



Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta Aplikovaných věd

Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Řešení ustáleného stavu a posuzování stability
parametrických systémů s 1 stupněm volnosti**

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto bakalářskou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne

.....

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat mému vedoucímu bakalářské práce Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za jeho cenné rady, konzultace a hlavně za trpělivost, díky kterým tato práce vznikla. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině za podporu při studiu a v neposlední řadě mé přítelkyni.

Abstrakt

Tato práce se zabývá určením analytického periodického řešení a posouzením stability lineárních kmitajících systémů s 1° stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou. Analytické řešení matematického modelu vede na integrální Fredholmovu rovnici s degenerovaným jádrem, jejíž řešení je založeno na tzv. periodické Greenově funkci, která je odezvou systému na buzení ve tvaru Diracova hřebene. Existenci analytického periodického řešení lze ověřit pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Jestliže existuje řešení, tak se výsledky analytického řešení shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Dalším zaměřením této práce je posuzování stability zmíněného systému, které je založeno na určení znaménka reálné hodnoty determinantu systémové matice. Jestliže je hodnota determinantu kladná, existuje periodické řešení a systém je stabilní. V opačném případě periodické řešení neexistuje a systém je nestabilní. Speciálním případem je nulová hodnota zmíněného determinantu, která vymezuje hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí parametrů systému. Tento nový postup řešení byl ověřen Floquetovou metodou a v porovnání s ní bylo novým postupem dosaženo přesnějších výsledků.

Klíčová slova: kmitání, integrální rovnice, periodické řešení, stabilita, Floquetova teorie

Abstract

This thesis deals with the determination of the analytical periodical solution and stability assessment of one-degree-of-freedom linear vibrating systems with periodically variable stiffness and exciting force. Analytical solution of the mathematical model leads to the Fredholm's integral equation with degenerated kernel, whose solution is based on the periodical Green's function, which is a response of the system to excitation in the form of the Dirac chain. The existence of the analytical periodical solution can be verified by using the Runge-Kutta method. If the solution exists, the results of this solution correspond with the steady stage obtained by the Runge-Kutta method. Another goal of this study is the stability assessment of that system, which is based on identification of the sign of the real value of the determinant of the system matrix. If the value of the determinant is positive, the periodical solution exists and the system is stable, otherwise, the periodical solution does not exist and the system is unstable. The special case is the zero value of that determinant, which defines the borders between stable and unstable regions of system parameters. This new procedure of solution was validated by the Floquet method and the results of the new method were more accurate than the results obtained by the Floquet method.

Keywords: vibration, integral equation, periodic solution, stability, Floquet theory

Obsah

1	Úvod	6
2	Určení analytického periodického řešení systému s 1° volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou	7
3	Posouzení stability systému	14
3.1	Nová metoda posouzení stability systému a určení hranic stability	14
3.2	Floquetova teorie	21
3.3	Důkaz Floquetovy teorie [3]	25
4	Aplikace řešení na příkladech	31
5	Závěr	48
	Použitá literatura	49

1 Úvod

Cílem předkládané bakalářské práce je určení a ověření existence analytického periodického řešení a posouzení stability lineárních kmitajících systémů s 1° stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou.

V první části práce je popsána metoda pro získání analytického periodického řešení zmíněných systémů s jedním stupněm volnosti. Tato úloha vede na řešení integrální Fredholmovy rovnice s degenerovaným jádrem, které je založeno na tzv. periodické Greenově funkci. Periodickou Greenovu funkci lze chápat jako odezvu systému na buzení ve tvaru Diracova hřebene. Řešení lineárních kmitajících systémů s 1° stupněm volnosti, pokud existuje, je závislé na invertovatelnosti systémové matice. Existence analytického řešení je ověřena pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, kdy při existenci řešení dochází k dobré shodě výsledků odpovídajících analytickému řešení s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Aplikace metody je prezentována na několika příkladech.

Druhá část je věnována novému postupu pro určování hranic stability systému, posuzování stability systému a s tím související existence či neexistence analytického periodického řešení. Je-li systémová matice singulární (determinant je nulový), její reálné vlastní hodnoty vymezují hranice (ne)stability v rovině dané parametry systému. V druhém případě, kdy je systémová matice invertovatelná, tj. regulární (její determinant je nenulový), rozhoduje o stabilitě systému znaménko jejího determinantu. Prezentovaná metoda je ověřena spolu s aplikací Floquetovy teorie na příkladech s jedním stupněm volnosti.

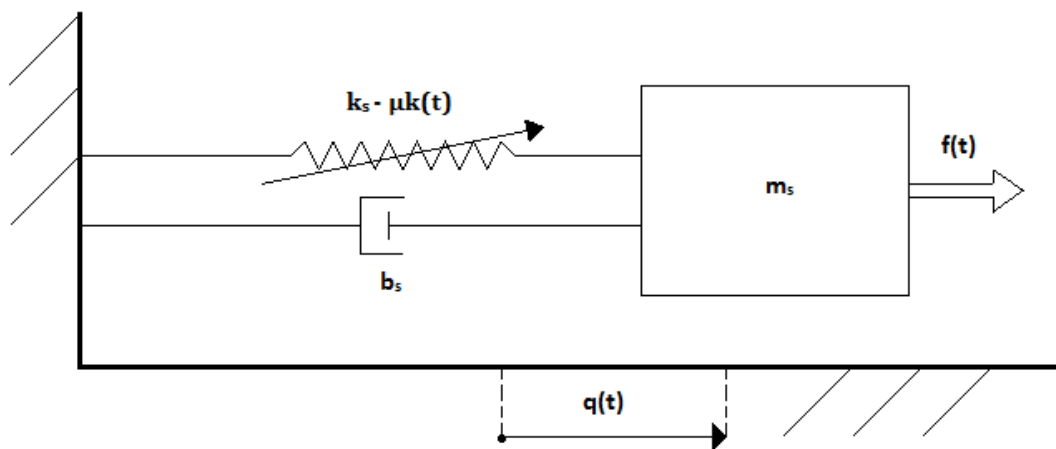
Numerické výpočty jsou provedeny v interaktivním prostředí MATLAB.

2 Určení analytického periodického řešení systému s 1° volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou

Nechť je chování parametrického systému popsáno pohybovou rovnicí [1]

$$m_s \ddot{q}(t) + b_s \dot{q}(t) + [k_s - \mu k(t)] q(t) = f(t), \quad (2.1)$$

kde m_s je stacionární hmotnost, b_s značí stacionární tlumení a k_s vyjadřuje stacionární tuhost. Časová proměnná $\mu k(t)$ odpovídá parametrickému buzení, μ je míra modulace tuhosti vyjadřující intenzitu parametrického buzení, $q(t)$ vyjadřuje zobecněné posunutí a $f(t)$ značí zobecněné buzení.



Obr. 1 – Parametrický systém s 1° volnosti

Díky T -periodicitě funkcí tuhosti a buzení je možné předpokládat i periodicitu odezvy systému s periodou T . Což lze zapsat následovně

$$k(t) = k(t + T), \quad f(t) = f(t + T), \quad q(t) = q(t + T). \quad (2.2)$$

Pro další postup je nutné předpokládat existenci T -periodického řešení, tj. neznámé výchylky $q(t)$ jsou řešením výše zmíněné diferenciální rovnice (2.1) a po převedení členu s proměnnou tuhostí na pravou stranu rovnice získáme

$$m_s \ddot{q}(t) + b_s \dot{q}(t) + k_s q(t) = f(t) + \mu k(t) q(t). \quad (2.3)$$

Jelikož chceme určit periodické řešení, tj. ustálenou odezvu systému, hledáme partikulární řešení rovnice (2.1) a neuvažujeme tedy homogenní část řešení, přesněji přechodovou fázi kmitů. Jak je uvedeno v [8], při naladění soustavy do rezonance je amplituda ustáleného stavu velká se všemi negativními důsledky (vysoká hlučnost, velké síly přenášené do rámu). Z pochopitelných důvodů se těmto stavům snažíme vyvarovat.

Zavedeme tzv. periodickou Greenovu funkci $H(t)$ (dále PGF). PGF lze chápat jako odezvu stacionární části rovnice (2.3) na Diracův hřeben jednotkových impulsů opakujících se

s periodou T , která odpovídá periodě buzení. Diracův hřeben je znázorněn na obr. 2 a lze jej zapsat pomocí Fourierovy řady

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)], \quad (2.4)$$

kde i je imaginární jednotka, k značí index členu řady a ω vyjadřuje základní úhlovou frekvenci, pro kterou platí základní vztah

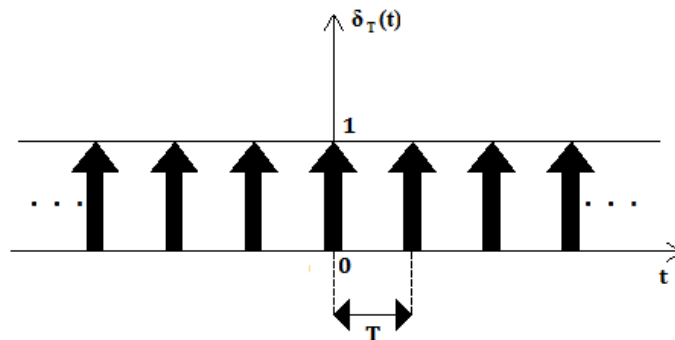
$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.5)$$

V souladu s [2], Diracův hřeben je sudá funkce, tj. sinové členy ze vztahu (2.4) jsou nulové a lze použít zkrácený zápis

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(t), \quad (2.6)$$

kde platí

$$e_k(t) = e^{ik\omega t}. \quad (2.7)$$



Obr. 2 – Diracův hřeben jednotkových impulsů opakujících se s periodou T

Jak je zmíněno výše, PGF je v ustáleném stavu odezva stacionární části na levé straně rovnice (2.3) na buzení ve tvaru Diracova hřebene a lze psát

$$m_s \ddot{H}(t) + b_s \dot{H}(t) + k_s H(t) = \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(t). \quad (2.8)$$

Vzhledem k tomu, že platí princip superpozice, je možné vyjádřit PGF takto

$$H(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k(t), \quad (2.9)$$

kde H_k je odezva v ustáleném stavu odpovídající k -té harmonické, a proto lze řešení rozdělit na řešení systému nezávislých rovnic

$$m_S \ddot{H}_k(t) + b_S \dot{H}_k(t) + k_S H_k(t) = \delta_T(t) = \frac{1}{T} e_k(t). \quad (2.10)$$

Partikulární řešení odpovídající k -té harmonické odhadneme ve tvaru

$$H_k(t) = \hat{H}_k e_k(t) = \hat{H}_k e^{ik\omega t}, \quad (2.11)$$

kde \hat{H}_k je amplituda, a derivace odhadu jsou

$$\dot{H}_k(t) = ik\omega \hat{H}_k e^{ik\omega t}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{H}_k(t) = -k^2 \omega^2 \hat{H}_k e^{ik\omega t}. \quad (2.13)$$

Odhad partikulárního řešení (2.11) a jeho derivace (2.12) a (2.13) dosadíme do rovnice (2.10), čímž získáme komplexní amplitudu odezvy na k -tou harmonickou složku buzení ve tvaru

$$\hat{H}_k = \frac{1}{T} \left(-k^2 \omega^2 m_S + ik\omega b_S + k_S \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Označme dynamickou poddajnost odpovídající k -té harmonické

$$L_k = \left(-k^2 \omega^2 m_S + ik\omega b_S + k_S \right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Výraz (2.14) v souladu s (2.7) a (2.15) zpětně dosadíme do odhadu řešení (2.11) a získáme řešení partikulární rovnice pro ustálený stav

$$H_k(t) = \frac{1}{T} L_k e_k(t). \quad (2.16)$$

Při numerických výpočtech je nutné respektovat konečnost řady, tj. v dalších zápisech sumy budeme uvažovat konečné řady v intervalu $\langle -N, N \rangle$ pro $N \in \mathbb{Z}$, pokud nebude definováno jinak. N značí rozmezí počtu členů řady. Ve výpočtech bude vždy brán dostatečný počet členů pro dobrou aproximaci periodické funkce. S ohledem na konečnost řady lze pomocí principu superpozice (2.9) získat konečný tvar PGF

$$H(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N L_k e_k(t). \quad (2.17)$$

Celkovou odezvu systému (2.3) na parametrické buzení pravé strany lze vyjádřit jako konvoluční integrál

$$q(t) = \mu \int_0^T H(t-s)k(s)q(s)ds + \int_0^T H(t-s)f(s)ds, \quad (2.18)$$

kde Greenova funkce v čase $(t-s)$ s ohledem na (2.16) má tvar

$$H(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N L_k e_k(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N L_k e_k(t) e_{-k}(s). \quad (2.19)$$

Jestliže dále zavedeme pro periodické funkce tuhosti a buzení následující Fourierovy řady

$$k(t) = \sum_{j=-N}^N k_j e_j(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.20)$$

$$f(t) = \sum_{j=-N}^N f_j e_j(t) = \mathbf{f}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.21)$$

kde

$$\mathbf{e}(t) = [e_{-N}(t), \dots, e_{-1}(t), 1, e_1(t), \dots, e_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{k} = [k_{-N}, \dots, k_0, \dots, k_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{f} = [f_{-N}, \dots, f_0, \dots, f_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (2.24)$$

můžeme rovnici (2.18) v souladu s (2.19) přepsat následovně

$$q(t) = \frac{\mu}{T} \int_0^T \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N L_k k_j e_k(t) e_{j-k}(s) q(s) ds + \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N L_k f_j e_k(t) \int_0^T e_{j-k}(s) ds. \quad (2.25)$$

Tento vztah reprezentuje Fredholmovu integrální rovnici, kde první integrand představuje degenerované jádro $K(t,s)$ a druhý integrál odpovídá parametrickému buzení pravé strany. V [1] se velice podrobně věnují postupu při řešení skalární integrální Fredholmovy rovnice, zatímco v [5] je použito maticové řešení zmíněné rovnice, které je použitelnější a praktičtější při numerických výpočtech v dalších částech této práce, viz kapitola 4. Navíc v [5] je proveden rozbor stability a existence řešení.

