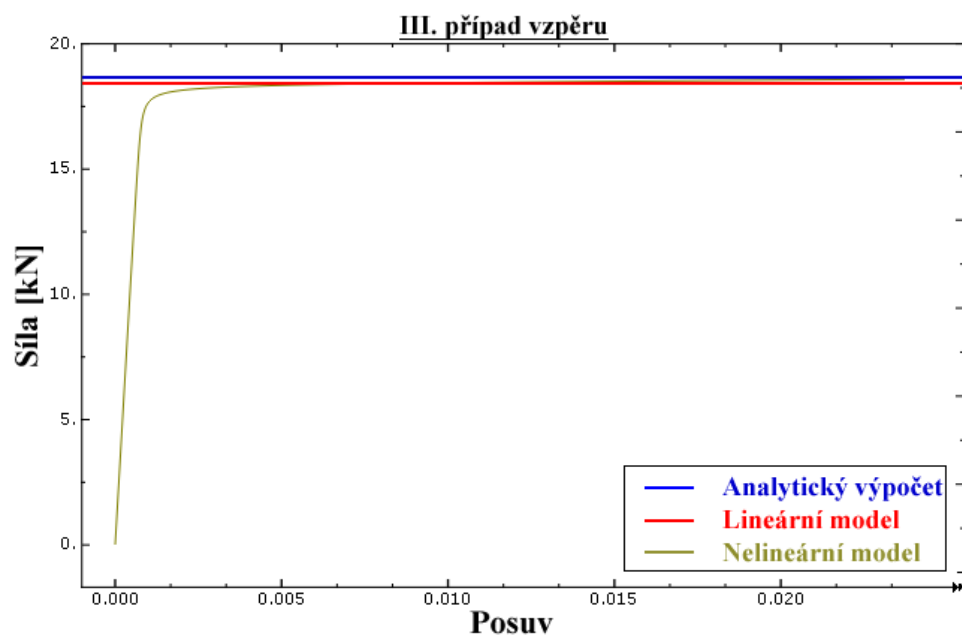
Obrázek 9: Výsledné hodnoty vlastních čísel a tvar normovaného vlastního vektoru



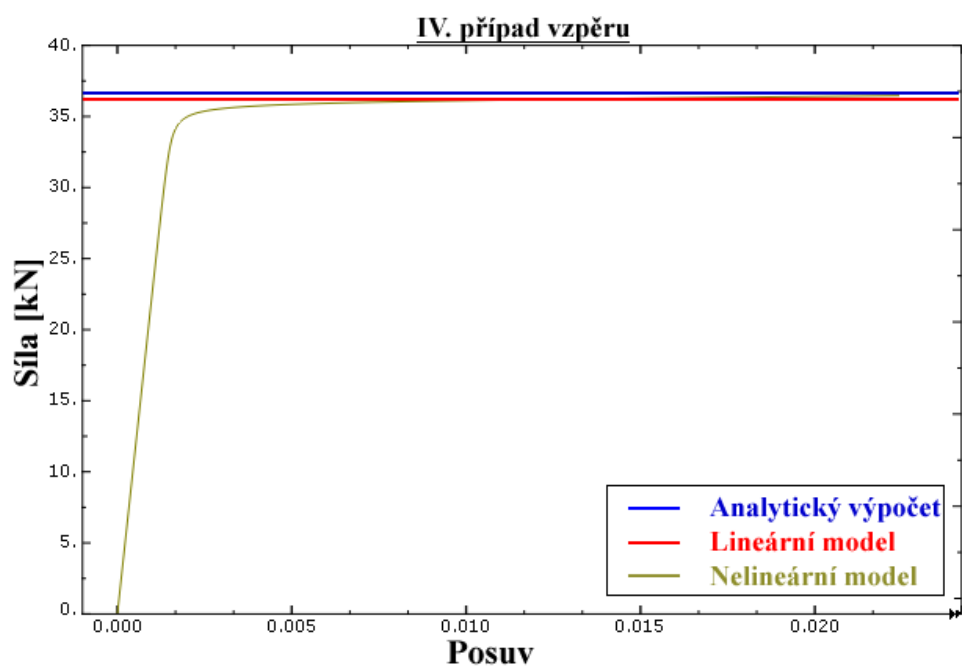
Obrázek 10: Závislost posuvu a síly a kritická síla pro I. případ vzpěru



Obrázek 11: Závislost posuvu a síly a kritická síla pro II. případ vzpěru



Obrázek 12: Závislost posuvu a síly a kritická síla pro III. případ vzpěru



Obrázek 13: Závislost posuvu a síly a kritická síla pro IV. případ vzpěru

4 Analýza vzpěru kompozitních pásků

V problematice vzpěru kompozitních materiálů je řada okolností, které ovlivňují přesnost predikce kritické síly. Cílem bylo provést experiment na řadě vzorků z různých materiálů, vytvořit odpovídající modely, výsledky porovnat a poukázat na potenciální problémy.

