

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matematické modelování vlastností měkkých tkání

Plzeň 2014

Tereza Fayová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 15. srpna 2014

Tereza Fayová

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce Ing. Liboru Loboenskému, Ph.D. za věnovaný čas, cenné rady a trpělivost při vedení práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu a motivaci při studiu i při vzniku této práce.

Abstrakt

Hlavním cílem této práce je nalézt parametry reologického modelu, který by se co nejvíce přiblížil viskoelastickému chování kloubní chrupavky odebrané z kyčelního kloubu. Nejprve je v práci obecně popsána stavba měkkých tkání. Podrobněji je popsána anatomie chrupavky, které se věnuje celá práce. Následně jsou popsány viskoelastické vlastnosti a základní reologické modely, ze kterých jsou odvozeny dále používané složitější reologické modely. Z experimentu byla získána data popisující relaxaci chrupavky a tato data jsou použita pro získání cílové funkce, pro kterou je provedena parametrická optimalizace. Byl napsán optimalizační program pro metodu největšího spádu. Zároveň byla optimalizace provedena funkcí *fmincon.m* v prostředí MATLAB a výsledky jsou porovnány. Pro program metody největšího spádu byla provedena citlivostní analýza.

The Abstract

The main objective of this work is to find parameters of the rheological model, which would be able to closely fit the viscoelastic properties of articular cartilage taken from the hip joint. First, the structure of soft tissues is described in general. Then the anatomy of cartilage is described in detail. Subsequently the viscoelasticity and elementary rheological models are described. These are used to derive complex rheological models. The experimental data describing relaxation of cartilage were obtained and used for the parametric optimisation of the selected model. Optimisation program using the method of gradient descent was implemented. At the same time, the optimisation was also performed by *fmincon.m* function in MATLAB environment and the results were compared. A sensitivity analysis of the method of gradient descent was performed.

Obsah

1	Úvod	1
2	Obecná stavba tkání	3
	2.1. Chrupavka.....	4
	2.2. Druhy chrupavek.....	6
	2.3. Kloubní chrupavka.....	8
3	Mechanické vlastnosti měkkých tkání	10
	3.1. Základní reologické modely.....	10
	3.2. Vlastnosti viskoelastických materiálů.....	11
	3.3. Jednoduché lineární reologické modely.....	12
	3.3.1. Maxwellův model.....	12
	3.3.2. Voigt-Kelvinův model.....	14
	3.4. Relaxace složitějších modelů.....	16
	3.4.1. Kelvin-Zenerův model.....	16
	3.4.2. Obecný lineární model.....	18
4	Identifikace materiálových vlastností	19
	4.1. Experimentální měření vlastností chrupavky.....	19
	4.2. Analytické stanovení napětí.....	21
	4.3. Úprava integrálu.....	22
	4.3.1. Integrace pro Kelvin-Zenerův model.....	23
	4.3.2. Integrace pro model s pěti parametry.....	25

5	Optimalizace	26
	5.1. Numerické metody optimalizace.....	26
	5.2. Metoda největšího spádu.....	27
	5.3. Jednorozměrná optimalizace.....	27
	5.4. Metoda zlatého řezu.....	28
6	Výsledky	29
7	Závěr	41
8	Příloha	42
	Literatura	52

1. Úvod

Motivací vzniku této práce byl fakt, že velká část populace trpí různými druhy onemocnění kloubů. U některých onemocnění kloubů, jako například osteoartróza, dochází k poškození chrupavky. Osteoartróza je degenerativní onemocnění především velkých kloubů, jako jsou klouby kolenní a kyčelní. V kloubní chrupavce, která pokrývá koncové části nosných kostí, dochází při osteoartróze k poruše látkové výměny a chrupavka se postupně ztenčuje, až se na některých místech vytvoří nová kostní tkáň, kostní výrůstky zvané osteofyty, které brání v plnohodnotné pohyblivosti kloubu a způsobují veliké bolesti [7]. Takto porušená chrupavka ztrácí schopnost tlumit nárazy. Lékaři rozlišují čtyři stupně osteoartrózy, kdy poslední čtvrtý stupeň vede většinou k endoprotéze poškozeného kloubu. Lékaři rozdělují endoprotézy na dva druhy a to částečnou endoprotézu, při které je nahrazena pouze poškozená část kloubu, a totální endoprotézu, při které dochází k nahrazení celého kloubu. Chrupavka může být poškozena kromě onemocnění kloubů, jako je osteoartróza, také při úrazu kloubu anebo dochází k jejímu poškození v důsledku vrozených vad. V některých případech se může nahradit pouze poškozená chrupavka chrupavkou jinou a nemusí tak dojít až k totální endoprotéze.

V České republice se používá metoda nahrazení poškozené chrupavky chrupavkou vypěstovanou z kmenových buněk. Celý proces probíhá v Národním centru tkání a buněk v Brně [18], kde se v laboratořích ze vzorku zdravé chrupavky uvolní chrupavkové buňky chondrocyty a ty se pak namnoží na požadovaný počet. V konečné fázi se tkáň vytvaruje ve formičce do potřebného tvaru a vzniklá chrupavka se operativně umístí na poškozené místo. Společnost Cellthera [3] se zabývá podobnou metodou jako Národní centrum tkání a buněk a to získáváním buněk tzv. stromální vaskulární frakce (SVF), které tvoří pojivovou a tukovou tkáň. Buňky se získávají z lipoaspirátu při tumescenční liposukci. SVF obsahuje kromě kmenových buněk ještě několik dalších druhů buněk, z nichž některé přispívají k regeneraci poškozených tkání chrupavky. Novým způsobem léčby poraněné kloubní chrupavky je její nahrazení syntetickým implantátem, což je mnohem levnější varianta, než vypěstování nové chrupavky z kmenových buněk. Tento způsob se bohužel nedá aplikovat při osteoartróze, protože pro použití implantátu je zapotřebí, aby okolní tkáň a vazy byly v pořádku. Implantát se dá použít jen u mladších lidí a pouze pro chrupavku kolenního kloubu. Tuto léčbu nabízí Nemocnice Na Homolce v Praze [12]. Úplnou novinkou je implantát vyrobený ze schránek korálů, který má obnovit chrupavku. Testují ho ve Fakultní nemocnici v Brně [8]. V zahraničí se problému náhrad chrupavčité tkáně věnuje například firma CartiHeal [2], v níž vyvinuli bezbuněčný implantát pro regeneraci hyalinní chrupavky.

Aby bylo možné nahradit poškozenou chrupavku kvalitní náhradou, je nutné znát mechanické vlastnosti zdravé chrupavky. Tato práce je brána jako úvod do problematiky modelování měkkých tkání a jejím cílem je nalezení parametrů reologického modelu, který nejlépe popisuje vlastnosti chrupavčité tkáně.

Práce obsahuje stručný rozbor stavby tkání a anatomický rozbor měkké tkáně chrupavky. Dále jsou v práci popsány základní reologické modely popisující

viskoelastické vlastnosti materiálu. Je zde objasněno, jakým způsobem se zjišťovala experimentální data potřebná pro tuto práci a jakým způsobem se dále používala při hledání optimálních parametrů. Následně se práce věnuje problematice optimalizace. Je zde popsáno, jaké metody byly použity k optimalizaci materiálových parametrů. Zpracování výsledků bylo provedeno v systému MATLAB [15]. Výsledky jsou v závěru práce zhodnoceny. Obrázky použité v této práci, jsou převzaty především z literatury [5], [13] a [14].

2. Obecná stavba tkání

Tkáň je soubor morfolologicky podobných buněk, které se specializují na stejnou nebo podobnou funkci. Každá tkáň se skládá z buněčné a mezibuněčné části. Za buněčnou část je považována buňka (*cellula*). Ta je základním stavebním a funkčním prvkem živého organismu. Tvoří ji jádro, cytoplazma obsahující buněčné organely a buněčná membrána, která buňku ohraničuje a zajišťuje její kontakt s vnějším okolím. Podle tvaru a vnitřní stavby se rozlišuje řada různých buněk, které se rozdělují podle druhu tkáně, v níž se vyskytují.

V mezibuněčné hmotě se nacházejí vlákna důležitá pro stavbu a funkci tkání. Jsou to aktin, elastin, resilin, abduktin a kolagen. Jejich mechanické vlastnosti se blíží vlastnostem elastického materiálu.

Aktin je látka, která patří mezi bílkoviny a má globulární strukturu. Vyskytuje se ve svalech, leukocytech, červených krvinkách a také v buňkách např. v endoteliálních buňkách [10]. Polymeruje v dlouhá vlákna - mikrofilamenta. Ta jsou součástí cytoskeletu buňky, zpevňují mezibuněčné spoje, mají svou funkci při dělení buněk a ve svalových buňkách jsou součástí myofibril [4].

Elastin je protein vláknitého tvaru a je nerozpustný ve vodě. Vlákno se skládá z jednoduchých aminokyselin [5]. Podílí se na stavbě cytoskeletu, je základní složkou některých typů vaziva a najdeme ho v mimobuněčném prostoru. Vyskytuje se u obratlovců, ve stěnách cév a žil poblíž srdce, v kůži, vazech, šlachách [10].

Resilin je pružný protein, který má podobné mechanické vlastnosti jako elastin, ale jeho chemické složení je odlišné. Nemá pravidelnou strukturu, ale tvoří ho náhodně stočené řetězce aminokyselin. Vyskytuje se ve tkáních členovců [10].

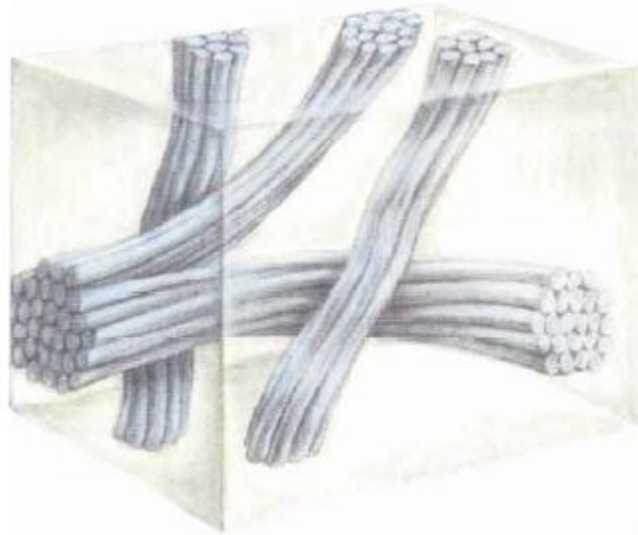
Abduktin je elastický protein, který má podobné vlastnosti jako elastin a resilin. Byl nalezen ve svalu u lastur. Je také obsažený v lidském těle např. ve svalech pohybujících srdečními chlopněmi [10].

Kolagen je bílkovina vláknitého tvaru nerozpustná ve vodě. Je základní stavební složkou pojivových tkání a mezibuněčné hmoty. Tvoří 25-30% všech proteinů v těle savců [10].

Tkáně se obecně dělí na epitelovou, pojivovou, svalovou, nervovou tkáň a krev [17]. Tato práce je zaměřena zejména na pojivovou tkáň, již tvoří buňky, mezibuněčná hmota a kolagenní a elastické fibrily. Mezi pojiva patří vazivo, chrupavka a kost. Další informace o tkáních lze najít například v [17],[4] a [10].

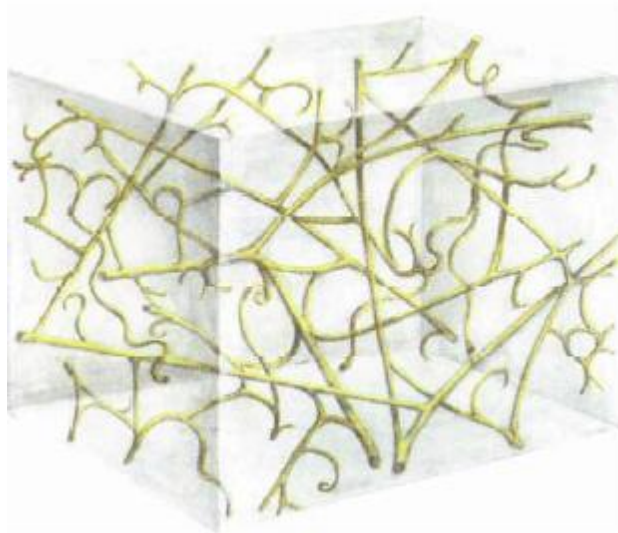
2.1. Chrupavka

Chrupavku (*cartilago, chondros*) obecně řadíme mezi měkké tkáně. Chrupavka je pojivová tkáň, která je poddajná. Tvoří ji buňky (chondrocyty) a průsvitná mezibuněčná hmota, která podle druhu chrupavky obsahuje kolagenní (obr. 2.1) a elastické (obr. 2.2) fibrily [5].



Obr. 2.1: Kolagenní fibrily [5].

Kolagenní fibrily mají složitou stavbu. Základní jednotkou je tropokolagen. Ten je tvořen trojitou levou šroubovicí polypeptidů [4]. Pět těchto šroubovic tvoří mikrofibrily, které vytvářejí subfibrily a ty pak tvoří různě dlouhé, příčně pruhované kolagenní fibrily s periodou 64 – 68 nm [13]. Velikost průřezu vlákna se pohybuje v rozmezí 1-20 μm [4]. Mechanické vlastnosti nezávisí na molekulách, ale na jejich složení do fibril, vláken a různých tkání. Obecně se kolagenní fibrily vyznačují velkou pevností. Při varu fibrily denaturují a vzniká kliš [4]. V současnosti je známo více než 20 typů kolagenu. Důležité jsou kolageny typu I, II, III a V, které vytvářejí vlákna. Kolagen typu I je nejvíce rozšířený, představuje přibližně 90% kolagenu v těle. Je obsažen například ve škáře kůže, kostech, šlachách, zubovině a vazivu. Kolagen typu II se vyskytuje v hyalinní a elastické chrupavce. Kolagen typu III se vyskytuje jen při embryonálním vývoji a později je nahrazen kolagenem typu I. Kolagen typu V najdeme v obalech plodu. Vlákna kolagenu podléhají minimální deformaci při zátěži tahem. Jejich pevnost se udává v rozmezí 50 - 100 MPa a modul pružnosti se udává řádově 10^3 MPa [13].