Při respektování podmínek ortogonality funkcí sinus a cosinus lze poslední integrál ve vztahu (2.25) vyjádřit

$$\int_0^T e_{j-k}(s) ds = T \delta_{jk}, \quad (2.26)$$

kde δ_{jk} značí Kroneckerův symbol, což je funkce dvou přirozených čísel a zapíšeme ji

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (2.27)$$

V rovnici (2.25), s ohledem na podmínky ortogonalit, dostáváme nenulové pouze k – té členy sčítané přes j . Jak již bylo zmíněno, první integrand v rovnici (2.25) představuje degenerované jádro odpovídající součinu dvou funkcí dvou proměnných, což lze zapsat v souladu s (2.7)

$$K(t, s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N A_{k,j} e_k(t) e_j(s) = \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}(s), \quad (2.28)$$

kde matice \mathbf{A} má tvar

$$A_{k,j} = \begin{cases} L_k k_{j+k} & \text{pro } j+k \wedge k \in \langle -N, N \rangle, \\ 0 & \text{pro } j+k \vee k \notin \langle -N, N \rangle. \end{cases} \quad (2.29)$$

Jestliže dosadíme do rovnice (2.25) upravený vztah (2.28) pro degenerované jádro $K(t, s)$, dostaneme

$$q(t) = \frac{\mu}{T} \mathbf{e}^T(t) \int_0^T \mathbf{A} \mathbf{e}(s) q(s) ds + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f}, \quad (2.30)$$

kde \mathbf{L} je komplexní diagonální matice

$$\mathbf{L} = \text{diag}\{L_k\} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.31)$$

Zavedeme substituce

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \frac{1}{T} \mathbf{A} \mathbf{e}(t), \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A} \mathbf{e}(s) q(s) ds. \quad (2.33)$$

Vzhledem k zmíněným substitucím, které dosadíme do (2.30), získáme

$$q(t) = \mu \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f}, \quad (2.34)$$

kde $\mu \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha}$ vyjadřuje periodickou odezvu stacionární části parametrického buzení z rovnice (2.3) a $\mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f}$ reprezentuje periodickou odezvu stacionární části na vnější buzení z rovnice (2.3).

Indexy v rovnicích (3.1.2) až (3.1.8) a (3.1.10) až (3.1.11) odpovídají původní frekvenci ω . Vektor Fourierových koeficientů \mathbf{a}^* v rovnici (3.1.1) lze získat analogicky k rovnici (2.43) z řešení následující rovnice

$$\mathbf{a}^* = \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{a}^* + \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{f}^*, \quad (3.1.12)$$

tedy

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{f}^*, \quad (3.1.13)$$

kde $\mathbf{I}^* \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1}$ je jednotková diagonální matice a vektor \mathbf{a}^* zapíšeme ve tvaru odpovídající původní frekvenci ω

$$\mathbf{a}^* = \left[\alpha_{-N}, \alpha_{-N+\frac{1}{2}}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_{N-\frac{1}{2}}, \alpha_N \right]^T \in \mathbb{C}^{4N+1}. \quad (3.1.14)$$

Nejdříve dle [5], po nadefinování nezbytných veličin pro posouzení stability, je třeba dokázat identitu řešení (2.34) a (3.1.1)

$$q(t) = \mu \mathbf{e}^T(t) \mathbf{a} + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f} \quad \text{a} \quad q^*(t) = \mu \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{a}^* + \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{L}^* \mathbf{f}^*,$$

kde \mathbf{a} a \mathbf{a}^* jsou řešení rovnice (2.43) a (3.1.13). Proto je výhodné změnit uspořádání prvků vektoru Fourierových koeficientů \mathbf{a}^* na

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_U \\ \mathbf{a}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T \\ \mathbf{U}^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^*, \quad (3.1.15)$$

což lze rozepsat

$$\mathbf{a}_U = \mathbf{J}^T \mathbf{a}^*, \quad (3.1.16)$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{U}^T \mathbf{a}^*, \quad (3.1.17)$$

kde

$$\mathbf{U} = [\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \dots, \mathbf{i}_{2N}] \in \mathbb{R}^{4N+1, 2N}, \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{a}_U = \begin{bmatrix} \alpha_{-N} \\ \alpha_{-N+1} \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \\ \alpha_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (3.1.19)$$

$$\mathbf{a}_L = \begin{bmatrix} \alpha_{-N+\frac{1}{2}} \\ \alpha_{-N+\frac{3}{2}} \\ \vdots \\ \alpha_{N-\frac{3}{2}} \\ \alpha_{N-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}. \quad (3.1.20)$$

Dále zavedeme permutační matici \mathbf{P} definovanou maticemi \mathbf{J} a \mathbf{U}

$$\mathbf{P} = [\mathbf{J} \mathbf{U}] \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1}, \quad (3.1.21)$$

kteřou lze popsat dle [7] jako matici z nul a jedniček, která má v každém řádku a v každém sloupci právě jednu jedničku. Z ortogonalnosti matice \mathbf{P} vyplývají následující vztahy

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1}, \quad (3.1.22)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2N, 2N}, \quad (3.1.23)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2N+1, 2N+1}. \quad (3.1.24)$$

Protože matice \mathbf{J} a \mathbf{U} tvoří vektorové podprostory P_1 a P_2 , jejichž doplňky jsou navzájem ortogonální, platí

$$\mathbf{J}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2N+1, 2N}. \quad (3.1.25)$$

Rovnici (3.1.15) můžeme přepsat pomocí permutační matice

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{P}^T \mathbf{a}^*, \quad (3.1.26)$$

z čehož plyne

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{P} \hat{\mathbf{a}}. \quad (3.1.27)$$

Do rovnice (3.1.26) dosadíme vztah (3.1.12) s respektováním (3.1.27)

$$\hat{\mathbf{a}} = \mu \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P} \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{f}^*,$$

což lze vyjádřit v souladu s (3.1.7), (3.1.11), (3.1.15), (3.1.21) a (3.1.25)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_U \\ \mathbf{a}_L \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{J}}^{\text{LH}} & \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}}^{\mathbf{0}} \\ \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{J}}^{\mathbf{0}} & \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}}^{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_U \\ \mathbf{a}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{J} \mathbf{f}}^{\text{LHL}} \\ \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{J} \mathbf{f}}^{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (3.1.28)$$

Po úpravě můžeme vztah (3.1.28) zapsat jako soustavu dvou maticových rovnic

$$\mathbf{a}_U = \mu \mathbf{LH} \mathbf{a}_U + \mathbf{LH} \mathbf{f}, \quad (3.1.29)$$

$$\mathbf{a}_L = \mu \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U} \mathbf{a}_L. \quad (3.1.30)$$

Z první rovnice je po úpravě

$$\mathbf{a}_U = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{LH})^{-1} \mathbf{LH} \mathbf{f} \quad (3.1.31)$$

zřejmé, že při srovnáním s rovnicí (2.43) získáme

$$\mathbf{a}_U = \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{2N+1}. \quad (3.1.32)$$

Druhou rovnici (3.1.30) lze přepsat

$$(\mathbf{I} - \mu \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}) \mathbf{a}_L = \mathbf{0}. \quad (3.1.33)$$

Případ (3.1.33) nastane, když některá z vlastních čísel matice $\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}$ budou rovna $\frac{1}{\mu}$ nebo $\mathbf{a}_L = \mathbf{0}$. Pro první rovnost si je nutné uvědomit, že vlastní čísla matice $\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}$ jsou podmnožinou vlastních čísel matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$

$$\tilde{\lambda} \{ \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U} \} \subset \lambda \{ \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \}, \quad (3.1.34)$$

což lze jednoduše dokázat z ortogonalit permutační matice \mathbf{P}

$$\lambda \{ \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \} \equiv \lambda \{ \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P} \}, \quad (3.1.35)$$

kde matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ a $\mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P}$ mají identická vlastní čísla, protože se jedná o podobnostní transformaci.

Nyní uvažujme situaci, kdy platí druhá rovnost a vztah (3.1.32), tj.

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{a}_U = \mathbf{a}.$$

V souladu s (3.1.32) lze rovnici (3.1.16) přepsat

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_U = \mathbf{J}^T \mathbf{a}^*, \quad (3.1.36)$$

z čehož plyne

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{J}^T \mathbf{a}. \quad (3.1.37)$$

S respektováním (3.1.6) lze psát

$$\mathbf{e}^{*T}(t)\mathbf{L}^*\mathbf{J} = \mathbf{e}^T(t)\mathbf{L}, \quad (3.1.38)$$

$$\mathbf{e}^{*T}(t)\mathbf{J} = \mathbf{e}^T(t). \quad (3.1.39)$$

Poté můžeme s ohledem na (3.1.7), (3.1.38) a (3.1.39) vyjádřit rovnici (3.1.1)

$$\dot{q}^*(t) = \mu\mathbf{e}^T(t)\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}^T(t)\mathbf{L}\mathbf{f} = q(t), \quad (3.1.40)$$

kteřá je identická k rovnici (2.34). Identita řešení s periodou T a $2T$ je tímto dokázána. I když řešení odezvy jsou si rovna, oblasti stability nejsou totožné, protože pro množiny vlastních čísel platí

$$\tilde{\lambda}\{\mathbf{L}\mathbf{H}\} \equiv \tilde{\lambda}\{\mathbf{J}^T\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*\mathbf{J}\} \subset \lambda\{\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*\} \equiv \lambda\{\mathbf{P}^T\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*\mathbf{P}\}. \quad (3.1.41)$$

Ze vztahu (3.1.41) vychází závěr, že pro posouzení oblastí a hranic stability použijeme obecnější případ pro $2T$ -periodické řešení, tj. rovnice (3.1.1)

$$\dot{q}^*(t) = \mu\mathbf{e}^{*T}(t)\boldsymbol{\alpha}^* + \mathbf{e}^{*T}(t)\mathbf{L}^*\mathbf{f}^*,$$

kde řešením této rovnice je vztah (3.1.13)

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (\mathbf{I}^* - \mu\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*)^{-1}\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*\mathbf{L}^*\mathbf{f}^*,$$

V případě, že $\boldsymbol{\alpha}_L = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\alpha}_U = \boldsymbol{\alpha}$ můžeme zapsat

$$\boldsymbol{\alpha}^* = [\alpha_{-N}, 0, \alpha_{-N+1}, 0, \dots, 0, \alpha_{N-1}, 0, \alpha_N]^T \in \mathbb{C}^{4N+1}. \quad (3.1.42)$$

Dosazením vztahu (3.1.13) do rovnice získáme celkové $2T$ -periodické řešení odezvy systému analogicky k (2.44)

$$q^*(t) = \mathbf{e}^{*T}(t)\left[\mu(\mathbf{I}^* - \mu\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*)^{-1}\mathbf{L}^*\mathbf{H}^* + \mathbf{I}^*\right]\mathbf{L}^*\mathbf{f}^*. \quad (3.1.43)$$

Stejně jako u (2.44), tak i pro (3.1.43) je důležité, zda systémová matice $\mathbf{I}^* - \mu\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*$ je invertovatelná (regulární).

Nejdříve je nutné dokázat, že determinant matice $\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*$ je reálný. Lze jej rozepsat ve tvaru

$$\det(\mathbf{L}^*\mathbf{H}^*) = \det(\mathbf{L}^*)\det(\mathbf{H}^*). \quad (3.1.44)$$

Determinant matice \mathbf{H}^* je reálný, protože matice \mathbf{H}^* je Hermitovská, viz v [9]. Determinant matice \mathbf{L}^* je také reálný, protože matice \mathbf{L}^* má na diagonále prvky tvořící komplexně sdružené páry a jeden reálný prvek L_0 (jestliže je k_0 reálné). Proto lze tvrdit, že vlastní čísla

matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ jsou reálná či po párech komplexně sdružená. Reálná vlastní čísla odpovídají změně znaménka determinantu a vymezují hranici stability, viz níže.

V prvním případě, kdy zmíněná systémová matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ je singulární [9], tj. není invertovatelná, vymezuje nulový determinant této matice hranici stabilních a nestabilních oblastí, tedy

$$\det(\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*) = 0. \quad (3.1.45)$$

Po úpravě

$$\det\left(\mathbf{L}^*(\omega) \mathbf{H}^* - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}^*\right) = 0 \quad (3.1.46)$$

je původní matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ singulární právě tehdy, když $\frac{1}{\mu}$ je rovno některému z reálných vlastních čísel matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$. To znamená, že parametr μ určuje zmíněnou hranici stability a celková stabilita systému je závislá na frekvenci ω , jelikož prvky matice \mathbf{L}^* jsou funkcemi frekvence ω v souladu s (2.5), (2.31) a (3.1.4). Z toho plyne, že s měněním se ω , se bude měnit i odpovídající hodnota vlastního čísla $\frac{1}{\mu}$. To znamená, že parametry ω a μ budou určovat kritické hodnoty, které určují hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí systému.

V druhém případě, kdy je systémová matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ regulární, tj. je invertovatelná a její determinant je nenulový, rozhoduje o stabilitě systému znaménko systémové matice. Z numerického experimentu bylo vyzorováno následující – jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a neexistuje periodické řešení. Dle experimentu znaménko determinantu nezávisí na znaménku parametru μ ani stacionární tuhosti k_s .