4.1 Výroba vzorků

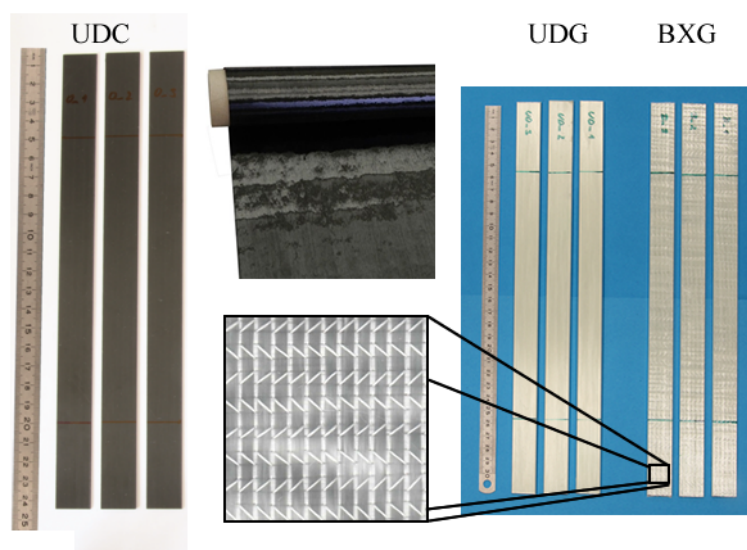
4.1.1 Prepreg

Vzorky obsahující uhlíková vlákna (*UDC*) byly připraveny z předimpregnovaných vláken (*Prepreg*). Prepregy jsou polotovary používané k výrobě vláknových kompozitů, kde je spolu s výztuží (uhlíková tkanina) přítomna i matrice, v tomto případě epoxidová pryskyřice. Matrice je pouze částečně ošetřena do lepkavého stavu kvůli snadnější manipulaci, a proto musí být během skladování ochlazována, aby nedošlo k jejímu ztuhnutí. Dále je tento polotovar vložen do autoklávu, kde za vysokého tlaku a teploty je vzorek vytvrzen.

4.1.2 Pultruze

Vzorky obsahující skelná vlákna s biaxiální (*BXG*) a jednosměrovou (*UDG*) orientací byly vyrobeny metodou *pultruze*². Obecně se rozlišují dva druhy výrobního procesu: otevřený a uzavřený[8]. Při otevřeném výrobním procesu se výztuž (zde skelná vlákna) vede přes ponořovací válec do vany s matricí (polyesterová pryskyřice). Dále se pomocí mřížky odstraní přebytečná matrice a pomocí tvárných nástrojů vytvoří požadovaný profil. Při uzavřeném výrobním procesu se výztuž dostává pod tlakem do styku s matricí až při vlastním formování a to proto, abychom dostali lépe impregnovanou výztuž. Během výrobního postupu je výztuž tažena přes injektážní zařízení a vytvrzovací hlavu pomocí tažného zařízení k dalšímu opracování.

²Název pultruze pochází z anglických slov pull - táhnout a extrusion - protlačování



UDC Uhlíková vlákna spojená epoxidovou pryskyřicí

UDG Skelná jednosměrově orientovaná vlákna spojená polyesterovou pryskyřicí

BXG Skelná biaxiálně orientovaná vlákna spojená polyesterovou pryskyřicí

Obrázek 14: Vzorčky k experimentům

4.2 Experiment

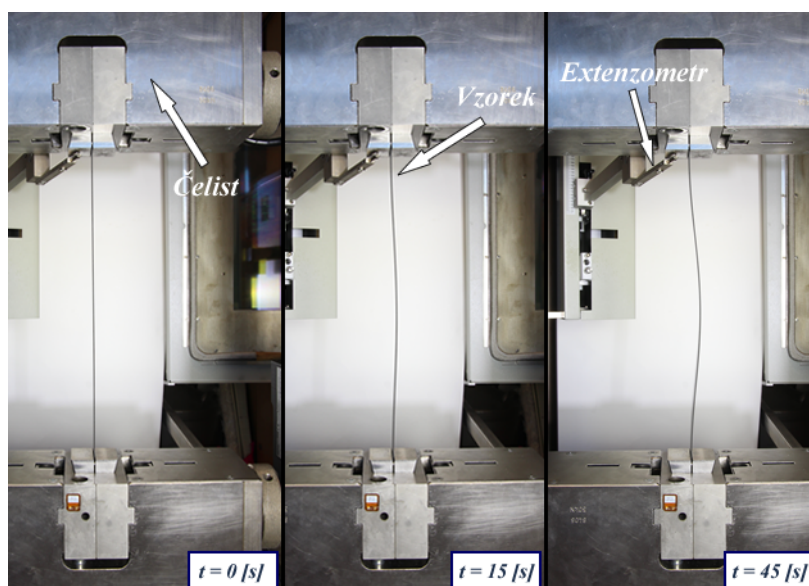
Experiment proběhl na Katedře mechaniky, Fakulty aplikovaných věd. Bylo použito čtyřicet vzorků kompozitních pásků jejichž geometrické vlastnosti lze nalézt v tabulce 5. Tyto pásky byly vyrobeny ze tří různých materiálů, jejichž vlastnosti jsou uvedeny v tabulce 6.

Tabulka 5: Geometrické vlastnosti (průměrné hodnoty)

#	Materiál	Orientace ^[°]	Délka[mm]	Šířka[mm]	Tloušťka[mm]
1	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	100	24.58	1.12
2	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	200	24.64	1.12
3	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	300	24.66	1.12
4	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	100	24.72	1.15
5	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	200	24.70	1.14
6	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	300	25.50	1.15
7	UDC	$[90]_8$	200	24.62	1.12
8	UDC	$[0]_8$	200	24.59	1.12
9	UDG	$[0]_8$	200	19.43	2.26
10	BXG	$[0, 90, 0, 90]_S$	200	19.72	2.27