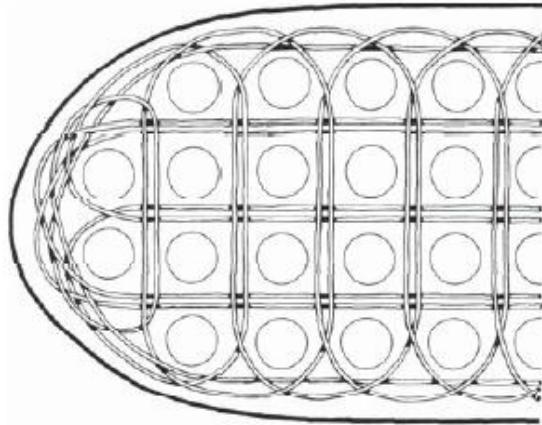


Obr. 2.2: Elastické fibrily [5].

Elastické fibrily jsou dlouhá vlákna elastinu, která se po ukončení zatěžování vrací do původních rozměrů. Jsou tenčí než kolagenní fibrily. Jejich tloušťka se pohybuje v rozmezí 1 - 4 μm [4]. Ale například v elastických vazech mohou mít tloušťku až 12 μm . Elastické fibrily se často větví a vytvářejí síť. Elastická tkáň je v čerstvém stavu nažloutlá. Až do rozmezí deformací 1,3 - 1,6 vykazují téměř lineární závislost mezi napětím a deformací, vykazují velmi malou hysterezi a modul pružnosti se udává přibližně 0,6 MPa [13]. Tyto vlastnosti se téměř zachovávají při zafixování např. ve formaldehydu. Zahřívání do 66 °C a následné ochlazování nemění mechanické vlastnosti [10]. Jsou také odolné vůči působení roztoků kyselin a zásad a vůči varu [5].

Chondrocyty jsou jednojaderné buňky. Při embryonálním vývoji pojivové tkáně se chondrocyty derivují z téže mezenchymové buňky a vytvářejí skupiny kulovitěho tvaru uzavřené ve společném pouzdru [4]. Svými výběžky se zanořují do okolní mezibuněčné hmoty. Fibrily obtáčí skupiny chondrocytů a vytváří tím *chondrony* (obr. 2.3), které zvyšují pevnost chrupavky vůči tlaku a tahu [5].

Na povrchu chrupavky je *perichondrium*, což je vazivová vrstva tvořená kolagenním vazivem, elastickými vlákny, cévami a nervy [4]. Perichondrium přechází do chrupavky plynule a zajišťuje její výživu, protože chrupavce chybí cévní zásoba. Z důvodu nedostatečného vyživení chrupavky často dochází k degeneraci chrupavky. Chrupavčitá tkáň sama o sobě není schopna regenerace. K nahrazení poničené části chrupavky dochází z perichondria, ze kterého se nejprve vytvoří vazivová chrupavka, která je pak přestavěna na chrupavčitou tkáň [4]. U kloubních chrupavek perichondrium chybí.



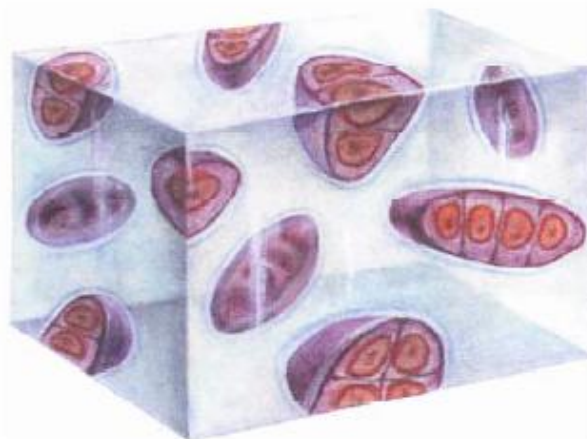
Obr. 2.3: Chondrony – Kolečka představují skupiny chondrocytů, které jsou obkrouženy fibrilami [5].

2.2. Druhy chrupavek

Chrupavky se rozdělují podle množství buněk, mezibuněčné hmoty a množství a druhu fibril. Rozeznává se chrupavka buněčná, hyalinní, elastická a vazivová.

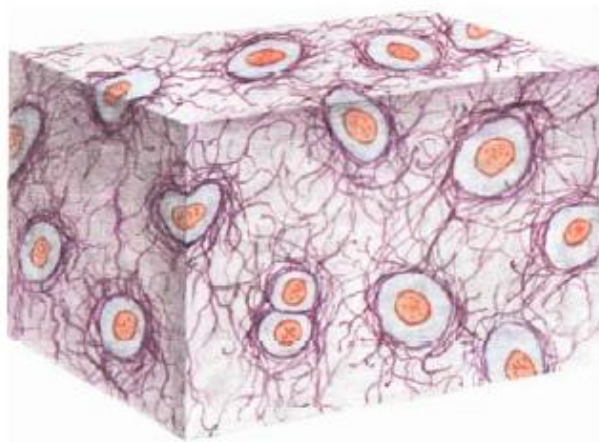
Chrupavka buněčná je chrupavka, která se vyskytuje u člověka v embryonálním období. Má velmi malé množství mezibuněčné hmoty. Vznikají z ní ostatní druhy chrupavky [5].

Chrupavka hyalinní (sklovitá) je složena z kulovitých nebo vejčitých chondrocytů (obr. 2.4). Mezibuněčná hmota dosahuje až 95% objemu chrupavky. Kolagenní fibrily jsou tenké a za normálních podmínek téměř neviditelné. Elastické fibrily se v chrupavce nevyskytují. V embryonálním vývoji tvoří hyalinní chrupavka největší část skeletu. V dospělosti tvoří kloubní chrupavky, úseky žeber, mečovité výběžek hrudní kosti, část nosní přepážky, chrupavky zevního nosu, chrupavky hrtanu, průdušnice a průdušek [5].



Obr. 2.4: Hyalinní chrupavka [5].

Chrupavka elastická je žlutobílá, obsahuje množství elastických a kolagenních fibril a buňky jsou rovnoměrně rozloženy (obr. 2.5). Proto je velmi pružná. Najdeme ji v hrtanové příklopce, ušním boltci a ve stěně drobných průdušek [5].



Obr. 2.5: Elastická chrupavka [5].

Chrupavka vazivová na obr. 2.6 je matně bílá, obsahuje velké množství silných kolagenních vláken, mezi kterými jsou chondrocyty. Díky velkému množství vláken je velmi pevná. Tvoří meziobratlové disky, nitrokloubní disky a menisky, je součástí styčných ploch některých kloubů [5].



Obr. 2.6: Vazivová chrupavka [5].

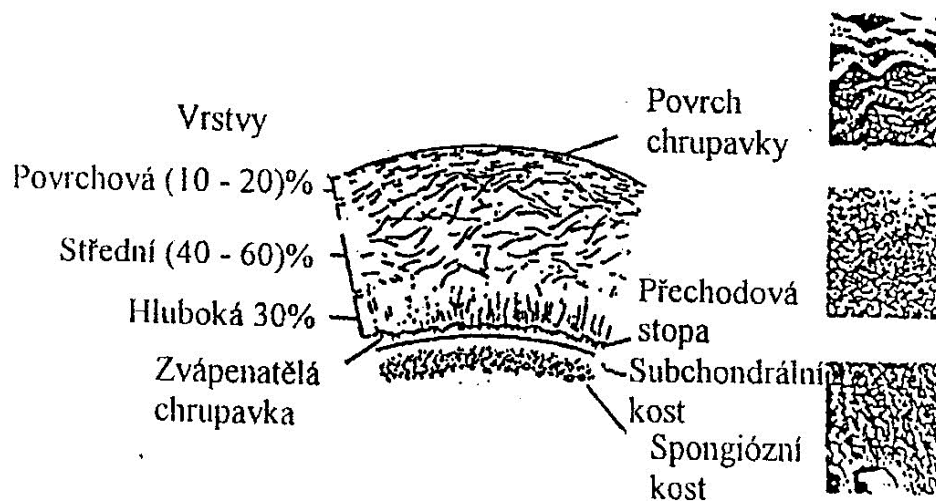
Tato práce je dále zaměřena pouze na kloubní chrupavku, která je typem hyalinní chrupavky.

2.3. Kloubní chrupavka

Kloub je definovaný jako pohyblivé, dotykové spojení dvou nebo více kostí. Styčné plochy na kosti jsou pokryty kloubní chrupavkou. U většiny kloubů se rozlišuje obvykle konvexní kloubní hlavice a kloubní jamka, která je plochá až konkávní [5]. Celý kloub je uložen v kloubním pouzdru, které je tvořeno zevní fibrózní a vnitřní synoviální membránou. Synoviální membrána produkuje do kloubní dutiny synoviální tekutinu, která funguje jako mazivo. *Synoviální tekutina* je dialyzát z krevní plasmy doplněný vysoce polymerovanou kyselinou hyaluronovou. Kloubní chrupavka je vyživována z této tekutiny difúzí [5].

Mezibuněčná hmota kloubní chrupavky se skládá z vody, jež zabírá 65-85% objemu chrupavky [13], glykosaminoglykanů (kyselina hyaluronová, chondroitinsulfát, keratansulfát typu II), proteoglykanů (aggrecan), glykoproteinů (chondronektin) a z kolagenních fibril typu II [4]. V mezifibrilárním prostoru kloubní chrupavky se nachází *submikroskopické otvory* [6] o velikosti 3 – 6,5 nm [13], kterými při deformaci chrupavky dochází k vytlačování synoviální tekutiny. Zároveň roste hustota mezibuněčné hmoty. Po odlehčení je synoviální tekutina nasávána zpět do chrupavky. Tato deformace chrupavky je označována jako pružná [6].

Výška vrstvy kloubní chrupavky závisí na tlaku, kterému je plocha kloubu za běžných fyziologických podmínek vystavena. Čím větší je v místě působení tlak, tím silnější je chrupavka. Výška chrupavky se udává v rozmezí 0,5 – 6 mm [5]. Vlastnosti chrupavky závisí na tloušťce jednotlivých vrstev, ze kterých se chrupavka skládá. Vrstvy se v [13] rozlišují podle úpravy vláken a chondrocytů. Chrupavku pokrývá mírně zvlněná *povrchová vrstva*. Je nejslabší, tvoří 10 – 20% objemu chrupavky. Tvoří ji podlouhlé chondrocyty, které jsou obklopeny rovnoběžně s povrchem orientovanými svazky kolagenních fibril. Obsahuje málo proteoglykanů. *Přechodová* (střední) *vrstva* je nejobjemnější. Tvoří 40 – 60% objemu chrupavky. Chondrocyty mají kulový tvar a jsou obklopeny náhodně uspořádanými kolagenními fibrilami. *Hluboká* (radiální) *vrstva* tvoří přibližně 30% objemu. Fibrily a sloupce chondrocytů jsou orientovány kolmo k povrchu chrupavky. Poslední vrstva chrupavky, která přechází v kost, je označována jako *zvápenatělá vrstva*. Všechny vrstvy na sebe přímo navazují (obr. 2.7).



Obr. 2.7: Vrstvy chrupavky [13].

Při pohybu dochází v kloubu k valení v kombinaci se smykem. Hlavní funkcí kloubní chrupavky je tlumení rázů a vibrací, rozložení tlakového zatížení na větší plochu a snížení tření mezi styčnými plochami v kloubním spojení. Koeficient tření kloubních ploch je snižován chrupavkou a synoviální tekutinou [9].

Z hlediska biomechaniky je kloubní chrupavka považována za viskoelastický materiál. Kolagenní vlákna v mezibuněčné hmotě vytvářejí síť pro proteoglykany, které na sebe vážou velké množství vody. Pro prostorové uspořádání své molekuly a schopnost vázat vodu, jsou proteoglykany v publikaci [6] označovány za nositele viskoelastických vlastností chrupavky.

3. Mechanické vlastnosti měkkých tkání

Měkkými tkáněmi se rozumí tkáně mimo kost (např. vazivo, šlachy, svaly). Mají obecně velmi složité mechanické chování, které je dáno vnitřní strukturou tkáně. Mechanické vlastnosti tkání závisí na celé řadě faktorů, jako je například věk, pohlaví, zdravotní stav, tělesná i okolní teplota, historie zatěžování tkáně a jiné. Měkké tkáně jsou považovány za nelineární, nehomogenní a viskoelastický materiál. Pro viskoelastický materiál závisí vztah mezi napětím a deformací na čase. Věda, která popisuje mechanické vlastnosti látek a vztahy mezi napětím, deformacemi a rychlostí deformace, se nazývá reologie. Tato práce slouží jako úvod do problematiky popisu mechanických vlastností chrupavky. Chrupavka se chová jako nelineární viskoelastický materiál, ovšem tato práce se v dalších kapitolách zabývá pouze lineární viskoelasticitou.

3.1. Základní reologické modely

Pro popis elastických materiálů se používá Hookeův zákon. Ideálně elastický materiál představuje *Hookeovo kontinuum*, které má lineární závislost mezi napětím σ a deformací ε

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.1)$$

kde E je modul pružnosti v tahu příslušné látky, který se udává v jednotkách $[Pa]$. Hookeovo kontinuum se označuje symbolem pružiny (obr. 3.1). Lineární pružina se totiž při zatížení okamžitě zdeformuje a po uvolnění vrací zpět na svou původní délku.



Obr. 3.1: Hookeovo kontinuum.

Viskózní materiály lze popsat modelem *Newtonovova kontinua*, které má lineární závislost mezi napětím σ a rychlostí deformace $\frac{d\varepsilon}{dt}$

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (3.2)$$

kde η je dynamická vazkost kapaliny, která se udává v jednotkách $[Pa \cdot s]$. Představuje ideální viskózní materiál, který si můžeme představit jako tlumič (obr. 3.2). V tomto případě při zatížení deformace postupně narůstá a po odlehčení tlumič zůstává deformovaný.



Obr. 3.2: Newtonovo kontinuum.

3.2. Vlastnosti viskoelastických materiálů

Kombinací základních modelů, uvedených v předchozí kapitole, je možné sestavit složitější modely, pomocí kterých lze modelovat viskoelastické materiály. Při zkoumání a popisu viskoelastických materiálů je výhodné použít skokové zatížení nebo skokové napětí pro vyloučení vlivu času.