Výsledek nové metody posuzování stability systému a určování hranic stability lze shrnout tímto zápisem

$$\det(\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^*(\omega) \mathbf{H}^*) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{systém je stabilní a periodické řešení existuje,} \\ = 0 \Rightarrow \text{hranice stabilní a nestabilní oblasti,} \\ < 0 \Rightarrow \text{systém je nestabilní a periodické řešení neexistuje.} \end{cases} \quad (3.1.47)$$

3.2 Floquetova teorie

V následující podkapitole je prezentován přístup pro posuzování stability parametrického systému s 1^o volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou, jehož chování je popsáno rovnicí (2.1)

$$m_s \ddot{q}(t) + b_s \dot{q}(t) + [k_s - \mu k(t)]q(t) = f(t),$$

ale pro aplikaci Floquetovy teorie je dle [3] vhodnější zavést obecný matematický model s časově proměnnými maticemi, který lze použít pro libovolný počet stupňů volnosti n . Tedy obecný matematický model vyjádříme

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.2.1)$$

kde $\mathbf{M}(t)$ je časově proměnná matice hmotnosti s periodou T , $\mathbf{B}(t)$ značí časově proměnnou periodickou matici tlumení, $\mathbf{K}(t)$ vyjadřuje časově proměnnou periodickou matici tuhosti a $\mathbf{q}(t)$ je hledaný vektor zobecněných souřadnic. Na pravé straně vystupuje časově proměnný periodický vektor zobecněných budících sil $\mathbf{f}(t)$. U takového systému se projevují tzv. parametrické rezonance. Naladění parametrů soustavy, při nichž nastávají parametrické rezonance, mohou zapříčinit nestabilitu systému. Určování těchto pásem nestability bude provedeno pomocí již zmíněné Floquetovy teorie.

K pohybové rovnici (3.2.1) přidáme identitu

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (3.2.2)$$

a obě rovnice můžeme přepsat do maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

což lze dále přepsat

$$\mathbf{N}(t)\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (3.2.4)$$

kde

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Pokud je matice $\mathbf{N}(t)$ regulární, tj. lze ji invertovat, vynásobíme rovnici (3.2.4) zleva $\mathbf{N}^{-1}(t)$

$$\mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{N}(t)\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad (3.2.9)$$

a zavedeme

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{P}(t), \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{F}(t). \quad (3.2.11)$$

Po úpravě a dosazení (3.2.10) a (3.2.11) do vztahu (3.2.9) získáme

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (3.2.12)$$

Podle Floquetovy teorie o stabilitě rozhoduje řešení homogenní části rovnice (3.2.12), tedy

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t). \quad (3.2.13)$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)] \quad (3.2.14)$$

je fundamentální matice řešení, jejíž sloupce $\mathbf{u}_i(t)$ jsou nezávislá řešení (což je možné předpokládat u lineárních systémů), která splňuje soustavu diferenciálních rovnic (3.2.13)

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad (3.2.15)$$

poté

$$\dot{\mathbf{U}}(t+T) = \mathbf{A}(t+T)\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t+T), \quad (3.2.16)$$

a $\mathbf{U}(t+T)$ je také fundamentální maticí ve tvaru

$$\mathbf{U}(t+T) = [\mathbf{u}_1(t+T) \quad \mathbf{u}_2(t+T) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t+T)]. \quad (3.2.17)$$

Předpokládejme, že každý vektor $\mathbf{u}_i(t+T)$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)$. Předchozí vztah je pak možné zapsat jako

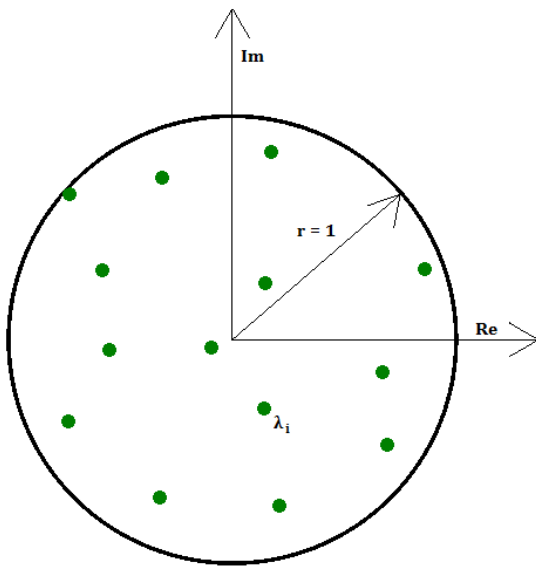
$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Z}, \quad (3.2.18)$$

kde matice \mathbf{Z} je konstantní matice koeficientů lineární kombinace. Zvolíme-li fundamentální matici $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice, znamená to, že matice $\mathbf{U}(t)$ je v $t=0$

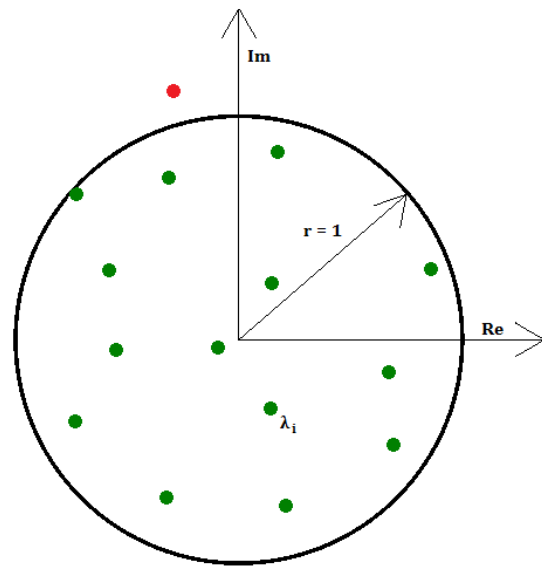
charakterizována nezávislými počátečními podmínkami. Pak můžeme (3.2.18) v $t = 0$ psát ve tvaru

$$\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0)\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \quad (3.2.19)$$

a tedy fundamentální matice v čase $t = 0$ je rovna matici \mathbf{Z} , kterou označujeme jako matici monodromie. Vlastní čísla této matice rozhodují o stabilitě daného systému. Jestliže všechna vlastní čísla leží v jednotkové kružnici (včetně hranice), pak se jedná o stabilní systém, viz obr. 3. Pokud však alespoň jedno z vlastních čísel leží mimo tuto hranici, pak je systém nestabilní, viz obr. 4.



Obr. 3 – Stabilní systém



Obr. 4 – Nestabilní systém

Postup řešení stability systémů popsaných diferenciálními rovnicemi s periodickými koeficienty podle (3.2.15) můžeme shrnout do jednotlivých kroků:

- 1) Zjištění matice monodromie $\mathbf{U}(T) = \mathbf{Z}$ numerickou integrací při zadané počáteční podmínce $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ můžeme pro jednoduchost zapsat postupně pro jednotlivé sloupce matice $\mathbf{U}(t)$ následovně

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}_1(t), \quad \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_1(T)$$

až do $2n$

$$\dot{\mathbf{u}}_{2n}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}_{2n}(t), \quad \mathbf{u}_{2n}(0) = \mathbf{e}_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_{2n}(T).$$

Po sestavení těchto sloupců do matice získáme matici monodromie $\mathbf{U}(T) = \mathbf{Z}$.

2) Určení vlastních čísel matice monodromie \mathbf{Z} z problému vlastních hodnot

$$(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

3) Analýza stability systému z absolutních hodnot vlastních čísel λ_i matice monodromie \mathbf{Z} , přičemž platí následující relace

$$\forall |\lambda_i| \leq 1 \Rightarrow \text{stabilita},$$

$$\exists |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \text{nestabilita}.$$

3.3 Důkaz Floquetovy teorie [3]

Převědme matici \mathbf{Z} z kapitoly 3.2 do Jordanova kanonického tvaru [9]

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P} = \mathbf{J}, \quad (3.3.1)$$

kde $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{2n}]$ je pravostranná modální matice vlastních vektorů matice \mathbf{Z} a \mathbf{J} je Jordanova matice [9]. Tento tvar lze získat následujícím způsobem, nejprve vyjádříme pravostranný problém vlastních hodnot

$$(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3.3.2)$$

Dále vyjádříme levostranný problém vlastních hodnot, který získáme transpozicí rovnice

$$(\mathbf{Z}^T - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p}^* = \mathbf{0}, \quad (3.3.3)$$

což lze přepsat

$$\mathbf{p}^{*T}(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}. \quad (3.3.4)$$

Výsledkem řešení problémů (3.3.2) a (3.3.3) jsou modální matice \mathbf{P} a \mathbf{P}^*

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{2n}], \quad (3.3.5)$$

$$\mathbf{P}^* = [\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_{2n}^*]. \quad (3.3.6)$$

Primárním výsledkem řešení jak pravostranného, tak levostranného problému vlastních hodnot (3.3.2) a (3.3.3) jsou vlastní čísla λ_i pro $i = 1, \dots, 2n$, která jsou uspořádána do spektrální matice

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix}, \quad (3.3.7)$$

a kterým přísluší vlastní vektory uvedené v (3.3.2) a (3.3.3).

Ortogonalita vlastních vektorů a jejich normalizace

Zapišme problém vlastních hodnot (3.3.2), resp. (3.3.3) pro i -tý, resp. j -tý vlastní vektor

$$(\mathbf{Z} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (3.3.8)$$

$$(\mathbf{Z}^T - \lambda_j\mathbf{I})\mathbf{p}_j^* = \mathbf{0}. \quad (3.3.9)$$

Pronásobením (3.3.8), resp. (3.3.9) vlastním vektorem \mathbf{p}_j^{*T} , resp. \mathbf{p}_i^T zleva dostaneme

$$\mathbf{p}_j^{*T}(\mathbf{Z} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{p}_i = 0, \quad (3.3.10)$$

$$\mathbf{p}_i^T(\mathbf{Z}^T - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{p}_j^* = 0. \quad (3.3.11)$$

Transponováním vztahu (3.3.11) a odečtením (3.3.10) od transponované rovnice (3.3.11) získáme vztah

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{p}_j^{*T}\mathbf{p}_i = 0, \quad (3.3.12)$$

pomocí něhož bude vysvětlena ortogonalita vlastních vektorů.

Nenásobná vlastní čísla

Nejprve se omezme na nenásobná vlastní čísla, pro něž můžeme psát

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (3.3.13)$$

Pak pro zjištění nulovosti vztahu (3.3.12) musí platit

$$\mathbf{p}_j^{*T}\mathbf{p}_i = 0. \quad (3.3.14)$$

V případě rovnosti ve vztahu (3.3.12), tj.

$$i = j \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j, \quad (3.3.15)$$

musí platit následující

$$\mathbf{p}_j^{*T}\mathbf{p}_i = \xi_i \neq 0. \quad (3.3.16)$$

Označme pro další postup vlastní vektory \mathbf{p}^* a \mathbf{p} jako $\tilde{\mathbf{p}}^*$ a $\tilde{\mathbf{p}}$, chceme-li zdůraznit, že se jedná o nenormované vlastní vektory. Podmínky vyjádřené v (3.3.14) a (3.3.16) lze potom vyjádřit v kompaktním tvaru pomocí nenormovaných matic $\tilde{\mathbf{P}}$ a $\tilde{\mathbf{P}}^*$ následujícím způsobem

$$\tilde{\mathbf{P}}^{*T}\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_{2n} \end{bmatrix} = \mathbf{S}, \quad (3.3.17)$$

kde diagonální matice obsahující nenulové ξ_i členy je označena symbolem \mathbf{S} .

Dále chceme docílit, aby vztah (3.3.17) byl roven jednotkové matici \mathbf{I} . Z tohoto důvodu zapišme matici \mathbf{S} jako součin dvou diagonálních matic

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{L}, \quad (3.3.18)$$

kde \mathbf{L} je ve tvaru

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_1} & & & \\ & \sqrt{\xi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\xi_{2n}} \end{bmatrix}. \quad (3.3.19)$$

Násobíme-li vztah (3.3.17) maticí \mathbf{L}^{-1} zleva i zprava, získáme požadovanou rovnost

$$\mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^{*T}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (3.3.20)$$

kde \mathbf{P} vyjadřuje normovanou pravostrannou modální matici ve tvaru

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{L}^{-1} = \left[\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1}{\sqrt{\xi_1}}, \frac{\tilde{\mathbf{p}}_2}{\sqrt{\xi_2}}, \dots, \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{2n}}{\sqrt{\xi_{2n}}} \right]. \quad (3.3.21)$$

Označíme-li $\mathbf{P}^{*T} = \mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^{*T}$, dostaneme transpozici vztah pro normovanou levostrannou modální matici ve tvaru

$$\mathbf{P}^* = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{L}^{-T} = \left[\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^*}{\sqrt{\xi_1}}, \frac{\tilde{\mathbf{p}}_2^*}{\sqrt{\xi_2}}, \dots, \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{2n}^*}{\sqrt{\xi_{2n}}} \right]. \quad (3.3.22)$$

Pro normované modální matice platí vztah

$$\mathbf{P}^{*T}\mathbf{P} = \mathbf{I}. \quad (3.3.23)$$

Vynásobením (3.3.23) zprava maticí \mathbf{P}^{-1} , získáme vztah

$$\mathbf{P}^{*T} = \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.3.24)$$

díky kterému stačí řešit pouze jeden z obou problémů vlastních hodnot. Proto se nyní vraťme k rovnici (3.3.2), kterou můžeme zapsat v kompaktním tvaru

$$\mathbf{Z}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}. \quad (3.3.25)$$

Násobíme-li tento vztah zleva maticí \mathbf{P}^{*T} , dostaneme

$$\mathbf{P}^{*T}\mathbf{Z}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{*T}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda} \quad (3.3.26)$$

a s ohledem na (3.3.23) a (3.3.24) lze psát

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{ZP} = \mathbf{\Lambda}. \quad (3.3.27)$$

Tento vztah vyjadřuje převod do kanonického tvaru, v případě jednoduchých struktur je Jordanova matice \mathbf{J} totožná se spektrální maticí $\mathbf{\Lambda}$.

