

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Návrh odpružení dětského vozíku

Plzeň 2014

Aleš Emmer

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 25. května 2014

Aleš Emmer

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Vítězslavu Adámkovi, Ph.D. za věnovaný čas, cenné rady a vedení práce. Poděkování patří také Ing. Janu Krystkovi, Ph.D. za pomoc při experimentech a panu Martinu Kubešovi z prodejny a půjčovny dětských vozíků a možnost zapůjčení vozíku pro potřeby této práce.

Abstrakt

Hlavním cílem této práce je s pomocí viskoelastických materiálů navrhnout novou alternativu listového odpružení dětského vozíku za kolo tak, aby bylo dosaženo vyššího tlumení vibrací. Nejprve jsou v práci představeny možnosti použití tlumících materiálů a uvedeny různé typy odpružení vozíků. V další části jsou popsány statické a dynamické vlastnosti viskoelastických materiálů. Pomocí provedených experimentů a s využitím parametrické optimalizace jsou následně nalezeny statické a dynamické parametry polyamidu PA6, který byl použit pro potřeby této práce. Tyto parametry jsou poté použity pro návrh vrstevnatých listů o stejné tuhosti jako původní listy ocelové. V dalším kroku jsou pak s ohledem na tlumící vlastnosti analyzovány symetrické třívrstvé a pětivrstvé listy s různými tloušťkami a různou skladbou materiálů. V poslední kapitole je vytvořen zjednodušený konečnoprvkový model odpružení složeného jak z ocelových tak z vrstevnatých listů a jsou porovnány jejich odezvy na zvolený typ buzení. V závěru jsou pak posouzeny tlumící vlastnosti nově navržených listových pružin.

The Abstract

The main objective of this work is to design a new alternative of leaf spring for child carrier using viscoelastic material, so that higher vibration damping is achieved. First, the possibilities of the application of damping materials are presented and various types of carrier dampers are introduced. In the next chapter, the static and dynamic behaviour of viscoelastic materials are described. Using performed experiments and using parametric optimization, static and dynamic properties are subsequently identified for polyamide PA6 used in this work. These parameters are then used for layered leaf design, which has equal stiffness as the original steel spring. In the next step, symmetrical three- and five-layered leafs with different thickness and different material composition are analyzed based on their damping properties. In the last chapter, the simplified finite element model of steel and layered leaf spring are created and their response to chosen excitation type. The damping properties of newly designed leaf spring are reviewed.

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní typy odpružení dětských vozíků a využití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací	2
	2.1. Stávající systémy odpružení dětských vozíků.....	2
	2.2. Použití viskoelastických materiálů ktlumení vibrací.....	4
3	Stanovení mechanických vlastností PA6	6
	3.1. Materiál PA6.....	6
	3.2. Vlastnosti a chování viskoelastického materiálu při statickém zatěžování.....	6
	3.3. Identifikace materiálových vlastností PA6 na základě statických zkoušek.....	9
	3.4. Vlastnosti a chování viskoelastického materiálu při dynamickém Zatěžování.....	14
	3.5. Určení dynamických parametrů E' , E'' a $\tan \delta$ pro materiál PA6.....	17
4	Návrh listových pružin z vrstevnatého materiálu	20
	4.1. Zavedení efektivního ztrátového faktoru $\tan \delta_{eff}$ pro vrstevnaté nosníky....	20
	4.2. Návrh jednotlivých variant skladby listů pružiny.....	22
	4.3. Posouzení tlumicích vlastností vrstevnatých listů navržených skladeb.....	26
5	Numerická simulace odezvy listové pružiny na dynamické zatížení	28
	5.1 Popis buzení.....	28
	5.2. Model původního elastického odpružení a odezva na přejezd překážky.....	30

	5.3. Model nového vrstevnatého odpružení a odezva na přejezd překážky.....	32
6	Závěr	37
	Literatura	39

1. Úvod

V posledních letech zažívají rozmach dětské vozíky pro tažení za jízdním kolem. Mnoho rodičů dává přednost místo procházek s kočárkem projížděcí na horském kole se svou ratolestí, avšak dětské sedačky na kolo mohou být nebezpečné a také nemusí být vhodné pro mladší děti. Proto mnoho firem dnes vyrábí kočárky, které lze připojit za kolo a použít jako dětský vozík. Klasické uchycení podvozku dětského kočárku ovšem není vhodné do terénu. Americká firma *Chariot Carriers inc.*, dnes již vlastněná firmou THULE®, byla jednou z prvních, která začala vyrábět dětské vozíky s odpružením vhodným i mimo vozovku. Vyvinula vlastní systém listového odpružení označovaný CAS™ - *Chariot Adjustable Suspension™*, neboli nastavitelné odpružení vozíku.

Předkládaná práce je zaměřena na tento systém odpružení. Jejím cílem je s využitím viskoelastických materiálů zvýšit účinnost systému odpružení a snížit tak vibrace při jízdě v terénu, čímž by poskytoval ještě větší komfort pro malé pasažéry. Výstupem práce je návrh vrstevnaté listové pružiny složené z kombinace původní oceli a vybraného viskoelastického materiálu. V celé práci bylo pro zpracovávání a porovnávání výsledků, realizaci simulací dle analytických vztahů a další druhy výpočtů použito systému MATLAB. Sestavení konečnoprvkových modelů a provedení numerických simulací bylo realizováno v softwaru MSC.Marc/Mentat.

Práce je členěna celkem do šesti částí, včetně úvodu a závěru. Druhá kapitola pojednává o některých typech odpružení používaných v současné době u dětských vozíků a o různých způsobech využití viskoelastických materiálů pro tlumení vibrací. Dále je zde podrobněji popsán systém odpružení CAS™, jeho skladba, konstrukce a použití. Třetí část je věnována stanovení mechanických vlastností viskoelastického materiálu, který byl vybrán pro návrh nové listové pružiny. Jsou zde prezentovány výsledky tahové zkoušky zvoleného materiálu a určeny jeho statické a dynamické materiálové vlastnosti. Ve čtvrté části je navrženo několik variant vrstevnatého listu pružiny složeného z oceli a viskoelastického materiálu a provedeno posouzení tlumicích vlastností navržených skladeb listů pomocí analytických vztahů. Na základě získaných výsledků byla následně zvolena jejich nejvhodnější varianta. V páté části je pro tento finální návrh vytvořen zjednodušený konečnoprvkový model listové pružiny, který je následně využit pro zkoumání tlumicích vlastností pružiny při přejezdu překážky zvoleného tvaru. V závěru je pak provedeno shrnutí výsledků a jsou zde diskutovány možnosti dalšího pokračování a rozšíření práce.

2. Základní typy odpružení dětských vozíků a využití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací

2.1. Stávající systémy odpružení dětských vozíků

Již několik let se výrobci dětských vozíků předhánějí v tom, kdo poskytne dítěti pohodlnější a bezpečnější svezení. Kromě vícebodových pásů, různých tvarů sedaček a dalších drobných vylepšení se jedná především o odpružení. Pro sportovní dětské vozíky není odpružení jen otázkou komfortu, ale také bezpečnosti při jízdě v terénu, kde hrozí převrácení vozíku. Odpružení lze najít spíše u dražších modelech dětských vozíků (v cenové kategorii nad 10 000Kč). Tyto vozíky lze využít pro tažení za kolem, na lyžích, při běhání, jízdě na kolečkových bruslích atd. V oblasti kvalitních vozíků s odpružením v současné době dominují firmy *Burley* a *Chariot*.

Způsob odpružení těchto vozíků lze rozdělit do tří skupin. Nejjednodušším typem odpružení je využití součásti z pryže, gumy nebo podobného materiálu, která spojuje nosnou konstrukci podvozku a zadní nápravu (viz Obr. 2.1 a Obr. 2.2). Při deformaci této součásti dochází k disipaci energie a k následnému tlumení vibrací vyvolaných nerovnostmi vozovky. Do této kategorie lze také zařadit další typy odpružení využívající např. pryžová lana. Mezi výhody lze zařadit jednoduchost a také dlouhou životnost, nevýhodou ovšem je nemožnost nastavení tuhosti. Odpružení s pryžovou vložkou například používala firma *Burley* ještě v roce 2012, než představila nové řešení [1].

Toto řešení, které firma *Burley* používá od roku 2013, je založené na klasické tlačné šroubovitě pružině (viz Obr. 2.3), která je na jednom konci připevněná pomocí šroubů



Obr. 2.1: Pryžová část odpružení, firma Burley.



Obr. 2.2: Konstrukce odpružení s pryžovou vložkou, firma Burley.

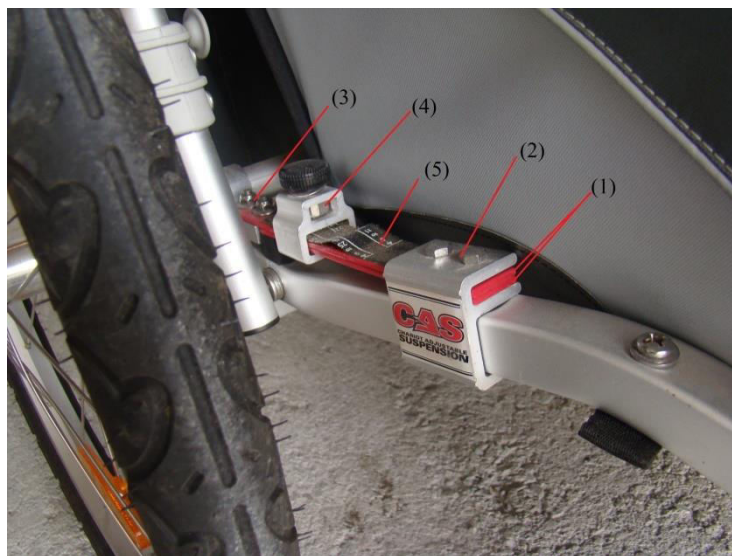


Obr. 2.3: Odpružení se šroubovitou pružinou, firma Burley.

ke konstrukci podvozku a na druhém pak na zadní nápravu. Výhodou je opět jednoduchost jak samotné pružiny, tak její montáže, popřípadě výměny. Na rozdíl od předchozího typu je toto odpružení nastavitelné [1] a lze tedy upravit i jeho tuhost. Mezi nevýhody lze zařadit absenci gumy nebo viskoelastického materiálu, díky čemuž lze předpokládat, že nedojde tak rychle k útlumu vibrací.

Třetím a pro potřeby této práce nejdůležitějším typem je odpružení využívající listových pružin. Tuto variantu používala téměř výhradně firma *Chariot*, jenž vlastní několik patentů takového řešení [2]. V současné době vyráběný typ odpružení CASTM pro dětské sportovní vozíky lze nalézt na několika modelech vyšší kategorie firmy THULE®, která nyní firmu *Chariot* vlastní. Na Obr. 2.4 lze vidět konstrukci odpružení na modelu *Chariot Cougar 1*, tj. jednomístnou verzi vozíku. U ostatních modelů se může mírně lišit tvar konstrukce spodní části vozíku, délka pružin je však přibližně stejná.

Odpružení je tvořeno dvěma listovými pružinami⁽¹⁾, které jsou na jednom konci připevněné k nosné konstrukci podvozku svorkou se dvěma šrouby⁽²⁾, na druhém konci je pak horní z pružin připevněna dvěma šrouby k ose zadní nápravy⁽³⁾. Obě pružiny jsou shodné, liší se pouze jejich délkou. Horní pružina měří 20cm, spodní je o 4cm kratší. Výška každé z nich je 4mm a šířka 25mm. Jednotlivé listy jsou vyrobené z kovové slitiny a jsou pokryté tenkou vrstvou umělé hmoty, která chrání listy zejména proti korozi. Pružiny samotné jsou poměrně tuhé a trvale předepnuté, což ještě zvyšuje jejich tuhost. Téměř to však znemožňuje jejich demontáž v případě poškození některé z nich. Spodní pružina je s vrchní spojena pomocí jezdec tvořeného šroubem a kovovou objímkou⁽⁴⁾. Díky pryžovým podložkám tato objímka přímo nedoléhá na pružinu, takže nemůže dojít k poškození listů nastavovacím šroubem. Posuvný jezdec umožňuje nastavit aktivní délku pružin, čímž lze zvýšit, popř. snížit, tuhost pružin. Díky popiskům na vrchu pružiny⁽⁵⁾ lze nastavit tuhost přesně podle hmotnosti pasažéra.



Obr. 2.4: Odpružení CASTM tvořené listovými pružinami na vozíku Chariot Cougar 1.

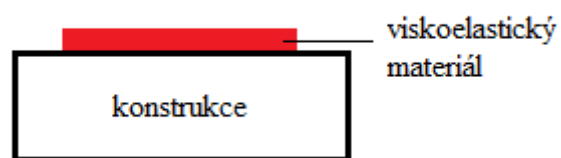
2.2. Použití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací¹

Viskoelastické materiály se využívají téměř všude, kde je nutné potlačit nechtěné vibrace. Kromě automobilového a leteckého průmyslu lze uvést například myčky, ledničky, malé motory, generátory, čerpadla apod. Dále tyto materiály nacházejí uplatnění v elektronice pro uchycení součástek s akcelerometry, gyroskopy nebo v pevných discích počítačů, ale také v turbínách, na lodích a v různých odvětvích těžkého průmyslu. V neposlední řadě se s nimi setkáme také u sportovního a jiného volnočasového vybavení, např. lyže, tenisové rakety, baseballové pálky apod.

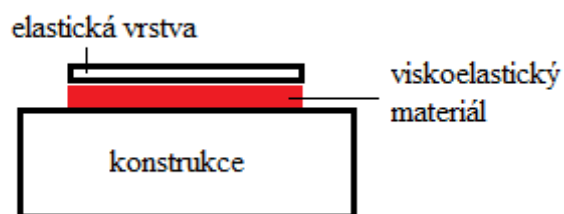
Pasivní tlumení vibrací se začalo rozvíjet již v 60. letech 20. století a to především v leteckém průmyslu. Vývoj materiálového inženýrství umožnil využití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací lopatek proudových motorů, kabin vrtulníků, koncovek výfuků nebo třeba i v různých aplikacích na vesmírných stanicích. V posledních letech vedl pokles výrobních nákladů a nové technologie k masové výrobě vícevrstvých komponent s viskoelastickým materiálem uvnitř, jako například široké spektrum tlumících pásek, folií a pěn, které jsou dnes k dostání téměř pro každou komerční aplikaci.

Existují tři základní způsoby použití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací. Nejjednodušším z nich je tzv. *free-layer damping* (FLD, Obr. 2.5). Na konstrukci se nastříká nebo přilepí vrstva viskoelastického materiálu, která se při vibracích konstrukce cyklicky deformuje, čímž dochází k disipaci energie. Takto se například ošetřuje vnějšek kabiny a podlaha automobilu nanesením vrstvy tmele či vhodného druhu pryskyřice.

Dalším způsobem je tzv. *constrained-layer damping* (CLD, Obr. 2.6). V tomto případě se jedná o viskoelastické jádro mezi dvěma elastickými vrstvami. Díky tužší elastické vrstvě je viskoelastický materiál při vibracích namáhán smykem a dochází tak k větší disipaci energie a její přeměně na teplo než u FLD. Jako příklad lze uvést sendvičové sklo používané v automobilech a letadlech, které se skládá ze dvou vnějších elastických vrstev skla a vnitřní tlumící vrstvy (polyvinyl butyral). Jiné použití typu CLD je aplikace tlumící pásky složené z tenké kovové folie a spodní lepící vrstvy z viskoelastického materiálu. Nejefektivněji bude v tomto případě materiál tlumit, pokud budou vrstvy symetrické, tj. budou mít stejnou tloušťku a v ideálním případě i stejnou tuhost. V případě požadavku tlumení většího rozsahu frekvencí při různých



Obr. 2.5: Příklad použití typu FLD.

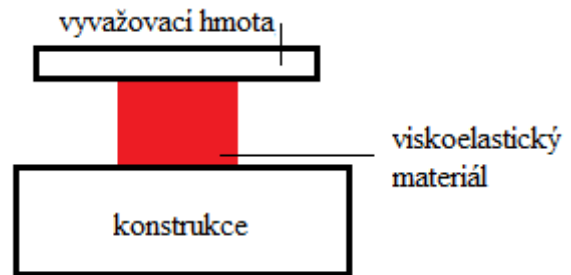


Obr. 2.6: Příklad použití typu CLD.

¹ Pokud nebude uvedeno jinak, tato část práce čerpá především z [3].

teplotách lze rozšířit na více tlumících vrstev z různých materiálů. Oba způsoby FLD i CLD se dají použít pro tlumení nízkých i vysokých frekvencí. Záleží však především na použitém materiálu.

Třetím základním typem je tzv. *tuned viscoelastic damping* (TVD, Obr. 2.7), který se využívá především pro tlumení jedné frekvence nebo úzkého spektra frekvencí. Tímto způsobem je možné odstranit nechtěnou rezonanci systému a rozdělit tak vrchol amplitudy na dva menší na nižší a vyšší frekvenci. Jelikož u tohoto typu je nutné materiál přesně „nastavit“ (umístění, množství, teplota) tak, aby tlumil vybrané frekvence, není TVD vhodný pro aplikace v okolí *teploty skelného přechodu*, kde dochází k významným změnám v modulu pružnosti. Tímto způsobem se zajišťuje například tlumení vibrací v uchycení motorů, zavěšení výfuků, řízení nebo tlumení vibrací budov apod.



Obr. 2.7: Příklad použití typu TVD.