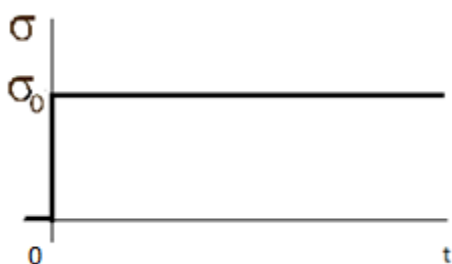
Pozvolný nárůst deformace za stálého napětí se označuje jako *creep* neboli tečení. Za předpokladu, že napětí závislé na čase je popsáno funkcí

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t), \quad (3.3)$$

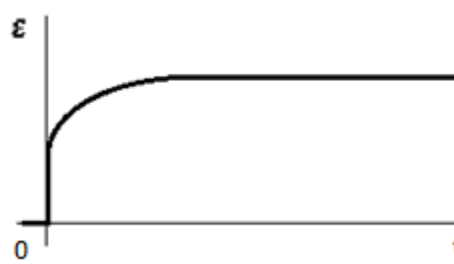
kde σ_0 je velikost napětí a $H(t)$ je Heavisideova funkce, pak odezva na toto napětí je

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t), \quad (3.4)$$

kde $J(t)$ je creepová funkce. U lineárních viskoelastických materiálů creepová funkce nezávisí na velikosti napětí. Na obrázku 3.3 je vidět předepsané napětí, pro které měříme časovou závislost deformace, která je vidět na obrázku 3.4.



Obr. 3.3: Závislost $\sigma(t)$ při creepu.



Obr. 3.4: Závislost $\varepsilon(t)$ při creepu.

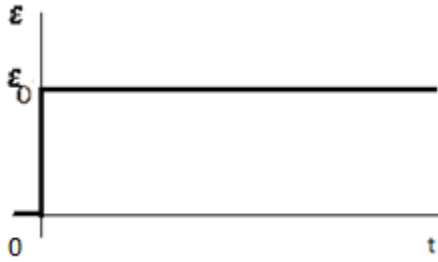
Dalším jevem, který se pozoruje při zkoumání viskoelastických materiálů, je *relaxace*. Ta se projevuje postupným poklesem napětí při stálé deformaci. Funkce deformace se předpokládá ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot H(t), \quad (3.5)$$

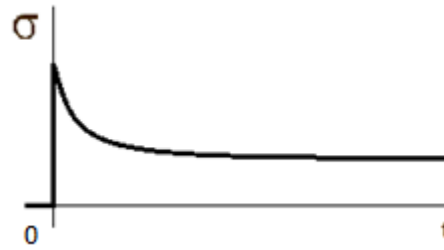
kde ε_0 je velikost deformace. Odezva na stálou deformaci je

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot E(t), \quad (3.6)$$

kde $E(t)$ je relaxační funkce. Relaxační funkce není u lineárních viskoelastických materiálů závislá na velikosti deformace. Obrázek 3.5 ukazuje deformaci, která byla předepsána. Na obrázku 3.6 je vidět časová závislost napětí, kterou naměříme při relaxaci.



Obr. 3.5: Závislost $\varepsilon(t)$ při relaxaci.



Obr. 3.6: Závislost $\sigma(t)$ při relaxaci.

3.3. Jednoduché lineární reologické modely

Mezi nejjednodušší lineární reologické modely popisující viskoelastické materiály patří Maxwellův a Voigt-Kelvinův model.

3.3.1. Maxwellův model

Model vzniká sériovým zapojením Hookeova a Newtonova kontinua (obr. 3.7).



Obr. 3.7: Maxwellův model.

Pro Hookeovo kontinuum platí vztah (3.1), ze kterého se vyjádří časová derivace deformace jako

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (3.7)$$

Newtonův element je popsán vztahem (3.2). V obou elementech je stejné napětí, ale celková deformace je dána součtem deformací od jednotlivých elementů, tedy

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.8)$$

Vynásobením rovnice (3.8) viskozitou η přejde vztah mezi napětím a deformací do tvaru:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.9)$$

Poměr $\frac{\eta}{E}$ lze označit jako t_R udávaný v sekundách.

$$\sigma + t_R \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.10)$$

Řešením rovnice (3.10) pro časový průběh napětí při konstantní deformaci kontinua lze získat relaxační funkci [14] ve tvaru

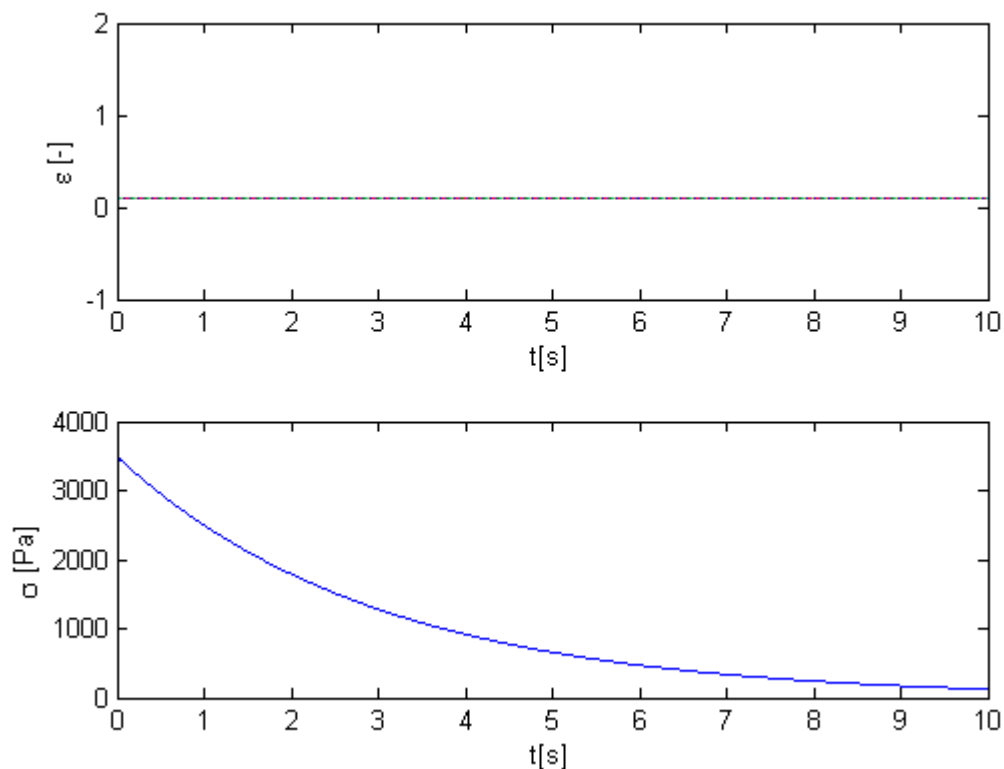
$$E(t) = E_0 \cdot e^{\frac{-t}{t_R}}, \quad (3.11)$$

kde t_R je relaxační doba. Relaxační doba vyjadřuje čas, za který počáteční napětí σ_0 klesne na hodnotu $\frac{\sigma_0}{e}$, kde e je základ přirozeného logaritmu. Na obrázku 3.8 je vidět průběh relaxace napětí jako odezvy na zadané zatížení. S rostoucím časem do nekonečna se hodnota napětí blíží k nule.

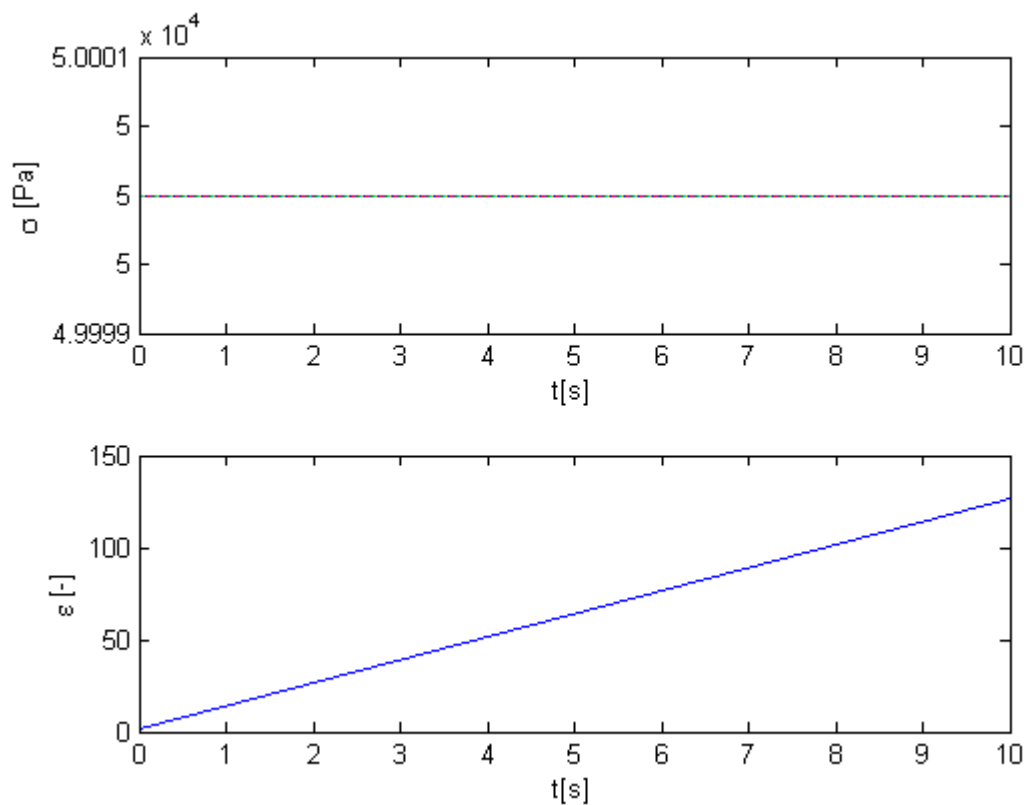
Řešením rovnice (3.10) pro časový průběh deformace při konstantním zatížení lze získat creepovou funkci [14] ve tvaru

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}. \quad (3.12)$$

Na obrázku 3.9 je vidět průběh creepové funkce jako odezvy na zadané zatížení. Velikost deformace s rostoucím časem neomezeně lineárně narůstá.



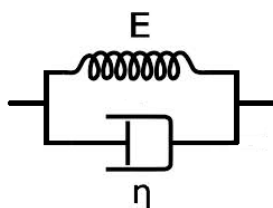
Obr. 3.8: Zatížení (horní graf) a relaxace (spodní graf) Maxwellova modelu.



Obr. 3.9: Zatížení (horní graf) a creep (spodní graf)Maxwellova modelu.

3.3.2. Voigt-Kelvinův model

Model vzniká paralelním zapojením Hookeova a Newtonova kontinua (obr. 3.10).



Obr. 3.10: Voigt-Kelvinův model.

Pro Hookeovo kontinuum platí vztah (3.1), Newtonův element je popsán vztahem (3.2). V obou elementech je stejná deformace, ale celkové napětí je dáno součtem napětí od jednotlivých elementů, tedy

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.13)$$

Jednoduchou úpravou přejde rovnice (3.13) na vztah (3.14), kde je poměr $\frac{\eta}{E}$ označen jako $t_c[s]$.

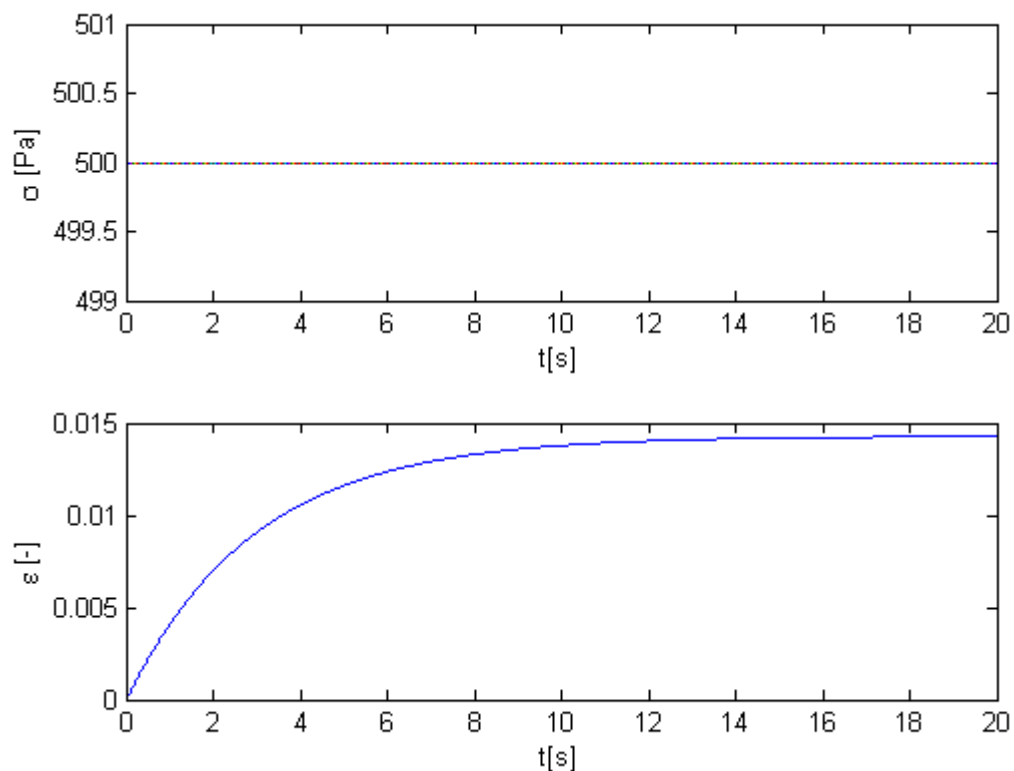
$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon + t_c \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.14)$$

Řešením rovnice (3.14) pro deformaci dostáváme creepovou funkci [14]