Nahradíme nyní v rovnici (3.2.15) z kapitoly 3.2 matici $\mathbf{U}(t)$ transformací pomocí modální matice \mathbf{P} ve tvaru

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}, \quad (3.3.28)$$

kde pro čas $t+T$ platí

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{V}(t+T)\mathbf{P}^{-1}. \quad (3.3.29)$$

Dle (3.2.18) v kapitole 3.2 v souladu s (3.3.28) můžeme psát

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Z} = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}. \quad (3.3.30)$$

Ze vztahu (3.3.29) lze vyjádřit $\mathbf{V}(t+T)$ jako

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{U}(t+T)\mathbf{P} \quad (3.3.31)$$

a po dosazení (3.3.30) dostaneme

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{ZP}. \quad (3.3.32)$$

S uvážením převodu do kanonického tvaru (3.3.27) platí

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{ZP} = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Lambda}, \quad (3.3.33)$$

což rozepíšeme pro i -tý sloupec matice $\mathbf{V}(t+T)$

$$\mathbf{v}_i(t+T) = \lambda_i \mathbf{v}_i(t). \quad (3.3.34)$$

Z tohoto vztahu je možné analyzovat stabilitu systému, neboť platí, že pokud absolutní hodnota vlastního čísla λ_i bude větší než jedna, pak amplituda bude narůstat, neboť vztah (3.3.34) vyjadřuje následující periodu. Tento vztah popisuje modální výchylky \mathbf{v}_i , které lze zpětně transformovat na skutečné výchylky vztahem (3.3.28). Z toho je patrné, že pokud alespoň jedno z vlastních čísel je v absolutní hodnotě větší než jedna, pak se jedná o nestabilní systém.

Násobná vlastní čísla

Pro násobná vlastní čísla platí

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \vee \lambda_i = \lambda_j, \quad (3.3.35)$$

tj. je nutné připustit i případ rovnosti vlastních čísel pro rozdílné indexy. Lze tedy psát

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i = 0, \quad \lambda_i = \lambda_j \Rightarrow \mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i \neq 0. \quad (3.3.36)$$

Označme (obdobně jako výše) vlastní vektory \mathbf{p}^* a \mathbf{p} symboly $\tilde{\mathbf{p}}^*$ a $\tilde{\mathbf{p}}$, chceme-li zdůraznit, že se jedná o nenormované vlastní vektory. Obdobně jako v (3.3.17) můžeme psát

$$\tilde{\mathbf{P}}^{*T} \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}, \quad (3.3.37)$$

kde \mathbf{Q} již není diagonální matice, ale obsahuje i mimodiagonální prvky $\tilde{\mathbf{p}}_j^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_i \neq 0$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_1 & & \dots & \\ \vdots & \tilde{\mathbf{p}}_2^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_2 & & \\ & \tilde{\mathbf{p}}_j^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_i & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{p}}_{2n}^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_{2n} \end{bmatrix}. \quad (3.3.38)$$

Matici \mathbf{Q} je možné rozložit pomocí Cholevského rozkladu [4] ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{R}. \quad (3.3.39)$$

Násobíme-li vztah (3.3.37) maticí \mathbf{L}^{-1} zleva a maticí \mathbf{R}^{-1} zprava, dostaneme

$$\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{*T} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (3.3.40)$$

kde symbolem \mathbf{P} vyjádříme normovanou pravostrannou modální matici tvaru

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{-1}, \quad (3.3.41)$$

a označíme-li $\mathbf{P}^{*T} = \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{*T}$, dostaneme transpozicí vztah pro normovanou levostrannou modální matici ve tvaru

$$\mathbf{P}^* = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{L}^{-T}. \quad (3.3.42)$$

Touto operací byla provedena normalizace a ortogonalizace vztahu (3.3.37). Poté (3.3.40) lze přepsat jako

$$\mathbf{P}^{*T} \mathbf{P} = \mathbf{I}. \quad (3.3.43)$$

Tímto jsme dosáhli totožného vztahu s (3.3.23) a dále bychom postupovali analogicky jako u nenásobných vlastních čísel.

4 Aplikace řešení na příkladech

V této části se budeme věnovat aplikaci teorie a postupů z předchozích kapitol na jednoduchém systému s 1° stupněm volnosti, který je znázorněn na obr. 1. Pro numerické experimenty byl využit výpočtový systém MATLAB.

Zavedeme-li časovou transformaci

$$\tau = \Omega t, \quad (4.1)$$

lze definovat

$$\dot{q}(t) = \frac{dq(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \Omega q'(\tau), \quad (4.2)$$

$$\ddot{q}(t) = \Omega^2 q''(\tau). \quad (4.3)$$

Pomocí těchto vztahů a

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \quad (4.4)$$

$$b_s = 2Dm_s \Omega, \quad (4.5)$$

můžeme přepsat pohybovou rovnici (2.1) do bezrozměrného tvaru

$$q''(\tau) + 2Dq'(\tau) + \left[1 - \frac{\mu}{k_s} k(\tau)\right] q(\tau) = \frac{f(\tau)}{k_s}, \quad (4.6)$$

který využijeme při určování analytického periodického řešení systému.

Dále upravíme pohybovou rovnici (2.1) pro metodu Runge- Kuty

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{m_s} [f(t) - b_s \dot{q}(t) - k_s q(t) + \mu k(t) q(t)]. \quad (4.7)$$

Po zavedení substituce

$$x_1 = \dot{q}, \quad (4.8)$$

$$x_2 = q, \quad (4.9)$$

můžeme psát

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m_s} [f(t) - b_s x_1 - k_s x_2 + \mu k(t) x_2], \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_2 = x_1. \quad (4.11)$$

Metodu Runge- Kuty budeme aplikovat při nulových počátečních podmínkách s krokem 0,0001 s.

V kapitole 3.1 bylo prezentováno odvození nové metody posouzení stability. Podle této metody je provedena numerická simulace vykreslení hranic stability systému na konkrétních příkladech a je ověřena Floquetovou metodou, viz níže. Podle Floquetovy teorie o stabilitě rozhoduje řešení homogenní části rovnice (2.1), tedy

$$m_s \ddot{q}(t) + b_s \dot{q}(t) + [k_s - \mu k(t)] q(t) = 0, \quad (4.12)$$

Rovnici (4.12) upravíme

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{m_s} [b_s \dot{q}(t) + k_s q(t) - \mu k(t) q(t)] \quad (4.13)$$

a po zavedení substituce (4.8) a (4.9) můžeme psát

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{m_s} [b_s x_1 + k_s x_2 - \mu k(t) x_2], \quad (4.14)$$

$$\dot{x}_2 = x_1. \quad (4.15)$$

Obě rovnice můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_s}{m_s} & -\frac{1}{m_s} [k_s - \mu k(t)] \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

nebo následovně

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \quad (4.17)$$

kde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Numerickou integraci provedeme pomocí Rungeovy- Kuttovy metody s krokem 0,00001 s a pro počáteční podmínky

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Další postup je popsán v kapitole 3.2 a podrobněji rozebrán v kapitole 3.3.

Příklad 1

Nechť je dáno

<i>Označení</i>	<i>Veličina</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Jednotky</i>
N	počet členů řady	200	–
N_{Stab}	počet členů řady pro posouzení stability	25	–
m_s	stacionární hmotnost	1	kg
k_s	stacionární tuhost	10 000	N / m
f_s	stacionární síla	10 000	N
t_{max}	konečný čas	35 T	s
D	poměrný útlum	0,01	–
η	činitel naladění	0,45	–

Tab. 1 – Dané parametry systému

Z (4.4), (4.5) a následujících vztahů

$$\omega = \eta \Omega, \quad (4.20)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.21)$$

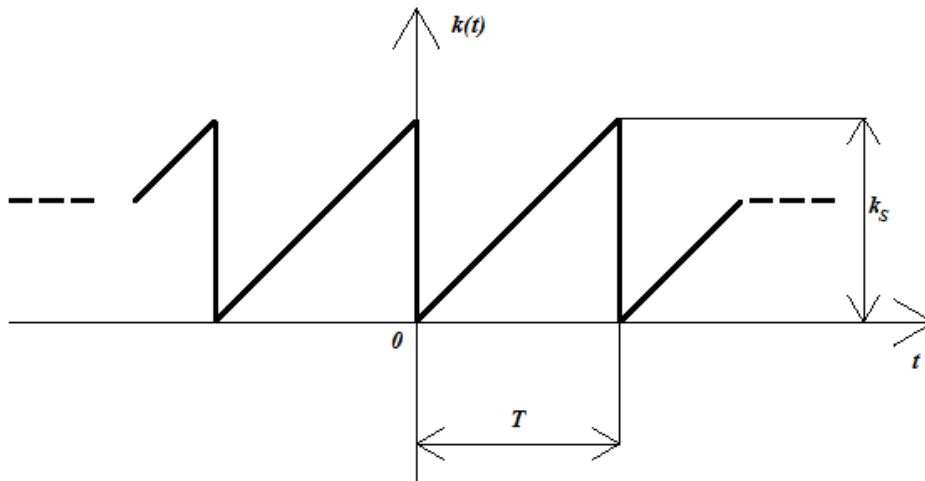
získáme další potřebné parametry systému zapsané v tab. 2.

<i>Označení</i>	<i>Veličina</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Jednotky</i>
Ω	vlastní frekvence	316,2278	rad / s
b_s	stacionární tlumení	6,3246	Ns / m
ω	úhlová frekvence	142,3025	rad / s
T	perioda	0,0442	s

Tab. 2 – Vypočtené parametry systému

Numerický experiment se provádí na systému s časově závislou tuhostí, jejíž charakteristika je vykreslena na obr. 5 a popsána funkcí

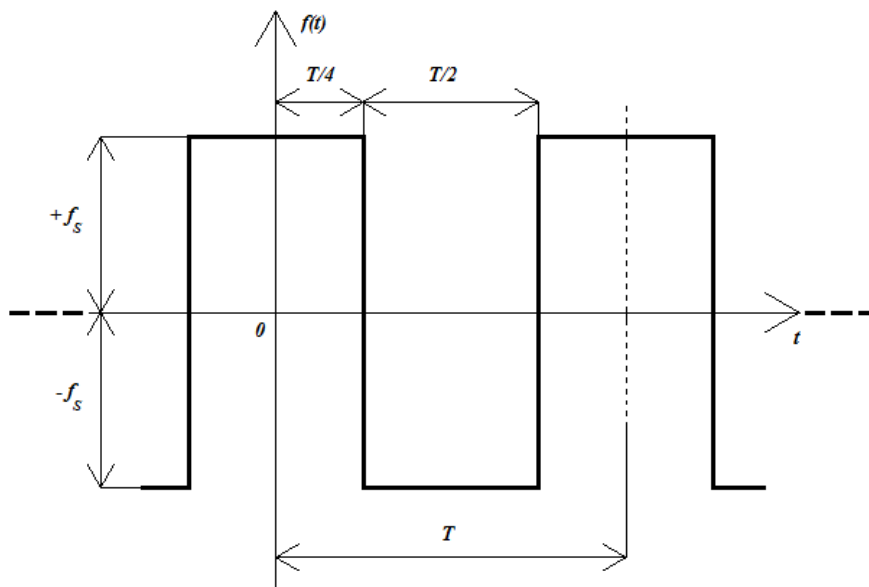
$$k(t) = k(t+T) = k_s \frac{t}{T}, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.22)$$



Obr. 5 – Periodická funkce tuhosti

Budící funkce je zobrazena na obr. 6 a má tvar

$$f(t) = f(t+T) = \begin{cases} f_s, & t \in \langle 0, \frac{T}{4} \rangle, \\ -f_s, & t \in \langle \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} \rangle, \\ f_s, & t \in \langle \frac{3T}{4}, T \rangle. \end{cases} \quad (4.23)$$



Obr. 6 – Periodická funkce buzení

Dle (2.20) a (2.21) zavedeme pro periodické funkce tuhosti a buzení následující Fourierovy řady

$$k(t) = \frac{k_S}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n\pi} e^{in\omega t}, \quad (4.24)$$