Nejčastěji používanými materiály jsou různé druhy polymerů (polyestery, polyetyleny, polyamidy, akryly [4] atd.). Obvykle jsou tyto materiály koncipovány pro použití při frekvencích 1-1000Hz, lze je však použít i pro frekvence vyšší. Určitý materiál může mít nízký poměrný útlum při pokojové teplotě a nízkých frekvencích, avšak při teplotách pod nulou může tentýž materiál vykazovat dobré tlumící vlastnosti při vysokých frekvencích (až 20 kHz) [5]. V některých speciálních aplikacích se využívají i kovové slitiny, například slitina india [6]. Dále lze použít i přírodní materiály obsahující biopolymery, například dřevo nebo bambus [7]. Dnes už jsou dostupné i viskoelastické materiály vhodné pro tlumení při vysokých teplotách nad 250°C, například v brzdovém obložení nebo v potrubí motoru. Pro tyto aplikace se obvykle používají vícevrstvé struktury složené z různých viskoelastických materiálů. Při vysokoteplotních aplikacích bylo také prokázáno, že jisté tlumící vlastnosti při teplotách 400-800°C vykazuje dokonce i smalt [8].

3. Stanovení mechanických vlastností PA6

3.1. Materiál PA6

Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole 2.2, k tlumení vibrací se běžně používají různé typy polymerů. Pro návrh vrstevnatých listových pružin byl proto vybrán polyamid PA6, což je polymer používaný v různých modifikacích pod názvem nylon 6, PERLON TM nebo také polycaprolactam. Jedná se o průmyslově hojně používaný polymer, například v ložiscích, v uložení strojních částí (například u motoru automobilu) nebo také ve formě vláken v lanech, sítích nebo pneumatikách [9]. Vyznačuje se poměrně vysokou pevností v tahu a také dobrou chemickou odolností.

Pro účely této práce je nejdůležitější vlastností PA6 jeho viskoelasticita. Následující podkapitoly jsou proto věnována zavedení tohoto pojmu a pojmu s tím souvisejících a hlavně pak stanovení důležitých viskoelastických materiálových charakteristik PA6 pomocí experimentálně naměřených dat.

3.2. Vlastnosti a chování viskoelastického materiálu při statickém zatěžování

Chování lineárního dokonale elastického materiálu je popsáno Hookeovým zákonem. Ten má pro případ jednoosé napjatosti tvar

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.1)$$

kde σ představuje napětí, ε poměrné prodloužení a E modul pružnosti v tahu. Takovýto idealizovaný typ materiálu lze modelovat pomocí lineární pružiny, která po odlehčení nabývá své původní délky, tj. veškerá dodaná energie se po odlehčení uvolní. Naproti tomu ideálně viskózní (ve starší literatuře také označovaný jako vazký) materiál už nevykazuje přímou úměrnost napětí a poměrného prodloužení. Deformace narůstá po celou dobu působení síly a po odlehčení zůstává neměnná. Dodaná energie se v tomto případě spotřebovává, přeměňuje se na teplo. Takovýto materiál se modeluje pomocí pístu ve válci. Napětí je pak závislé na rychlosti deformace a popisuje se rovnicí

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (3.2)$$

kde η je součinitel viskozity. Většina materiálů ovšem nemá takto ideální vlastnosti a obvykle projevují vlastnosti obou těchto teoretických materiálů, zavádí se proto pojem *viskoelastický materiál*, u něhož vztah mezi napětím a deformací také závisí na čase [10].

Při statickém namáhání viskoelastických materiálů mohou nastat dva základní typy přechodových jevů, a to *creep* (tečení) a *relaxace*. Creepem se rozumí pomalý izotermický rozvoj deformace při dlouhodobém statickém zatěžování konstantním napětím. Je-li napětí popsáno funkcí

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t), \quad (3.3)$$

kde $H(t)$ je tzv. *Heavisideova funkce* [10], pak lze odezvu materiálu v deformaci vyjádřit jako

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t), \quad (3.4)$$

kde $J(t)$ je tzv. *creepová funkce* (viz Obr. 3.1a).

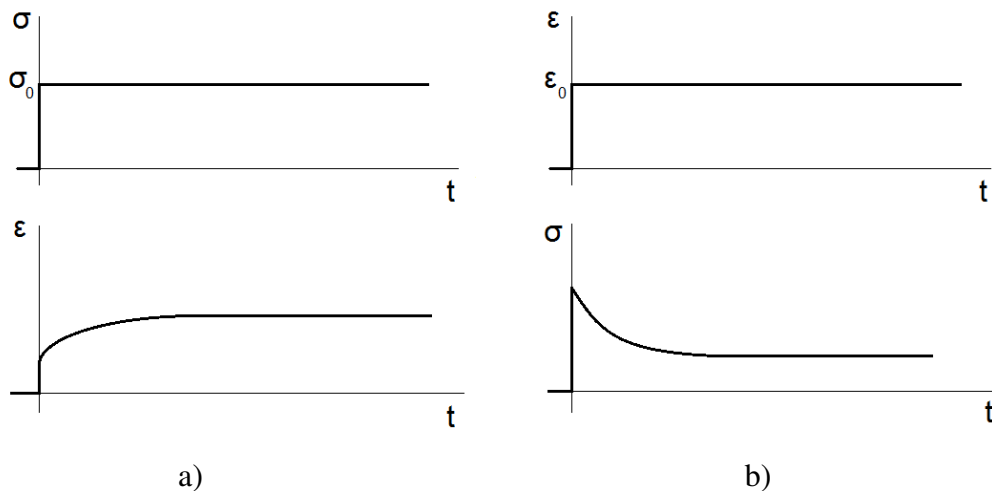
Relaxací se rozumí pozvolný pokles napětí při konstantní hodnotě deformace. Analogicky jako u creepu, i zde se pro deformaci zadanou funkcí

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot H(t) \quad (3.5)$$

stanoví odezva materiálu jako

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot E(t), \quad (3.6)$$

kde $E(t)$ je tzv. *relaxační funkce* (viz Obr. 3.1b). K relaxaci nemusí docházet pouze při normálových deformacích, ale také při deformacích smykových, nebo objemových. V takovém případě se relaxační funkce označují $G(t)$, resp. $B(t)$.



Obr. 3.1: Znárodnění závislosti $\sigma(t)$ a $\varepsilon(t)$ při a) creepu, b) relaxaci.

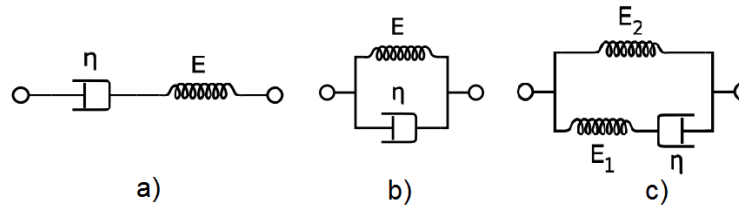
Pro popis chování viskoelastických materiálů se používají nejrůznější modely [10]. Nejjednodušším typem jsou diskretní modely složené ze sériově či paralelně spojených tlumičů a pružin. Jedním z těchto modelů je *Maxwellův model*, který je reprezentován tlumičem a pružinou v sérii (Obr. 3.2a). Závislost $\sigma(\varepsilon)$ je v tomto případě dána lineární diferenciální rovnicí, kterou lze odvodit na základě principu superpozice rychlostí deformací ve tvaru [10]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_p}{dt} + \frac{d\varepsilon_t}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (3.7)$$

kde ε_p je deformace pružiny a ε_t je deformace tlumiče. Zavedením relaxačního času $t_r = \frac{\eta}{E}$ a řešením diferenciální rovnice (3.7) pro σ , resp. ε , lze získat relaxační, resp. creepovou, funkci pro Maxwellův materiál ve tvaru

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{t_r}}, \quad \text{resp.} \quad J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}. \quad (3.8)$$

Ze (3.8) je zřejmé, že tento model špatně popisuje creep, neboť podle výše uvedeného by se creepová deformace rozvíjela lineárně v čase, což je v rozporu s experimenty [11].



Obr. 3.2: Diskrétní modely viskoelastických materiálů: a) Maxwellův model, b) Kelvinův-Voigtův model, c) Zenerův model.²

Kelvinův-Voigtův model se stejně jako Maxwellův model skládá z pružiny a tlumiče (Obr. 3.2b), ovšem tentokrát paralelně zapojených. Z toho vyplývá, že obě větve mají stejnou deformaci a celkové napětí je rovné součtu napětí na jednotlivých větvích, tj.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.9)$$

Zavedením konstanty $t_c = \frac{\eta}{E}$, která se v tomto případě nazývá *retardační čas* a řešením diferenciální rovnice (3.9) pro ε dostáváme creepovou závislost ve tvaru

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t}{t_c}}). \quad (3.10)$$

Relaxační funkce je v tomto případě konstanta, což opět neodpovídá výsledkům experimentů.

Dalším ze základních reologických modelů je tzv. *standardní těleso (Zenerův model)*, které reálně vysvětluje obě důležité vlastnosti viskoelastického materiálu, tedy creep i relaxaci. Model je tvořen dvěma paralelními větvemi – na jedné sériově spojený tlumič s pružinou (Maxwellův model) a na druhé samostatná pružina (Obr. 3.2c). Deformace na jednotlivých větvích jsou stejné, napětí se sčítají. Pro spodní větev tedy platí stejný vztah jako u Maxwellova modelu, tj.

$$E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{t_r}, \quad (3.11)$$

kde t_r je opět relaxační čas. Pro samostatně stojící pružinu platí

$$E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_2}{dt}. \quad (3.12)$$

Sečtením (3.11) a (3.12) za předpokladu $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ a $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ dostáváme diferenciální rovnici pro Zenerův model ve tvaru

$$\frac{d\varepsilon}{dt} (E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon E_2}{t_r} = \frac{\sigma}{t_r} + \frac{d\sigma}{dt}, \quad (3.13)$$

ze které lze opět řešením pro σ , resp. ε , odvodit relaxační, resp. creepovou, funkci pro Zenerův materiál ve tvaru

$$E(t) = E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{t_r}}, \quad \text{resp. } J(t) = \frac{1}{E_2} - \frac{E_1}{E_2(E_1 + E_2)} e^{-\frac{t}{t_c}}, \quad (3.14)$$

kde $t_r = \frac{\eta}{E}$ je relaxační čas a $t_c = t_r \frac{(E_1 + E_2)}{E_2}$ je retardační čas.

² Obrázky diskretních modelů viskoelastických materiálů převzaty z Wikimedia Commons.

Odezvu viskoelastického materiálu na statické zatížení lze vyšetřit pomocí tzv. *Boltzmannova principu superpozice* [10]. Pro zadanou funkci deformace $\varepsilon(t)$ lze potom odezvu $\sigma(t)$ vyjádřit jako

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.15)$$

kde $E(t)$ představuje relaxační funkci odpovídající zvolenému materiálovému modelu. Pro vyšetření odezvy $\varepsilon(t)$ pro zadanou funkci napětí $\sigma(t)$ má integrál analogický tvar

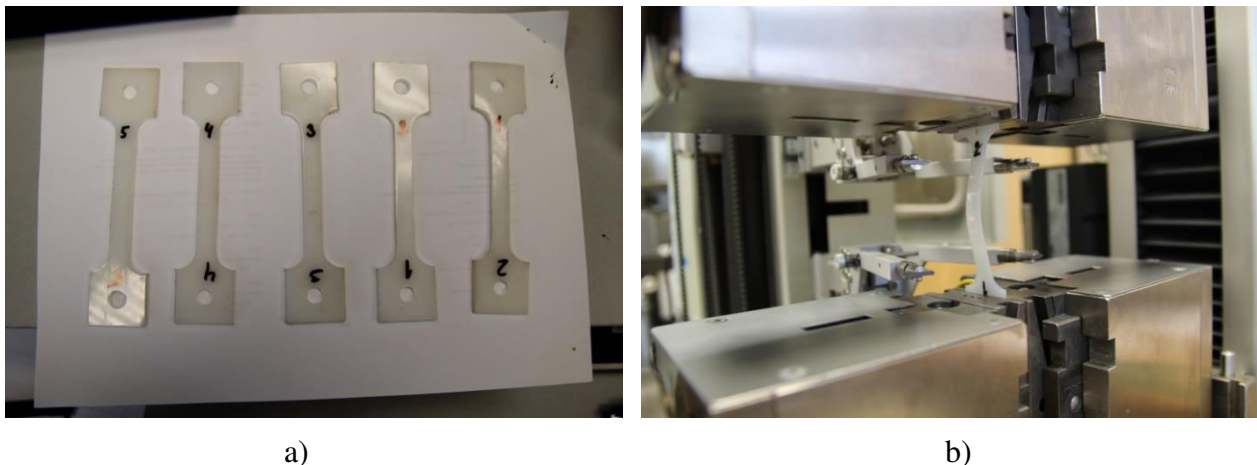
$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.16)$$

kde $J(t)$ představuje příslušnou creepovou funkci.

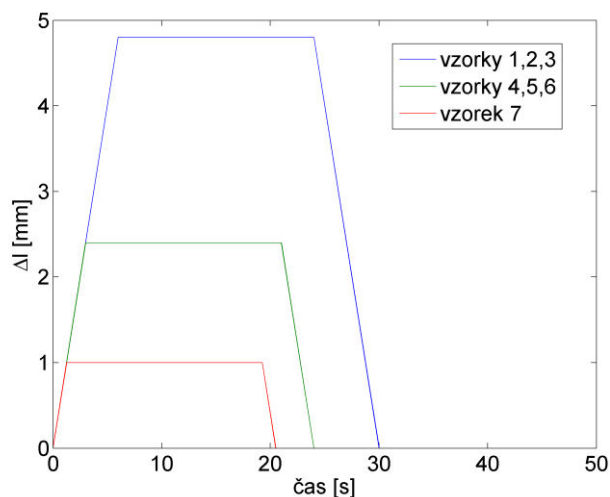
Integrály ve vztazích (3.15) a (3.16) vyjadřují tzv. *paměťový efekt* viskoelastického materiálu. To znamená, že na rozdíl od elastického materiálu je nutné při vyšetřování odezvy uvažovat celou historii zatěžování.

3.3. Identifikace materiálových vlastností PA6 na základě statických zkoušek

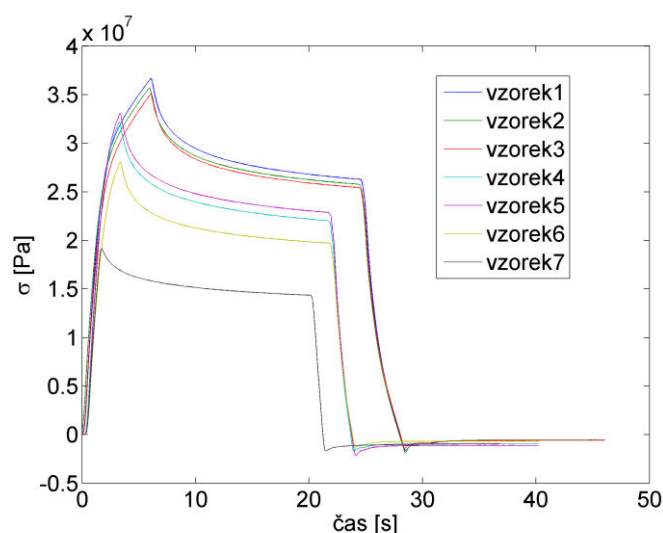
Pro nalezení základních statických materiálových konstant polyamidu PA6 byl proveden experiment na trhačím stroji Zwick/Roell Z050. Celkem bylo testováno 7 vzorků, jejichž geometrie je patrná z Obr. 3.3a. Celková délka vzorků činila 140mm, ovšem extenzometrem bylo snímáno pouze prodloužení střední části délky $l_0 = 55\text{mm}$ a šířky 10mm. Tloušťka vzorků se pohybovala v rozmezí 2-2.5mm. Tyto vzorky byly podrobeny statické zkoušce řízené deformací posuvem. Rychlostí $v = 0.8\text{mm/s}$ bylo dosaženo maximální hodnoty prodloužení Δl_0 , která po dobu $t = 18\text{s}$ zůstala konstantní u všech vzorků a následně došlo stejnou rychlostí k jejich odlehčení. Pro vzorky 1, 2, 3 byla hodnota Δl_0 volena 4.8mm, pro vzorky 4, 5, 6 pak 2.4mm. Poslední vzorek byl zatížen posuvem o maximální velikosti $\Delta l_0 = 1\text{mm}$. Historie zatěžování pro všechny vzorky jsou znázorněny na Obr. 3.4a. Na základě znalosti skutečných průřezů vzorků a změřených hodnot zatěžující síly F v jednotlivých časových hladinách byly stanoveny výsledné závislosti $\sigma(t)$, viz Obr. 3.4b.



Obr. 3.3: a) Pět vzorků před testem. b) Vybočení vzorku č. 4 po provedení zkoušky.



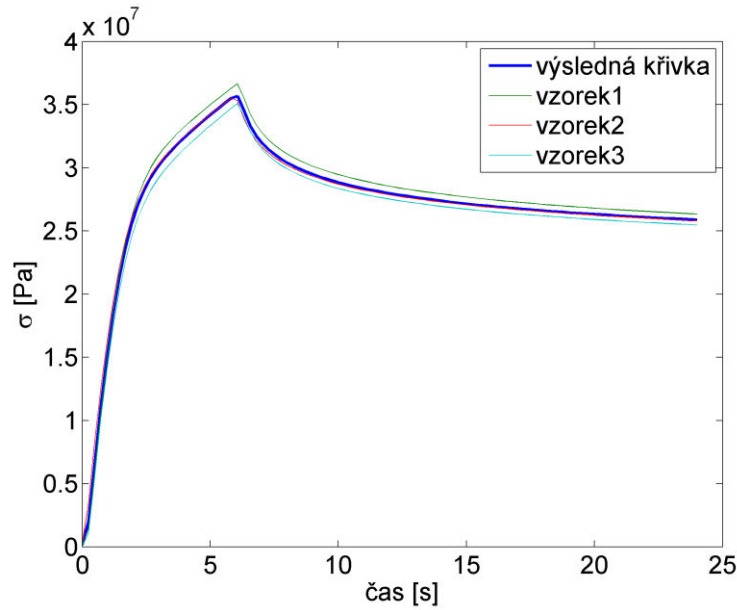
a)



b)

Obr. 3.4: a) Časový průběh zatížení pro všech 7 vzorků. b) Časový průběh napětí pro všech 7 vzorků stanovený z experimentálních dat.