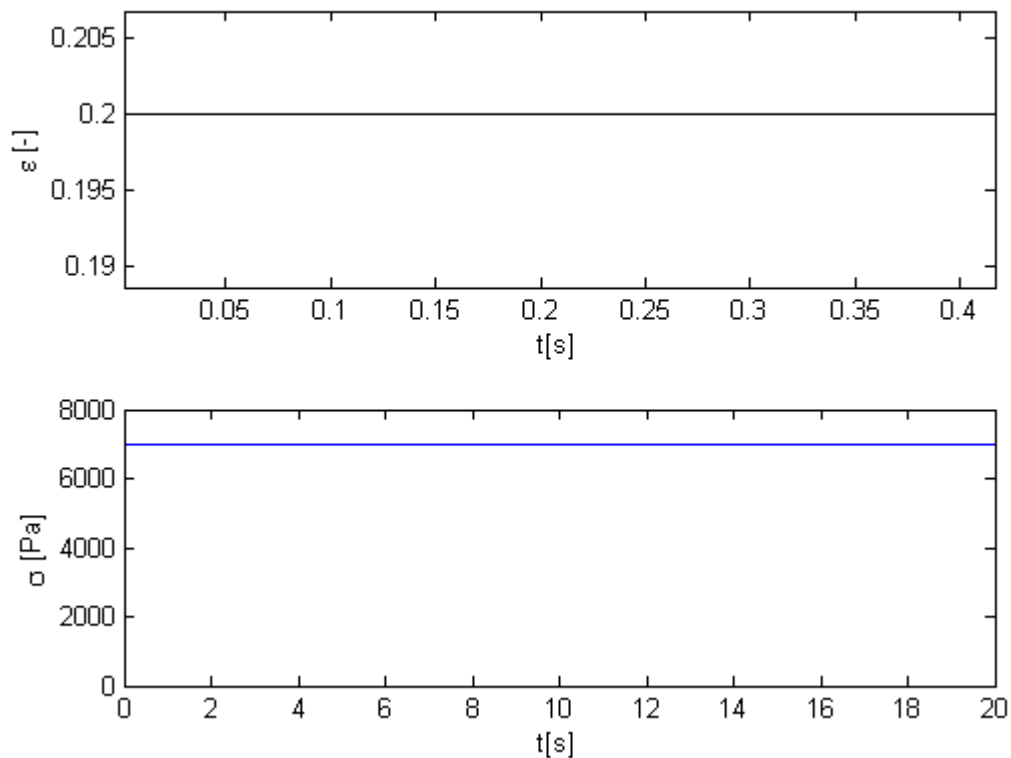
$$J(t) = \frac{1}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{t_c}}\right), \quad (3.15)$$

kde t_c je retardační doba. Retardační doba vyjadřuje čas, při kterém hodnota napětí σ_0 dosáhne hodnoty $\frac{\sigma_0}{E} - \frac{\sigma_0}{Ee}$, kde e je základ přirozeného logaritmu. Na obrázku 3.11 je vidět průběh creepové funkce jako odezvy na zadané zatížení. S rostoucím časem do nekonečna se hodnota napětí blíží k hodnotě $\frac{\sigma_0}{E}$.

Relaxační funkce je v případě Voigt-Kelvinova modelu konstantní $E(t) = E$ pro $t > 0$, z čehož plyne, že Voigt-Kelvinův model nerelaxuje. Tento jev je znázorněn na obrázku 3.12.



Obr. 3.11: Zatížení (horní graf) a creep (spodní graf) Voigt-Kelvinova modelu.



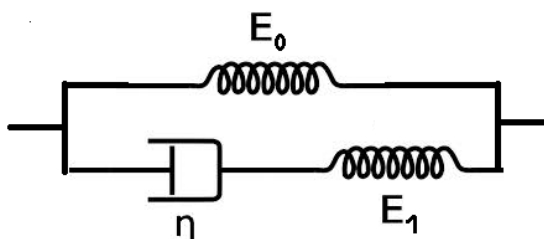
Obr. 3.12: Zatížení (horní graf) a relaxace (spodní graf) Voigt-Kelvinova modelu.

3.4. Relaxace složitějších modelů

V následující kapitole je popsána relaxace složitějších modelů viskoelastických materiálů. Pro popis viskoelastických vlastností byl vybrán Kelvin-Zenerův model a lineární model s pěti parametry.

3.4.1. Kelvin-Zenerův model

Tento model vzniká paralelním zapojením Maxwellova modelu a Hookeova kontinua (obr. 3.13).



Obr. 3.13: Kelvin-Zenerův model.

V obou větvích modelu je stejná deformace

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1. \quad (3.16)$$

Deformace Maxwellova modelu je vyjádřena jako

$$E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{t_R}, \quad (3.17)$$

kde t_R je relaxační doba. Deformace Hookeova kontinua je vyjádřena jako

$$E_0 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_0}{dt}. \quad (3.18)$$

Výsledné napětí σ je dáno součtem napětí σ_0 na větvi s Hookeovým kontinuem a napětí σ_1 na větvi s Maxwellovým modelem, tedy

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1. \quad (3.19)$$

Dosazením vztahů pro deformace jednotlivých větví do rovnice (3.15) vznikne rovnice

$$\frac{d\varepsilon}{dt} (E_1 + E_0) = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{t_R} + \frac{d\sigma_0}{dt}. \quad (3.20)$$

Po přičtení vztahu (3.1), který je vydělen relaxační dobou t_R , k oběma stranám rovnice (3.20) a s použitím rovnice (3.19) vznikne rovnice popisující Kelvin-Zenerův model [14]

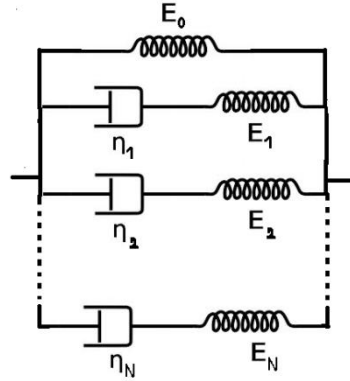
$$\frac{d\varepsilon}{dt} (E_1 + E_0) + \frac{\varepsilon E_0}{t_R} = \frac{\sigma}{t_R} + \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3.21)$$

Řešením rovnice (3.21) pro napětí lze vyjádřit relaxační funkci [14] ve tvaru

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{\frac{-t}{t_R}}. \quad (3.22)$$

3.4.2. Obecný lineární model

Model na obrázku 3.14 vzniká postupným paralelním připojením Maxwellova elementu k Hookeovu kontinuu.

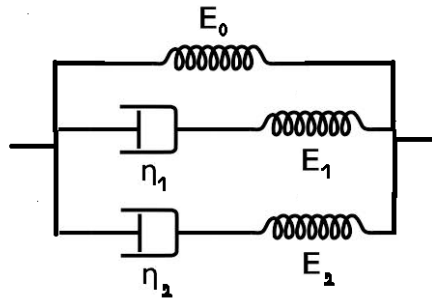


Obr. 3.14: Obecný lineární model.

Relaxační funkce takového modelu se udává ve tvaru

$$E(t) = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n e^{\frac{-t}{t_{Rn}}}, \quad (3.23)$$

kde N je počet větví Maxwellova elementu.



Obr. 3.15: Model s pěti parametry.

V práci bude vyzkoušen model s pěti parametry (obr. 3.15), pro který je používána relaxační funkce ve tvaru

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{\frac{-t}{t_{R1}}} + E_2 e^{\frac{-t}{t_{R2}}}, \quad (3.24)$$

kde t_{R1} a t_{R2} jsou relaxační doby jednotlivých větví.

4. Identifikace materiálových vlastností

Pro zjištění optimálních parametrů reologického modelu bylo zapotřebí sestavit funkci, která by se následně optimalizovala. Tato funkce (4.1) byla stanovena jako suma kvadrátů rozdílu teoreticky predikovaného napětí a napětí získaného z experimentu.

$$y = \sum_i (\sigma_{an_i} - \sigma_{exp_i})^2 \quad (4.1)$$

Experiment a způsob jakým byla získána data je popsán níže. Stejně tak je dále uvedeno, jakým způsobem lze spočítat napětí na základě matematického modelu.

4.1. Experimentální měření vlastností chrupavky

Pro experiment byl k dispozici vzorek chrupavky z lidského kyčelního kloubu. Tento vzorek byl před experimentem a v průběhu experimentu uchován ve fyziologickém roztoku, aby se předešlo vyschnutí chrupavky, protože ta by pak měla zcela jiné vlastnosti. Před experimentem byl vzorek přeměřen a vyfotografován. Průměr a výška vzorku byly stanoveny z průměrných naměřených hodnot a to průměr $d = 7,31 \text{ mm}$ a výška $h = 1,657 \text{ cm}$. Následně byl vzorek v misce umístěn do přístroje, ve kterém byl pak cyklicky zatěžován. Nejprve se čelisti měřicího stroje nastavily na hodnotu průměrné výšky vzorku a takto připravený vzorek se nechal 30 minut relaxovat. Těchto 30 minut v dalším používání experimentálních dat neuvažujeme. Následně byly předepsány posuvy tak, aby proběhlo cyklické zatěžování. Tyto předepsané posuvy jsou zobrazeny na obr. 4.1. To probíhalo tak, že se každých 10 minut vzorek zatížil o 5% své původní výšky až do velikosti 50% původní výšky. Protože mechanismus trhačího stroje vykazuje při měření určitou vůli, měřily se zároveň externím extenzometrem skutečné posuvy. Skutečné posuvy (obr. 4.2), které proběhly, se zaznamenaly do vektoru $\Delta x [\text{mm}]$. Zároveň se zaznamenávaly hodnoty síly $F [\text{N}]$ a času $t [\text{s}]$. Tyto hodnoty byly následně použity pro stanovení experimentálního napětí a experimentální deformace. Tento experiment provedla slečna Aframová a v její bakalářské práci je experiment popsán podrobněji [1].

Experimentální napětí bylo vypočteno jako

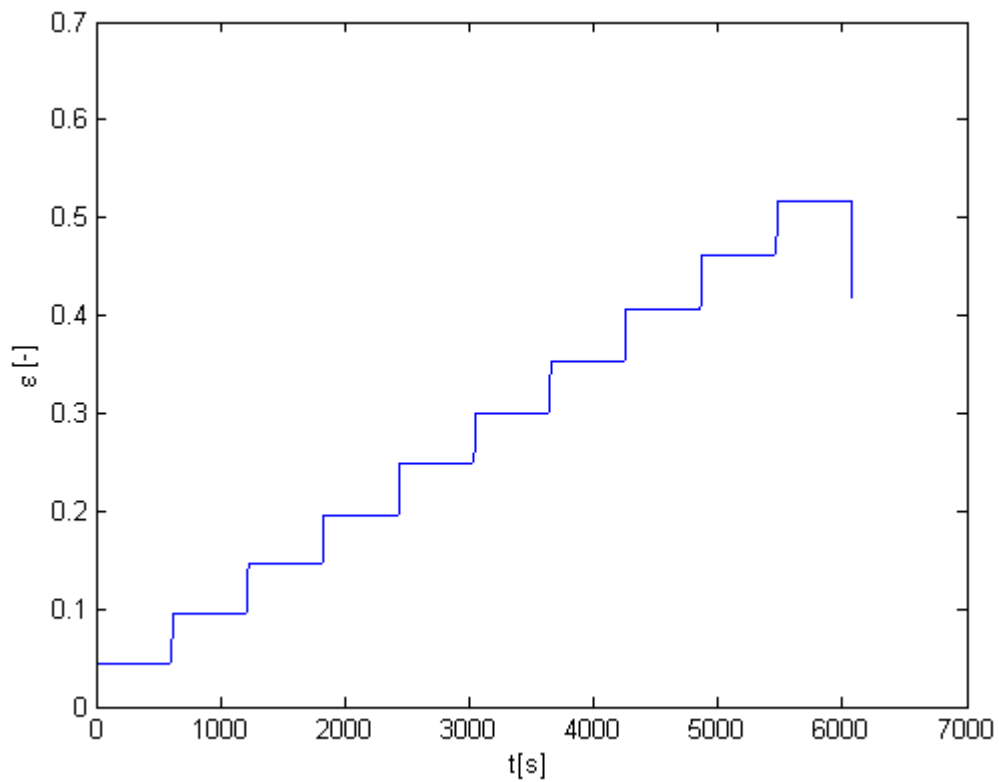
$$\sigma_{exp} = \frac{F}{A} [\text{Pa}], \quad (4.2)$$

kde $F [\text{N}]$ je síla, kterou byl vzorek zatěžován a $A [\text{m}^2]$ je plocha vzorku před zatížením. Časový průběh napětí (obr. 4.3) ukazuje, že chrupavčitá tkáň se chová nelineárně. I přesto, že časový průběh napětí (obr. 4.3) ukazuje, že chrupavčitá tkáň se chová nelineárně, bude se práce zabývat použitelností lineárních modelů viskoelastického kontinua (viz výše) k modelování chrupavky.