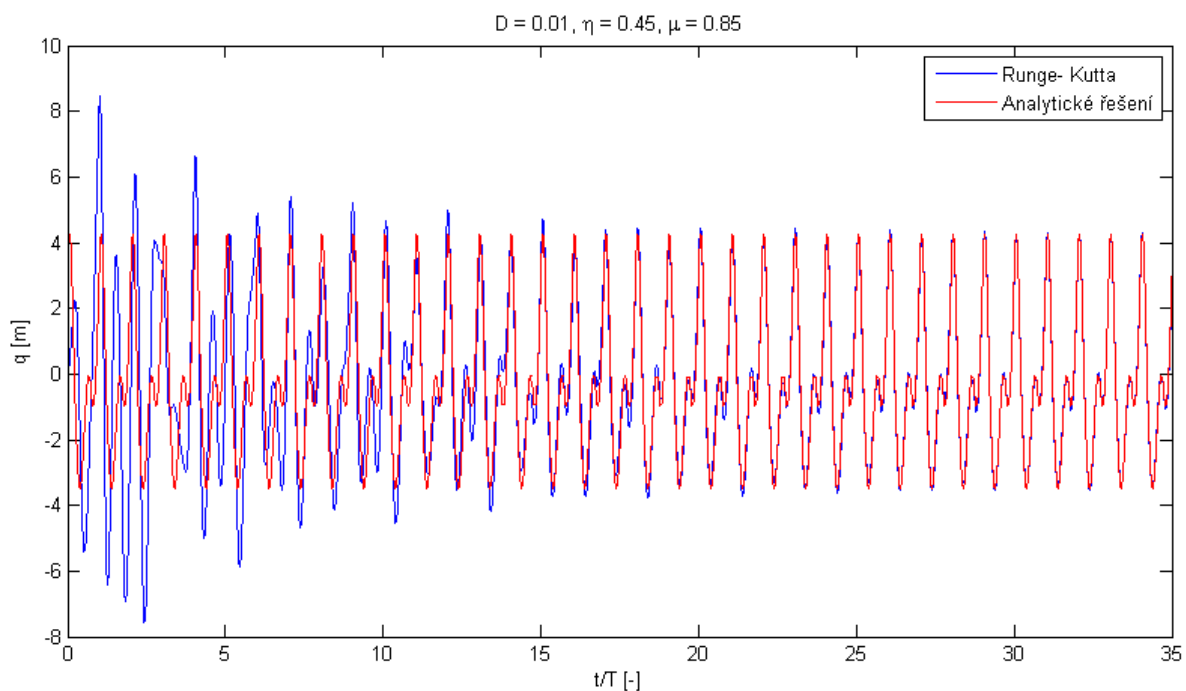
$$f(t) = f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\omega t}. \quad (4.25)$$

V souladu s časovou transformací (4.1) a vztahem (4.20) můžeme tyto Fourierovy řady vyjádřit

$$k(\tau) \approx \frac{k_S}{2} \sum_{n=-N}^N \frac{i}{n\pi} e^{in\eta\tau}, \quad (4.26)$$

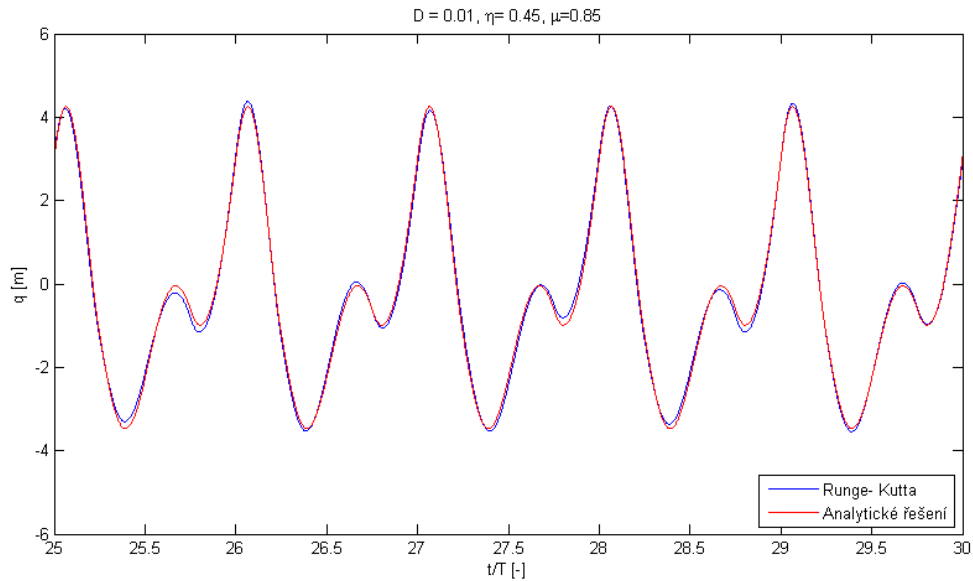
$$f(\tau) \approx f_S \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\eta\tau}. \quad (4.27)$$

Pro analytické periodické řešení systému jsou určujícími parametry stability činitel naladění η a míra modulace tuhosti μ , což bylo dokázáno v kapitole 3.1. Činitel naladění je dán pro oba případy stejně, $\eta = 0,45$. Pro stabilní systém byla míra modulace tuhosti nastavena takto $\mu = 0,85$. Každá zvolená míra modulace byla pro každý příklad ověřena Floquetovou metodou. V tomto případě existuje periodické řešení, které se shoduje s ustáleným stavem celkového řešení odezvy získaného Rungeovou- Kuttovou metodou, viz obr. 7. Vliv nulových počátečních podmínek při Rungeově- Kuttově metodě je omezen jen na homogenní část celkového řešení, a díky tlumení tento vliv po krátkém časovém úseku vymizí.



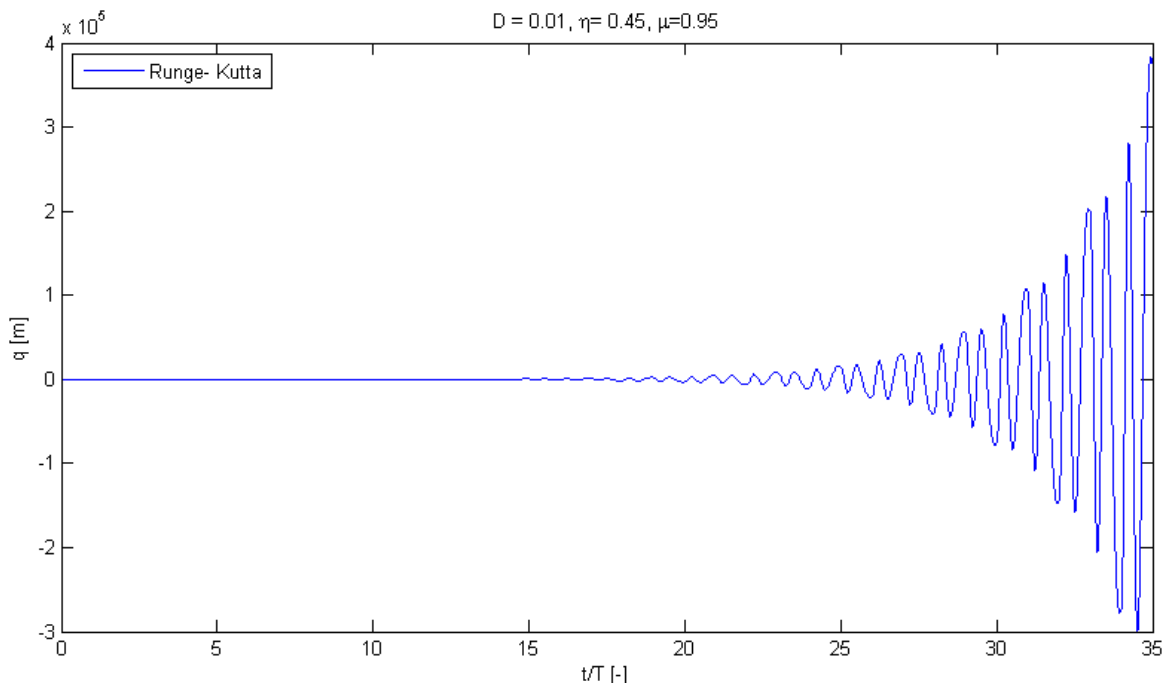
Obr. 7 – Celkové řešení odezvy pro stabilní systém

Na obr. 8 je vykreslen detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém mezi 25. a 30. periodou. Z průběhu lze vypočítat postupné přibližování analytického řešení k metodě Runge- Kuty.



Obr. 8 – Detail průběhu celkového řešení odezvy pro stabilní systém

Pro nestabilní systém byla zvolena míra modulace tuhosti $\mu=0,95$. V tomto případě periodické řešení neexistuje.



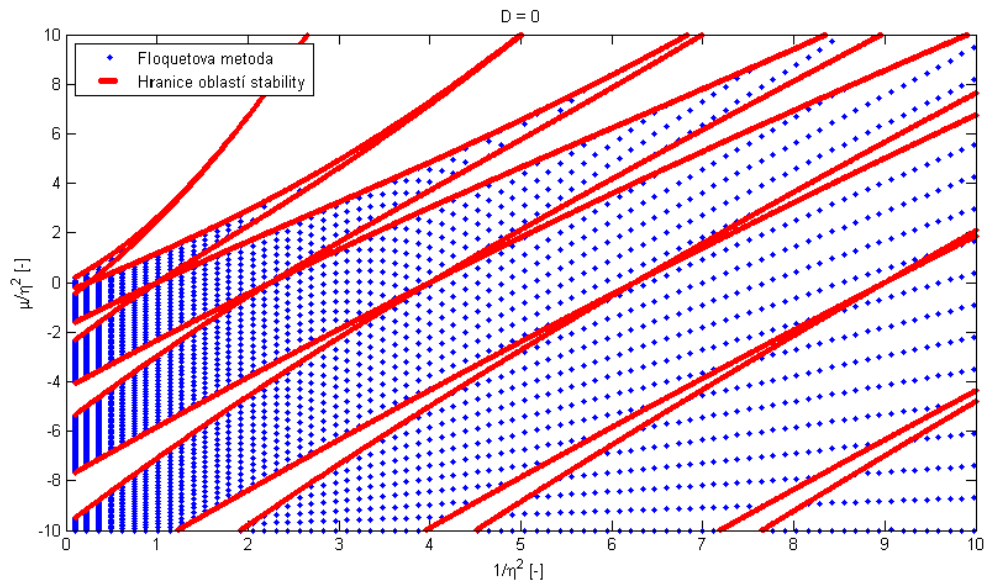
Obr. 9 – Celkové řešení odezvy pro nestabilní systém

Výsledky posouzení stability novou metodou ověřenou Floquetovou metodou jsou ukázány na obr. 10 a 11 pro poměrný útlum $D = 0$ a $D = 0,01$. V obou případech jsou dle legendy u grafů modře označeny body vyšetřované Floquetovou metodou a červeně jsou označené

body vymezuující oblasti stability, které byly získány pomocí prezentované nové metody určení hranic. Z hlediska časové náročnosti výpočtu byl pro posouzení stability snížen počet členů řady z $N = 200$ na $N_{stab} = 25$, jelikož numerický experiment probíhá na širokém pásmu

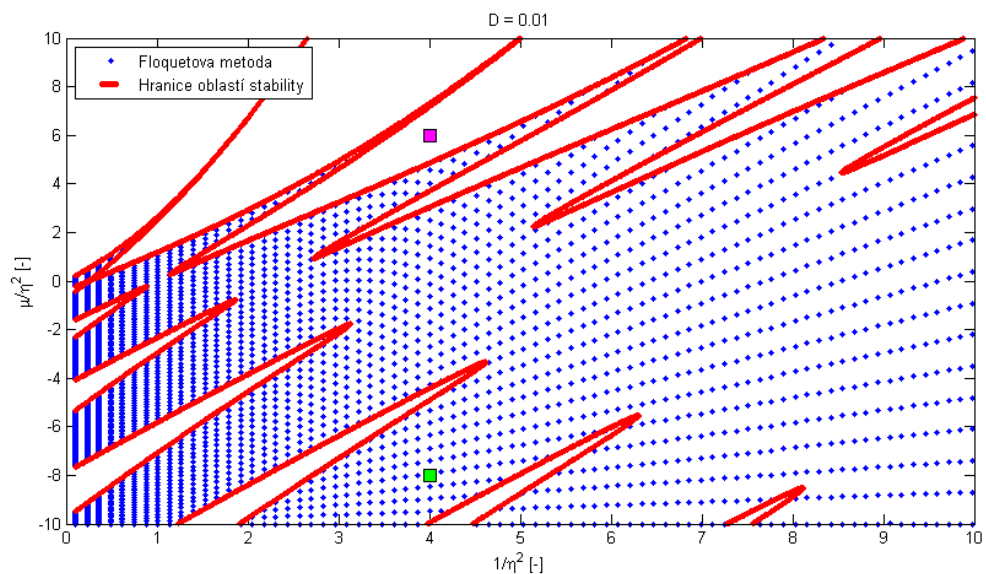
parametrů $\eta = \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{0,1}} \right\rangle$ s krokem 0,13 a $\mu = \langle -10\eta^2, 10\eta^2 \rangle$ s krokem 0,13. Zmíněné

snížení a pásma parametrů u posuzování stability budeme respektovat, nebude-li definováno jinak. Dále je nutné brát ohled na střední hodnotu $k(t)$, která je nenulová, tedy $k_0 \neq 0$.



Obr. 10 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0$

Jak je patrné z obr. 10, některé body získané Floquetovou metodou ve stabilní oblasti chybí kvůli numerickým chybám v zaokrouhlování.



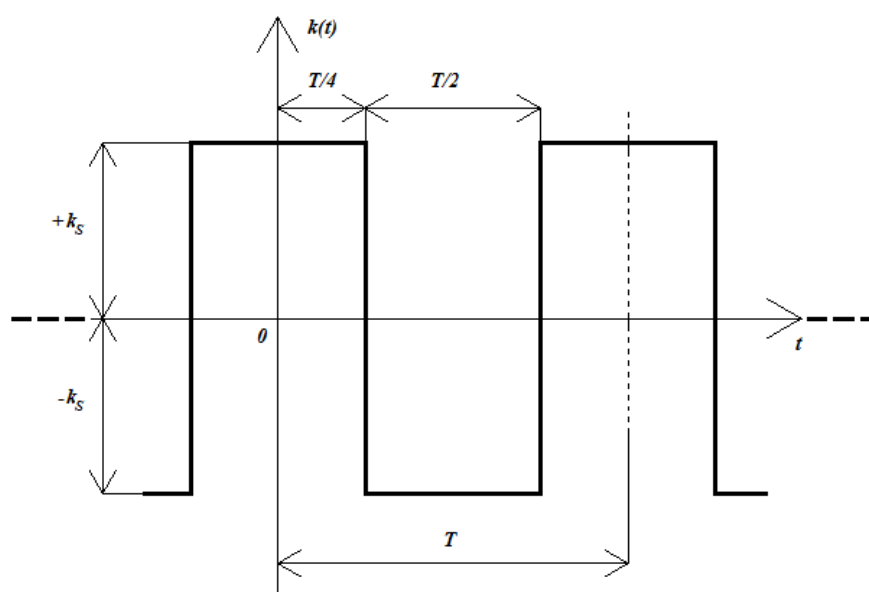
Obr. 11 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0,01$

Na systém s poměrným útlumem $D = 0,01$ jsme aplikovali novou metodu posuzování stability systému, která je shrnuta ve vztahu (3.1.47), v kapitole 3.1. Byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti (zelený) a druhý z nestabilní (růžový). Analýzou znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ byl potvrzen závěr ze zmíněného vztahu (3.1.47), tj. pro nestabilní systém je determinant záporný a pro stabilní systém nabývá determinant kladných hodnot.