Pro určení materiálových parametrů byly použity křivky odpovídající vzorkům 1-3, tj. s největší hodnotou Δl_0 . Protože při odlehčování vzorků docházelo k jejich vybočení, viz Obr. 3.3b, byla využita experimentální data naměřená pouze do času $t = 24\text{s}$, tj. do počátku odlehčování. Z těchto dat byla následně stanovena výsledná experimentální závislost $\sigma(t)$ pro studovaný materiál. Protože jednotlivé křivky $\sigma(t)$ byly určeny hodnotami v různých časových okamžicích, byl nejprve zvolen vektor času $t \in \langle 0, 24 \rangle \text{s}$ s body s ekvidistantním dělením a v těchto bodech pak byly dopočítány hodnoty napětí pomocí lineární interpolace. Díky vysoké frekvenci záznamu snímače (každá křivka byla určena třemi až čtyřmi tisíci body) a charakteru křivek byla chyba při této aproximaci zanedbatelná. Zprůměrováním těchto hodnot byla získána výsledná křivka (Obr. 3.5), která byla dále použita pro vlastní hledání statických materiálových parametrů.



Obr. 3.5: Závislosti $\sigma(t)$ pro vzorky 1, 2, 3 a z nich vytvořená výsledná křivka.

Pro aproximaci chování studovaného materiálu byl vybrán model standardního viskoelastického tělesa popsany v předchozí podkapitole 3.2, tj. bylo nutné nalézt hodnoty parametrů $\mathbf{p} = [E_1, E_2, t_r]$. Za tímto účelem byla pomocí funkce *fmincon.m* systému MATLAB řešena úloha parametrické optimalizace. Cílová funkce ψ vyjadřující vážená normovaná rezidua byla definována vztahem

$$\psi(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma}_{an}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\sigma}_{exp})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{an}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\sigma}_{exp}) / (\boldsymbol{\sigma}_{an}^T(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{exp}), \quad (3.17)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}_{an}$ je vektor hodnot analyticky získané závislosti $\sigma(t)$, $\boldsymbol{\sigma}_{exp}$ je vektor experimentálně získané závislosti $\sigma(t)$ a \mathbf{W} je tzv. váhová matice. Tu lze využít, pokud je potřeba některé body ve výpočtu zohlednit s menší vahou (například proto, že nemají správnou vypovídající hodnotu), jinak je $\mathbf{W} = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

Stanovení $\boldsymbol{\sigma}_{an}$ bylo provedeno řešením Boltzmannova integrálu. Dosazením relaxační funkce (3.14) pro standardní viskoelastické těleso do vztahu (3.15) lze psát

$$\sigma(t) = \int_0^t (E_2 + E_1 e^{-\frac{t-\tau}{t_r}}) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.18)$$

Funkci historie zatěžování vzorků 1, 2, 3 (Obr. 3.4a) lze zapsat ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{t_1} t \dots \text{pro } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \varepsilon_0 \dots \text{pro } t \in \langle t_1, t_2 \rangle, \\ -\frac{\varepsilon_0}{t_1} t \dots \text{pro } t \in \langle t_2, \infty \rangle \end{cases} \quad (3.19)$$

kde $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0}$ je maximální hodnota deformace, t_1 je čas nárůstu deformace a t_2 je doba, po kterou zůstává deformace konstantní. Vzhledem k zavedení $\varepsilon(t)$ vztahem (3.19), je

potřeba vyšetřování odezvy $\sigma(t)$ rozdělit na intervaly $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ a $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, přičemž je nutné také zohlednit paměťový efekt materiálu.

Na intervalu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ je příspěvek předchozího namáhání nulový, dosazením příslušného $\varepsilon(t)$ z (3.19) do (3.18) lze potom psát

$$\sigma(t) = \int_0^t (E_2 + E_1 e^{-\frac{t-\tau}{t_r}}) \frac{\varepsilon_0}{t_1} d\tau, \quad (3.20)$$

což po integraci vede na

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_1} (E_2 t + E_1 t_r (1 - e^{-\frac{t}{t_r}})). \quad (3.21)$$

Ve druhém intervalu $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ už je nutné uvažovat vliv zatěžování na intervalu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$. Vzhledem k tomu, že deformace je na intervalu $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ konstantní, tj. $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = 0$, bude celý druhý integrál a tím i celý příspěvek druhého intervalu nulový. Integrál má tedy tvar

$$\sigma(t) = \int_0^{t_1} (E_2 + E_1 e^{-\frac{t-\tau}{t_r}}) \frac{\varepsilon_0}{t_1} d\tau. \quad (3.22)$$

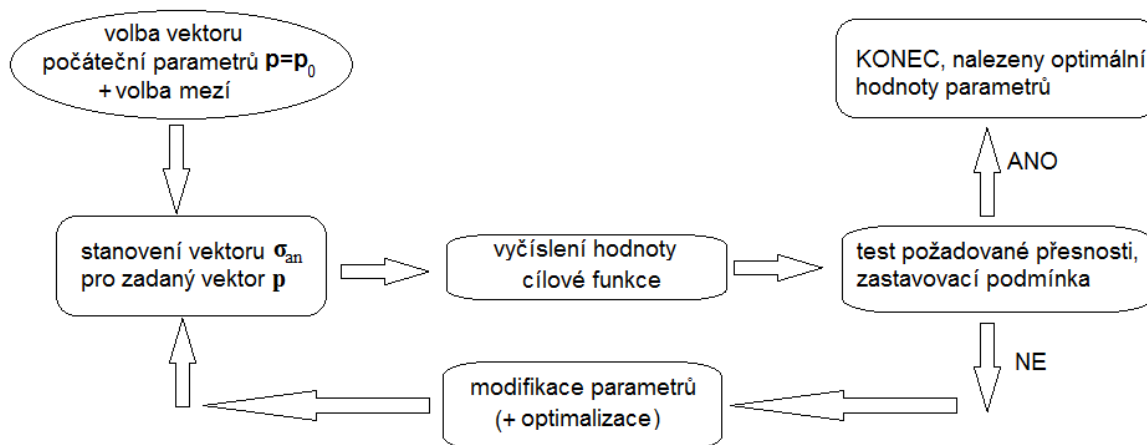
Po integraci lze získat

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_1} (E_2 t_1 + E_1 t_r (e^{\frac{t_1}{t_r}} - 1) e^{-\frac{t}{t_r}}). \quad (3.23)$$

Pomocí vztahů (3.21) a (3.23) lze již stanovit hodnoty napětí ve vektoru σ_{an} , který je použit v definičním vztahu cílové funkce ψ . Vektor σ_{exp} je znám z experimentu, tudíž je již známo vše potřebné pro výpočet hodnoty cílové funkce pro libovolný vektor hledaných parametrů \mathbf{p} a tím i pro provedení optimalizace.

Optimalizační program, jehož běh je znázorněn vývojovým diagramem na Obr. 3.6, je složen ze 3 částí (viz Příloha):

- *an.m* – Skript sloužící ke stanovení závislosti $\sigma(t)$ pomocí Boltzmannova integrálu (3.21) a (3.23). Výstupem této funkce je vektor hodnot napětí σ_{an} .
- *obj_fn.m* – Vstupem tohoto skriptu je analyticky a experimentálně stanovená závislost $\sigma(t)$, tj. vektory σ_{an} a σ_{exp} . Tato procedura určí pro zadanou váhovou matici \mathbf{W} hodnotu cílové funkce podle (3.17).
- *optimalizace.m* – V této řídicí části programu probíhá samotná optimalizace pomocí funkce *fmincon*. Jsou zde také normalizovány hledané parametry tak, aby optimalizace probíhala na intervalu $\mathbf{p} \in \langle 0, 1 \rangle$. To znamená, že horní a dolní meze hledaných parametrů i hodnoty parametrů v aktuální iteraci jsou normovány příslušnými horními mezemi. Tento krok je nezbytný, neboť hodnoty hledaných parametrů jsou řádově velmi odlišné (rozdíl až 7 řádů) a proces optimalizace by tak špatně konvergoval.



Obr. 3.6: Vývojový diagram procesu optimalizace.

Konvergenci a přesnost procesu optimalizace lze ovlivnit několika parametry funkce *fmincon*. Za zmínku stojí např. parametry *TolFun* a *TolX*, které vyjadřují zastavovací podmínku optimalizace na základě rozdílu dvou po sobě jdoucích hodnot cílové funkce a optimalizovaných parametrů. Ovšem vzhledem k jejich defaultní hodnotě 10^{-6} nebylo v tomto případě nutné toto nastavení měnit.

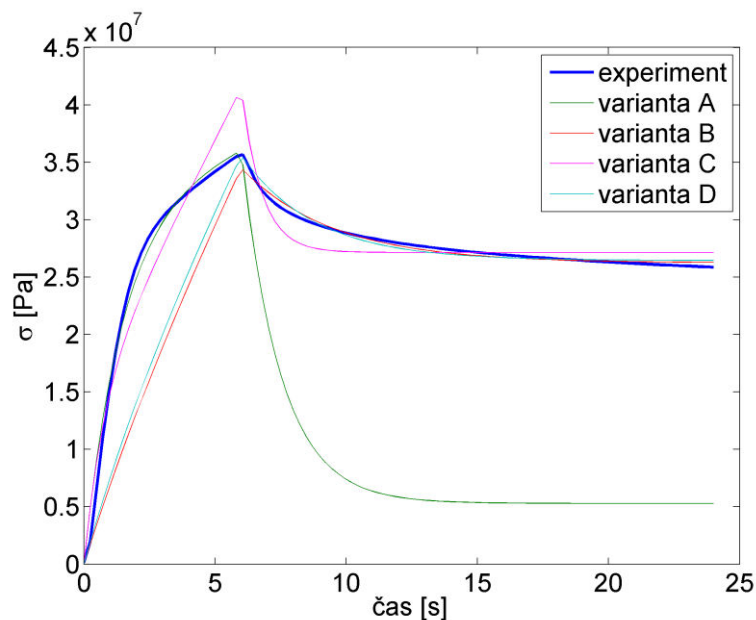
Identifikace parametrů byla nejprve prováděna na celém intervalu (varianta C), tj. pro $t \in \langle 0, t_2 \rangle$, ale ukázalo se, že tímto postupem nelze dosáhnout dobré shody s experimentem. Ani použití zobecněného modelu standardního tělesa se třemi, čtyřmi ani pěti paralelními větvemi zlepšení nepřineslo. Proto byly zvoleny tři časové podintervaly, na kterých byla dále prováděna optimalizace. Variantě A odpovídá první část křivky, tj. interval $t \in \langle 0, t_1 \rangle$, variantě B pak druhá část křivky, čili interval $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Poslední varianta D opět reprezentovala druhou část křivky, ovšem v tomto případě bylo ve vztahu (3.17) využito váhové matice tak, aby výsledná závislost co nejlépe aproximovala vrchol grafu. Váhy jednotlivých bodů byly tedy voleny jako

$$w = \begin{cases} 0 & \dots \text{pro } t < t_1 \\ 1 & \dots \text{pro } t = t_1 \\ 0.1 & \dots \text{pro } t > t_1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Výsledky pro všechny čtyři varianty optimalizovaných parametrů A-D jsou shrnuty v Tab. 3.1. Míra shody mezi experimentem a analytickou závislostí získanou z těchto čtyř variant parametrů je patrná z Obr. 3.7. Jelikož pružiny dětského vozíku budou namáhány cyklicky bez možnosti relaxovat, byla pro další práci zvolena jako nejvhodnější varianta parametrů A, tj. parametrů identifikovaných pomocí experimentálních dat na intervalu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$.

Parametr	Varianta			
	A	B	C	D
E_1	1.4449e+009 Pa	1.9725e+008 Pa	1.2844e+009 Pa	2.5373e+008 Pa
E_2	6.0693e+007 Pa	3.0068e+008 Pa	3.1107e+008 Pa	3.0301e+008 Pa
t_r	1.4887 s	3.5022 s	0.7674 s	2.8064 s

Tab. 3.1: Shrnutí výsledků optimalizace pro jednotlivé varianty.



Obr. 3.7: Porovnání výsledků optimalizace pro všechny 4 varianty s výsledky experimentu.

3.4. Vlastnosti a chování viskoelastického materiálu při dynamickém zatěžování

V této části práce je pozornost zaměřena na odezvu viskoelastických materiálů při dynamickém zatěžování. Nebude-li uvedeno jinak, bylo v této podkapitole čerpáno z práce [11].

Stejně jako v podkapitole 3.2 bude při studiu chování materiálu při dynamickém zatížení využíván Boltzmannův integrál (3.15). Cyklické zatěžování viskoelastického materiálu deformací lze popsat obecnou harmonickou funkcí s amplitudou ε_0 , tj.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad (3.25)$$

kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence.

Při studiu chování řady materiálů při harmonickém zatížení, zejména polymerů, je účelné vyjádřit relaxační funkci $E(t)$ ve tvaru

$$E(t) = \bar{E}(t) + E_e, \quad (3.26)$$

kde E_e je tzv. *rovnovážný modul*³, pro který platí $E_e = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$. Dosazením (3.25) a (3.26) do (3.15) a zavedením nové časové proměnné $t' = t - \tau$, lze vztah (3.15) přepsat do tvaru

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} [E_e + \omega \int_0^\infty \bar{E}(t') \sin \omega t' dt' + i\omega \int_0^\infty \bar{E}(t') \cos \omega t' dt']. \quad (3.27)$$

Odezvu materiálu (3.27) lze pomocí komplexní funkce $E^*(\omega)$ přepsat jako

$$\sigma(t) = E^*(\omega) \cdot \varepsilon(t), \quad (3.28)$$

kde $E^*(\omega) = E' + iE''$, přičemž

$$E'(\omega) = E_e + \omega \int_0^\infty \bar{E}(t') \sin \omega t' dt' \quad \text{a} \quad (3.29)$$

$$E''(\omega) = \omega \int_0^\infty \bar{E}(t') \cos \omega t' dt'.$$

Funkce $E^*(\omega)$ se nazývá *komplexním modulem*. Její reálná část $E'(\omega)$ představuje tuhost materiálu a určuje jeho elastické chování. Proto je také označována za *elastický (soufázový) modul*. Imaginární část funkce komplexního modulu, tj. $E''(\omega)$, naopak vyjadřuje viskózní vlastnosti materiálu a s nimi související disipaci energie. Z toho důvodu se nazývá *ztrátovým modulem*. Ze vztahu (3.28) je zřejmé, že zavedením komplexního modulu lze vztah mezi napětím a deformací zapsat v analogickém tvaru, jako v případě lineárního elastického materiálu. Pomocí funkcí $E'(\omega)$ a $E''(\omega)$ lze dále definovat tzv. *ztrátový faktor* $\tan \delta$ jako

$$\tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}, \quad (3.30)$$

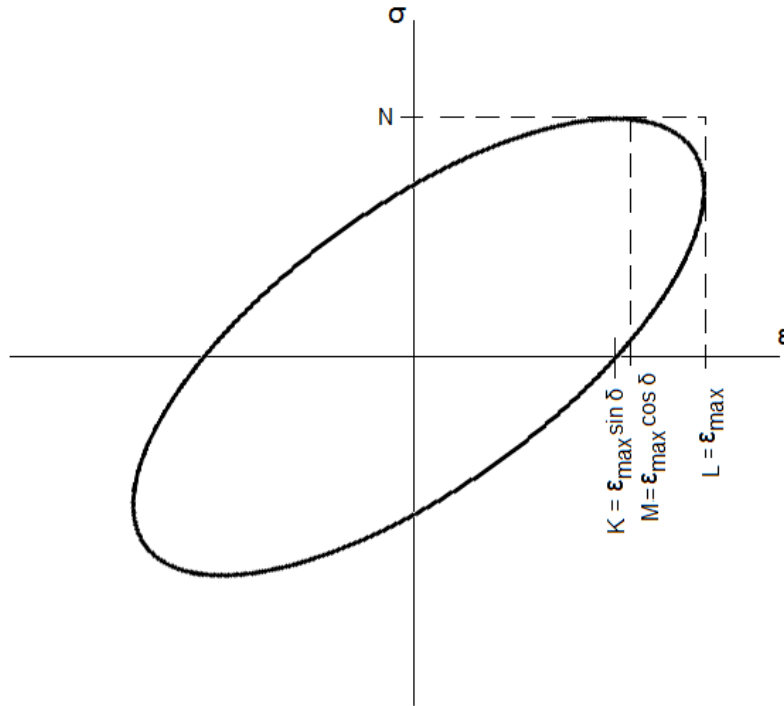
který vyjadřuje tlumení viskoelastického materiálu⁴. V tomto případě δ představuje fázový posuv mezi napětím $\sigma(t)$ a deformací $\varepsilon(t)$. Velikost ztrátového faktoru $\tan \delta$ lze stanovit nejen ze vztahu (3.30), ale také pomocí tzv. *Lissajousových křivek*. Jedná se o křivky vyjadřující závislost $\sigma(\varepsilon)$ při harmonickém zatížení. Lze ukázat, že v případě lineárních viskoelastických materiálů se jedná o elipsy [11].

Na Obr. 3.8 je znázorněna takováto elipsa pro případ zatížení deformací $\varepsilon(t) = B \sin \omega t$ a následnou odezvu $\sigma(t) = D \sin(\omega t + \delta)$. Obsah plochy ohraničené touto elipsou odpovídá velikosti disipované energie. V práci [11] je ukázáno, že ztrátový faktor lze vyjádřit pomocí úseků zřejmých z Obr. 3.8 jako

$$\tan \delta = \frac{K}{M}, \quad (3.31)$$

³ Pro pevné látky je $E_e > 0$, pro kapaliny je $E_e = 0$.

⁴ Míru disipace energie lze vyjádřit i jinými způsoby, např. pomocí tzv. *Q faktoru*, viz [12]



Obr. 3.8: Závislost $\sigma(\varepsilon)$ při harmonickém zatížení viskoelastického materiálu (Lissajousova křivka).

kde K odpovídá hodnotě deformace při nulovém napětí a M odpovídá velikosti deformace při maximálním napětí.