4.2.1 Experiment I. - zatěžování posuvem

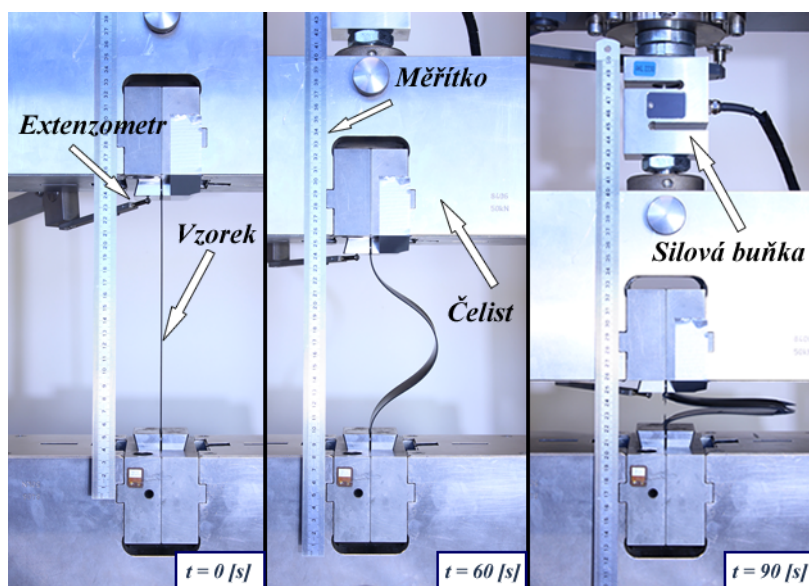
V tomto experimentu byly použity 3 vzorky pro každou konfiguraci materiálu a skladby vrstev (viz tabulka 5). Vzorky byly uchyceny do čelistí trhacího stroje dle obrázku 15, kde jedna z čelistí byla nepohyblivá a druhá čelist zatěžovala vzorek konstantním posuvem. Posuv byl měřen extenzometrem a síla silovou buňkou. Tento způsob měření byl ovlivněn maximální rychlostí stroje po dosažení kritického posuvu a při následném zhroucení vzorku.



Obrázek 15: Průběh experimentu I

4.2.2 Experiment II. - zatěžování silou

Tento experiment byl vždy proveden pouze pro jeden vzorek z dané skupiny. Celkem bylo provedeno 10 experimentů, ze kterých byla získána grafická závislost posuvu na síle. Vzorek byl uchycen v testovacím zařízení tak, aby okrajovými podmínkami odpovídal předchozímu experimentu. Dále bylo postupně zvětšováno zatížení až bylo dosaženo kritické síly a došlo ke zhroucení vzorku. Posuv byl opět zaznamenán pomocí extenzometru. V tomto případě byl problém s omezenou rychlostí stroje menší než v předešlém experimentu.



Obrázek 16: Průběh experimentu II

4.3 Výpočtový model

Tvorba modelů probíhala v MKP softwaru Abaqus, který byl ovládán skrze textový soubor napsaný v programovacím jazyce Python a upravovaný v editoru PSPad.

Celkem bylo vytvořeno 30 modelů s různými geometrickými a materiálovými vlastnostmi pomocí dvou typů prvků. Nejprve byly parametricky vytvořeny dva modely: jeden model tvořený z čtyřuzlových prvků typu *shell – S4* a druhý tvořený z dvacetíuzlových prvků typu *solid – C3D20*. Oba typy prvků měli 3 integrační body po tloušťce v každé vrstvě materiálu (celkem 24 v příčném řezu pásku).

Na oba modely byly aplikovány okrajové podmínky dle obrázku 17. Jeden konec pásku byl vetknut a na druhý konec byly aplikovány následující okrajové podmínky: zamezení posuvu ve směru os x a y , zamezení rotace kolem os x , y , z . Nadále bylo přidáno zatížení koncentrovanou silou ve směru podélné osy pásku. Okrajové podmínky a zatížení byly aplikovány pomocí funkce *equations* do referenčních bodů, aby bylo možno snadněji odečítat výsledky. Funkce *equations* umožňuje vybrané prvky kinematicky svázat.

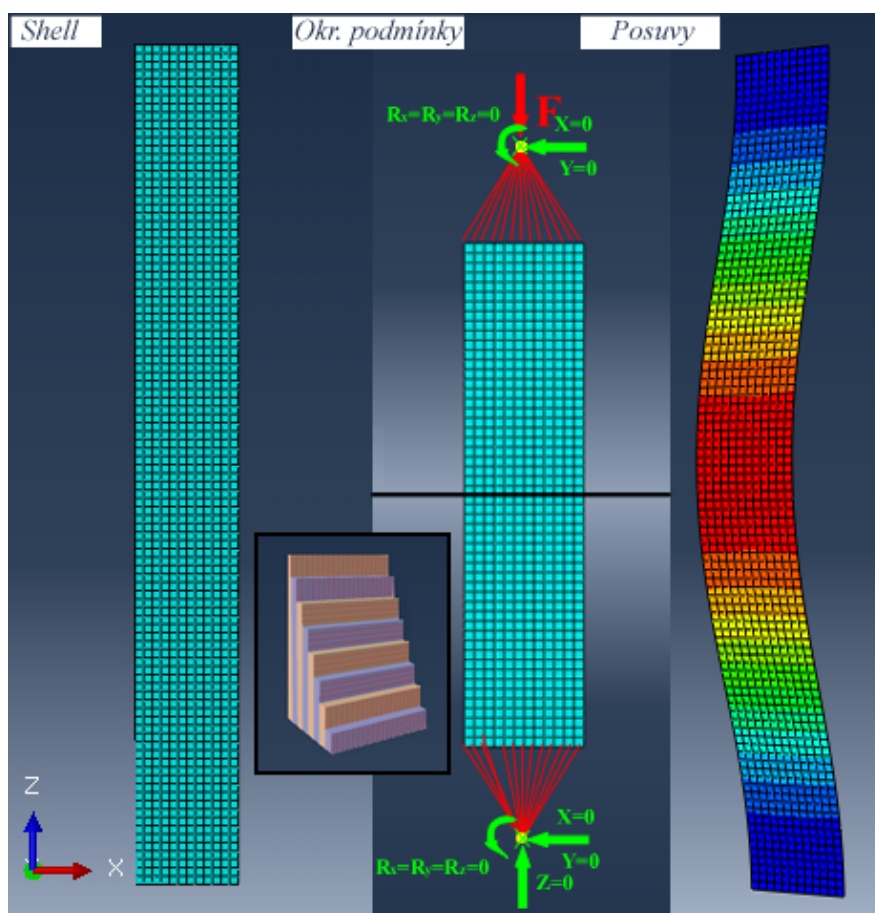
Dále byly pomocí změny parametrů vytvořeny zbylé modely, jejichž geometrické a materiálové vlastnosti lze nalézt v tabulkách 5³ a 6 a provedeny dva typy analýz: lineární a nelineární.