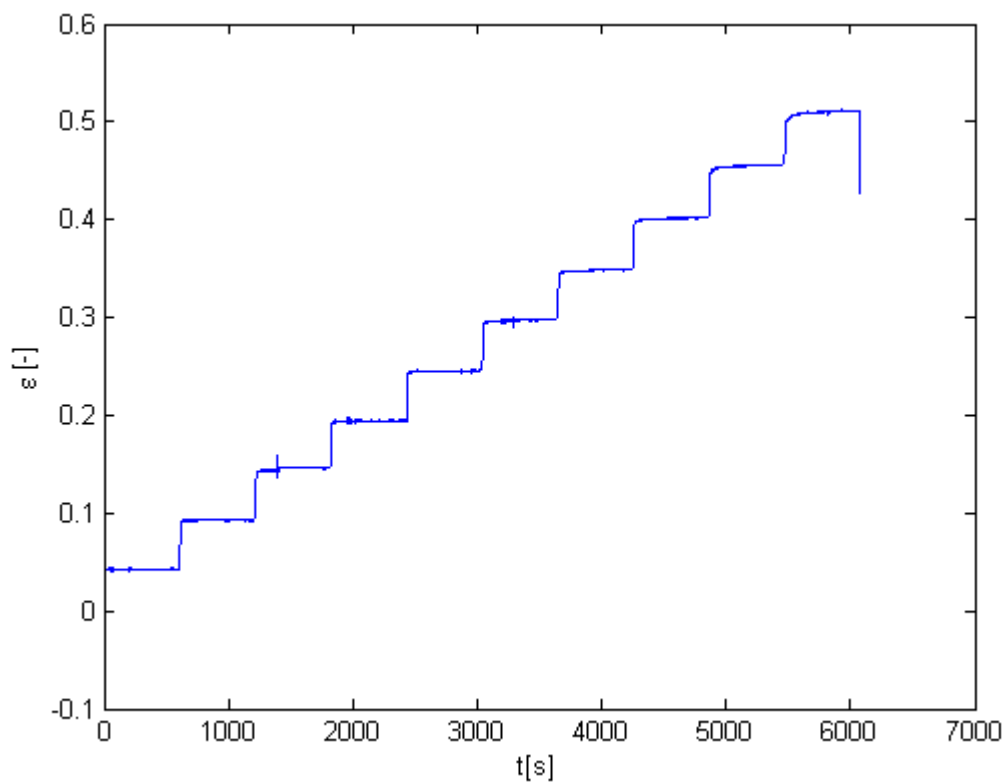
Deformace byla stanovena jako

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{h}. \quad (4.3)$$

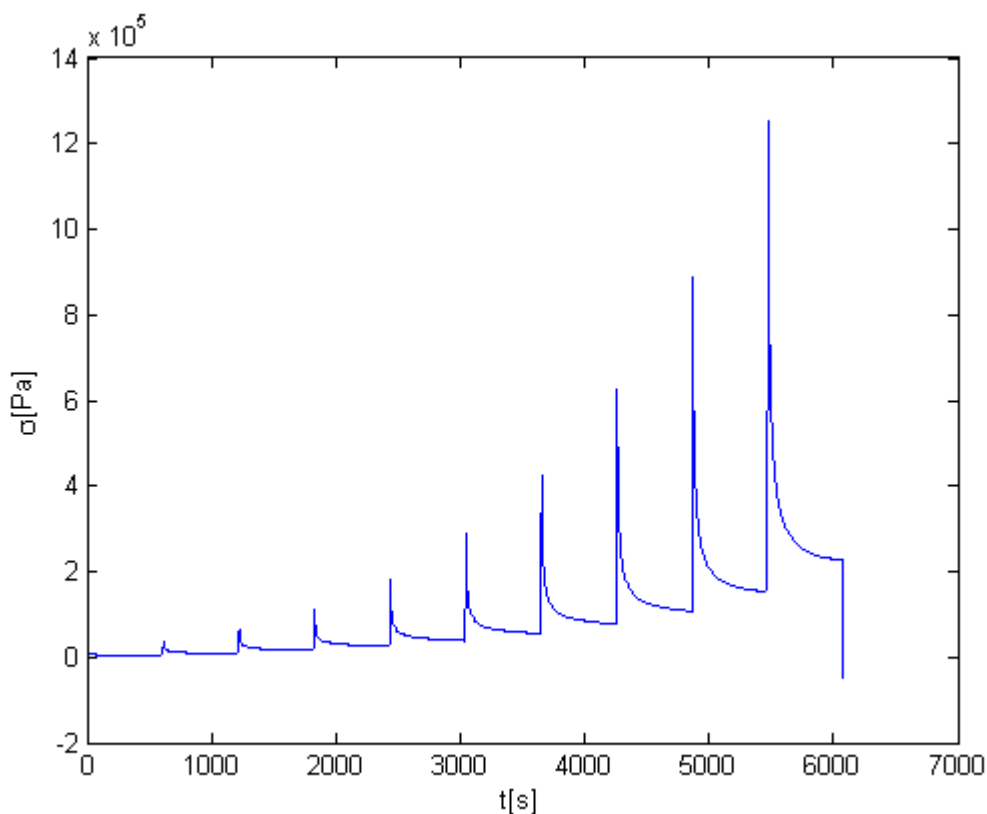
Tyto hodnoty deformace ε a experimentálního napětí σ_{exp} spolu s vektorem času t byly vstupními parametry do programu, který provádí numerický výpočet napětí σ_{an} dle daného matematického modelu a vyhodnocuje optimalizační funkci y .



Obr. 4.1: Předepsané posuvy.



Obr. 4.2: Skutečné posuvy.

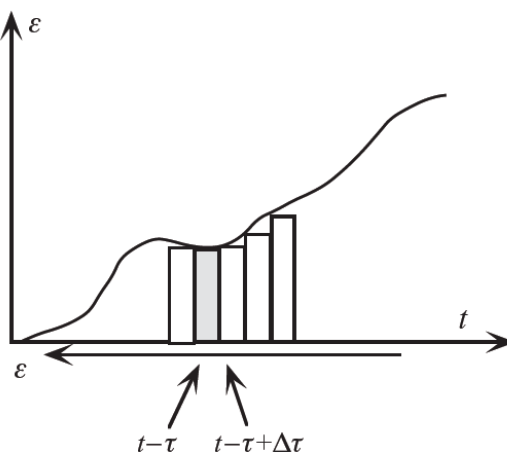


Obr. 4.3: Experimentálně naměřené napětí.

4.2. Analytické stanovení napětí

K vytvoření konstitutivní rovnice pro lineární materiály, která vyjadřuje odezvu materiálu na libovolnou historii zatěžování, se využívá Boltzmannův princip superpozice [14], který říká, že celkový důsledek složených příčin je součet důsledků jednotlivých příčin. Tento princip je vyjádřením linearity.

Libovolný časový průběh deformace lze aproximovat jako soubor okamžitě po sobě jdoucích pulsů (obr. 4.4).



Obr. 4.4: Rozložení libovolné deformace na pulsy [14].

Pomocí vztahu (4.3) se vyjádří puls deformace, který se uvažuje od času $t - \tau$ do času $t - \tau + \Delta\tau$, kde τ je časová proměnná a $\Delta\tau$ je délka uvažovaného pulsu.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau)[H(t - \tau) - H(t - \tau + \Delta\tau)], \quad (4.4)$$

Přírůstek napětí v čase t je v závislosti na pulsu deformace vyjádřen jako

$$d\sigma(t) = \varepsilon(\tau)[E(t - \tau) - E(t - \tau + \Delta\tau)]. \quad (4.5)$$

Protože platí $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{[E(t-\tau+\Delta\tau)-E(t-\tau)]}{\Delta\tau} = \frac{dE(t-\tau)}{d\tau}$, může se vztah (4.4) přepsat do tvaru

$$d\sigma(t) = -\varepsilon(\tau) \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4.6)$$

Celá historie napětí je pak složena z takových pulsů. Napětí v čase t je rovno součtu výsledných napětí z každého pulsu. Pokud se předpokládá časový krok $\Delta\tau$ dostatečně malý, pak v limitě konverguje vztah (4.5) na integrál

$$\sigma(t) = -\int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau + E(0)\varepsilon(t). \quad (4.7)$$

Poslední člen $E(0)\varepsilon(t)$ z rovnice (4.6) vyjadřuje odezvu na aktuální deformaci materiálu. Integrací po částech se obdrží výsledná forma Boltzmannova integrálu, který vyjadřuje konvoluci

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (4.8)$$

kde t je čas a τ je časová proměnná integrace.

4.3. Úprava integrálu

Pomocí vztahu (4.8) lze vyjádřit napětí σ_{an} pro libovolný model lineárního viskoelastického materiálu, tj. jak pro Kelvin-Zenerův model, tak pro model s pěti parametry, které jsou definované v kapitole 3. Relaxační funkce pro Kelvin-Zenerův model se předpokládá ve tvaru (3.22) a pro pětiparametrový model ve tvaru (3.24). Pro urychlení numerického výpočtu integrálu v systému MATLAB [15], se postupně oba dva integrály pro výpočet napětí σ_{an} upraví (viz kapitoly 4.3.1. a 4.3.2.).

4.3.1. Integrace pro Kelvin-Zenerův model

Integrál (4.8) se přepíše tak, že v i -tém časovém kroku, kterému odpovídají hodnoty deformace ε_i , je napětí v $i + 1$ kroku vyjádřeno jako

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = \int_0^{t_{i+1}} \left(E_0 + E_1 e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \right) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.9)$$

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + E_1 \left[\int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \right]. \quad (4.10)$$

Následně se označí délka časového kroku jako $-\Delta t_i = t_i - t_{i+1}$, která se dosadí do vztahu (4.10).

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + e^{\frac{\Delta t_i}{t_R}} E_1 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.11)$$

Následuje označení vnitřních proměnných $\sigma_{n1}(t_i)$ a $\Delta\sigma_{n1}(t_i)$.

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + e^{\frac{\Delta t_i}{t_R}} \sigma_{n1}(t_i) + \Delta\sigma_{n1}(t_i). \quad (4.12)$$

Vztahy pro výpočet vnitřních proměnných $\sigma_{n1}(t_i)$ a $\Delta\sigma_{n1}(t_i)$ se odvodí obdobným způsobem. Napětí σ_{n1} se vyjádří v $i + 1$ kroku jako

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = E_1 \int_0^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4.13)$$

Do vztahu (4.13) se dosadí délka kroku $-\Delta t_i = t_i - t_{i+1}$ a následně se celý vztah upraví na tvar (4.15).

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{t_R}} E_1 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_R}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.14)$$

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{t_R}} \sigma_{n1}(t_i) + \Delta\sigma_{n1}(t_i). \quad (4.15)$$

Tím pádem je nutné vždy numericky vyčíslit pouze přírůstek $\Delta\sigma_{n1}(t_i)$, který se aproximuje lichoběžníkovým pravidlem za předpokladu konstantních derivací na intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$.

Integrál tedy přechází na tvar

$$\Delta\sigma_{n1}(t_i) \approx \frac{E_1(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{2} \left(1 + e^{\frac{\Delta t_i}{t_R}} \right). \quad (4.16)$$

Výsledné napětí je pak dáno vztahem (4.12), kde hodnota σ_{n1} je vypočtena dle vztahu (4.15) a $\Delta\sigma_{n1}$ je aproximováno vztahem (4.16). Tento princip výpočtu napětí je využit v programu *KelvinZener.m* (viz příloha č.1).

4.3.2. Integrace pro model s pěti parametry

Postup zjednodušení integrálu (4.8) je totožný. Pouze se za relaxační funkci dosadí již odvozený vztah (3.24). Napětí v $i + 1$ kroku je pak vyjádřeno jako

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = \int_0^{t_{i+1}} \left(E_0 + E_1 e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} + E_2 e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \right) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + E_1 \left[\int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \right] + \\ + E_2 \left[\int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Následuje označení délky časového kroku jako $-\Delta t_i = t_i - t_{i+1}$ a dosazení do vztahu (4.18).

$$\begin{aligned} \sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R1}}} E_1 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + \\ + e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R2}}} E_2 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.19)$$

Provede se označení vnitřních proměnných $\sigma_{n1}(t_i)$, $\Delta\sigma_{n1}(t_i)$, $\sigma_{n2}(t_i)$ a $\Delta\sigma_{n2}(t_i)$.

$$\sigma_{an}(t_{i+1}) = E_0 \varepsilon(t_{i+1}) + e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R1}}} \sigma_{n1}(t_i) + \Delta\sigma_{n1}(t_i) + e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R2}}} \sigma_{n2}(t_i) + \Delta\sigma_{n2}(t_i) \quad (4.20)$$

Vztahy pro výpočet vnitřních proměnných $\sigma_{n1}(t_i)$ a $\Delta\sigma_{n1}(t_i)$ se odvodí obdobným způsobem jako v předchozí kapitole. Napětí σ_{n1} se vyjádří v $i + 1$ kroku jako

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = E_1 \int_0^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.21)$$

Do vztahu (4.21) se dosadí délka kroku $-\Delta t_i = t_i - t_{i+1}$ a následně se celý vztah upraví na tvar (4.23).

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R1}}} E_1 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R1}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.22)$$

$$\sigma_{n1}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R1}}} \sigma_{n1}(t_i) + \Delta\sigma_{n1}(t_i) \quad (4.23)$$

Pro druhou vnitřní proměnnou σ_{n2} je postup odvození stejný. Napětí σ_{n2} se vyjádří v $i + 1$ kroku jako (4.24). Následně se zavede délka kroku $-\Delta t_i = t_i - t_{i+1}$ a vztah se upraví do podoby (4.26).

$$\sigma_{n2}(t_{i+1}) = E_2 \int_0^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.24)$$

$$\sigma_{n2}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{t_{R2}}} E_2 \int_0^{t_i} e^{\left(\frac{\tau-t_i}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + E_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\left(\frac{\tau-t_{i+1}}{t_{R2}}\right)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.25)$$

$$\sigma_{n2}(t_{i+1}) = e^{\frac{\Delta t_i}{\tau_{R2}}} \sigma_{n2}(t_i) + \Delta \sigma_{n2}(t_i) \quad (4.26)$$

Tentokrát se musí aproximovat dva přírůstky a to $\Delta \sigma_{n1}(t_i)$ a $\Delta \sigma_{n2}(t_i)$.

$$\Delta \sigma_{n1}(t_i) \approx \frac{E_1(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{2} \left(1 + e^{\frac{\Delta t_i}{\tau_{R1}}} \right) \quad (4.27)$$

$$\Delta \sigma_{n2}(t_i) \approx \frac{E_2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{2} \left(1 + e^{\frac{\Delta t_i}{\tau_{R2}}} \right) \quad (4.28)$$

Výsledné napětí je pak dáno vztahem (4.20). Hodnota σ_{n1} je vypočtena dle vztahu (4.23) a $\Delta \sigma_{n1}$ je aproximováno vztahem (4.27). Stejně tak je hodnota σ_{n2} vypočtena dle vztahu (4.26) a $\Delta \sigma_{n2}$ je aproximováno vztahem (4.28). Tento princip výpočtu napětí je využit v programu *model2.m* (viz příloha č. 5).

5. Optimalizace

Optimalizací se rozumí nalezení optima (maxima či minima) cílové funkce ψ , která popisuje zadaný problém. Hledají se optimální parametry modelu, při kterých cílová funkce ψ nabývá globálního extrému. Obecně lze úlohu optimalizace převést na úlohu hledání minima, neboť platí

$$\max \psi(\mathbf{x}) = - \min[-\psi(\mathbf{x})] \quad (5.1)$$

Úloha nalezení globálního minima je ve většině případů náročná, často stačí řešit úlohu nalezení lokálního minima cílové funkce na předem definované oblasti. V bodě lokálního minima platí

$$\text{grad}\psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.2)$$

Jinými slovy bod \mathbf{x} je stacionární bod funkce ψ [16]. Pokud je funkce dvakrát diferencovatelná v bodě \mathbf{x} a bod \mathbf{x} je bodem lokálního minima, pak platí, že Hessova matice

$$H = \left[\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial y_j} \right] \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

je pozitivně semidefinitní [16].