Příklad 2

Systémové parametry systému jsou nastaveny stejně jako u příkladu 1, kde jsou zmíněny v tab. 1 a 2. Časově závislá tuhost je vykreslena na obr. 12 a definována funkcí

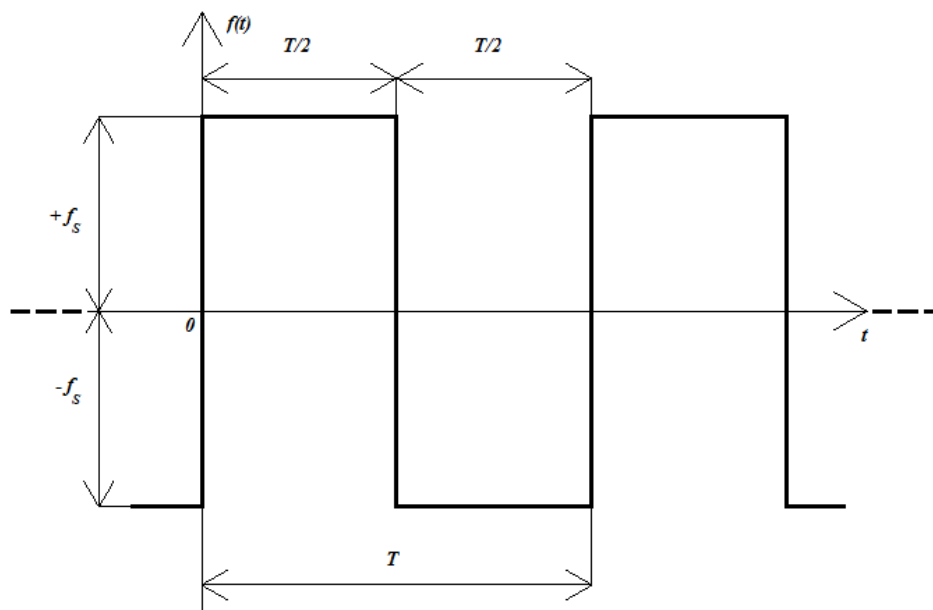
$$k(t) = k(t+T) = \begin{cases} k_s, & t \in \left\langle 0, \frac{T}{4} \right\rangle, \\ -k_s, & t \in \left\langle \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} \right\rangle, \\ k_s, & t \in \left\langle \frac{3T}{4}, T \right\rangle. \end{cases} \quad (4.28)$$



Obr. 12 – Periodická funkce tuhosti

Budící funkce je zobrazena na obr. 13 a popsána vztahem

$$f(t) = f(t+T) = \begin{cases} f_s, & t \in \left\langle 0, \frac{T}{2} \right\rangle, \\ -f_s, & t \in \left\langle \frac{T}{2}, T \right\rangle. \end{cases} \quad (4.29)$$



Obr. 13 – Periodická funkce buzení

Fourierovu řadu periodické funkce tuhosti vyjádříme vztahem

$$k(t) = k_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\omega t} \quad (4.30)$$

a pro periodickou funkci buzení zavedeme následující Fourierovu řadu

$$f(t) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi - 1)] e^{in\omega t}. \quad (4.31)$$

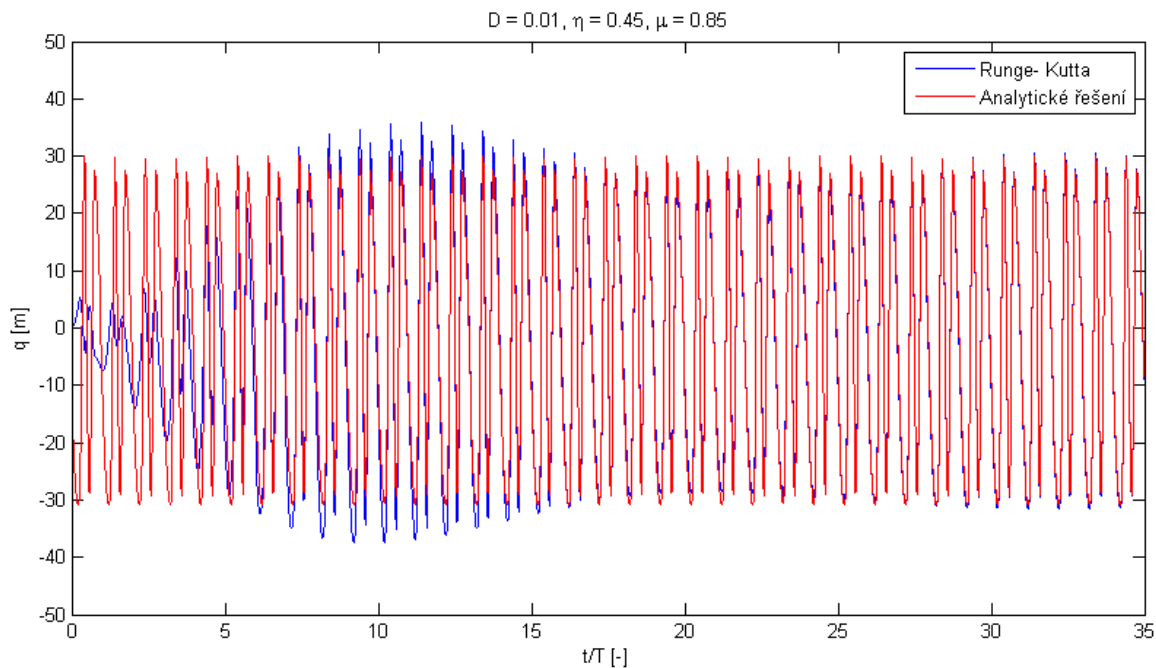
V souladu s časovou transformací (4.1) a vztahem (4.20) můžeme pro Fourierovu řadu tuhosti psát

$$k(\tau) \approx k_s \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\eta\tau} \quad (4.32)$$

a Fourierovu řadu buzení lze přepsat

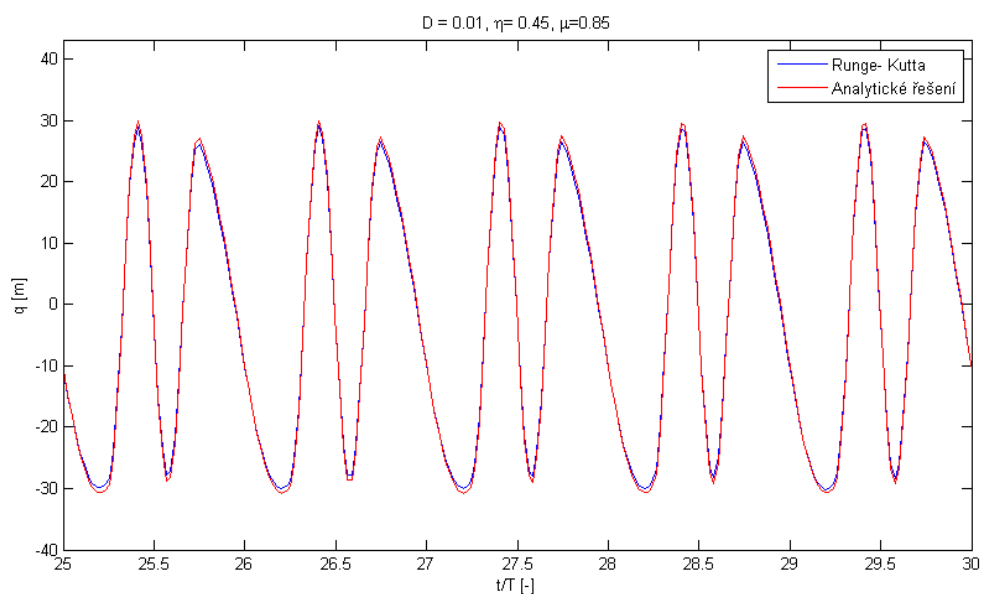
$$f(\tau) \approx f_s \sum_{n=-N}^N \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi - 1)] e^{in\eta\tau}. \quad (4.33)$$

Pro analytické periodické řešení systému je činitel naladění dán pro oba případy stejně, $\eta = 0,45$. Míra modulace tuhosti byla pro stabilní systém nastavena takto $\mu = 0,85$. V tomto případě existuje periodické řešení, které se shoduje s ustáleným stavem celkového řešení odezvy získaného Rungeovu- Kuttovou metodou, viz obr. 14. Vliv nulových počátečních podmínek při Rungeově- Kuttově metodě je omezen jen na homogenní část celkového řešení, a díky tlumení tento vliv po krátkém časovém úseku vymizí.



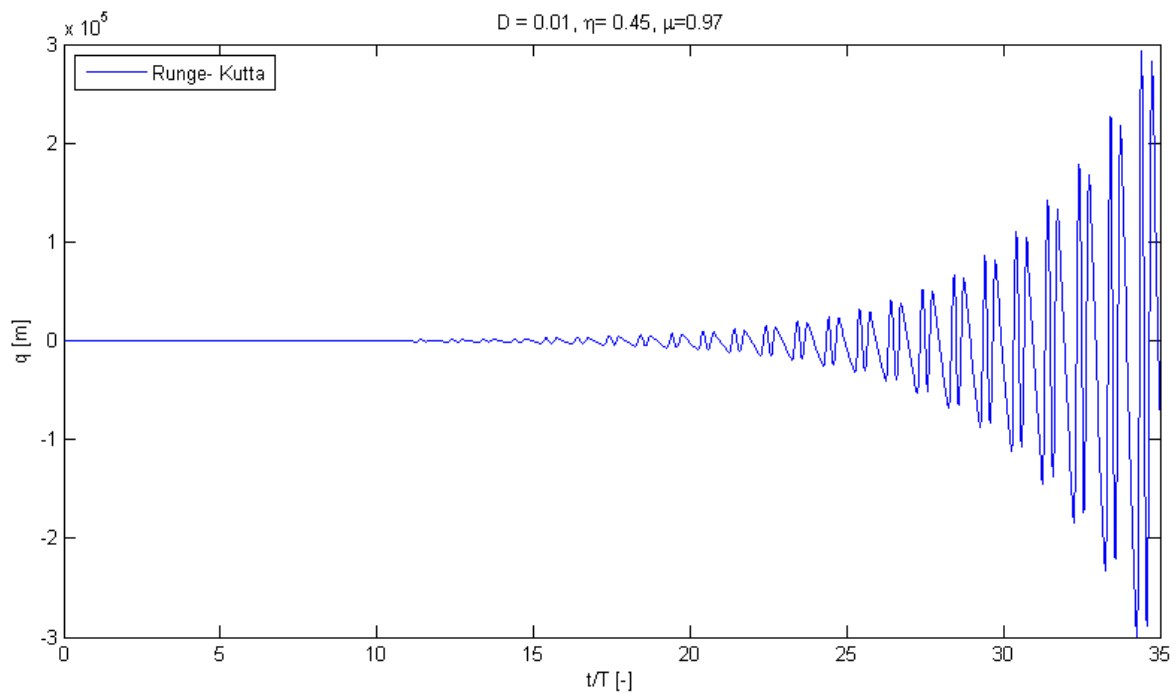
Obr. 14 – Celkové řešení odezvy pro stabilní systém

Na obr. 15 je zobrazen detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém mezi 25. a 30. periodou. Z průběhu lze vypočítat postupné přibližování analytického řešení k metodě Runge- Kuty.



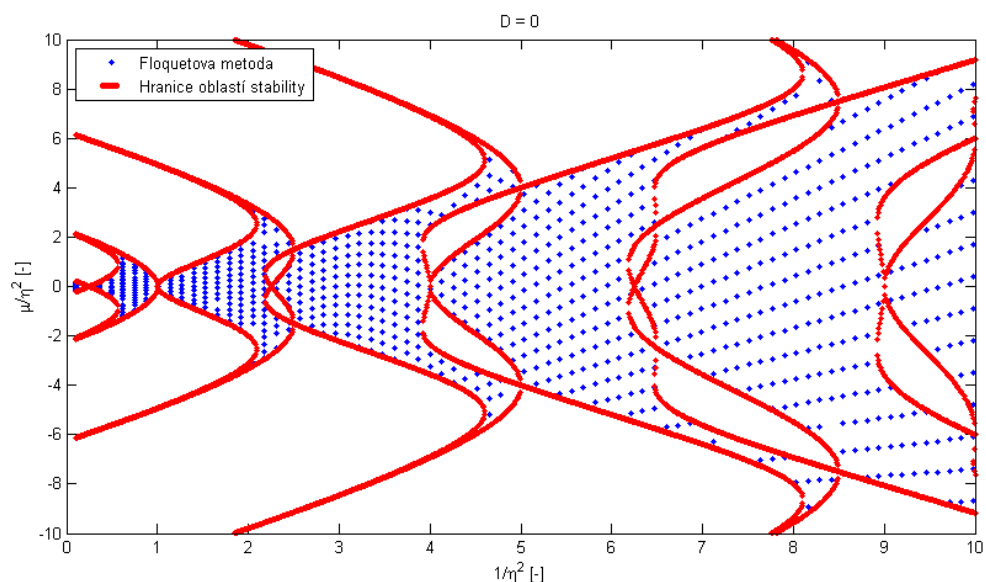
Obr. 15 – Detail průběhu celkového řešení odezvy pro stabilní systém

Pro nestabilní systém se zvolenou mírou modulace tuhosti $\mu = 0,97$ periodické řešení neexistuje.