³Vlákna jsou orientována tak, aby hodnota 0° odpovídala orientaci podélné osy pásku.

Tabulka 6: Materiálové vlastnosti

	<i>UDC</i>		<i>BXG</i>		<i>UDG</i>	
E_1	100	GPa	21.0	GPa	43.0	GPa
E_2	8	GPa	15.8	GPa	12.4	GPa
E_3	8	GPa	15.8	GPa	12.4	GPa
ν_{12}	0.337		0.250		0.250	
ν_{13}	0.337		0.250		0.250	
ν_{23}	0.333		0.250		0.250	
G_{12}	4.60	GPa	1.0	GPa	2.5	GPa
G_{13}	4.60	GPa	1.0	GPa	2.5	GPa
G_{12}	3.01	GPa	1.0	GPa	2.5	GPa

E_i - Youngův modul pružnosti v tahu v daném směru; G_{ij} - Modul pružnosti v dané rovině; ν_{ij} - Poissonovo číslo



Obrázek 17: MKP model - Abaqus

4.3.1 Zavedení nesymetrie pro nelineární analýzu

Do tohoto modelu musíme zanést určitou nesymetrii, abychom docílili ztráty stability.

Nesymetrie způsobena vychylující silou

V prvním případě bylo dosaženo ztráty stability stejným způsobem jako v předchozí kapitole. Byla aplikována vychylující síla, která působila uprostřed pásku ve směru kolmém na jeho podélnou osu. Při volbě příliš malé vychylující síly nedojde ke ztrátě stability a při volbě příliš velké síly ovlivníme výsledky[4].

Nesymetrie způsobena chybou v orientaci

V druhém případě byla zanesena nesymetrie do modelu pomocí vychýlení orientace jedné z krajních vrstev pásku o co možná nejmenší úhel. Tento úhel byl díky konfiguraci vrstev pro každý druh pásku jiný a hodnoty lze nalézt v tabulce 7.

Tabulka 7: Chyby v orientaci krajní vrstvy modelu

Číslo exp.	Materiál	Orientace ^[°]	Délka[mm]	Chyba v orientaci ^[°]
1	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	100	15
2	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	200	10
3	UDC	$[0, 0, 90, 90]_S$	300	11
4	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	100	1
5	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	200	1
6	UDC	$[+45, -45, +45, -45]_S$	300	1
7	UDC	$[90]_8$	200	14
8	UDC	$[0]_8$	200	4
9	UDG	$[0]_8$	200	10
10	BXG	$[0, 90, 0, 90]_S$	200	13

4.4 Porovnání výsledků

V této sekci jsou porovnány výsledky získané během výše zmíněných experimentů a výsledky z lineárního i nelineárního výpočtu z MKP programu Abaqus. Veškeré výsledky můžeme nalézt v tabulce 8.

Porovnání hodnot kritické síly z I. experimentu a lineárního výpočtu

Pro většinu vzorků (druhy 2-3, 7-10) vychází hodnota síly získané ze simulace menší, než skutečná hodnota síly, kdy dojde ke zhroucení vzorku v důsledku ztráty stability. U takovýchto vzorků tvořených uhlíkovými vlákny se velikost rozdílu pohybuje od -1 % do -10 % hodnoty z experimentu. U vzorků se skelnými vlákny, které mají jednosměrové uspořádání (UDG), je velikost rozdílu těchto hodnot průměrně -10.5 %. U vzorků s biaxiálně uspořádanými vlákny (BXG) je tato hodnota v průměru -12.5 % hodnoty z experimentu. Tyto záporné hodnoty znamenají, že numerický model dosáhne kritické síly dříve než skutečný. U vzorků typu 4 - 6 (vzorky s uhlíkovými vlákny a orientací $[+45, -45, +45, -45]_S$) je rozdíl hodnot značný 31 % - 41%.

Tabulka 8: Porovnání výsledných kritických sil [N]

	1	2	3	4	5
Experiment I.	943.17	257.17	117.30	200.17	44.90
Experiment II.	930.00	245.00	115.00	210.00	45.00
Num. lineární analýza, shell	1001.90	252.83	112.58	281.87	58.58
Num. lineární analýza, solid	1003.83	254.89	113.16	282.76	59.51
Num. nelineární analýza, síla	940.00	250.00	111.00	210.00	45.00
Num. nelineární analýza, orientace	901.00	237.00	104.00	292.00	57.90
	6	7	8	9	10
Experiment I.	18.65	24.04	315.67	869.33	421.67
Experiment II.	23.40	24.20	305.00	—	460.00
Num. lineární analýza, shell	25.10	22.78	284.39	778.86	367.52
Num. lineární analýza, solid	25.35	23.05	286.52	785.75	370.97
Num. nelineární analýza, síla	26.80	22.40	281.00	783.00	374.20
Num. nelineární analýza, orientace	24.40	23.00	270.00	756.00	350.00

Porovnání hodnot kritických sil z lineárních výpočtů a závislosti posuvu na síle nelineárních výpočtů a experimentů

U vzorků typu 1, 2 a 3 s orientací $[0, 0, 90, 90]_S$ je zjevné, že nelineární analýza, kde došlo k vychýlení pomocí přídavné síly, se téměř shoduje s výsledky experimentů. Rozdíl těchto hodnot se pohybuje do 5.5 %. Hodnoty kritické síly z druhé nelineární analýzy, kde krajní vrstva byla vychýlena o 15° , 10° a 11° , lze z grafu jednoznačně vyčíst a její hodnoty také téměř odpovídají naměřeným hodnotám z experimentů. Rozdíl hodnot lineární analýzy a I. experimentu se pohybuje do 6 %.