5.1. Numerické metody optimalizace

Numerické metody optimalizace rozdělujeme podle řádu derivací, které se v metodě používají [11]. Metody nultého řádu nepotřebují výpočet derivací. Tyto metody pouze srovnávají funkční hodnoty $\psi(\mathbf{x})$ v okolních bodech. Mezi metody nultého řádu patří metody souřadnicové komparace, simplexové metody a stochastické metody. Metody prvního řádu potřebují derivaci prvního řádu podle optimalizačních proměnných neboli vektor gradientu. Vektor gradientu se může v některých případech určit analyticky, v ostatních případech se používá numerická náhrada parciálních derivací. Patří sem například metody sružených směrů nebo metoda největšího spádu. Metody druhého řádu využívají kromě výpočtu vektoru gradientu i výpočet Hessovy matice cílové funkce, který je náročný [16]. Hessova matice se většinou neurčuje analyticky, ale numericky se aproximuje.

S ohledem na vlastnosti a přesnost numerických metod je pro potřebu této práce vybrána metoda prvního řádu a to metoda největšího spádu.

5.2. Metoda největšího spádu

Princip metody spočívá v sestavení minimalizační posloupnosti bodů $\{\mathbf{x}_k\}$ tak, aby platilo

$$\psi(\mathbf{x}_{k+1}) < \psi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

a zároveň posloupnost konvergovala k \mathbf{x}^* , tedy bodu lokálního minima

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*. \quad (5.5)$$

Pro výpočet bodů posloupnosti se používá iterační formule

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

kde vektor $\mathbf{d}_k = -\text{grad}\psi(\mathbf{x})$ určuje směr největšího spádu funkce ψ [11]. Číslo t_k označuje délku kroku, o kterou dochází k posunu ve zvoleném směru. Může se zvolit jako

$$t_k = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \quad (5.7)$$

nebo se hodnota kroku t_k hledá pomocí některé metody jednorozměrné optimalizace. Optimalizace začíná ze zvoleného startovacího bodu \mathbf{x}_0 . Princip metody největšího spádu byl použit v programu *metodanejvetsihospadu.m* (viz příloha č. 3).

5.3. Jednorozměrná optimalizace

Pro urychlení optimalizačního procesu je hodnota kroku t_k určena pomocí jednorozměrné optimalizace ve směru \mathbf{d}_k , tj. ve směru největšího spádu. Většina numerických metod jednorozměrné optimalizace je založena na zkracování intervalu neurčitosti, což je interval, ve kterém nabývá cílová funkce nejvýše jednoho lokálního minima. V praxi může mít cílová funkce několik lokálních extrémů, proto se musí zvolit dělení intervalu takové, aby každý nový podinterval byl znovu intervalem neurčitosti.

Často používaná je metoda zlatého řezu a Fibonacciova metoda. Obě dvě metody rozdělují svůj interval neurčitosti v určitém poměru. Interval u Fibonacciovy metody se dělí poměrem po sobě jdoucích členů Fibonacciovy posloupnosti. Nevýhodou je nutnost stanovení celkového počtu členů Fibonacciovy posloupnosti a tím i počet vyčíslení cílové funkce. Pokud je potřeba aproximaci zpřesnit, musí se vše vyčíslet znovu. Metoda zlatého řezu využívá ke zkracování intervalu konstantní koeficient, čímž odpadá nutnost přesného stanovení počtu kroků při optimalizaci. Proto byla vybrána metoda zlatého řezu přesto, že při stejném počtu kroků je konečný interval neurčitosti Fibonacciovy metody o 17% kratší než u metody zlatého řezu [19].

5.4. Metoda zlatého řezu

Metoda je založena na dělení intervalu neurčitosti v poměru zlatého řezu [19]. Každý interval $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ o délce i_k se rozdělí na větší interval délky v_k a menší interval délky m_k tak, aby platilo

$$\frac{v_k}{m_k} = \frac{i_k}{v_k} = \gamma = konst. \quad (5.8)$$

Úpravou rovnice (5.9) a s využitím faktu, že celkový interval je roven součtu většího a menšího intervalu, se obdrží kvadratická rovnice. Jejím kladným řešením je hodnota poměru zlatého řezu

$$\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (5.9)$$

Je zvolen interval $I_{k-1} = \langle a_{k-1}, b_{k-1} \rangle$, kdy $I_{k-1} \supset I_k$. Následující body jsou vypočítány jako

$d_{k-1} = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{\gamma}$ a $c_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} - d_{k-1}$ [19] a jsou vyčísleny jejich funkční hodnoty. Následně jsou funkční hodnoty v bodech c_{k-1} a d_{k-1} porovnány a jsou určeny body nového intervalu neurčitosti. Mohou nastat tři situace:

$$\psi(d_{k-1}) > \psi(c_{k-1}): a_k := a_{k-1}, b_k := d_{k-1}, d_k := c_{k-1}, c_k := a_k + b_k - d_k$$

$$\psi(c_{k-1}) > \psi(d_{k-1}): a_k := c_{k-1}, b_k := b_{k-1}, c_k := d_{k-1}, d_k := a_k + b_k - c_k$$

$$\psi(c_{k-1}) = \psi(d_{k-1}): a_k := c_{k-1}, b_k := d_{k-1}, d_k := \frac{b_k - a_k}{\gamma} + a_k, c_k := a_k + b_k - d_k$$

Algoritmus skončí ve chvíli, kdy je velikost intervalu neurčitosti menší než požadovaná přesnost. Minimum funkce je pak uvažováno ve středu tohoto intervalu. Metodu zlatého řezu využívá program *zlatyrez.m* (viz příloha č. 4).

6. Výsledky

Cílem práce je aproximovat vlastnosti chrupavčité tkáně pomocí lineárního viskoelastického modelu. Nejprve se použije Kelvin-Zenerův model pro získání cílové funkce (4.1), která bude minimalizována. Hodnota této funkce je výstupem programu *KelvinZener.m* (viz příloha č. 1). Tento program nejprve provádí výpočet napětí σ_{an} Boltzmannovým integrálem, jehož úprava byla naznačena ve čtvrté kapitole. Pro výpočet napětí je potřeba načíst vstupní data ze souboru *KelvinZener.mat*, který obsahuje vektor deformace a vektor napětí σ_{exp} , které byly získány při experimentu, a k nim příslušný vektor času. Jediným vstupem do programu je vektor x , který obsahuje zvolené hodnoty parametrů Kelvin-Zenerova modelu, a to $[E_0, E_1, \eta]$. Z grafu napětí získaného z experimentu (obr. 4.3) byla odhadnuta přibližná doba relaxace $t_R = 15$ [s] pro chrupavku, proto i vstupní vektor x obsahoval takové hodnoty, aby byla zachována hodnota doby relaxace.

Pro optimalizaci parametrů modelu je používán program *metodanejvetsihospadu.m*. Vstupem do tohoto programu je vektor x , který obsahuje parametry modelu, které se mají optimalizovat. Nejprve se numericky pomocí konečných diferencí určí hodnota gradientu, jež je vyčíslena programem *KelvinZenerGradient.m* (viz příloha č. 2). Délka kroku, o který se v daném směru největšího spádu má optimalizační proces posunout, je určena programem *zlatyrez.m* (viz příloha č. 4), který v sobě volá program *KelvinZener.m*. Proces se opakuje do té doby, dokud norma z rozdílu původní hodnoty cílové funkce a nově vypočtené hodnoty není menší než 10^{-4} .

Pro srovnání je použita funkce *fmincon.m*, která je jedním z dostupných nástrojů optimalizační knihovny systému MATLAB [15]. Zadáním příkazu

```
m = fmincon(@KelvinZener, x, [], [], [], [], dolni, horni);
```

se do vektoru m uloží optimalizované parametry. Stejně jako u metody největšího spádu i zde je vstupní vektor x vektor parametrů modelu, které chceme optimalizovat. Pro urychlení výpočtu jsou zadány dolní a horní hranice vektoru m . Vektor dolní hranice je volen jako setina vstupního vektoru a vektor horní hranice je volen jako stonásobek vstupního vektoru. Při volbě vstupního vektoru se nesmí opomenout předpoklad, že všechny vstupní parametry jsou kladné.

Pro 4 zvolené výchozí body je provedena citlivostní analýza algoritmu metody největšího spádu. Nejprve se předpokládala hodnota relaxační funkce $t_R = 15$ s. Pro hodnoty parametrů E_0 a E_1 se provedla 2D optimalizace jak metodou největšího spádu, tak funkcí *fmincon.m*. Tímto způsobem byly nalezeny optimální parametry E_0 a E_1 pro zvolenou relaxační dobu. Následující tabulky (Tab. 6.1 – Tab. 6.4) ukazují výsledky 2D optimalizace. Dále se nechala vykreslit plocha (obr. 6.1) závislosti parametrů E_0 a E_1 , která ukazuje oblast minima cílové funkce y . Do této plochy jsou zakresleny polohy výchozích bodů, kde každý bod má svou barvu. Optimalizované hodnoty metody největšího spádu jsou vykresleny jako kolečko, hodnoty z funkce *fmincon.m* jako křížek. Optimalizované body jsou vykresleny vždy stejnou barvou jako k nim

příslušející výchozí bod. Protože optimalizované hodnoty se v použitém rozlišení překrývají, obrázek 6.2 ukazuje rozložení jednotlivých optimalizovaných bodů při velmi velkém přiblížení.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y[Pa]$
x_1	200000	4000000	$1,9824 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	333099	4717626	$1,4045 \cdot 10^{14}$
fmincon	333115	4717661	$1,4045 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.1: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_1 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y[Pa]$
x_2	500000	1500000	$2,2360 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	333099	4717626	$1,4045 \cdot 10^{14}$
fmincon	333115	4717661	$1,4045 \cdot 10^{14}$

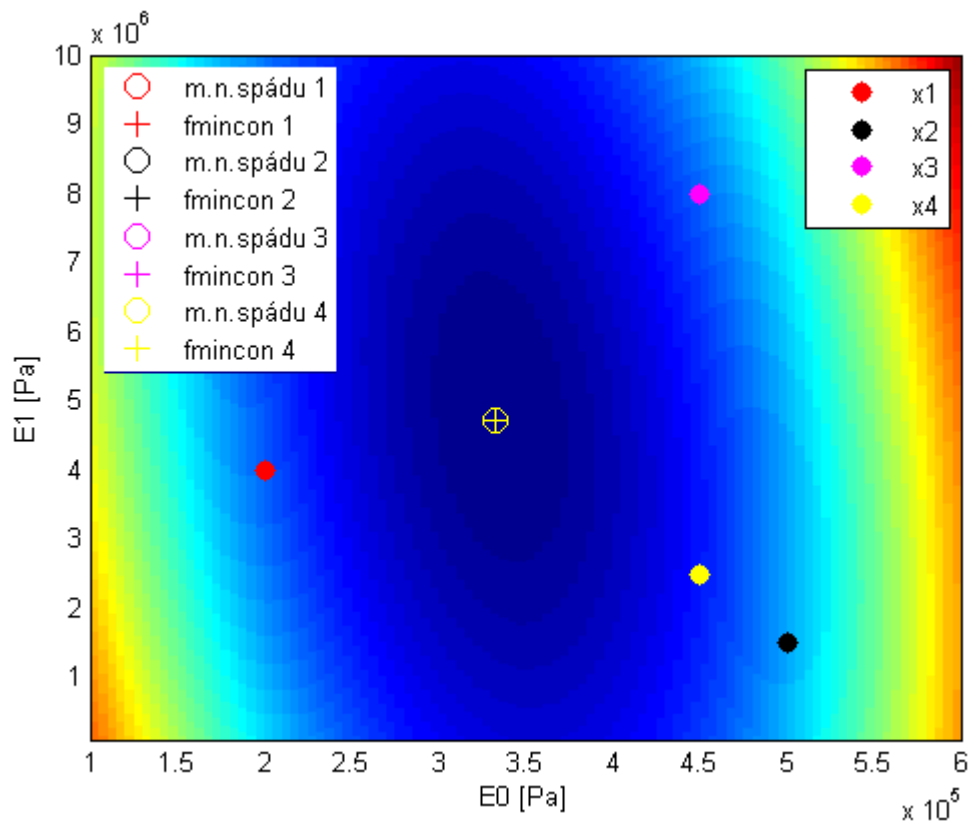
Tab. 6.2: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_2 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y[Pa]$
x_3	450000	8000000	$2,0424 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	333099	4717626	$1,4045 \cdot 10^{14}$
fmincon	333115	4717661	$1,4045 \cdot 10^{14}$

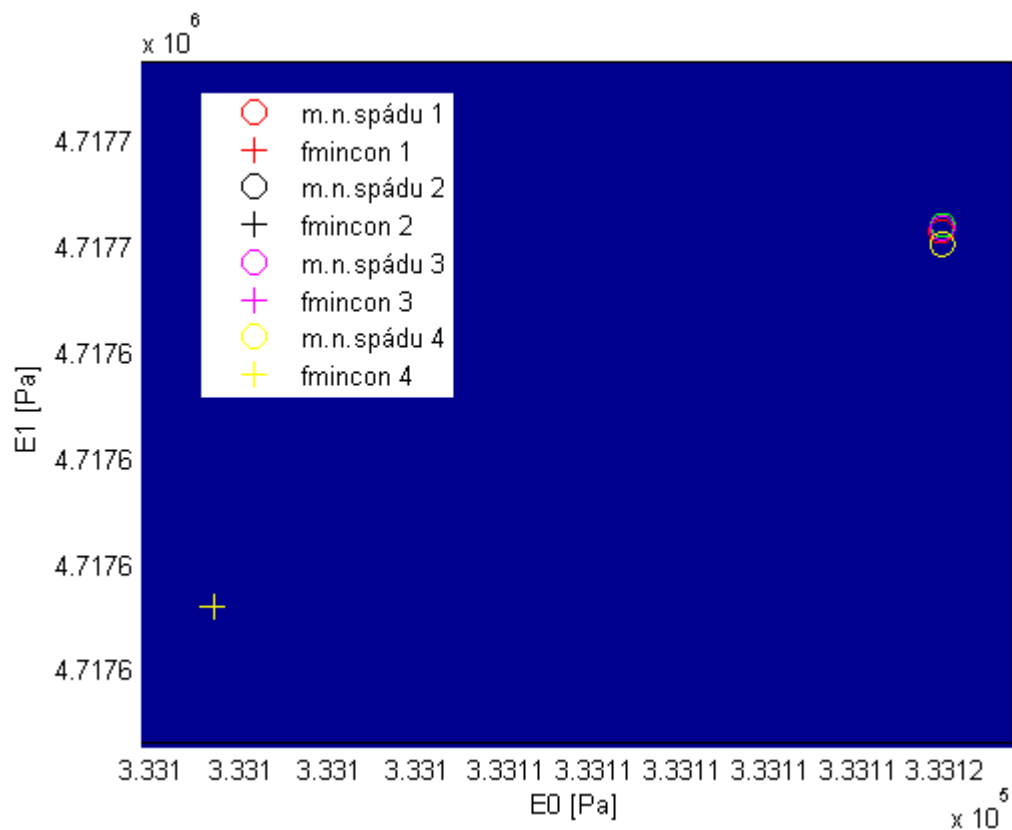
Tab. 6.3: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_3 kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y[Pa]$
x_4	450000	2500000	$1,8117 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	333099	4717626	$1,4045 \cdot 10^{14}$
fmincon	333115	4717660	$1,4045 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.4: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_4 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.