Pomocí výše uvedených vztahů (3.29) a (3.30) lze stanovit $E'(\omega)$, $E''(\omega)$ a $\tan \delta$ pro libovolný model viskoelastického materiálu reprezentovaného relaxační funkcí $E(t)$. Porovnáním obecné relaxační funkce (3.26) s relaxační funkcí pro standardní těleso (3.14) je zřejmé, že

$$E_e = E_2, \quad \bar{E}(t) = E_1 e^{-\frac{t}{\tau_r}}. \quad (3.32)$$

Po dosazení (3.32) do (3.29) a (3.30) a po úpravách lze odvodit viz [11]

$$E'(\omega) = E_2 + E_1 \frac{\omega^2 \tau_r^2}{1 + \omega^2 \tau_r^2}, \quad (3.33)$$

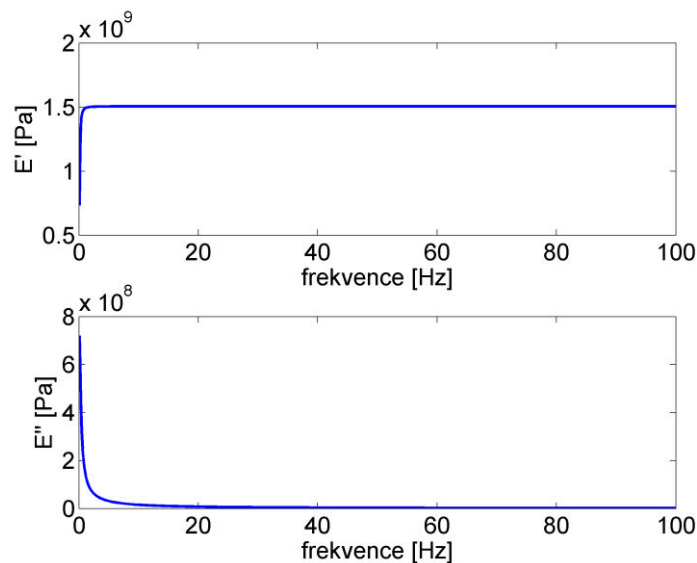
$$E''(\omega) = E_1 \frac{\omega \tau_r}{1 + \omega^2 \tau_r^2}, \quad (3.34)$$

$$\tan \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \Delta}} \frac{\omega \tau_m}{1 + \omega^2 \tau_m^2}, \quad (3.35)$$

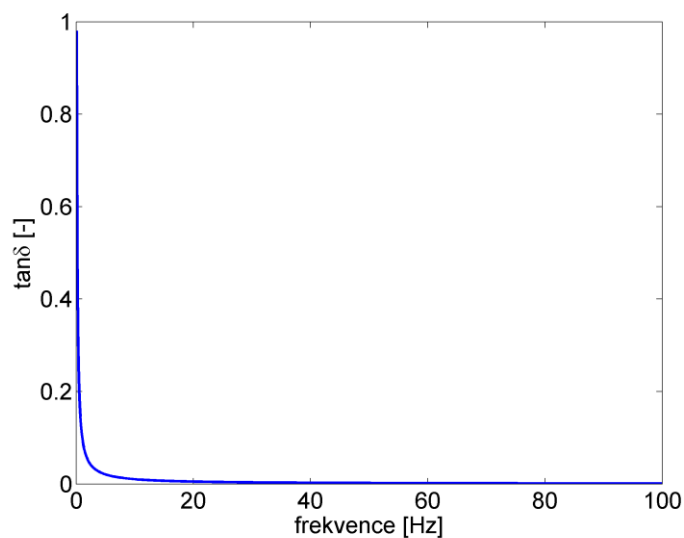
kde $\Delta = \frac{E_1}{E_2}$ a $\tau_m = \tau_r \sqrt{1 + \Delta}$.

3.5. Určení dynamických parametrů E' , E'' a $\tan \delta$ pro materiál PA6

Na základě vztahů (3.33) - (3.35) byl vytvořen skript v programu MATLAB, který stanovuje analytickou závislost jednotlivých dynamických materiálových parametrů v závislosti na měnící se úhlové frekvenci ω . S využitím materiálových parametrů odpovídajících variantě A z Tab. 3.1 tento skript postupně stanovuje velikosti E' , E'' a $\tan \delta$ pro vektor frekvencí z intervalu $f \in \langle 0,1,100 \rangle$ Hz, tj. pro $\omega \in \langle 0,628,6,28 \rangle \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Výsledné závislosti $E'(f)$, resp. $E''(f)$ jsou znázorněny na Obr. 3.9. Z těchto průběhů je zřejmý výrazný nárůst hodnoty $E'(f)$ v intervalu $f \in \langle 0,5 \rangle$ Hz, a naopak velikost $E''(f)$ výrazně klesá. Pro frekvence větší než tato hodnota se velikosti obou parametrů mění minimálně, přičemž $E'(f)$ se blíží k hodnotě $E_1 + E_2$ a $E''(f)$ k nule.



Obr. 3.9: Závislost funkcí E' a E'' na frekvenci f .



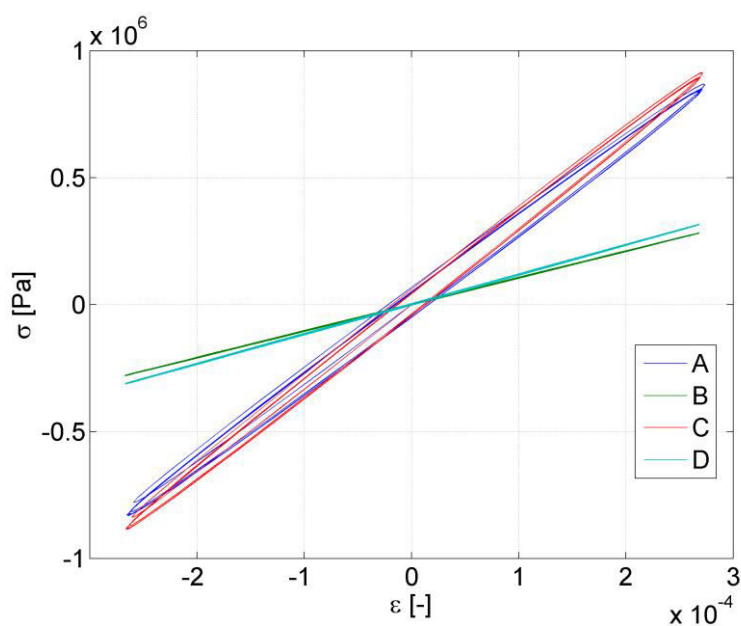
Obr. 3.10: Závislost ztrátového faktoru $\tan \delta$ na frekvenci f .

Tyto výsledky jsou v souladu s fyzikální podstatou použitého materiálového modelu, neboť se zvyšující se frekvencí zatěžování budou převažovat elastické vlastnosti nad těmi viskózními.

Analogická situace jako u ztrátového modulu E'' nastává i u ztrátového faktoru $\tan \delta$. Se vzrůstající frekvencí vykazuje $\tan \delta$ výrazný pokles a přibližně od hodnoty $f = 10\text{Hz}$ ho lze považovat za konstantní, viz Obr. 3.10. Tento materiál je tedy spíše vhodný pro tlumení vibrací nižších frekvencí, kde je velikost útlumu podstatně větší (pro $f = 2\text{Hz}$, $\tan \delta > 0.05$).

Je-li známa závislost $\sigma(\varepsilon)$, lze dynamické materiálové parametry pro jednu konkrétní frekvenci stanovit i podle vztahu (3.31). Pro získání této závislosti byl v programu MSC.Marc/Mentat vytvořen konečnoprvkový model tenkého viskoelastického nosníku se skutečnými rozměry listové pružiny, tj. $4 \times 25 \times 200\text{mm}$ (výška \times šířka \times délka). Úloha byla řešena jako případ rovinné napjatosti. Nosník byl na jedné straně vetknutý a na druhém konci buzený silou $F(t) = F_0 \sin \omega t$ kolmou na podélnou a vertikální osu nosníku, kde $F_0 = 1\text{N}$ a $\omega = 5\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Prostorová diskretizace listu byla provedena pomocí lineárních čtyřuzlových prvků přibližně čtvercové geometrie. Na výšku listu přitom připadaly 2 elementy, na jeho délku pak 100 prvků.

Vyhodnocení napjatosti bylo provedeno na povrchu povrchu nosníku v polovině jeho délky. Získané závislosti $\sigma(\varepsilon)$ jsou pro všechny 4 varianty materiálových parametrů A-D uvedených v Tab. 3.1 vykresleny na Obr. 3.11. Z tohoto obrázku je zřejmé, že největší tlumení, tj. největší ztrátový faktor $\tan \delta$ (elipsy s největším obsahem) vykazují varianty A a C. Je to proto, že tyto dvě varianty parametrů dobře popisují nelineární oblast odezvy viskoelastického materiálu na rostoucí (klesající) zatížení. Parametry zbývajících variant byly identifikovány zejména pro oblast relaxace napětí, ke které při modelovaném namáhání nosníku v podstatě nedochází, takže části křivek pro $t > t_1$ jsou v podstatě lineární, tj. míra disipace energie je zanedbatelná (viz Obr. 3.7).



Obr. 3.11: Lissajousovy křivky pro varianty materiálových parametrů A-D.

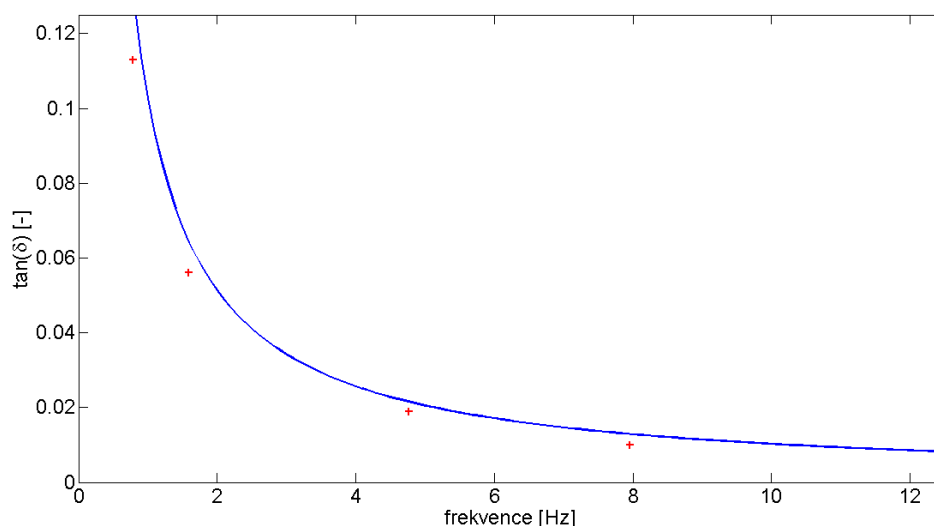
V Tab. 3.2 jsou pro jednotlivé varianty A-D uvedeny hodnoty parametrů K a M odečtené z křivek na Obr. 3.11, s jejichž pomocí lze ze vztahu (3.31) určit ztrátový faktor.

Pro porovnání je v posledním sloupci uvedeno $\tan \delta$ určené z analytického vztahu (3.35) pro všechny čtyři varianty. Rozdíly v hodnotách $\tan \delta$ pro tyto dva postupy se pohybují kolem 10% až 15%. Další numerické simulace provedené s poloviční velikostí konečných prvků, tj. 4 prvky na výšku a 200 prvků na délku, vedou k téměř totožným výsledkům (rozdíl okolo 1%).

Z Obr. 3.11 je dále patrné, že dochází k saturaci křivek, tj. že s rostoucím časem se jejich tvar a poloha „ustalují“. Na Obr. 3.12 je znázorněna analyticky získaná frekvenční závislost ztrátového faktoru společně s vybranými hodnotami $\tan \delta$ určenými pomocí numerické simulace. Je zřejmé, že analytické řešení i přístup pomocí Lissajousových křivek vedou ke srovnatelným výsledkům a lze tedy vztahu (3.31) užít i v případech, kdy použití analytického přístupu není možné.

	K	M	$\tan \delta$ z MKP	$\tan \delta$ analyticky
Varianta A	8.5e-5	7.4e-4	0.113	0.1288
Varianta B	1.5e-5	7.5e-4	0.020	0.0226
Varianta C	1.35e-4	7.4e-4	0.180	0.2071
Varianta D	2.00e-5	7.5e-4	0.027	0.0324

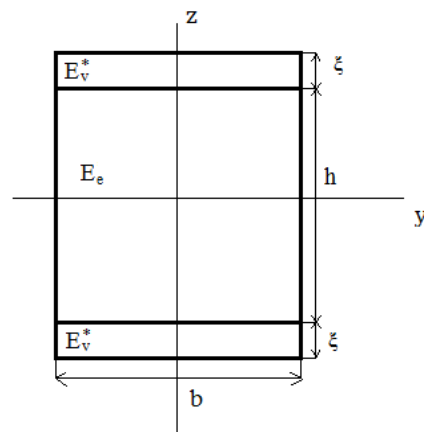
Tab. 3.2: Porovnání hodnot $\tan \delta$ získaných pomocí numerické simulace z analytických vztahů.



Obr. 3.12: Porovnání analyticky stanovené závislosti $\tan \delta(f)$ s hodnotami $\tan \delta$ určenými pro $\omega = \{5, 10, 30, 50\} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pomocí MKP.

4. Návrh listových pružin z vrstevnatého materiálu

V předchozí kapitole byla řešena odezva homogenního viskoelastického materiálu na harmonické buzení, přičemž hlavním cílem bylo určení ztrátového faktoru materiálu PA6. V případě vrstevnatých struktur, které budou využity při modifikaci stávajícího systému odpružení dětského vozíku, už ale nelze tlumicí vlastnosti popsat dříve uvedenými vztahy a je nutné zavést tzv. *efektivní ztrátový faktor* označovaný $\tan \delta_{eff}$ [11], který bude zohledňovat také skladbu listu.



Obr. 4.1: Průřez nosníku se třemi vrstvami.

4.1. Zavedení efektivního ztrátového faktoru $\tan \delta_{eff}$ pro vrstevnaté nosníky

V následující části práce budou uvažovány pouze nosníky se symetrickou skladbou, a to jak z pohledu materiálových vlastností, tak geometrie jednotlivých vrstev. Nejprve bude provedeno odvození vztahu pro výpočet $\tan \delta_{eff}$ jednoduchého třívrstvého nosníku, poté bude vztah zobecněn pro nosník s 2N vrstvami.

Průřez takového symetrického třívrstvého nosníku o šířce b je znázorněn na Obr. 4.1. Vnější vrstvy tloušťky ξ jsou tvořené viskoelastickým materiálem s komplexním modulem pružnosti E_v^* . Prostřední vrstva o tloušťce h je tvořena čistě elastickým materiálem s modulem pružnosti E_e . Obecný vztah pro ohybovou tuhost Γ průřezu homogenního nosníku má tvar

$$\Gamma = E \cdot I, \quad (4.1)$$

kde E je modul pružnosti, I je statický moment průřezu nosníku vzhledem k neutrální ose y . Pokud se nosník skládá z více vrstev různých elastických materiálů, ohybová tuhost Γ se stanoví jako součet ohybových tuhostí dílčích částí průřezu z těchto odlišných materiálů. Pro nosník složený pouze ze dvou materiálů lze vztah (4.1) přepsat do podoby

$$\Gamma = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2. \quad (4.2)$$

Pokud je jeden z těchto materiálů viskoelastický, přechází vztah (4.2) s využitím tzv. *correspondence principle* [11] na tvar

$$\Gamma^* = E_e I_e + E_v^* I_v. \quad (4.3)$$

Ve vztahu (4.3) představuje I_e kvadratický moment průřezu elastické vrstvy a I_v označuje kvadratický moment obou viskoelastických vrstev k neutrální ose y (viz Obr. 4.1). Veličina Γ^* pak reprezentuje komplexní ohybovou tuhost. Dosazením kvadratických momentů I_e a I_v odpovídajících vrstvám znázorněným na Obr. 4.1 a po provedení příslušných algebraických úprav lze pro komplexní tuhost psát

$$\Gamma^* = E_e \left[\frac{1}{12} b h^3 + \frac{E_v^*}{E_e} \left(\frac{b \xi^3}{6} + \frac{b \xi (h + \xi)^2}{2} \right) \right], \quad (4.4)$$

Komplexní modul pružnosti E_v^* lze rozepsat podobně jako v podkapitole 3.4, tj. $E_v^*(\omega) = E_v' + iE_v''$.

Efektivní ztrátový modul $\tan \delta_{eff}$ lze potom podle [11] určit jako podíl imaginární a reálné složky komplexní ohybové tuhosti Γ^* , analogicky jako ve (3.30). Pro symetrický třívrstvý nosník znázorněný na Obr. 4.1 lze potom psát

$$\tan \delta_{eff}(\omega) = \frac{\text{Im}\{\Gamma^*\}}{\text{Re}\{\Gamma^*\}} = \frac{\frac{E_v''(\omega)}{E_e} \left(\frac{b\xi^3}{6} + \frac{b\xi(h+\xi)^2}{2} \right)}{\frac{bh^3}{12} + \frac{E_v'(\omega)}{E_e} \left(\frac{b\xi^3}{6} + \frac{b\xi(h+\xi)^2}{2} \right)}. \quad (4.5)$$

Pro stanovení konkrétní hodnoty $\tan \delta_{eff}$ je nutné pak do vztahu (4.5) dosadit funkce E_v' i E_v'' odpovídající zvolenému materiálovému modelu, v tomto případě modelu standardního tělesa. K tomu lze využít vztahy uvedené v předchozí kapitole, tj. vztahy (3.33) a (3.34).