U vzorků typu 4, 5 a 6 s orientací $[+45, -45, +45, -45]_S$ je vidět, že lineární a nelineární analýza, zvláště pak ta, kde je nesymetrie způsobena vychýlením krajní

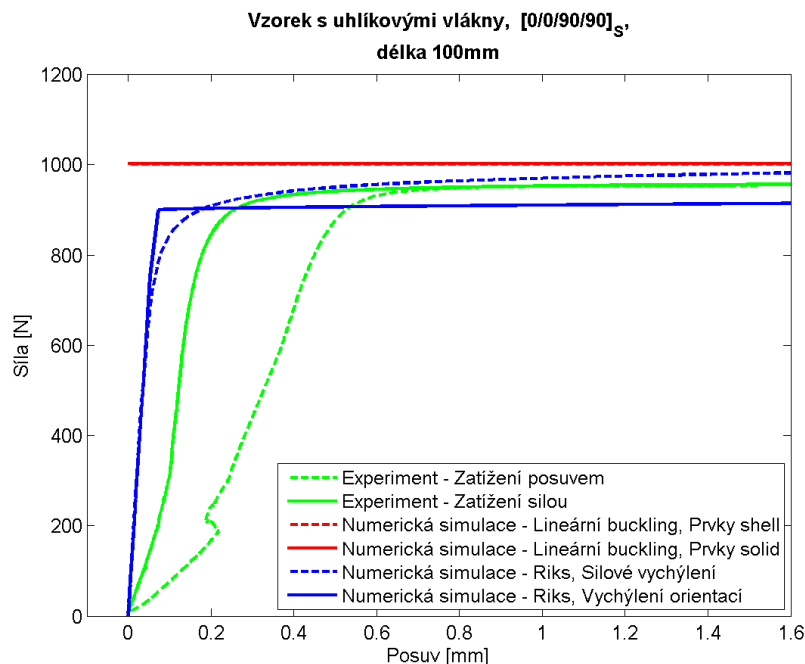
vrstvy o 1° , sobě odpovídají. Rozdíl mezi lineární analýzou a výsledky získanými z I. experimentu je značný 31 % - 41 %. U vzorku 6 odpovídá hodnota získaná z II. experimentu hodnotám získaným jak z lineární analýzy tak nelineární analýzy s chybou v orientaci krajní vrstvy.

U vzorku 7 s orientací $[90]_8$ odpovídá hodnota lineární i nelineární analýzy hodnotě získané z I. experimentu. Hodnota získaná z experimentu druhého je mírně větší.

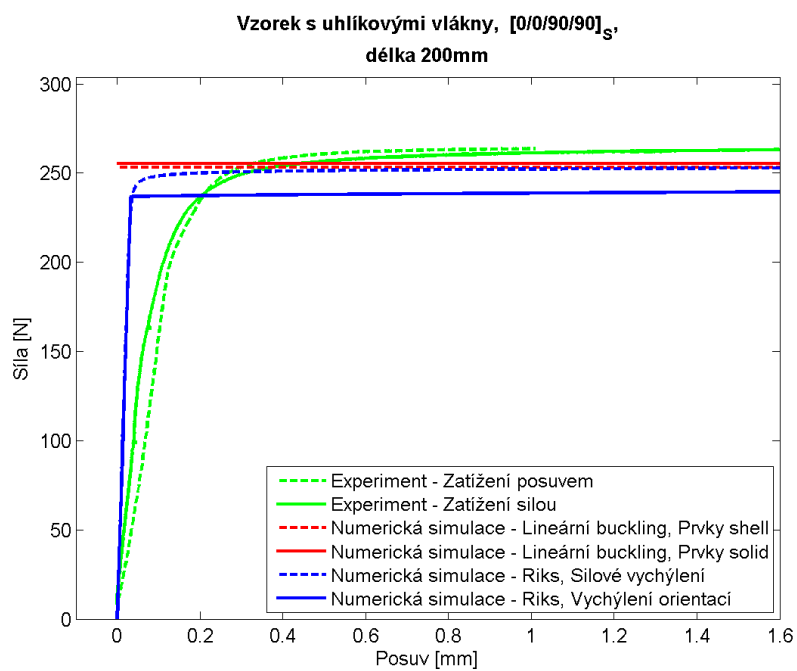
Z průběhu grafu experimentu u vzorku 8 s orientací $[0]_8$ je vidět, že v obou experimentech došlo nejprve k částečné ztrátě stability. Tento jev může například nastat vlivem výrobních nepřesností, kdy nejdříve dojde k mírnému krutu vzorku a až poté k úplné ztrátě stability. Tento jev nebyl v modelu postižen, neboť je pravděpodobně způsoben lokálním vychýlením vláken nebo změnou tloušťky. Rozdíl mezi hodnotou kritické síly z lineární analýzy a I. experimentu se pohybuje kolem 9 %.

U vzorku typu 9 se skelnými vlákny a orientací $[0]_8$ se nepodařilo vlivem chyby zaznamenat průběh II. experimentu. Rozdíl hodnot kritických sil získaných z lineárních analýz a I. experimentu se pohybuje do 10.5 %.

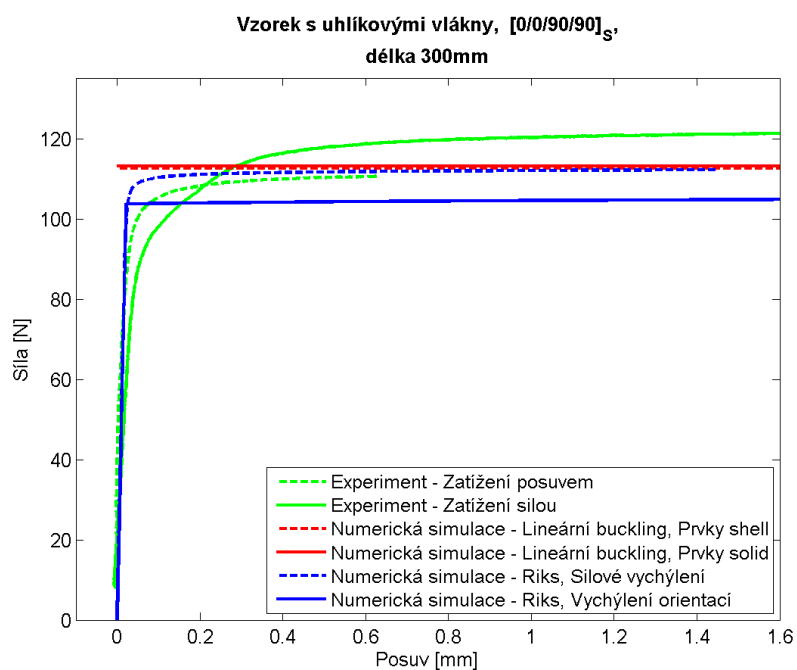
U vzorku typu 10 se skelnými vlákny a biaxiální orientací je největší rozdíl hodnot mezi II. experimentem a nelineární analýzou, kde ztráty stability bylo dosaženo pomocí vychýlení krajní vrstvy o 13° . Rozdíl těchto hodnot činí 24 %.