Obr. 6.1: Citlivostní analýza programu *metodanejvetsihospadu.m* pro relaxační čas $t_R = 15$ s pro výchozí body x_1, x_2, x_3, x_4 . Optimalizované body medoty největšího spádu jsou značeny kolečkem příslušné barvy. Optimalizované body funkce *fmincon.m* jsou značeny křížkem příslušné barvy.



Obr. 6.2: Přiblížení optimalizovaných bodů

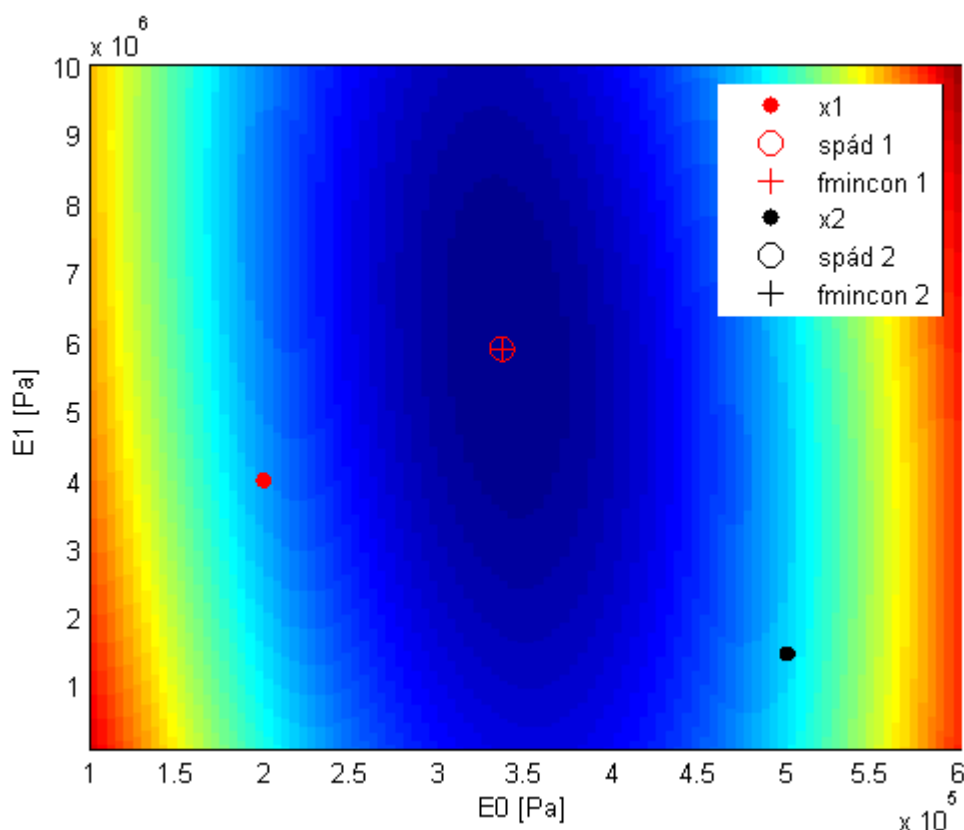
Citlivost 2D optimalizace parametrů E_0 a E_1 byla vyzkoušena i pro relaxační doby $t_R = 10$ s a $t_R = 20$ s vždy pro dva výchozí body. Výsledky jsou zpracované stejnou formou jako v předchozím případě v tabulkách (Tab. 6.5 - Tab. 6.8). Na obrázcích (obr. 6.3, obr. 6.4) je znázorněna citlivostní analýza programu *metodanejvetsihospadu.m* pro oba relaxační časy.

	E_0 [Pa]	E_1 [Pa]	y [Pa]
x_1	200000	4000000	$2,0552 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	336501	5895048	$1,4109 \cdot 10^{14}$
fmincon	336518	5895125	$1,4109 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.5: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_1 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 10$ s.

	E_0 [Pa]	E_1 [Pa]	y [Pa]
x_2	500000	1500000	$2,2393 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	336501	5895048	$1,4109 \cdot 10^{14}$
fmincon	336518	5895124	$1,4109 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.6: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_2 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 10$ s.



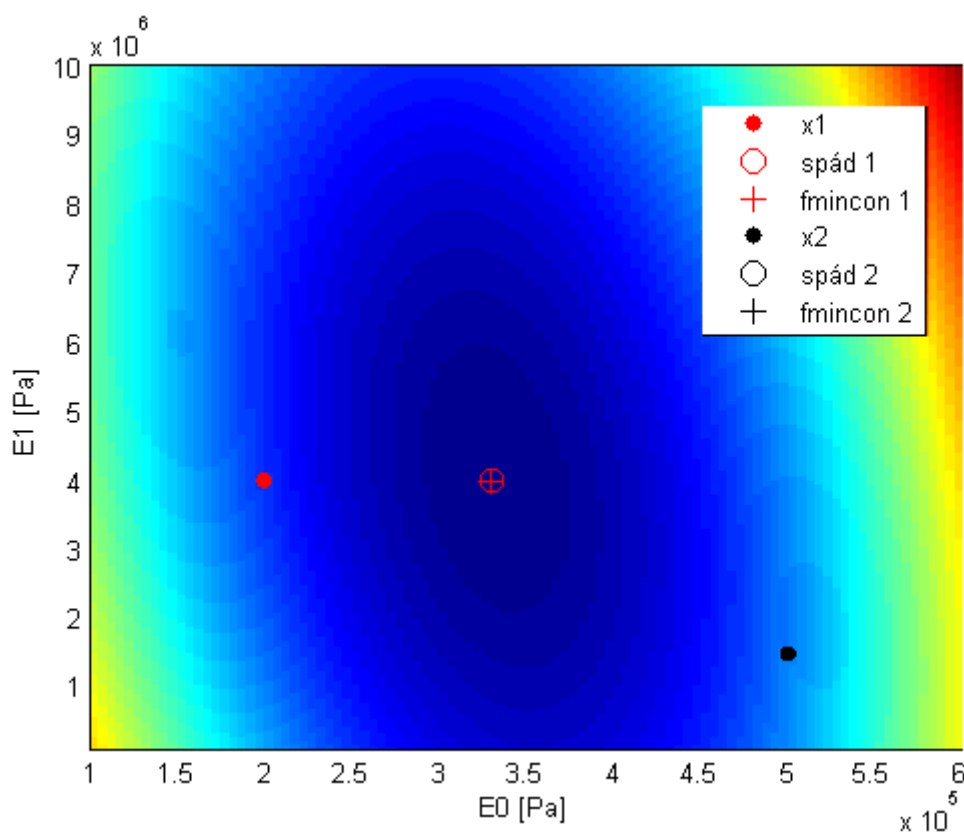
Obr. 6.3: Citlivostní analýza programu *metodanejvetsihospadu.m* pro relaxační čas $t_R = 10$ s pro výchozí body x_1 a x_2 . Optimalizované body metody největšího spádu jsou značeny kolečkem příslušné barvy. Optimalizované body funkce *fmincon.m* jsou značeny křížkem příslušné barvy.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y [Pa]$
x_1	200000	4000000	$1,9333 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	330465	3995942	$1,4075 \cdot 10^{14}$
fmincon	330481	3995949	$1,4075 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.7: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_1 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 20$ s.

$t_R = 20$ s	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$y [Pa]$
x_2	500000	1500000	$2,2411 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	330465	3995942	$1,4075 \cdot 10^{14}$
fmincon	330481	3995948	$1,4075 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.8: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_2 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 20$ s.



Obr. 6.4: Citlivostní analýza programu *metodanejvetsihospadu.m* pro relaxační čas $t_R = 20$ s pro výchozí body x_1 a x_2 . Optimalizované body metody největšího spádu jsou značeny kolečkem příslušné barvy. Optimalizované body funkce *fmincon.m* jsou značeny křížkem příslušné barvy.

Aby mohly být určeny optimální hodnoty všech parametrů, byla provedena 3D optimalizace, kdy byly optimalizovány všechny tři parametry Kelvin-Zenerova modelu E_0 , E_1 a η . Opět byla zkoumána citlivost této optimalizace pro 4 výchozí body. Výchozí hodnota parametru η byla vždy dopočítána tak, aby odpovídala přibližně relaxační době 15 s. Pro kontrolu byla 3D optimalizace provedena i pro další výchozí body, jejichž hodnoty odpovídaly relaxačním dobám $t_R = 10$ s a $t_R = 20$ s. Výsledky jsou zaznamenány v tabulkách (Tab. 6.9 – Tab. 6.14).

	E_0 [Pa]	E_1 [Pa]	η [Pa · s]	y [Pa]
x_1	200000	4000000	60000000	$1,9824 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288898	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332965	4673118	71285809	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.9: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_1 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	E_0 [Pa]	E_1 [Pa]	η [Pa · s]	y [Pa]
x_2	500000	1500000	22500000	$2,2360 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288898	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332966	4673120	71285582	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.10: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_2 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	E_0 [Pa]	E_1 [Pa]	η [Pa · s]	y [Pa]
x_3	450000	8000000	120000000	$1,5959 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288899	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332966	4673099	71285582	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.11: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_3 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$\eta [Pa \cdot s]$	$y [Pa]$
x_4	450000	2500000	37500000	$1,8117 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288898	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332966	4673116	71285603	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.12: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_4 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 15$ s.

	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$\eta [Pa \cdot s]$	$y [Pa]$
x_5	500000	1500000	15000000	$1,9333 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288899	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332966	4673116	71285613	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.13: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_5 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 10$ s.

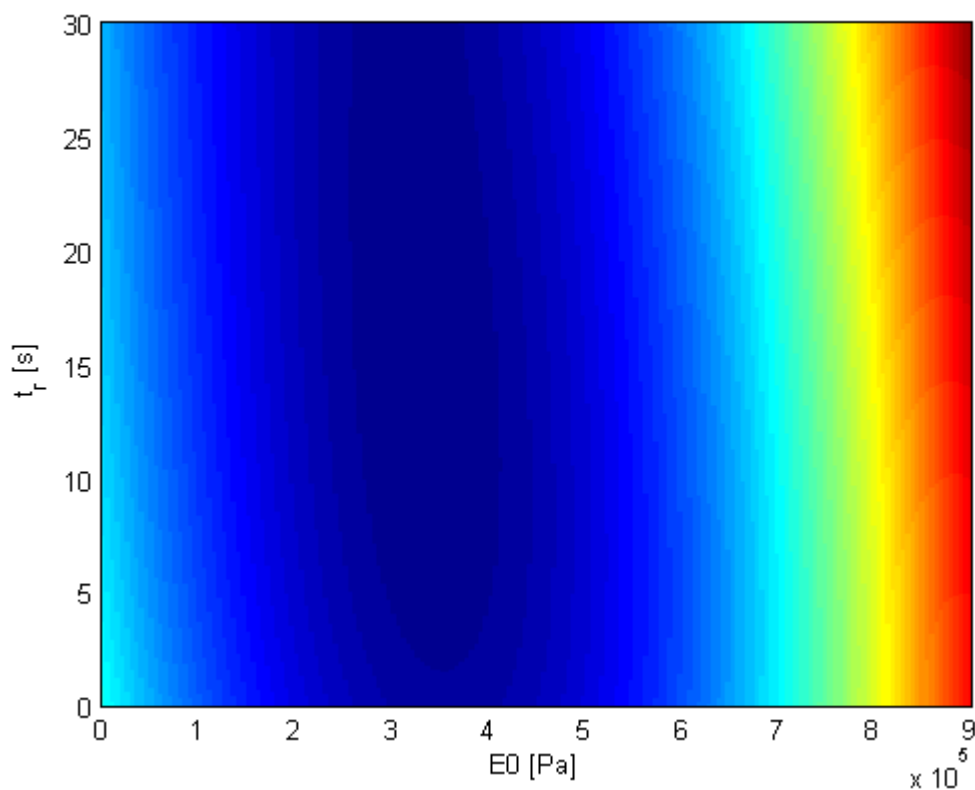
	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$\eta [Pa \cdot s]$	$y [Pa]$
x_6	200000	4000000	80000000	$1,9333 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	332948	4672833	71288899	$1,4044 \cdot 10^{14}$
fmincon	332966	4673116	71285613	$1,4044 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.14: Optimalizace Kelvin-Zenerova modelu pro startovací bod x_6 , kterému odpovídá relaxační doba $t_R = 20$ s.