Obr. 16 – Celkové řešení odezvy pro nestabilní systém

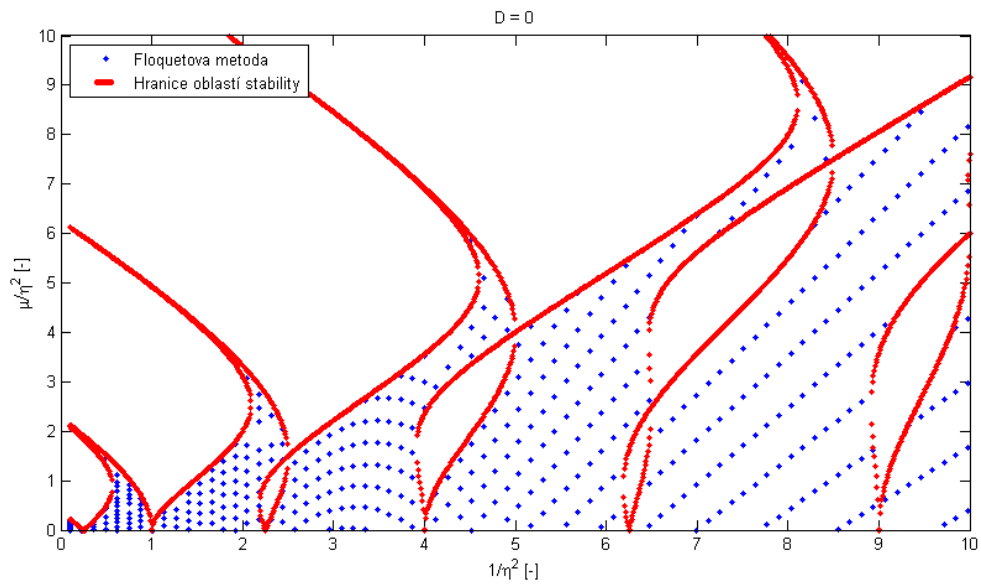
Výsledky posouzení stability novou metodou ověřenou Floquetovou metodou jsou ukázány na obr. 17 a 19 pro poměrný útlum $D = 0$ a $D = 0,01$. V obou případech jsou dle legendy u grafů modře označeny body vyšetřované Floquetovou metodou a červeně jsou označeny body vymezující oblasti stability, které byly získány pomocí prezentované nové metody určení hranic. Výpočet byl proveden pro $N_{Stab} = 25$. Musíme také brát ohled na střední hodnotu $k(t)$, která je oproti příkladu 1 nulová, tedy $k_0 = 0$.



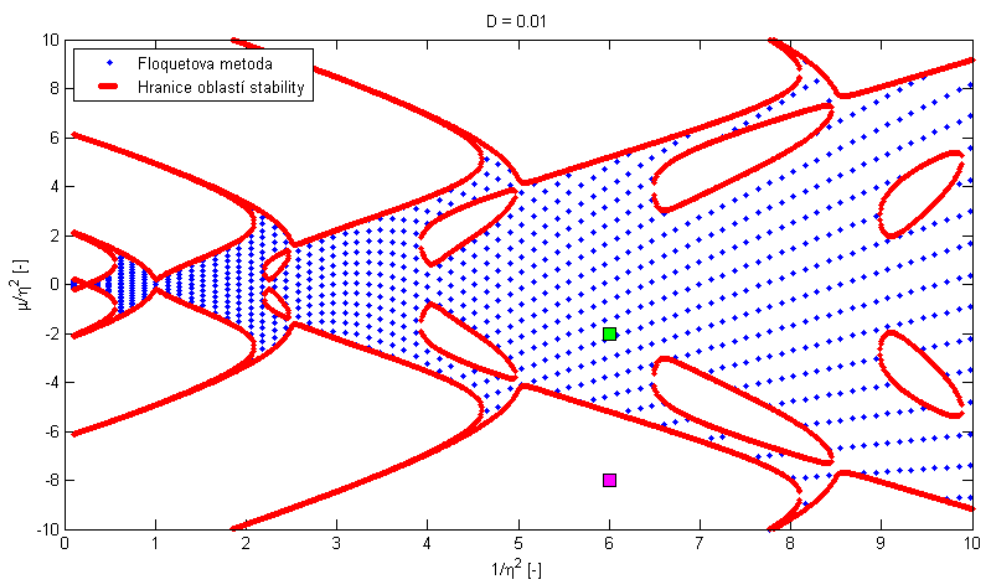
Obr. 17 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0$

I v tomto příkladu je z obr. 17 patrné, že některé body získané Floquetovou metodou ve stabilní oblasti chybí kvůli numerickým chybám v zaokrouhlování. Dále je z obr. 17

zřejmě, že vykreslené hranice a oblasti stability jsou symetrické podle osy $\mu = 0$, proto detail oblasti nad zmíněnou osou můžeme vykreslit na obr. 18.



Obr. 18 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0$ nad osou symetrie $\mu = 0$



Obr. 19 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0,01$

Na systém s poměrným útlumem $D = 0,01$ jsme opět aplikovali novou metodu posuzování stability systému. Dále byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti (zelený) a druhý z nestabilní (růžový). Analýzou znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ bylo dosaženo stejných výsledků jako u příkladu 1, čímž byl potvrzen závěr ze vztahu (3.1.47).

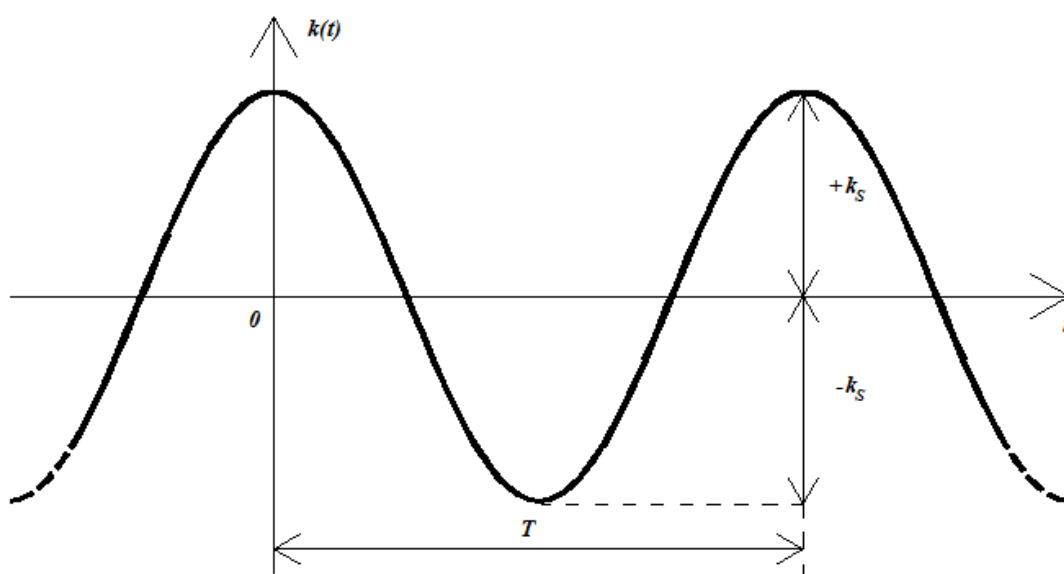
Příklad 3

Systémové parametry systému jsou nastaveny stejně jako u předchozích příkladů, kde jsou zmíněny v tab. 1 a 2. Numerický experiment se provádí na systému s časově závislou tuhostí, jejíž charakteristika je vykreslena na obr. 20 a definována funkcí

$$k(t) = k_S \cos(\omega t) = k_{-1} e^{-i\omega t} + k_1 e^{i\omega t}, \quad (4.34)$$

kde

$$k_{-1} = k_1 = \frac{k_S}{2}. \quad (4.35)$$



Obr. 20 – Periodická funkce tuhosti

Budící funkce je zobrazena na obr. 6 a popsána dle vztahu (4.23)

$$f(t) = f(t+T) = \begin{cases} f_S, & t \in \left\langle 0, \frac{T}{4} \right\rangle, \\ -f_S, & t \in \left\langle \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} \right\rangle, \\ f_S, & t \in \left\langle \frac{3T}{4}, T \right\rangle. \end{cases}$$

Fourierovu řadu periodické funkce buzení vyjádříme vztahem (4.25)

$$f(t) = f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\omega t}.$$

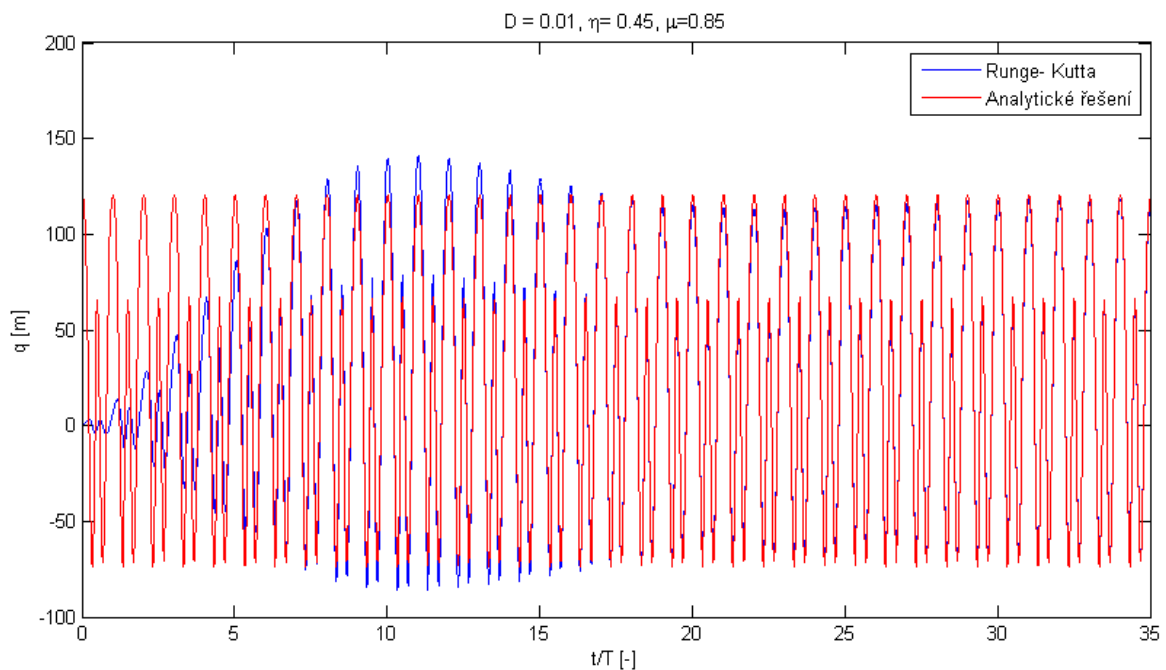
V souladu s časovou transformací (4.1) a vztahem (4.20) můžeme pro Fourierovu řadu tuhosti psát dle vztahu (4.27)

$$f(\tau) \approx f_s \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) e^{in\eta\tau}.$$

Funkci buzení lze přepsat

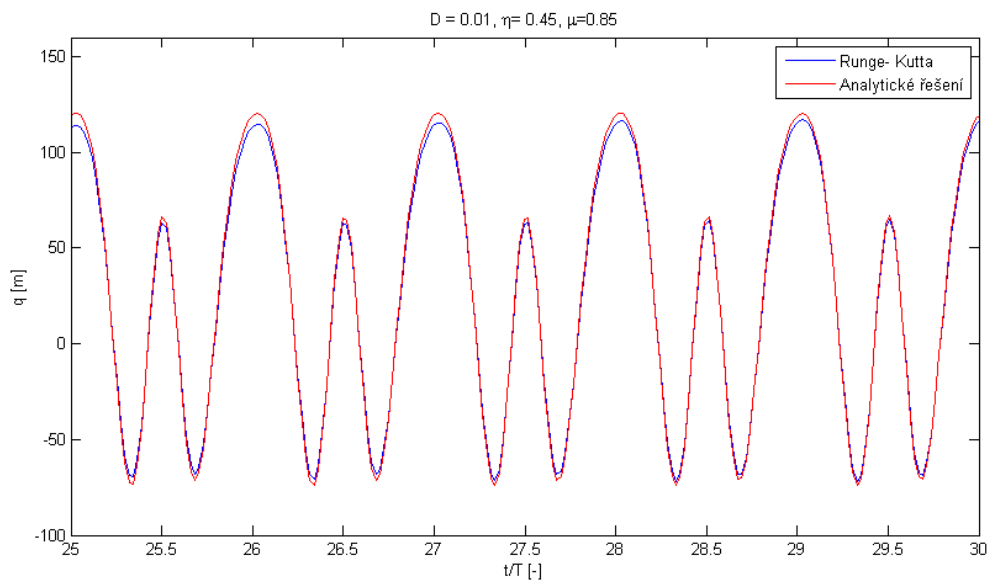
$$k(\tau) = k_s \cos(\eta\tau) = k_{-1}e^{-i\eta\tau} + k_1e^{i\eta\tau}. \quad (4.36)$$

Pro analytické periodické řešení systému je činitel naladění dán pro oba případy stejně, $\eta = 0,45$. Pro stabilní systém byla míra modulace tuhosti nastavena takto $\mu = 0,85$. V tomto případě existuje periodické řešení, které se shoduje s ustáleným stavem celkového řešení odezvy získané Rungeovu- Kuttovou metodou, viz obr. 21. Vliv nulových počátečních podmínek při Rungeově- Kuttově metodě je omezen jen na homogenní část celkového řešení, a díky tlumení tento vliv po krátkém časovém úseku vymizí.