Při zobecnění úlohy na případ nosníku složeného z $2N$ vrstev využijeme stejné předpoklady jako na začátku této kapitoly. Průřez takového nosníku je znázorněn na Obr. 4.2. Vrstvy jsou indexovány směrem od neutrální osy y , tj. pro vnější vrstvu platí $i = N$. Označme tloušťku i -té vrstvy t_i a vzdálenost těžiště T_i této vrstvy od těžiště průřezu nosníku ξ_i . Potom lze pro kvadratický moment i -té vrstvy odvodit vztah

$$I_i = \frac{1}{12} bt_i^3 + bt_i \xi_i^2, \quad (4.6)$$

přičemž ξ_i lze vyjádřit pomocí tloušťek vrstev s indexy $j = 1, \dots, i - 1$ jako

$$\xi_i = \frac{t_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} t_j. \quad (4.7)$$

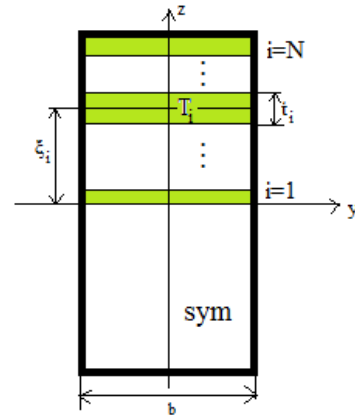
Celkovou ohybovou tuhost symetrického průřezu složeného z $2N$ elastických vrstev lze pak s využitím vztahů (4.2) a (4.6) vyjádřit jako

$$\Gamma = 2 \sum_{i=1}^N E_i \cdot I_i = 2 \sum_{i=1}^N E_i \cdot \left(\frac{1}{12} bt_i^3 + bt_i \xi_i^2 \right). \quad (4.8)$$

Pro určení $\tan \delta_{eff}$ u symetrického nosníku složeného z elastických a viskoelastických vrstev je nutné rozlišit dva případy:

a) Vrstvy s lichými indexy jsou elastické, sudé viskoelastické, tj.

$$E_i = E_e \text{ pro } i = 1, 3, 5, \dots, \quad E_i = E_v^* \text{ pro } i = 2, 4, 6, \dots \quad (4.9)$$



Obr. 4.2: Průřez nosníku s $2N$ vrstvami.

b) Vrstvy s lichými indexy jsou viskoelastické, sudé elastické, tj.

$$E_i = E_v^* \text{ pro } i = 1,3,5, \dots, \quad E_i = E_e \text{ pro } i = 2,4,6, \dots \quad (4.10)$$

Pro případ a) lze tedy s využitím (4.8) a (4.9) psát

$$\Gamma^* = 2 \sum_{i=1}^N E_i^* \cdot I_i = 2 \cdot \left[\sum_{i=1,3,5,\dots} E_e \cdot I_i + \sum_{i=2,4,6,\dots} E_v^* \cdot I_i \right]. \quad (4.11)$$

Jelikož moduly pružnosti E_e , resp. E_v^* , jsou ve všech vrstvách s lichými, resp. sudými, indexy stejné, lze je vytknout před sumu. Rozepsáním E_v^* na imaginární a reálnou složku dle (4.4) a dosazením (4.11) do definičního vztahu (4.5) lze pro případ a) obdržet vztah

$$\tan \delta_{eff}(\omega) = \frac{\text{Im}\{\Gamma^*\}}{\text{Re}\{\Gamma^*\}} = \frac{E_v''(\omega) \cdot \sum_{i=2,4,6,\dots} I_i}{E_v'(\omega) \cdot \sum_{i=2,4,6,\dots} I_i + E_e \cdot \sum_{i=1,3,5,\dots} I_i}. \quad (4.12)$$

Analogicky lze pak pro případ b) psát vztah

$$\tan \delta_{eff}(\omega) = \frac{\text{Im}\{\Gamma^*\}}{\text{Re}\{\Gamma^*\}} = \frac{E_v''(\omega) \cdot \sum_{i=1,3,5,\dots} I_i}{E_v'(\omega) \cdot \sum_{i=1,3,5,\dots} I_i + E_e \cdot \sum_{i=2,4,6,\dots} I_i}. \quad (4.13)$$

Oba případy lze úpravou indexování spojit do jednoho vztahu. Zavedením označení I_{v_i} , resp. I_{e_i} , pro kvadratický moment i -té viskoelastické, resp. elastické, vrstvy lze psát

$$\tan \delta_{eff}(\omega) = \frac{E_v''(\omega) \cdot \sum_i I_{v_i}}{E_v'(\omega) \cdot \sum_i I_{v_i} + E_e \cdot \sum_i I_{e_i}}, \quad (4.14)$$

kde jednotlivé sumy představují součet jen přes viskoelastické, resp. elastické, vrstvy.

4.2. Návrh jednotlivých variant skladby listů pružiny

V této části bude vybráno několik variant skladby listu navržených tak, aby nové listy pružin měly stejnou statickou ohybovou tuhost jako původní ocelové listy, tj. aby platila rovnost

$$\Gamma_{el} = \Gamma_{ve}, \quad (4.15)$$

kde Γ_{el} je ohybová tuhost původního čistě ocelového listu a Γ_{ve} nového obsahujícího viskoelastický materiál. Jelikož nelze porovnávat komplexní (dynamickou) tuhost s reálnou (statickou), je třeba doplnit, že modul pružnosti viskoelastického materiálu reprezentovaného Zenerovým modelem se pro stanovení statické ohybové tuhosti určí jako součet modulů pružnosti jednotlivých pružin v modelu, viz kapitola 3. V závěru bude provedeno porovnání takto navržených variant podle $\tan \delta_{eff}$.

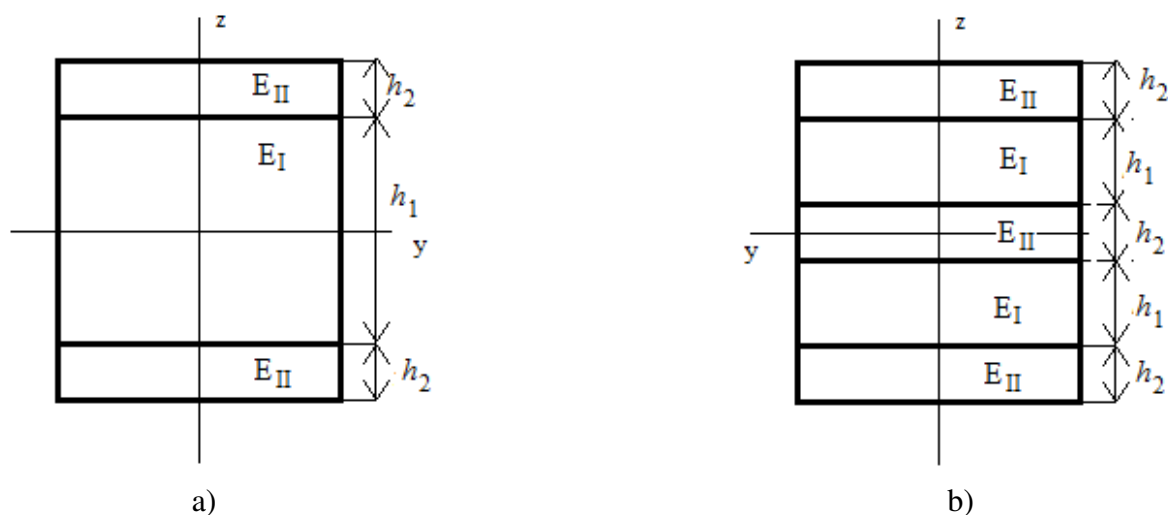
Průřez stávajícího listu je obdélník o výšce $t = 4\text{mm}$ a šířce $b = 25\text{mm}$ (viz podkapitola 2.1). Pro ohybovou tuhost původního ocelového listu tedy platí

$$\Gamma_{el} = EI = \frac{E_{oc}bt^3}{12}. \quad (4.16)$$

Viskoelastický list bude uvažován se stejnou šířkou jako původní pro zajištění kompatibility se stávající konstrukcí. Jediným parametrem, který lze měnit za účelem dosažení stejné statické ohybové tuhosti, je tedy výška listu, potažmo jeho skladba. Jelikož průřez s jednou vrstvou nad neutrální osou ($N = 1$) by při zachování symetrie nemohl být složen ze dvou materiálů, nejjednodušší možnou variantou skladby je průřez se dvěma vrstvami nad neutrální osou ($N = 2$, Obr. 4.3a), tj. celkově třívrstvý. Dále byl uvažován také průřez se třemi vrstvami nad osou y ($N = 3$, Obr. 4.3b), tj. celkově složený z 5 vrstev. Další postup je proto omezen pouze na následující 4 případy:

- 1) 3 vrstvy
 - a) složení *plast-ocel-plast* (POP3)
 - b) složení *ocel-plast-ocel* (OPO3)
- 2) 5 vrstev
 - a) složení *plast-ocel-plast* (POP5)
 - b) složení *ocel-plast-ocel* (OPO5).

Průřezy listů na Obr. 4.3 jsou tvořeny vrstvami z materiálu s modulem pružnosti E_I , tloušťce vrstvy h_1 a materiálu s modulem pružnosti E_{II} a tloušťce vrstvy h_2 . Jeden z těchto dvou materiálů je viskoelastický a druhý elastický, záleží na zvolené variantě (POP/OPO).



Obr. 4.3: Průřez jednoho listu listové pružiny a) třívrstvého, b) pětivrstvého.

Pro případ třívrstvého průřezu lze dosazením kvadratických momentů dle Obr. 4.3a do levé strany vztahu (4.15) obdržet

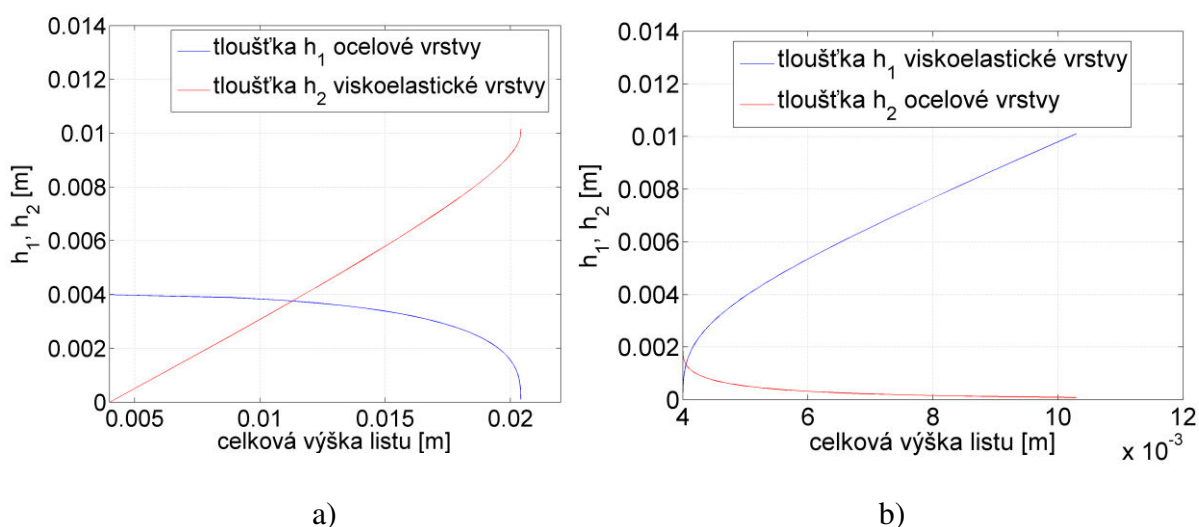
$$E_I \frac{1}{12} bh_1^3 + 2E_{II} \left(\frac{1}{12} bh_2^3 + \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right)^2 bh_2 \right) = \Gamma_{el}, \quad (4.17)$$

kde Γ_{el} je statická ohybová tuhost původních ocelových listů stanovená ze vztahu (4.16). Pro získání závislosti $h_2(h_1)$ a závislosti inverzní je nutné rovnici (4.17) převést na tvary

$$E_{II} \left(\frac{2}{3} b \right) h_2^3 + E_{II} b h_1 h_2^2 + E_{II} \left(\frac{1}{2} b h_1^2 \right) h_2 + E_I \frac{1}{12} b h_1^3 - \frac{E_{oc} b t^3}{12} = 0, \text{ resp.} \quad (4.18)$$

$$E_I \frac{1}{12} b h_1^3 + E_{II} \left(\frac{1}{2} b h_2 \right) h_1^2 + E_{II} (b h_2^2) h_1 + E_{II} \left(\frac{2}{3} b h_2^3 \right) - \frac{E_{oc} b t^3}{12} = 0. \quad (4.19)$$

Je zřejmé, že se jedná o kubické rovnice. Tyto rovnice mají obecně 3 kořeny, ovšem vzhledem k povaze úlohy lze předpokládat, že pouze jeden bude reálný, zbylé dva budou komplexní. Za účelem stanovení závislostí $h_2(h_1)$ a $h_1(h_2)$ byl vytvořen program v prostředí systému MATLAB nazvaný *tuhost.m* (viz Příloha), který pro zadaný vektor hodnot h_1 řeší rovnici (4.18), resp. pro zadaný vektor h_2 rovnici (4.19). Výstupem tohoto programu je graf, který znázorňuje tloušťku vrstvy materiálu I, tj. h_1 , a tloušťku vrstvy materiálu II, tj. h_2 , v závislosti na celkové výšce listu $h_1 + 2h_2$. Pro výpočet pomocí tohoto programu byl pro elastický materiál kvůli absenci materiálových parametrů skutečného listu (viz kapitola 2) zvolen modul pružnosti pro běžnou ocel $E_e = 2 \cdot 10^{11}$ Pa. Jak bylo zmíněno dříve, při statické analýze se moduly pružnosti viskoelastického materiálu sčítají, tj. při uvažování varianty A materiálových parametrů z Tab. 3.1 je celkový modul pružnosti $E_v = 1.5056 \cdot 10^9$ Pa. Při šířce listů $b = 0.025$ m a po dosazení E_e a E_v za E_I a E_{II} dle variant skladby OPO3 ($E_I = E_v$), resp. POP3 ($E_I = E_e$) lze obdržet křivky znázorněné na Obr. 4.4.



Obr. 4.4: Závislost tloušťky vrstev na celkové výšce pro variantu skladby a) POP3, b) OPO3.

Analogicky pro případ pětivrstvého průřezu listu lze podle Obr. 4.3b vztah (4.15) rozvést dosazením kvadratických momentů vrstev do tvaru

$$E_{II} \left(\frac{1}{12} b h_2^3 + 2 \left(\frac{1}{12} b h_2^3 + (h_1 + h_2)^2 b h_2 \right) \right) + \quad (4.20)$$

$$+ 2E_I \left(\frac{1}{12} b h_1^3 + \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right)^2 b h_1 \right) = \Gamma_{el},$$

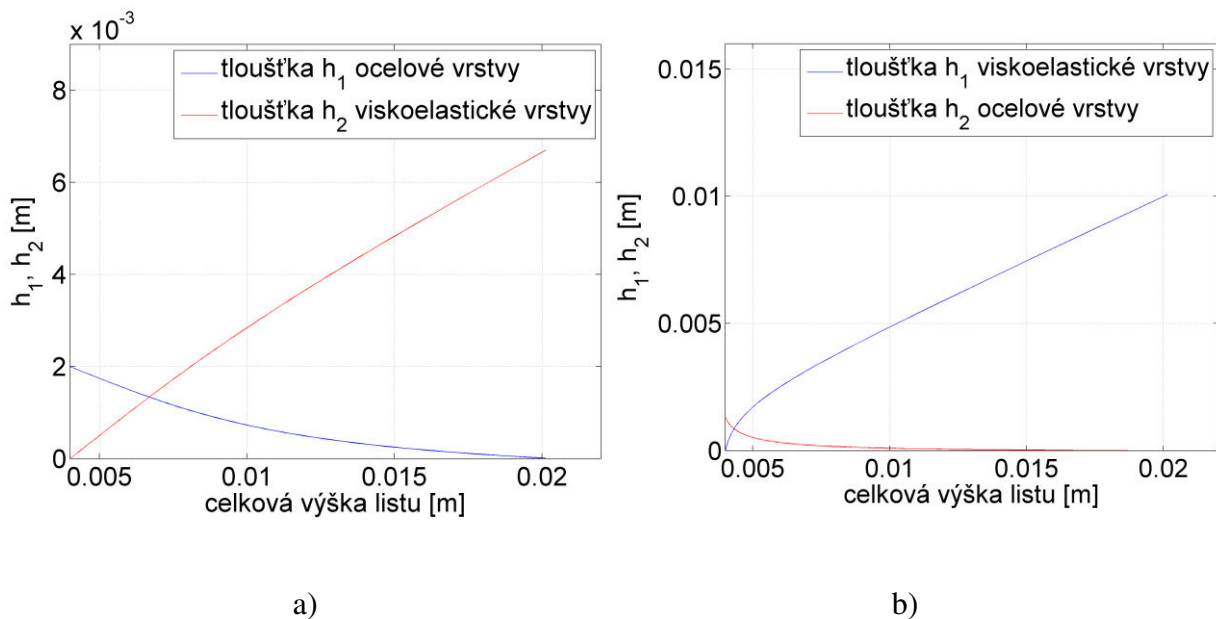
který lze opět pro získání závislosti $h_2(h_1)$ a $h_1(h_2)$ převést pomocí algebraických úprav na polynomiální rovnice třetího stupně

$$E_{II} \frac{27}{12} b h_2^3 + \left(4E_{II} + \frac{E_I}{2}\right) b h_1 h_2^2 + (2E_{II} + E_I) b h_1^2 h_2 + E_I \frac{2}{3} b h_1^3 - \frac{E_{oc} b t^3}{12} = 0, \quad (4.21)$$

$$E_I \frac{2}{3} b h_1^3 + (2E_{II} + E_I) b h_2 h_1^2 + \left(4E_{II} + \frac{E_I}{2}\right) b h_2^2 h_1 + E_{II} \frac{27}{12} b h_2^3 - \frac{E_{oc} b t^3}{12} = 0. \quad (4.22)$$

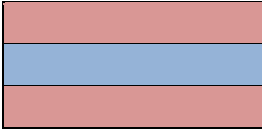
Podobně jako pro třívrstvé varianty byl i v tomto případě vytvořen program v prostředí systému MATLAB (*tuhost2.m*, viz Příloha), který řeší rovnice (4.21) a (4.22). Výstupem je opět závislost tloušťky h_2 materiálu *II* v lichých vrstvách na tloušťce h_1 pro rovnici (4.21), resp. závislost tloušťky h_1 materiálu *I* v sudých vrstvách na tloušťce h_2 pro rovnici (4.22). Pro materiály se stejnými moduly pružnosti jako pro případ třívrstvého listu jsou získané závislosti znázorněny na Obr. 4.5.