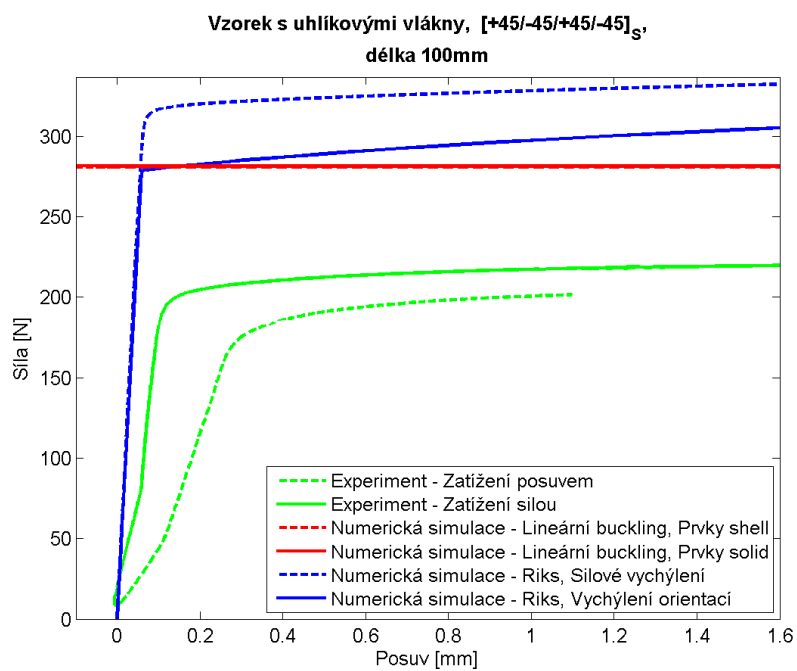
Obrázek 18: Graf měření vzorků typu 1



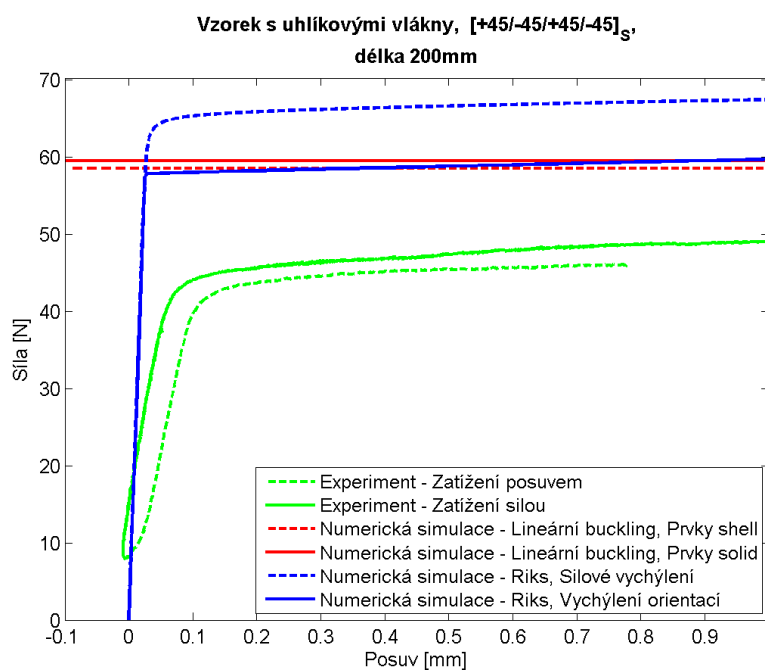
Obrázek 19: Graf měření vzorků typu 2



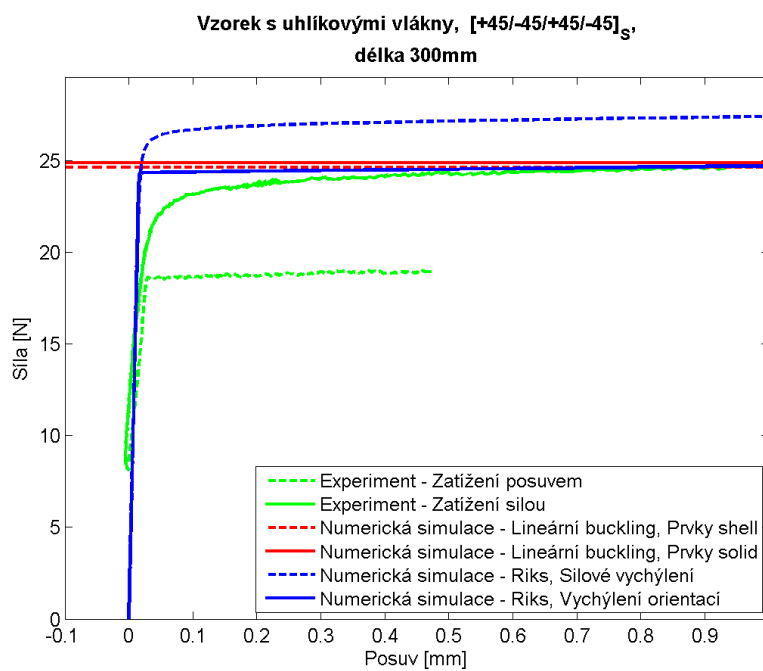
Obrázek 20: Graf měření vzorků typu 3



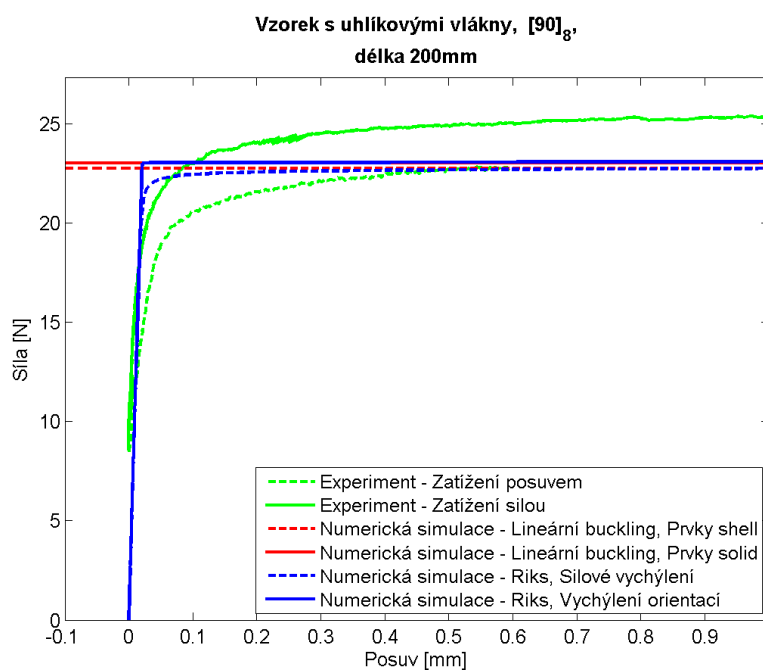
Obrázek 21: Graf měření vzorků typu 4



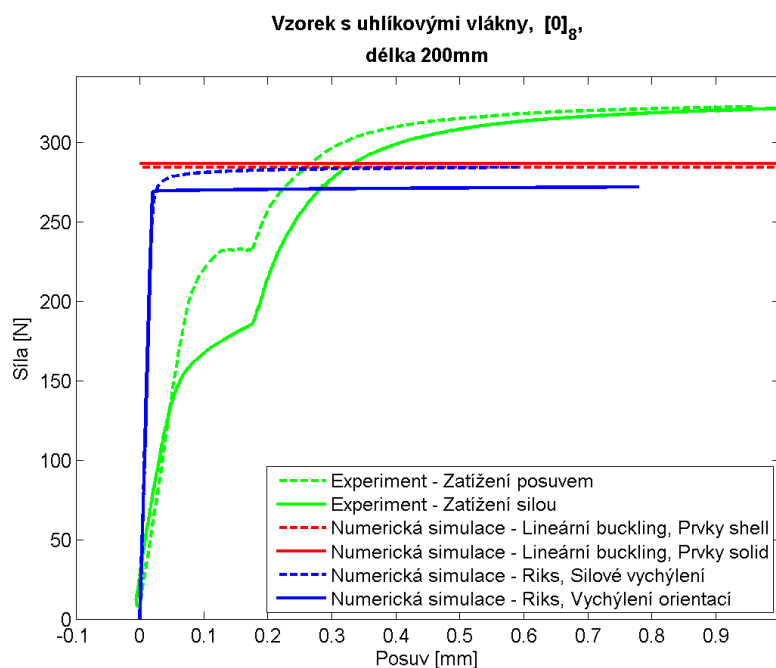
Obrázek 22: Graf měření vzorků typu 5



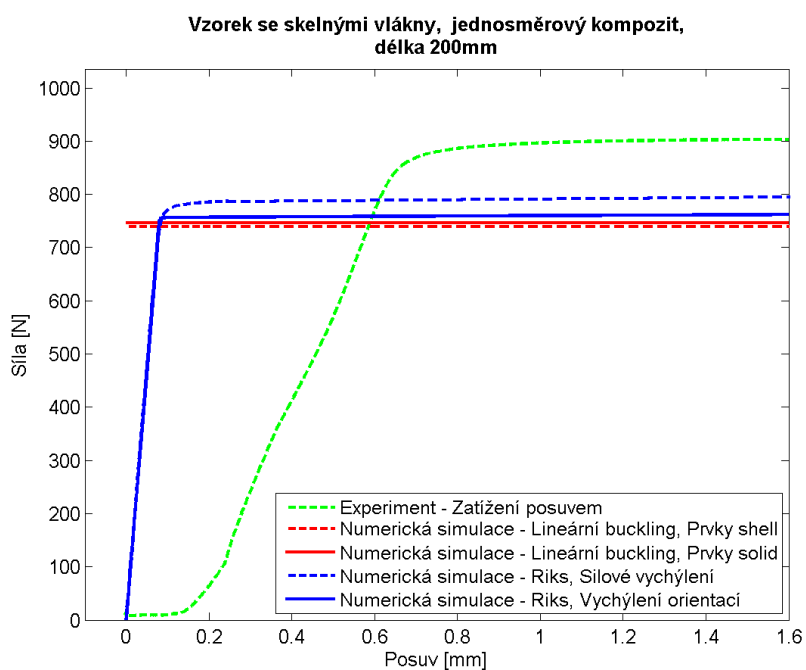
Obrázek 23: Graf měření vzorků typu 6



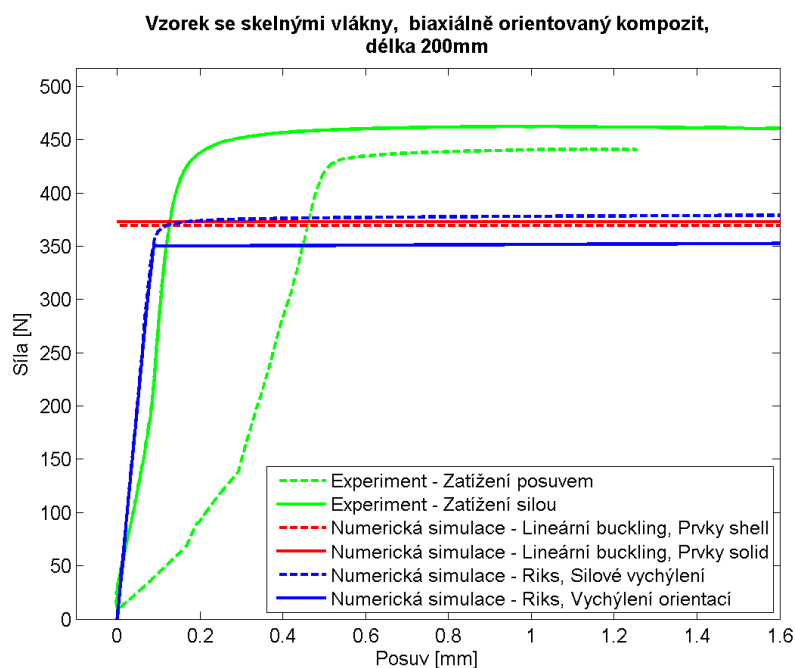
Obrázek 24: Graf měření vzorků typu 7



Obrázek 25: Graf měření vzorků typu 8



Obrázek 26: Graf měření vzorků typu 9



Obrázek 27: Graf měření vzorků typu 10

5 Stabilita lávky

Vzhledem k tomu, že firma, se kterou se spolupracuje na vývoji lávky, si přeje design lávky a detaily týkající se rozměrů atd. utajit, bude vše v následující kapitole uvedeno ve zkratce a bez obrázků a detailních výsledků.

Poznatky předchozí práce byly využity pro posouzení únosnosti lávky o délce 18 m dle kombinace zatížení A4. Byla provedena lineární i nelineární analýza pro získání hodnoty síly, při které dojde ke ztrátě stability. V konstrukci byly použity následující materiály: skelné kompozity ve formě rovingu (dlouhých a úzkých stužek vláken), biaxiální vazby a jednosměru a polyuretanová pěna.

Kombinace zatížení A4

$$\text{Zatížení} = 1,1475 \times \text{vlastní tíha} + 1,35 \times \text{chodci} + 1,0 \times \text{posyp} + 0,45 \times \text{vítr}. \quad (62)$$