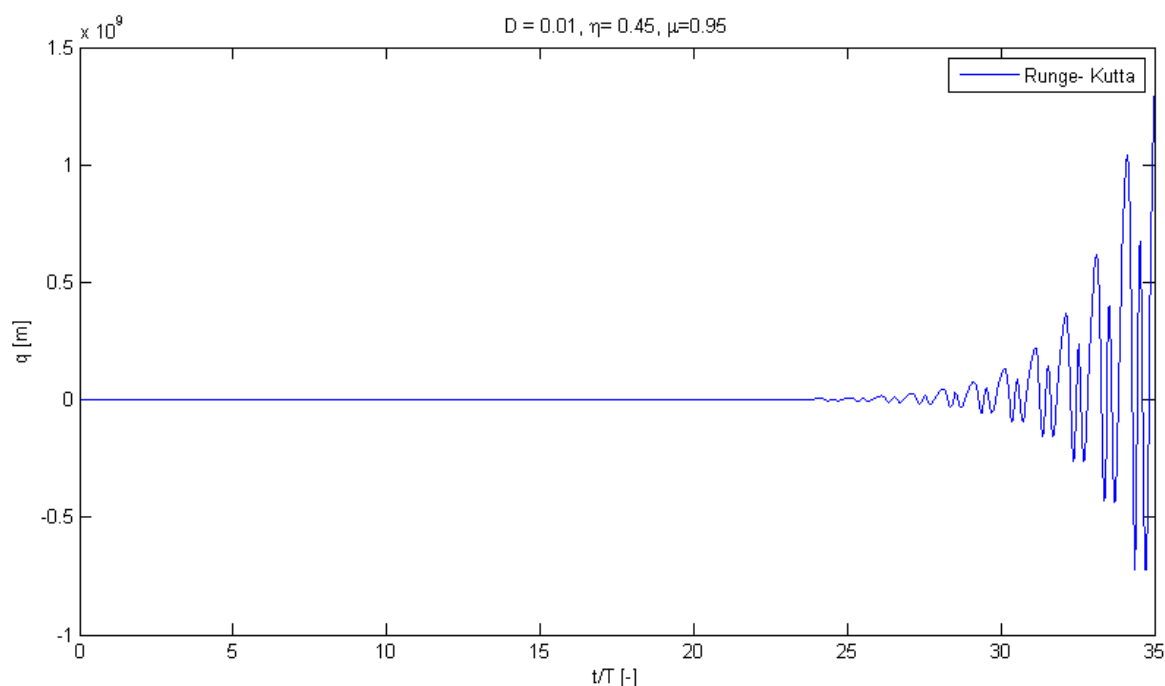
Obr. 21 – Celkové řešení odezvy pro stabilní systém

Na obr. 22 je vykreslen detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém mezi 25. a 30. periodou. Z průběhu lze vyzorovat postupné přibližování analytického řešení k metodě Runge- Kuty.



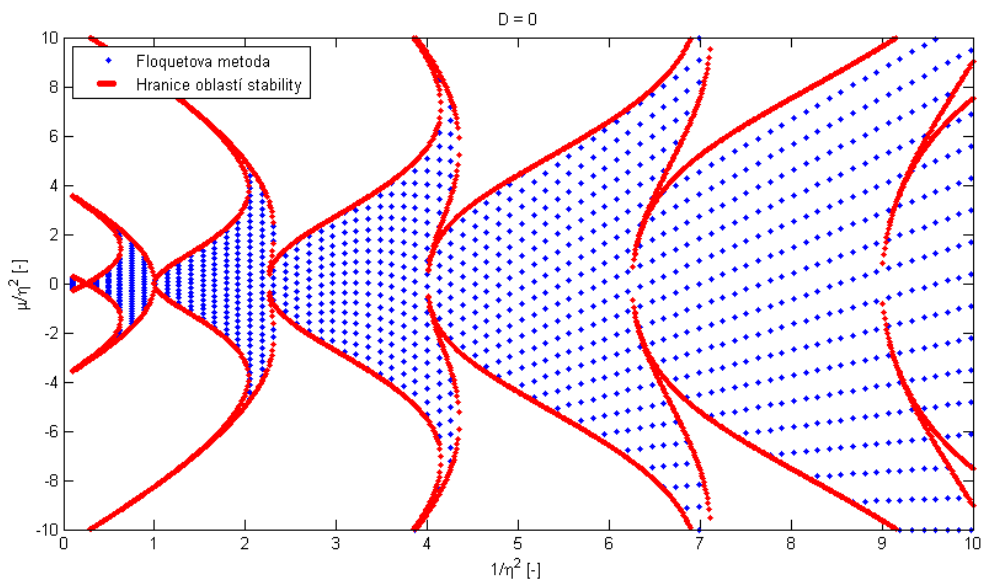
Obr. 22 – Detail průběhu celkového řešení odezvy pro stabilní systém

Pro nestabilní systém byla zvolena míra modulace tuhosti $\mu = 0,95$. V tomto případě periodické řešení neexistuje.



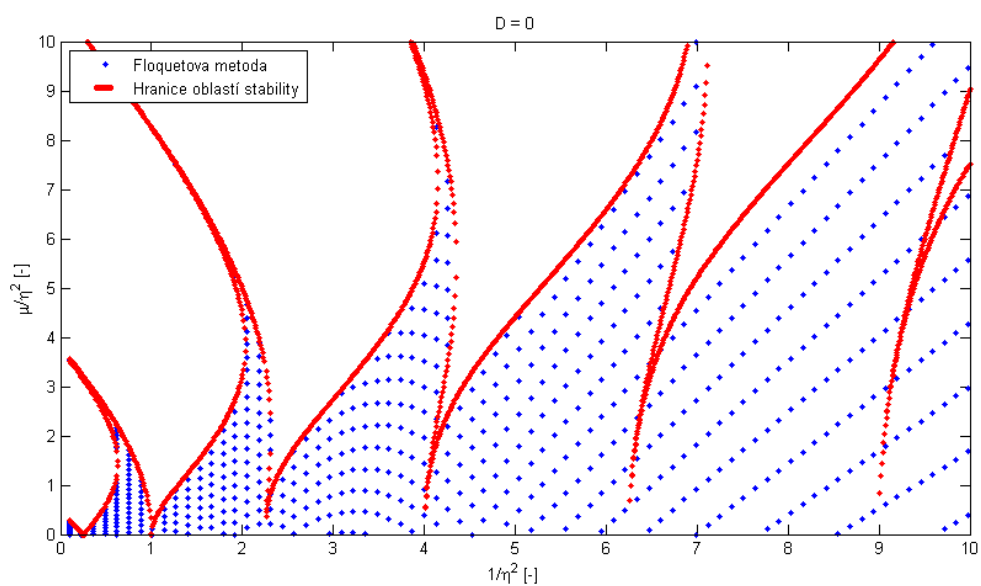
Obr. 23 – Celkové řešení odezvy pro nestabilní systém

Výsledky posouzení stability novou metodou ověřenou Floquetovou metodou jsou ukázány na obr. 24 a 26 pro poměrný útlum $D = 0$ a $D = 0,01$. V obou případech jsou dle legendy u grafů modře označeny body vyšetřované Floquetovou metodou a červeně jsou označeny body vymezující oblasti stability, které byly získány pomocí prezentované nové metody určení hranic. Výpočet byl proveden pro $N_{stab} = 25$. Musíme brát ohled na střední hodnotu $k(t)$, která je stejně jako u příkladu 2 nulová, tedy $k_0 = 0$.

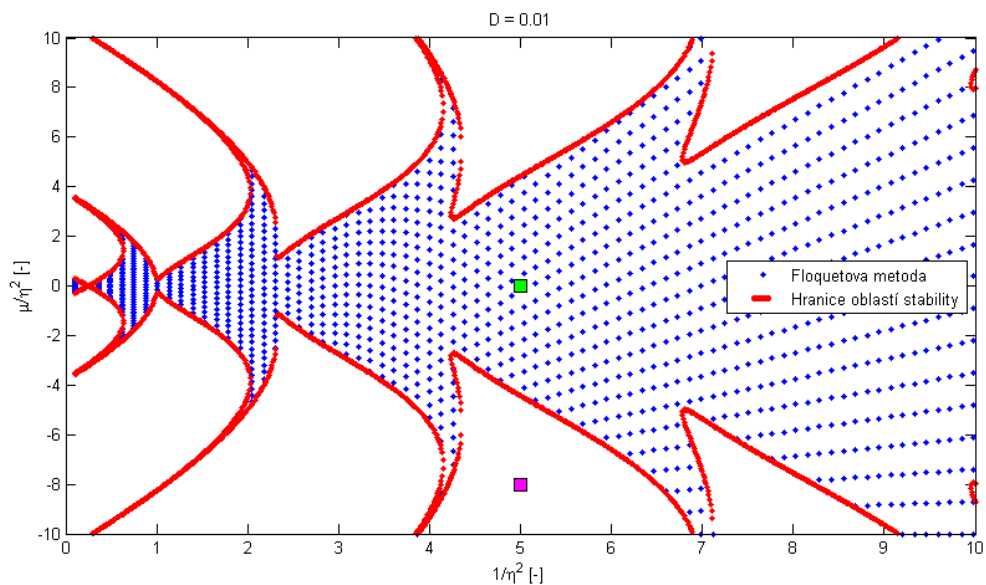


Obr. 24 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0$

I v tomto případě je z obr. 24 zřejmé, že vykreslené hranice a oblasti stability jsou symetrické podle osy $\mu = 0$, proto detail oblasti nad zmíněnou osou můžeme vykreslit na obr. 25.



Obr. 25 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0$ nad osou symetrie $\mu = 0$



Obr. 26 – Stabilní oblasti pro poměrný útlum $D = 0,01$

Na systém s poměrným útlumem $D = 0,01$ jsme jako v předešlých příkladech aplikovali novou metodu posuzování stability systému a opět byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti (zelený) a druhý z nestabilní (růžový). Analýzou znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ bylo dosaženo stejných výsledků jako u předchozích příkladů, čímž byl potvrzen závěr ze vztahu (3.1.47).

5 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo určit analytické periodické řešení a ověřit novou metodu pro posuzování stability lineárních kmitajících systémů s 1° stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou.

Ve druhé kapitole byl odvozen postup pro určení analytického periodického řešení kmitajícího systému s 1° stupněm volnosti. Tento postup byl aplikován na několika příkladech a porovnán s výsledky získaných numerickou metodou Runge- Kuty. Analytické řešení, jestliže existuje, se shoduje s ustáleným stavem celkového řešení odezvy získaného Rungeovou- Kuttovou metodou.

Třetí kapitola přináší novou metodu pro posouzení stability systému. Bylo dokázáno, že znaménko reálné hodnoty determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ rozhoduje o existenci periodického řešení, a tím i o stabilitě systému. Z numerického experimentu bylo vyzorováno následující – jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a periodické řešení neexistuje. Nulový determinant této matice vymezuje hranici mezi stabilními a nestabilními oblastmi. Nová metodika byla ověřena pomocí Floquetovy metody. Jak ukazují výsledky numerických simulací ve čtvrté kapitole, nová metoda je přesnější než aplikace Floquetovy teorie.

Velkou výhodou nové metodiky je jednoduchost aplikace a časová nenáročnost výpočtu oproti aplikaci Floquetovy teorie, která je velice časově náročná při výpočtu pásem stability pro široký rozsah parametrů.

Největším přínosem předkládané práce je možnost posouzení stability systému na základě znalosti znaménka reálné hodnoty determinantu systémové matice, a to efektivně bez složitých numerických výpočtů.

Zmíněnou metodiku je možno rozšířit i pro určování periodického řešení a posuzování stability systému s více stupni volnosti s periodicky proměnnými parametry [6].

Použitá literatura

- [1] BABITSKY, V. I. – KRUPENIN, V. L.: Vibration of Strongly nonlinear discontinuous systems. Berlin, Springer 2001.
- [2] BALDA, M.: Úvod do statické mechaniky. Plzeň, ZČU v Plzni 2011.
- [3] DUPAL, J. – VLAS, R.: Dynamika rotorových soustav. Učební text vzniklý v rámci projektu SPAV č. CZ.1.07/2.3.00/09.0050, Plzeň 2012.
- [4] DUPAL, J.: Výpočtové metody mechaniky. Plzeň, ZČU v Plzni 2004.
- [5] DUPAL, J. – ZAJÍČEK, M.: Analytical periodic solution and stability assessment of 1 DOF parametric systems with time varying stiffness. Applied Mathematics and Computation 2014 (In press).
- [6] DUPAL, J. – ZAJÍČEK, M.: Analytical solution of the drive vibration with time varying parameters (DETC2011-47830). Washington, Proceedings of ASME IDETC 2011.
- [7] FIEDLER, M.: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. Praha, SNTL 1981.
- [8] HLAVÁČ, Z.: Vynucené kmitání soustav s jedním stupněm volnosti. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/293-fst8.pdf>.
- [9] HOLEDNA, J.: O maticích. Plzeň, Vydavatelský servis 2007.