Z výsledných závislostí prezentovaných na Obr. 4.4 a Obr. 4.5 byly pro každou z variant (POP3, OPO3, POP5 a OPO5) zvoleny tři výšky. Listy původního odpružení mají výšku 4 mm, nové listy s viskoelastickým materiálem, kde je méně oceli, budou tedy při stejné ohybové tuhosti jistě větší. Vzhledem ke konstrukčním možnostem byly tedy výšky zvoleny 6mm, 8mm a 10mm. Tloušťky jednotlivých vrstev pro zmíněné varianty jsou uvedeny v Tab. 4.1. Sudé a liché vrstvy listu jsou na nákrese barevně odlišeny a z tabulky lze podle odpovídající barvy vyčíst tloušťky jednotlivých vrstev materiálů.

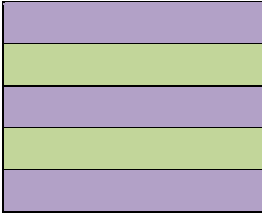


Obr. 4.5: Závislost tloušťky vrstev na celkové výšce pro variantu skladby a) POP5, b) OPO5.

		ocel [mm]	plast [mm]
třívrstvé	POP	3.9710	1.0145
		3.9250	2.0370
		3.8460	3.0770
	OPO	0.3250	5.3500
		0.1650	7.6700
		0.0970	9.8060
pětivrstvé	POP	1.4975	1.0015
		1.0630	1.9580
		0.7310	2.8460
	OPO	0.3247	2.5130
		0.1646	3.7531
		0.0968	4.8548



třívrstvý list



pětivrstvý list

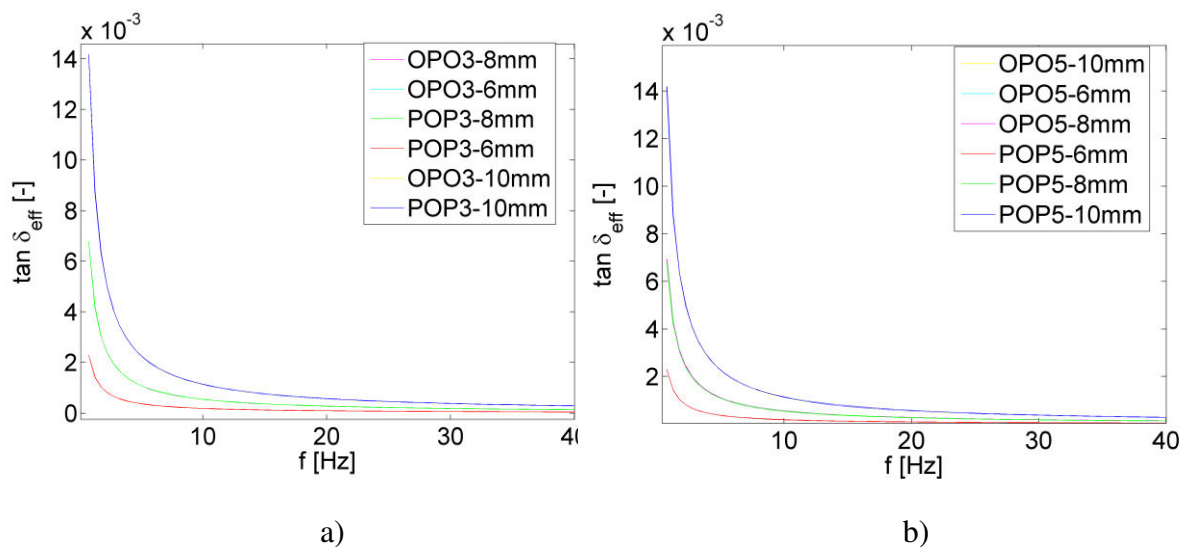
Tab. 4.1: Tloušťky jednotlivých vrstev pro všech dvanáct variant.

4.3. Posouzení tlumících vlastností vrstevnatých listů navržených skladeb

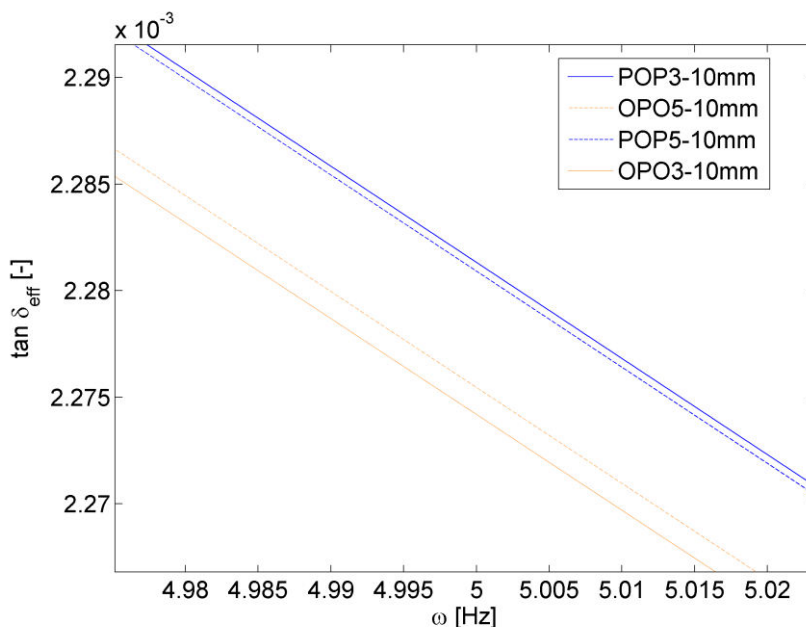
Za účelem hodnocení jednotlivých variant s ohledem na jejich tlumení byl vytvořen program *tand_eff.m* (viz Příloha), který stanovuje analytické závislosti $\tan \delta_{eff}(f)$ na základě vztahu (4.14) a přepočtu úhlové rychlosti na frekvenci $\omega = 2\pi f$. Vstupem programu je vektor tloušťek vrstev v milimetrech získaný z Tab. 4.1. Díky předpokládané symetrii se zadávají pouze tloušťky vrstev s indexy $N = 1, 2$, popř. 3 dle Obr. 4.3. Dále se zadává vektor skladby listů, který se sestává z čísel 1 a 0. Číslo 1 značí viskoelastickou vrstvu a 0 značí vrstvu elastickou. Poté program pomocí vztahu (4.14) vyčísluje hodnoty $\tan \delta_{eff}$ pro vektor úhlových rychlostí ω dopočtených ze zadaného frekvenčního intervalu.

Závislosti získané z programu *tand_eff.m* jsou vykresleny v intervalu $f \in \langle 0, 40 \rangle$ Hz na Obr. 4.6a pro všechny třívrstvé varianty skladby a na Obr. 4.6b pro všechny pětivrstvé. Křivky mají podobný průběh jako křivka na Obr. 3.10 získaná pro viskoelastický materiál z experimentálních dat, avšak vykazují mnohem menší tlumení. Je to způsobené tím, že ve vztahu (4.14) pro $\tan \delta_{eff}$ se ve jmenovateli na rozdíl od výrazu (3.30) pro $\tan \delta$ vyskytuje ještě člen reprezentující elastické vrstvy. Kdyby se tento člen položil rovný nule, obdržíme vztah (3.30). Jak je dále patrné z Obr. 4.6, kde jsou porovnány křivky pro všechny třívrstvé skladby (Obr. 4.6a), resp. pětivrstvé (Obr. 4.6b), varianty POP a OPO pro jednotlivé výšky téměř splývají, liší se přibližně o 1%, tj. v řádu 10^{-5} .

Jako nejlepší se podle očekávání ukázaly listy o výšce 10mm, jelikož obsahují největší množství viskoelastického materiálu, jejich porovnání je na Obr. 4.7. Vzhledem k malým rozdílům mezi jednotlivými listy o výšce 10mm je grafické porovnání provedeno na menším intervalu $f \in \langle 4.98, 5.02 \rangle$ Hz.



Obr. 4.6: Porovnání $\tan \delta_{eff}(f)$ pro všechny a) třívrstvé, b) pětivrstvé varianty.



Obr. 4.7: Porovnání tlumících vlastností všech listů s tloušťkou 10 mm na intervalu $f \in \langle 4.98, 5.02 \rangle$ Hz

Z Obr. 4.7 je zřejmé, že mezi 10mm vysokými listy vykazuje největší hodnoty $\tan \delta_{eff}$ verze POP3. Hned za ní následují ostatní 10mm varianty. Rozdíly v tlumení mezi těmito variantami skladby se pohybují v řádu 10^{-5} .

5. Numerická simulace odezvy listové pružiny na dynamické zatížení

V této kapitole bude pomocí metody konečných prvků a programu MSC.Marc/Mentat řešena odezva listového odpružení na přejezd překážky definovaného tvaru. Výsledky získané pro odpružení složené z vrstevnatých listů tloušťky 10mm jsou porovnány s výsledky numerických simulací provedených pro původní typ odpružení.

5.1 Popis buzení

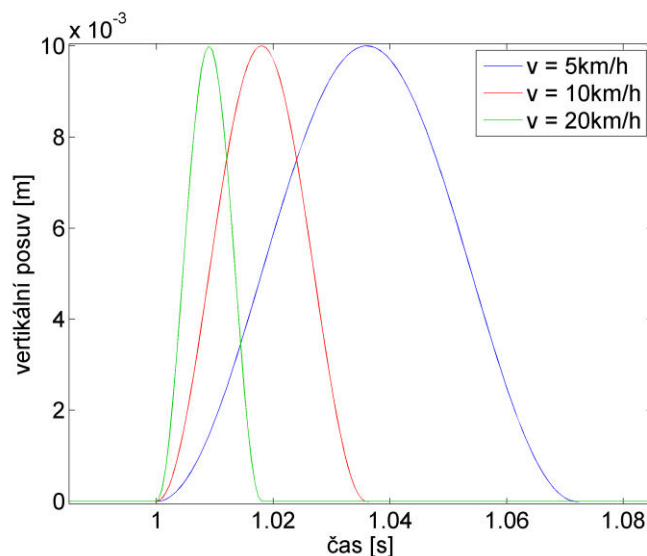
Pro modelování přejezdu přes nerovnost bylo zvoleno kinematického buzení definované po částech ve tvaru

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ \frac{h}{2} \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi v(t - t_0)}{d} \right\} & \text{pro } t \in \langle t_0, t_0 + \frac{d}{v} \rangle, \\ 0 & \text{pro } t \in \langle t_0, \infty \rangle \end{cases} \quad (5.1)$$

kde v je rychlost přejezdu a t_0 je čas nájezdu kola na překážku. Parametry h a d definují výšku a šířku překážky a byly voleny $h = 10\text{cm}$ a $d = 1\text{cm}$. Analogický tvar překážky se používá i v automobilovém průmyslu, viz [13]. S ohledem na to, že se jedná o listové odpružení dětského vozíku provozovaného při nižších rychlostech, byly rychlosti přejezdu přes překážku zvoleny jako $v = 5, 10$ a 20km/h . Pro vyšší rychlosti by byl přejezd překážky jednak nebezpečný pro pasažéry a dále lze očekávat odezvu vyšší frekvence a tudíž by se tlumení použitého materiálu projevilo méně, viz kapitola 3.

Charakter budící funkce (5.1) pro všechny uvažované rychlosti je patrný z Obr. 5.1. Tvar zobrazených křivek odpovídá době přejezdu, která je rovna podílu šířky překážky d a příslušné rychlosti přejezdu v . Studium odezvy listových pružin na toto buzení bylo provedeno na intervalu $t \in \langle 0, 10 \rangle\text{s}$, přičemž počátek nájezdu na překážku byl volen $t_0 = 1\text{s}$.

Pro potřeby tvorby konečnoprvkového modelu je dále nutné stanovit velikost



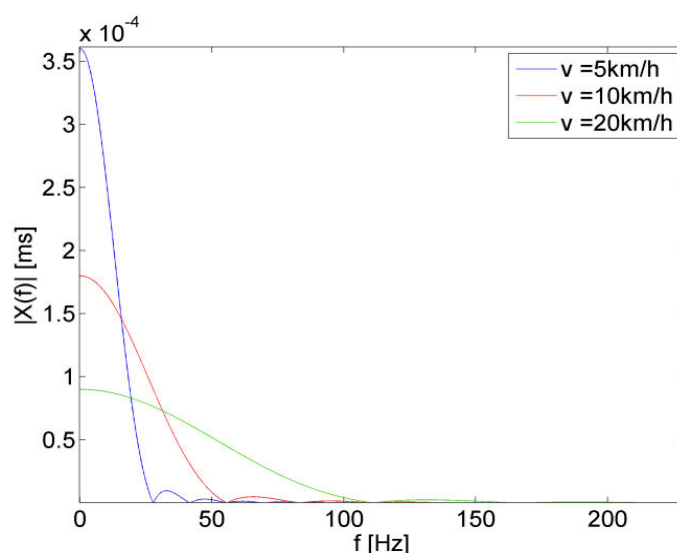
Obr. 5.1: Časové průběhy buzení pro jednotlivé rychlosti.

integračního kroku pro implicitní Newmarkovu metodu použitou pro integraci v časové oblasti. Tuto hodnotu je potřeba volit tak, aby při numerické integraci nedošlo ke zkreslení výsledného řešení. Integrační krok se v takovýchto případech stanovuje z amplitudového spektra buzení jako

$$dt = \frac{1}{12 \cdot f_{max}}, \quad (5.2)$$

kde f_{max} je maximální uvažovaná frekvence z amplitudového spektra. V tomto případě byly uvažovány pouze ty frekvence, jejichž amplitudové příspěvky byly větší než 5% z maxima příslušného amplitudového spektra.

Pro získání Fourierova obrazu budící funkce (5.1) a amplitudových spekter pro všechny uvažované rychlosti byl v prostředí MATLAB vytvořen program využívající knihovni funkci *fft.m*. Tato procedura využívá diskretní Fourierovy transformace (DFT), konkrétně jejího algoritmu FFT. Spojitou Fourierovu transformaci je možné použít jen pro deterministické funkce, kdy lze hledaný obraz nalézt přímo z definičních vztahů [14]. Pro všechny ostatní funkce, jako například experimentálně stanovené závislosti, se využívá DFT. Jelikož je DFT značně náročná na strojový čas (časová náročnost kvadraticky roste s hustotou dělení časového intervalu [14]), byl v minulosti vyvinut algoritmus FFT využívající rekurzivního dělení původní posloupnosti (funkce) na sudé a liché členy. Největšího urychlení lze dosáhnout vzorkováním s počtem bodů $N = 2^n$, kde $n \in \mathbf{N}$, což lze v případě analyticky zadané funkce (5.1) snadno realizovat. Výsledná amplitudová spektra pro funkce znázorněné na Obr. 5.1 jsou uvedena na Obr. 5.2. Spektra jsou vykreslena pouze pro $f < 230\text{Hz}$, jelikož amplitudové příspěvky frekvencí vyšších jsou téměř zanedbatelné. Shrnutí velikostí f_{max} odpovídajících dříve zmíněné pětiprocentní hranici a příslušných integračních kroků pro jednotlivé rychlosti určených dle (5.2) je provedeno v Tab. 5.1.



Obr. 5.2: Amplitudová spektra buzení pro všechny uvažované rychlosti.

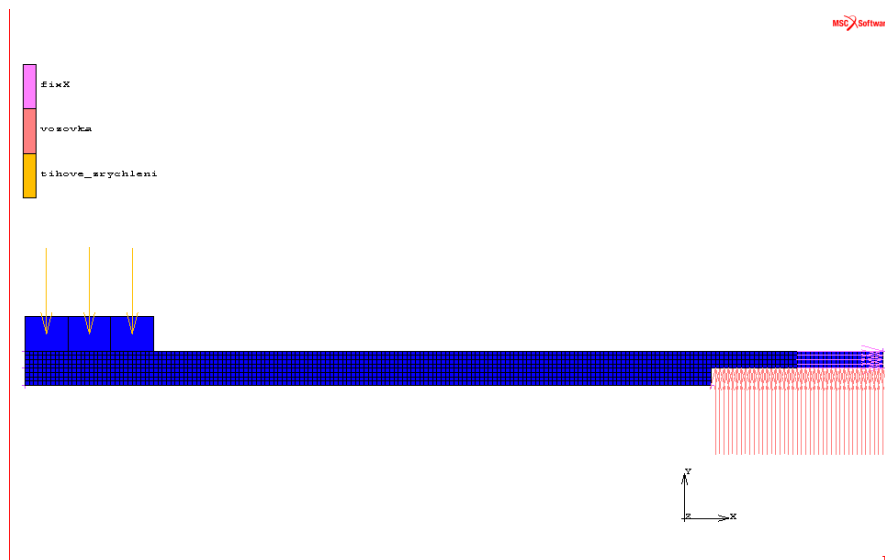
rychlost [km/h]	fmax [Hz]	dt [s]
5	40	$2.083 \cdot 10^{-3}$
10	100	$0.833 \cdot 10^{-3}$
20	170	$0.490 \cdot 10^{-3}$

Tab. 5.1: Shrnutí velikostí integračních kroků pro všechny uvažované rychlosti.

5.2. Model původního elastického odpružení a odezva na přejezd překážky

Vzhledem ke geometrii a zatížení listových pružin lze problém modelovat jako úlohu rovinné napjatosti. Dalším předpokladem úlohy bylo uvažování malých deformací a posuvů. Při tvorbě modelu nebyly dále uvažovány nelinearity způsobené kontaktem mezi listy, neboť byl řešen pouze případ odpovídající maximální tuhosti pružiny, tj. listy jsou na obou koncích pevně spojeny. Také byly provedeny výpočty s definováním kontaktu mezi listy, ale ukázalo se, že uvažování kontaktu má minimální vliv na výsledky simulací.