Koeficient pro snížení modulů pružnosti $k_E = 1,0$. Hodnoty lze nalézt v tabulce 9.

Tabulka 9: Aplikované zatížení

		zatížení [Pa]	aplikace
chodci		5×10^3	rovnoměrně po celé ploše mostovky
posyp		50	
vítr	tlak	237	na plochy nosných profilů
	sání	177	
vlastní tíha		9.81 [ms ⁻²]	

Omezení

Od řešení je vyžadováno dodržení řady podmínek, jejich výčet lze nalézt níže.

Vertikální průhyb

$$v_v \leq l/500. \quad (63)$$

Horizontální průhyb

$$v_h \leq l/500. \quad (64)$$

První vlastní frekvence

$$f_1 \geq 5.1 \text{ Hz}. \quad (65)$$

Rozměry vyráběných částí profilů musí splňovat dvě podmínky z důvodu vyrobiteľnosti:

menší rozměr

$$w \leq 400 \text{ mm}, \quad (66)$$

větší rozměr

$$h \leq 400 \text{ mm}. \quad (67)$$

Koeficient zatížení při ztrátě stability a aplikovaného zatížení musí splňovat podmínku

$$k_{st} \geq 2. \quad (68)$$

Stabilita stěn: tloušťka části stěn profilu nesmí být menší než 1/20 délky tohoto prvku.

Světlost buněk: omezena tak, že mezera v případě obdélníkové buňky musí být větší než 20 mm a v případě trojúhelníkové buňky menší odvěsna musí být větší než 20 mm. Obdobně u lichoběžníkové buňky.

Výsledky

Pro kombinaci zatížení A4 byl pro lineární výpočet nalezen koeficient stability o velikosti 2,28. Pro nelineární výpočet je hodnota koeficientu 2,21.

6 Závěr

U předkládané práce byly provedeny analytické výpočty, experimenty a MKP analýzy řady problémů týkajících se ztráty stability jednoduchých i složitějších struktur. Dosažené výsledky dobře ukazují na fakt, že v oblasti kompozitů je analýza stability poměrně komplikovaný problém (viz. chyba $\pm 40\%$ u složitějších skladeb laminátu). Lze konstatovat, že výpočtové možnosti systému Abaqus jsou zcela dostačující. Dále se ukázalo, že se jedná o nosné téma výzkumu a byly stanoveny následující cíle pro blízkou budoucnost:

- Automatická analýza experimentálních dat.
- Výroba rámečku pro testování stability desek.
- Provést experimentální analýzu žebrované desky nebo křídla.
- Vytvořit vlastní MKP kód.
- Vytvořit vlastní materiálový model a implementovat jej do softwaru Abaqus.

Literatura

- [1] Kolektiv.: Pružnost a pevnost II., České vysoké učení technické v Praze, dotisk, 1985.
- [2] Bathe, K. J.: Finite Element Procedures, Prentice Hall, Pearson, 1996.
- [3] Laš, Vladislav: Mechanika kompozitních materiálů, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2008.
- [4] Abaqus Documentation, Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2010.
- [5] The Python Standard Library, Python open community.
- [6] Daley, C.: Lecture Notes for Engineering, Memorial University, St. John's, Canada, 2012.
- [7] Hendy, C., Denton, S., MacKenzie, D., Iles, D.: Buckling Analysis of Steel Bridges, UK
- [8] Wikipedia, Wikimedia Foundation, 2001
- [9] Farrar, D. J.: Investigation of skin buckling, Bristol Aeroplane Company, 1947