Okrajové podmínky patrné z Obr. 5.3 byly definovány tak, aby odpovídaly zjednodušujícím předpokladům úlohy. V uzlech horního listu na pravé svislé hraně byly předepsány nulové posuvy ve směru osy x („fixX“) a na příslušné části spodní hrany tohoto listu byly uzly buzeny funkcí z podkapitoly 5.1 ve směru osy y („vozovka“). Na levé straně v místě uchycení korby bylo zatížení od vlastní tíhy vozíku a přepravovaného pasažéra reprezentováno třemi elementy s celkovou hmotností 25 kg, což odpovídá polovině hmotnosti naloženého vozíku. Konečnoprvková síť byla vytvořena ze čtyřuzlových čtvercových elementů o hraně 1mm. Na výšku listu tak připadaly čtyři elementy, přičemž oba listy byly spojeny v hraničních uzlech.

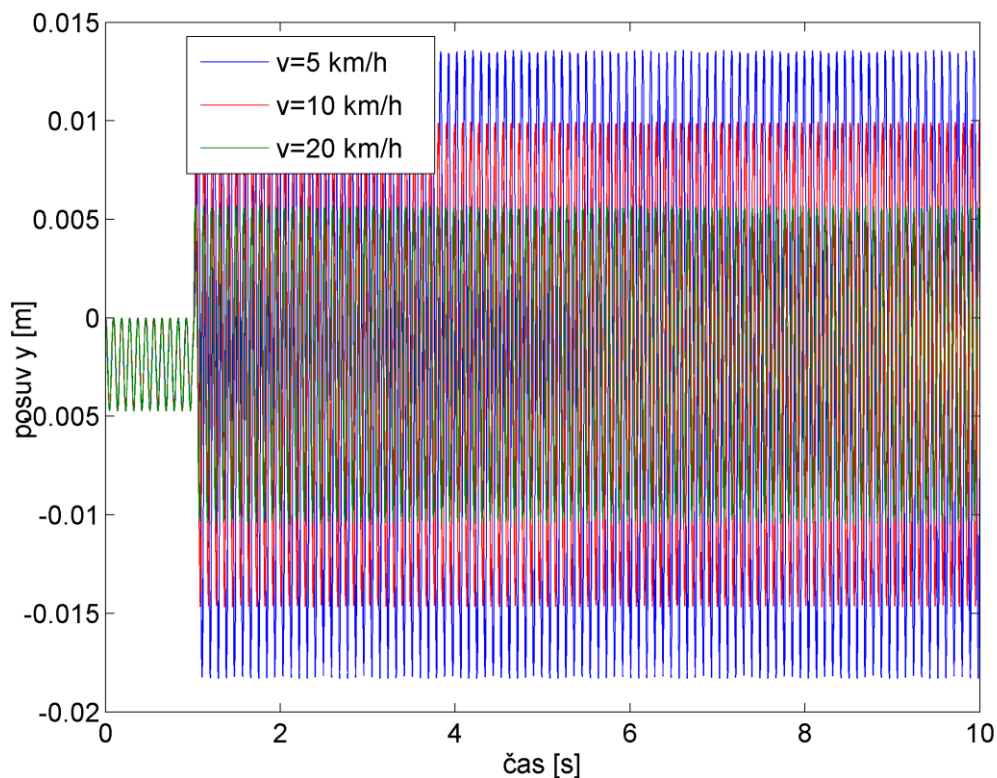


Obr. 5.3: Geometrie modelu původního elastického odpružení s vyznačenými okrajovými podmínkami.

Nejprve byly provedeny simulace s různými integračními kroky. S krokem určeným z amplitudového spektra v předchozí podkapitole (viz Tab. 5.1), s krokem polovičním,

k ověření správnosti integrace, a také s krokem adaptivním. Použití zjištěného i polovičního kroku vedlo k totožným výsledkům, avšak výsledky odpovídající adaptivnímu kroku se podstatně lišily. K získání lepších výsledků by zřejmě bylo nutné změnit defaultní nastavení parametrů algoritmu integrace s adaptivním krokem. Dále byl analyzován také vliv velikosti prvků na přesnost získaného řešení. Ukázalo se, že zmenšování velikosti prvků v takto jednoduchém modelu nevede k podstatnému zpřesnění výsledků. V dalším kroku byla provedena analýza vlivu uvažování vlastní tíhy listů. Vzhledem k velikosti zatížení od vlastní tíhy poloviny vozíku působící na konci pružiny se však dle očekávání ukázalo, že vliv vlastní tíhy listů na získané řešení je zanedbatelný. Při statickém průhybu pružin pod tíhou zatěžujícího tělesa byl rozdíl v řádu setin milimetrů, tj. asi 1% z celkové hodnoty 2.363mm. V případě dynamické analýzy byly odezvy pružin u obou variant téměř stejné.

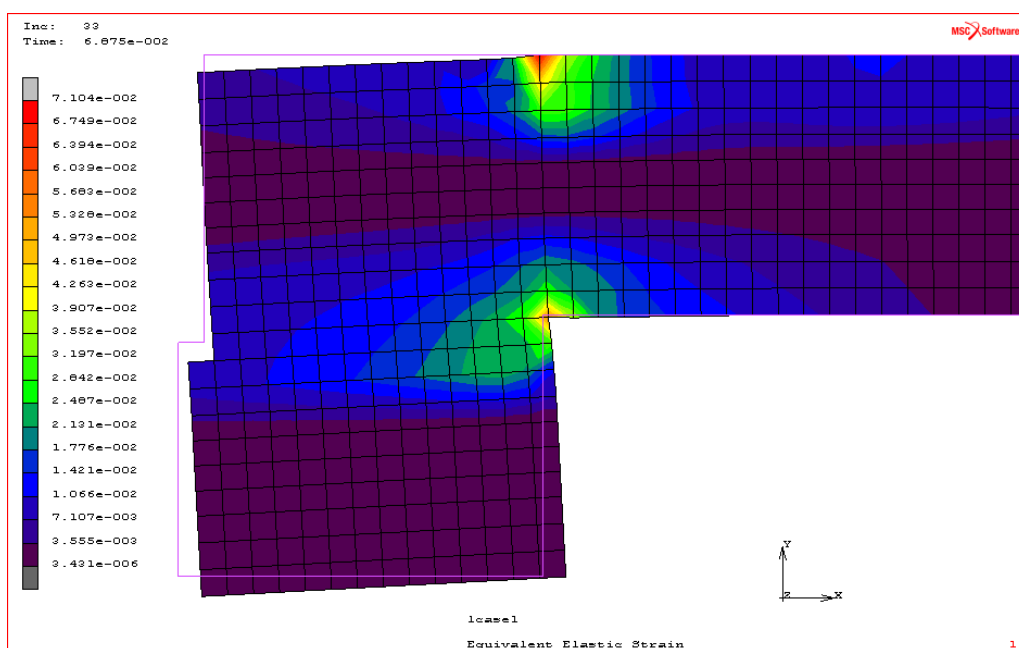
Geometrie i okrajové podmínky finálního modelu ocelového odpružení byly uvažovány podle Obr. 5.3. Nebyla zohledněna vlastní tíha listů a byl použit integrační krok určený v podkapitole 5.1 pomocí amplitudového spektra. Materiálové parametry listů byly zvoleny stejné jako k určení tloušťky vrstev v kapitole 4. Výsledné průběhy vertikálních výchylek v místě uchycení korby vozíku jsou pro všechny tři rychlosti zobrazeny na Obr. 5.4. Před přejezdem kmitaly listy se stejnou amplitudou a frekvencí (přibližně 11Hz). Po přejezdu překážky se jejich frekvence nezměnila, avšak došlo ke změně amplitudy vibrací. Ukázalo se, že největší amplitudy kmitů nastanou po přejezdu překážky rychlostí $v = 5\text{ km/h}$. Vzhledem k tomu, že se jedná o elastický případ, amplitudy výchylek v průběhu času neklesají, tj. nedochází k tlumení (viz Obr. 5.4).



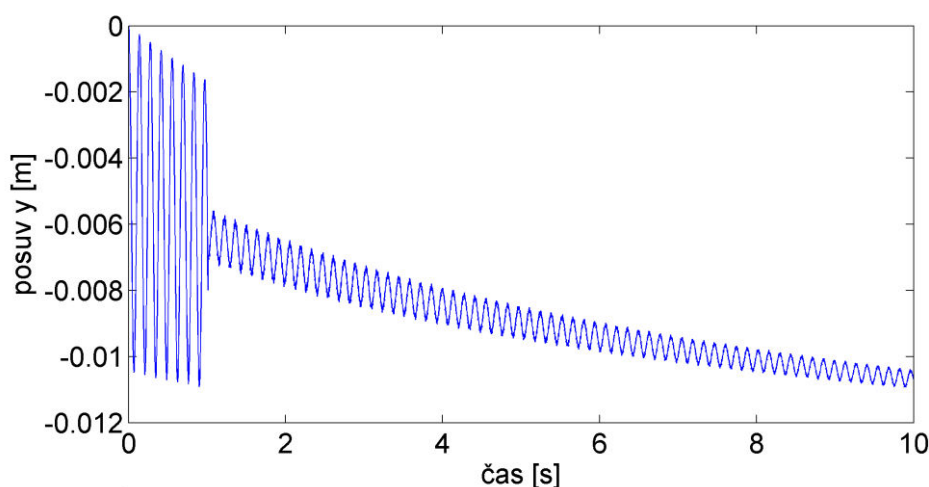
Obr. 5.4: Průběh kmitů po přejezdu překážky rychlostmi $v = 5, 10, 20\text{ km/h}$.

5.3. Model nového vrstevnatého odpružení a odezva na přejezd překážky

Z kapitoly 4 vzešly čtyři možné varianty skladby listu s největším tlumením kombinující elastický a viskoelastický materiál při zachování statické tuhosti listu. Jako nejlepší se ukázala varianta POP3, která byla také použita pro první model vrstevnatého listu. Okrajové podmínky a zatížení byly definovány stejně jako v podkapitole 5.2. Prostorová diskretizace byla provedena opět pomocí čtyřuzlových elementů o hraně téměř 1mm. Už při statické analýze se ovšem ukázalo, že průhyb listových pružin se skladbou POP3 dosahuje až dvakrát větší hodnoty (4.176mm) než u listů elastických. Důvodem byly významné lokální deformace v místě uchycení horního listu (viz Obr. 5.5). Při dynamické analýze se navíc ukázalo, že průhyb s časem významně klesá, jak je vidět například pro rychlost $v = 20\text{km/h}$ na Obr. 5.6. Varianta POP3 se díky tomu ukázala jako nevhodná.



Obr. 5.5: Velké lokální deformace v kritickém místě u varianty POP3.



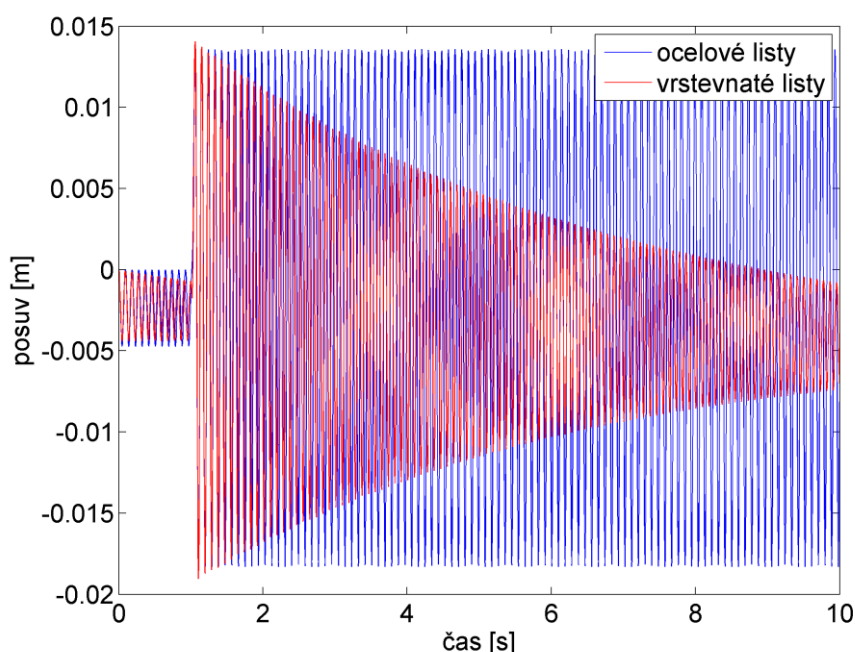
Obr. 5.6: Časový průběh výchylky korby vozíku pro případ POP3 při rychlosti $v = 20\text{km/h}$.

Vzhledem k tomu, že zmíněné deformace vznikaly na povrchu listu, kde se u varianty POP3 nachází viskoelastický materiál, byla jako další v pořadí zvolena varianta OPO3 s tenkou vrstvou oceli na vnějších stranách, která by měla zabránit velkým lokálním deformacím v místě uchycení.

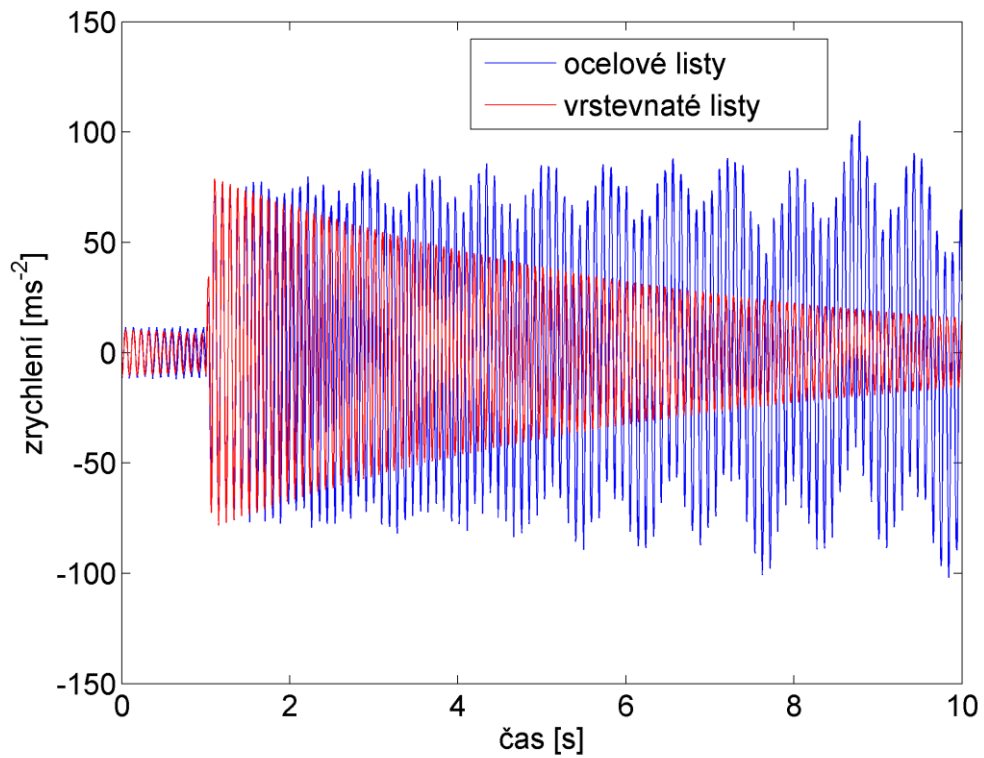
Kvůli velmi tenkým vrstvám oceli u varianty OPO3 by byl list při zachování přibližně čtvercových elementů rozdělen po výšce na sto elementů. Velké množství elementů, jak se ukázalo už při tvorbě modelu POP3, výrazně zvyšuje výpočetní čas. Na statickém průhybu proto bylo testováno použití obdélníkových elementů s poměrem délek stran až 1:50 v tenkých ocelových vrstvách, čímž by se počet elementů významně zredukoval. Ukázalo se, že výsledky jsou pro tyto dva případy téměř totožné. V prvcích totiž vzhledem k namáhání ohybem vzniká téměř jednoosá napjatost a díky tomu je chyba při použití „protáhlých“ elementů zanedbatelná. Dále byly v modelu použity tytéž okrajové podmínky a zatížení jako v předchozích podkapitolách.

I u této varianty ovšem při statické analýze docházelo k větším průhybům než u ocelového odpružení, v tomto případě až čtyřikrát větším (9.084mm). Tentokrát už ale nedocházelo k rozvoji deformace s časem při simulaci přejezdu překážky. Aby byla zachována tuhost celého odpružení, bylo nutné zvětšit tloušťku ocelových vrstev při zachování celkové výšky listu 1cm. Vrstvy byly z původní tloušťky 0.097mm postupně zvětšovány až na sedminásobek, tj. 0.679mm, kdy byla tuhost vrstevnatého odpružení srovnatelná s ocelovým. Při statickém zatížení vycházel v tomto případě průhyb 2.383mm, tj. rozdíl přibližně 1% oproti ocelovému.

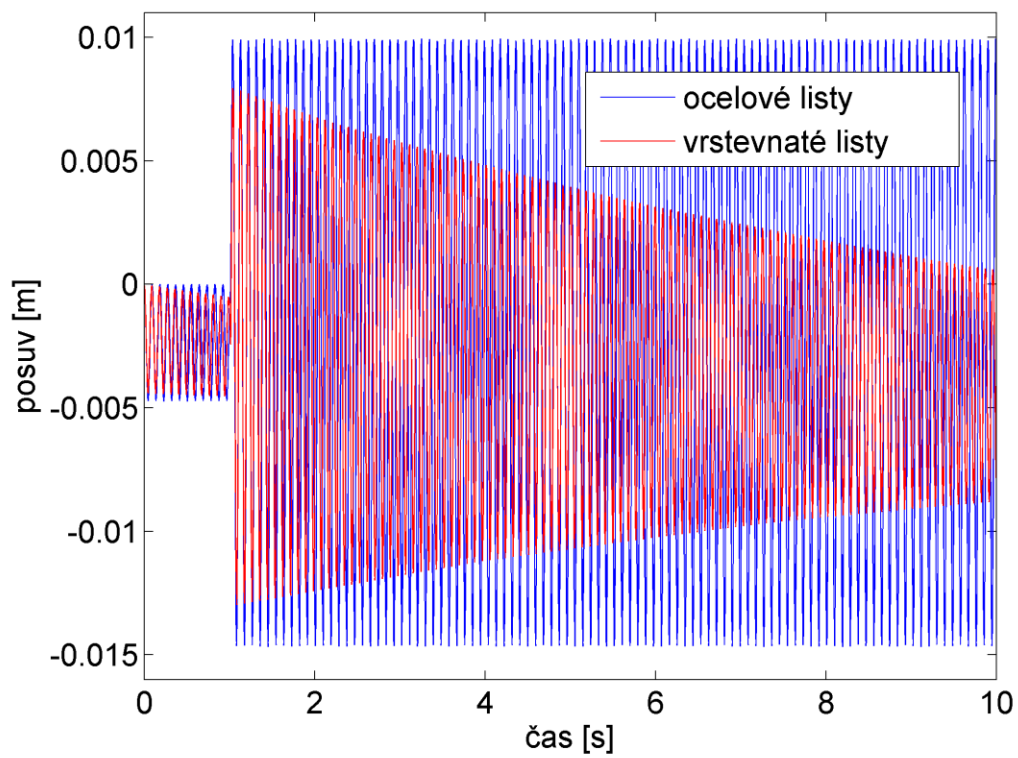
Ve výsledném modelu odpružení z vrstevnatého materiálu byl tedy každý z listů na výšku rozdělen čtyřmi elementy – na výšku ocelové vrstvy připadal jeden element a na výšku plastové dva prvky. Získané průběhy výchylek, resp. zrychlení, v místě uchycení konce pružiny ke konstrukci vozíku jsou pro všechny tři různé rychlosti znázorněny na Obr. 5.7 - 5.12. Pro porovnání jsou v uvedených obrázcích vykresleny také průběhy odpovídající původní ocelové variantě odpružení.



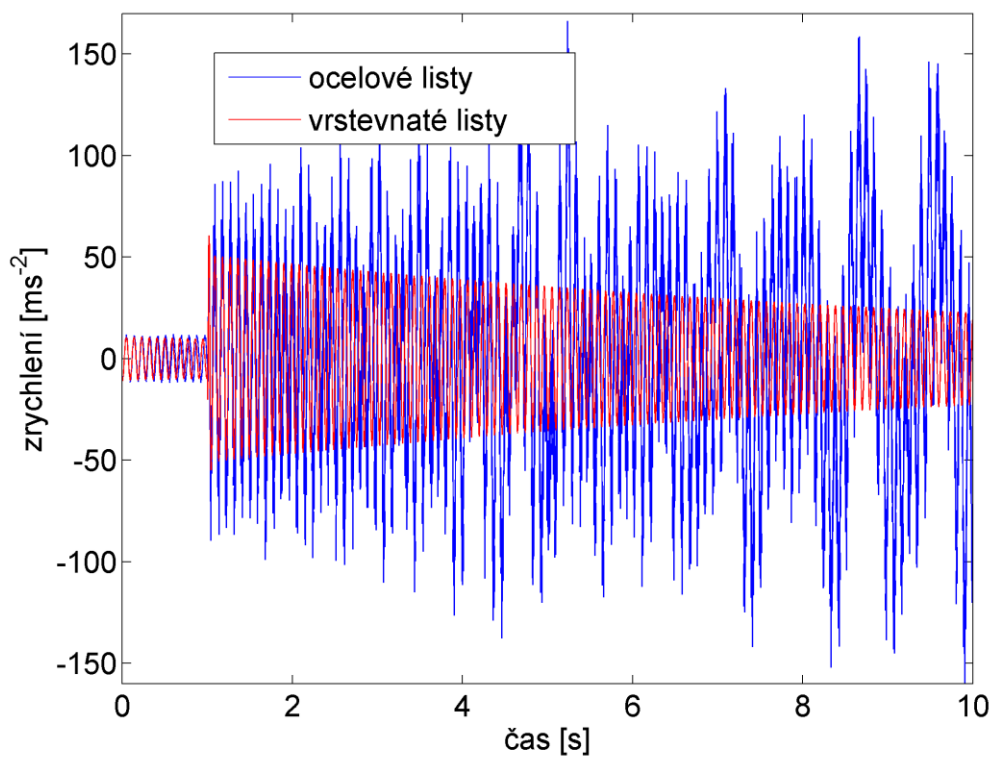
Obr. 5.7: Průběh výchylek v závislosti na čase pro rychlost $v = 5\text{km/h}$.



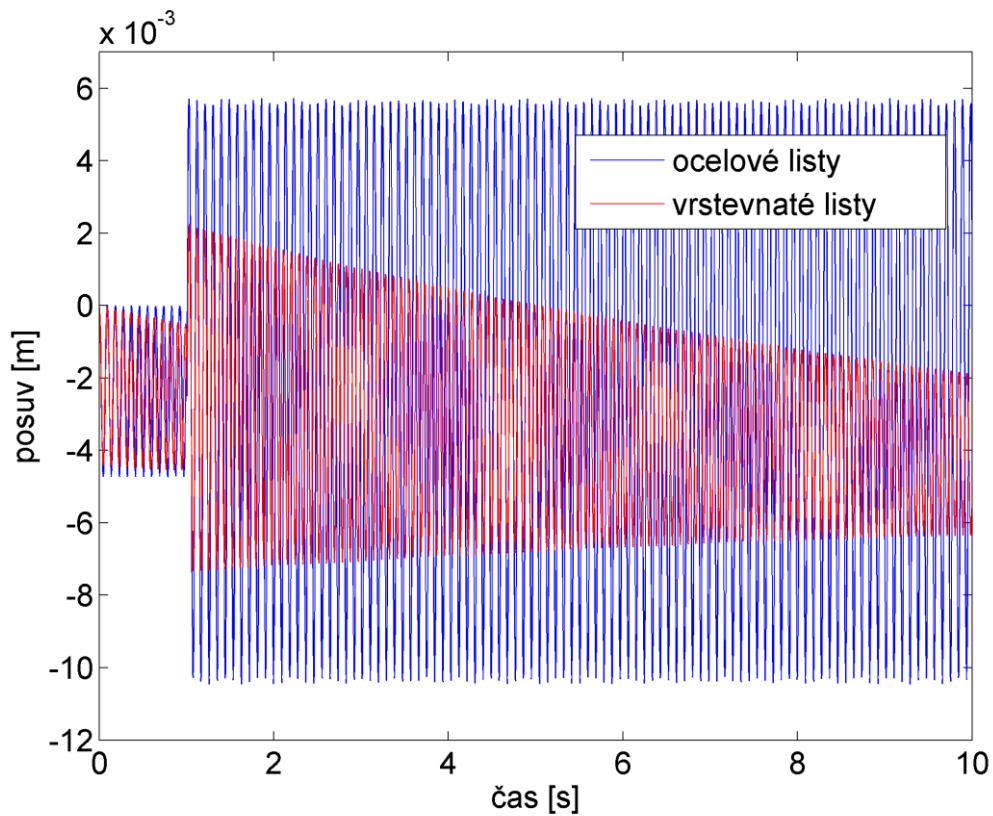
Obr. 5.8: Průběh zrychlení v závislosti na čase pro rychlost $v = 5\text{km/h}$.



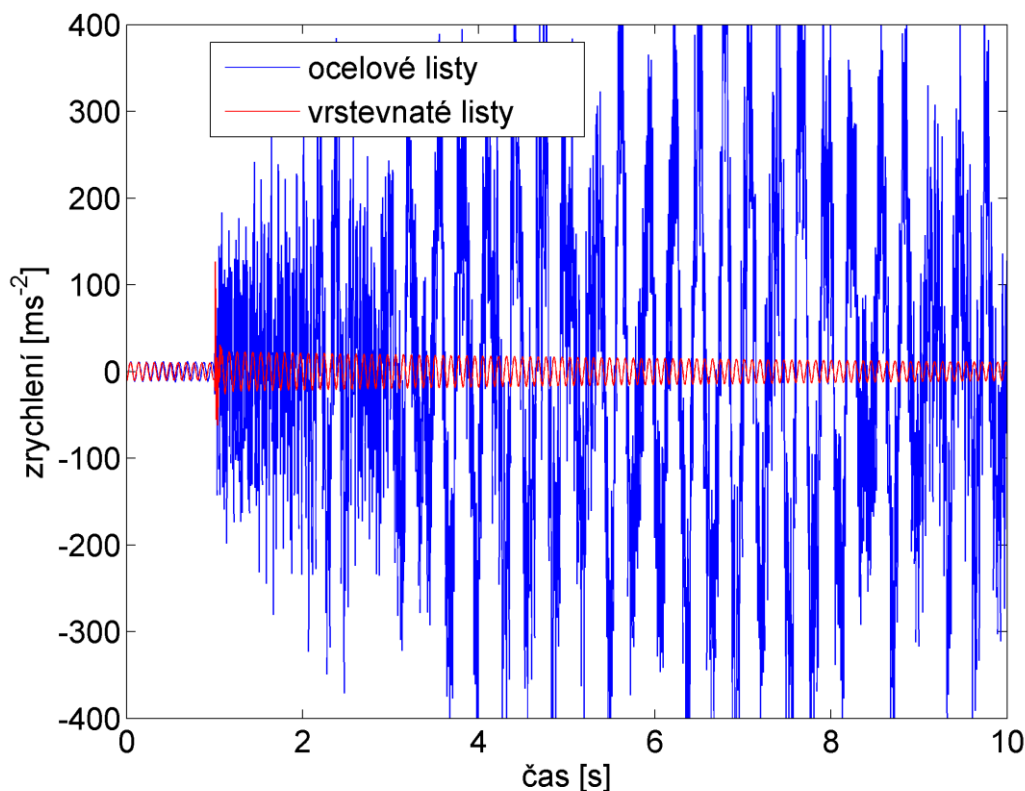
Obr. 5.9: Průběh výchylek v závislosti na čase pro rychlost $v = 10\text{km/h}$.



Obr. 5.10: Průběh zrychlení v závislosti na čase pro rychlost $v = 10\text{km/h}$.



Obr. 5.11: Průběh výchylek v závislosti na čase pro rychlost $v = 20\text{km/h}$.



Obr. 5.12: Průběh zrychlení v závislosti na čase pro rychlost $v = 20\text{km/h}$.

rychlost [km/h]	poměrný útlum výchylek [%]	poměrný útlum zrychlení [%]
5	0.7534	0.8003
10	0.5577	0.5916
20	0.1507	0.5365

Tab. 5.2: Shrnutí poměrných útlumů výchylek a zrychlení pro všechny rychlosti.

Z uvedených výsledků vyplývá, že významné tlumení tyto vrstevnaté pružiny vykazují při nižších rychlostech, což je v souladu s tvrzením z kapitoly 3, že použitý viskoelastický materiál tlumí zejména při nízkých frekvencích. Poměrný útlum výchylek i zrychlení, zavedený v tomto případě jako procentuální pokles amplitudy v časech $t = 1\text{s}$ a $t = 10\text{s}$, výrazně klesá s rostoucí rychlostí (viz Tab. 5.2). Při rychlosti $v = 5\text{km/h}$ se výchylky a zrychlení do konce sledovaného časového intervalu utlumily až o 80%, zatímco při rychlosti $v = 20\text{km/h}$ byl poměrný útlum výchylky 15% a zrychlení 50%. Na základě uvedených výsledků je patrné, že použití viskoelastického materiálu ve skladbě listu významně přispěje k tlumení vibrací ve sledovaném časovém intervalu.

6. Závěr

Hlavním cílem této práce bylo pomocí analytických, numerických a experimentálních postupů navrhnout nový typ listového odpružení dětského sportovního vozíku za kolo, který by díky použití viskoelastických materiálů tlumil vibrace lépe, než stávající ocelová varianta. Konstrukčně tento nový návrh přitom vycházel z odpružení známého pod značkou CASTM používaného u vozíků firmy Chariot.

V úvodu práce bylo nejdříve provedeno zmapování současné nabídky dětských sportovních vozíků a podrobnější představení vozíku Chariot CX1, především pak jeho systému odpružení včetně geometrických a materiálových vlastností. V rámci rešerše byly dále uvedeny základní způsoby použití viskoelastických materiálů k tlumení vibrací s uvedením praktických aplikací.

Ve třetí kapitole byly uvedeny základní typy diskrétních viskoelastických modelů, vysvětleny základní pojmy z oblasti viskoelasticity a popsána odezva takovýchto materiálů na statické a dynamické zatížení. Pomocí optimalizačního programu vytvořeného v prostředí systému MATLAB byly pak na základě experimentálních dat identifikovány statické materiálové vlastnosti polyamidu PA6, který byl zvolen pro návrh nových vrstevnatých listů pružin.

Ve čtvrté kapitole bylo nejprve provedeno odvození vztahu pro výpočet efektivního ztrátového faktoru $\tan \delta_{eff}$ pro posouzení tlumení symetrických vrstevnatých struktur složených z různých materiálů. Následně pak byly odvozeny analytické vztahy pro určení tloušťky jednotlivých vrstev těchto vrstevnatých struktur tak, aby jejich celková statická ohybová tuhost byla stejná jako u původního ocelového listu. Pomocí těchto vztahů pak byly určeny tloušťky ocelových a polyamidových vrstev pro třívrstvé a pětivrstvé varianty listů. Následně bylo provedeno posouzení tlumících vlastností těchto variant pomocí odvozeného vztahu pro $\tan \delta_{eff}$.

V poslední kapitole je věnována pozornost samotné tvorbě zjednodušených modelů původního a nově navrženého typu odpružení v konečnoprvkovém softwaru MSC.Marc/Mentat. Nejprve byla definována funkce popisující kinematické buzení od nerovnosti vozovky. Z amplitudových spekter této funkce odpovídajících zvoleným rychlostem pak byly stanoveny velikosti integračních kroků implicitní Newmarkovy metody použité pro integraci v časové oblasti. Následně byly popsány okrajové podmínky a způsob prostorové diskretizace u jednotlivých modelů. Dále byly provedeny analýzy vlivu uvažování vlastní tíhy listů a vlivu velikosti integračního kroku na přesnost numerického řešení. S využitím těchto poznatků pak byl vytvořen výsledný model nových i původních pružin a porovnány výsledné průběhy výchylek a zrychlení koncových bodů pružin v místě, kde je připojena korba vozíku. Ukázalo se, že zejména při nižších rychlostech lze aplikací viskoelastického materiálu ve skladbě listu výrazně zlepšit tlumící vlastnosti odpružení. Při rychlostech menších než 10km/h lze použitím navržené pružiny snížit amplitudu výchylek a zrychlení až minimálně o 50% v porovnání s původním typem pružin.

Možným rozšířením práce by mohlo být například hledání optimálního materiálu pro použití v pružinách z hlediska nejen tlumení, ale také životnosti a chemické a mechanické odolnosti. S tímto by jistě souviselo i rozšíření modelu o vliv nelinearit vznikajících třením a kontaktem mezi listy a analýza odezvy pro různé nastavení tuhosti pružin jezdce. Dále by

bylo možné hledat vhodnější konstrukci pružin, která ještě lépe využije tlumicí vlastnosti materiálu, například spojení jednotlivých vrstev v rámci listu pomocí drážkování apod.

Literatura

- [1] Webové stránky firmy Burley.
Dostupné z: <<http://www.burley.com/>>, cit. 25.5.2014.
- [2] Webové stránky firmy Chariot.
Dostupné z: <<http://chariotcarriers.com/>>, cit. 25.5.2014.
- [3] Journal of Sound and Vibration, 262, (2003). *Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes*, p. 457–474.
Dostupné z: <<http://wenku.baidu.com/view/384a64bcf121dd36a32d8277.html>>, cit. 25.5.2014.
- [4] Damping Tape - Sound & Vibration Dampening Applications.
Dostupné z: <<http://adhesive-tape-converting.mbktape.com/viewitems/tape-applications/damping-tape>>, cit. 25.5.2014.
- [5] Balmes, E., Germes, S.: *Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design. Application to an Automotive Floor Panel*.
Dostupné z: <http://www.sdtools.com/pdf/isma02_damp.pdf>, cit. 25.5.2014.
- [6] Philosophical Magazine Letters, 74, (1996). Lakes, R. S., Quackenbush, J.: *Viscoelastic behaviour in indium tin alloys over a wide range of frequency and time*, p. 227-232.
Dostupné z: <<http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/gInSn.pdf>>, cit. 25.5.2014.
- [7] Journal of Materials Science, 32, (1997). Amada, S., Lakes, R. S.: *Viscoelastic properties of bamboo*, p.2693-2697,
Dostupné z: <<http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/VEbamboo.pdf>>, cit. 25.5.2014.
- [8] SAE Technical Paper 720809, Plunkett, R.: *High Temperature Damping*, (1972)
Dostupné z: <<http://papers.sae.org/720809/>>, cit. 25.5.2014.
- [9] Wikipedia, *Nylon 6*
Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Nylon_6>, cit. 25.5.2014.
- [10] Sobotka Z.: *Reologie hmot a konstrukcí*, Academia, Praha, 1981
- [11] Lakes R. S., *Viscoelastic Solids*, Boca Raton, CRC Press, 1999
- [12] Macioce, P.: *Viscoelastic Damping 101*, Roush Industries Inc.
Dostupné z: <<http://www.roush.com/Portals/1/Downloads/Articles/Insight.pdf>>, cit. 25.5.2014.

[13] Hajžman M., Polach P.: *Jednoduchý nelineární model trolejbusu pro úlohy vertikální dynamiky vozidel*, Sborník konference Výpočtová mechanika 2004, ZČU v Plzni, Plzeň, 2004

[14] Balda M., *Úvod do statistické mechaniky*, ZČU v Plzni, Plzeň, 2001