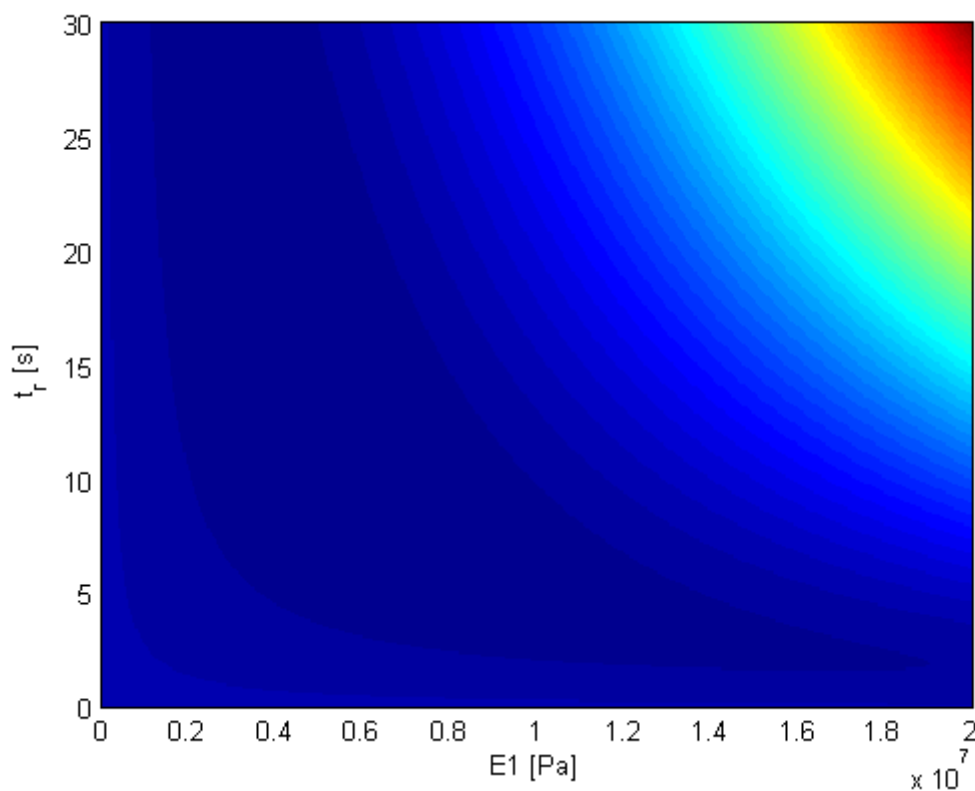
Mezi výslednými hodnotami jednotlivých parametrů získaných z optimalizace použitého materiálového modelu pomocí metody největšího spádu nejsou patrné rozdíly. Průměrná relaxační doba odpovídá hodnotě 15,26 s. Z tohoto výsledku relaxační doby je vidět, že prvotní odhad hodnoty relaxační doby byl téměř správný.

Rozdíly v hodnotách E_1 a η získaných optimalizací pomocí funkce *fmincon.m* jsou menší než 0,001%, pro parametr E_0 jsou rozdíly zanedbatelné. Průměrná relaxační doba odpovídá hodnotě 15,25 s.

Pro průměrné optimální hodnoty E_0 a E_1 byly vykresleny plochy (Obr. 6.5, Obr. 6.6) v závislosti na relaxační době t_R .

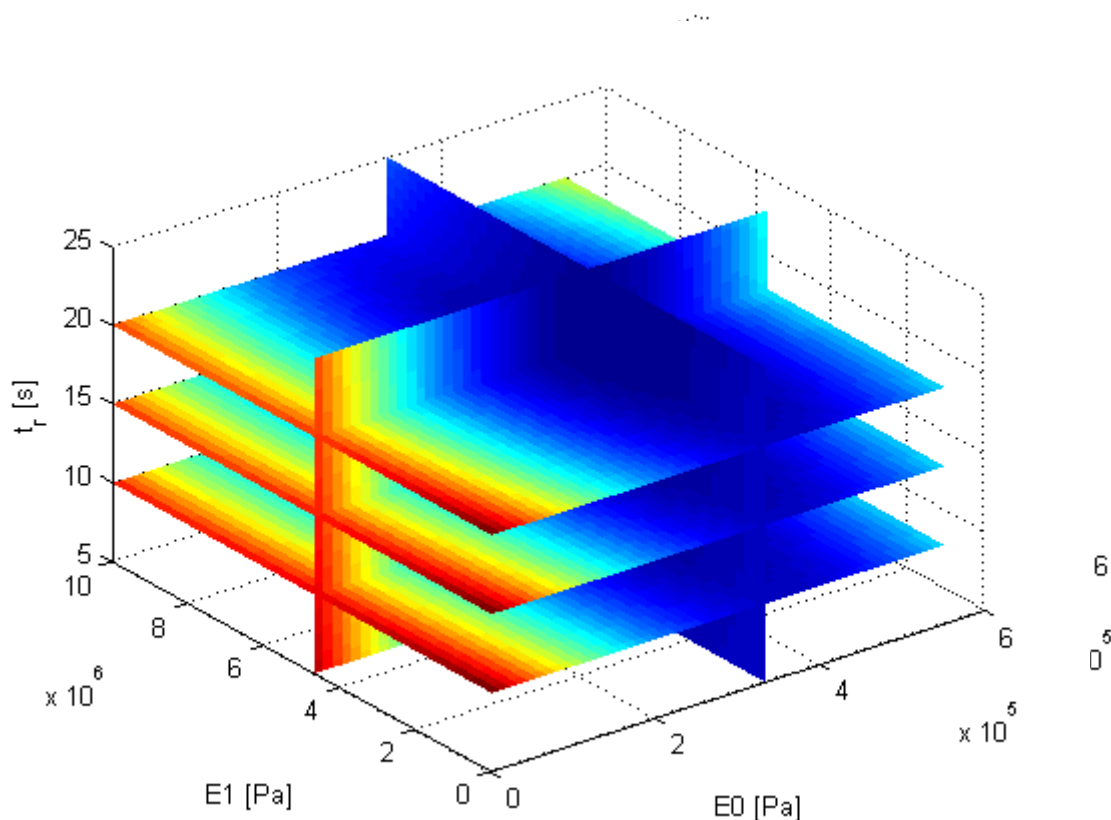


Obr. 6.5: Plocha závislosti parametrů E_0 na relaxačních dobách t_R při konstantním parametru E_1 .



Obr. 6.6: Plocha závislosti parametrů E_1 na relaxačních dobách t_R při konstantním parametru E_0 .

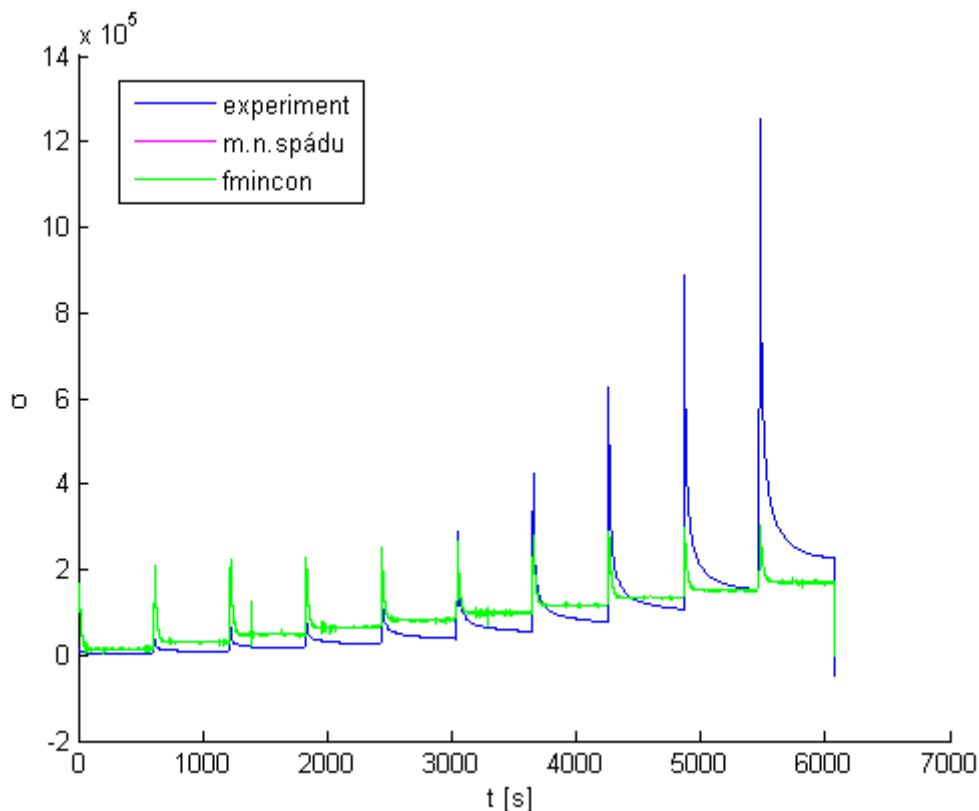
Následně byly hodnoty cílové funkce vykresleny v trojrozměrném prostoru v závislostech E_0 , E_1 a t_R (obr. 6.7). Řezy osami E_0 a E_1 byly provedeny pro průměrné parametry dle výsledků předchozí optimalizace. Řez osou t_R byl proveden pro hodnoty 10s, 15s a 20s. Je patrné, že daná cílová funkce odpovídající Kelvin-Zenerovu modelu kontinua, má v uvažovaném oboru hodnot, který má fyzikální smysl, jedno minimum.



Obr. 6.7: Vykreslení cílové funkce y ve třírozměrném prostoru E_0 E_1 t_R .

Pro optimální parametry nalezené pomocí metody největšího spádu a pomocí funkce *fmincon.m* Kelvin-Zenerova modelu byla vykreslena křivka napětí v závislosti na čase a zároveň byla do stejného grafu vykreslena křivka napětí získaná při experimentu. Jak je vidět z obr. 6.8, křivky reflektující parametry získané metodou největšího spádu a funkcí *fmincon.m* jsou téměř identické.

Z obr. 6.8 je vidět, že Kelvin-Zenerův model lineárního viskoelastického kontinua není schopen přesně postihnout nelinearity v odezvě chrupavčité tkáně.



Obr. 6.8: Experimentální křivka relaxace napětí chrupavčité tkáně při schodovém zatížení a křivky vypočtené numericky pomocí Kelvin-Zenerova modelu a jejich optimalizovaných parametrů.

Pro srovnání byla provedena 3D optimalizace modelu s pěti parametry, kdy byly optimalizovány parametry E_0, E_1, E_2, η_1 a η_2 . Pro optimalizaci byl znovu použit program *metodanejvetsihospadu.m* (viz příloha č. 3), který v sobě volá program *model2Gradient.m* (viz příloha č. 6) a program *zlatyrez.m* (viz příloha č. 4). Program *model2Gradient.m* numericky vyčísľuje hodnotu gradientu pomocí konečných diferencí. Program *zlatyrez.m*, který určuje délku kroku posunu ve směru největšího spádu, v sobě volá program *model2.m* (viz příloha č. 5), který provádí výpočet napětí σ_{an} Boltzmannovým integrálem a výpočet cílové funkce.

Optimalizace byla provedena pro jeden výchozí bod, který byl zvolen tak, že obě relaxační doby odpovídaly hodnotě 10 s. Výsledky optimalizace jsou zaznamenány v tabulce 6.15.

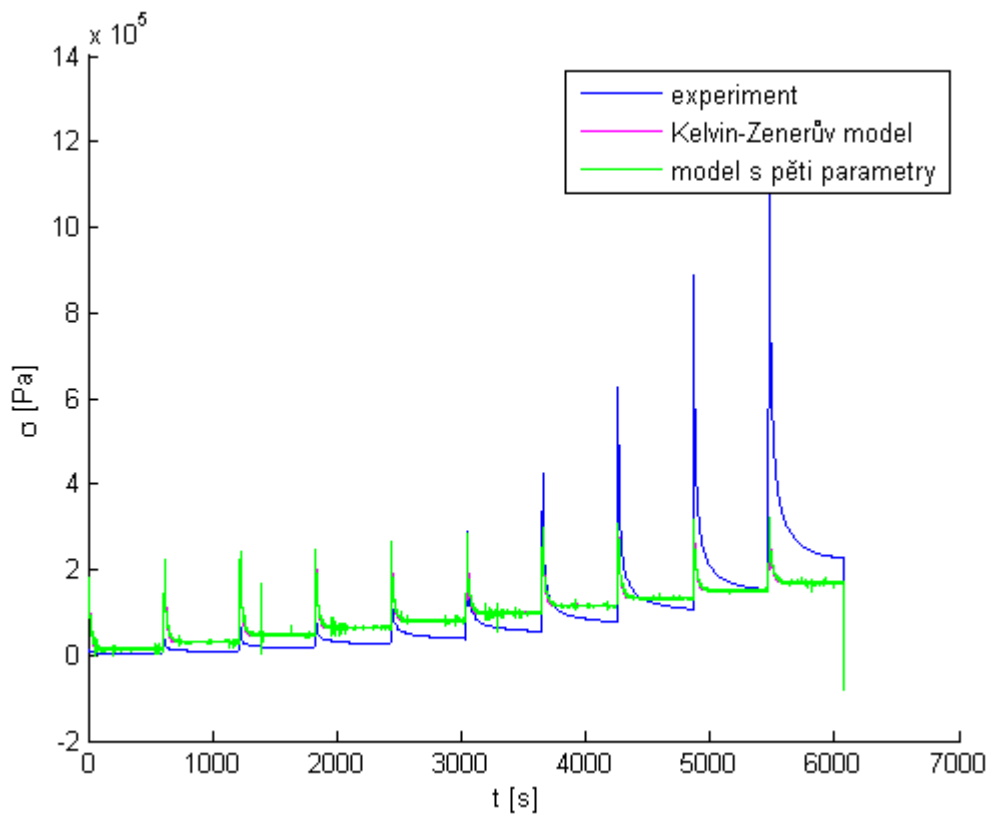
	$E_0 [Pa]$	$E_1 [Pa]$	$\eta_1 [Pa \cdot s]$
x_6	200000	3000000	30000000
Metoda největšího spádu	330670	2808494	65894696
fmincon	330689	2809293	65895214

	$E_2 [Pa]$	$\eta_2 [Pa]$	$\gamma [Pa]$
x_6	1000000	10000000	$2,0552 \cdot 10^{14}$
Metoda největšího spádu	4512777	13620927	$1,3980 \cdot 10^{14}$
fmincon	4512590	13614200	$1,3980 \cdot 10^{14}$

Tab. 6.15: Optimalizace pětiparametrového modelu pro startovací bod x_6

Výsledné hodnoty jednotlivých parametrů získaných z optimalizace použitého materiálového modelu pomocí metody největšího spádu a pomocí funkce *fmincon.m* jsou přibližně stejné. Největší odchylka je u parametrů E_1 a η_2 a to přibližně 0,1%.

Pro srovnání je do jednoho grafu (obr. 6.9) vykreslena křivka experimentálně zjištěného napětí a křivky vypočtené numericky pomocí Kelvin-Zenerova modelu a pomocí modelu s pěti parametry.



Obr. 6.9: Experimentální křivka relaxace napětí chrupavčité tkáně při schodovém zatížení a křivky vypočtené numericky pomocí Kelvin-Zenerova modelu a modelu s pěti parametry.

Použitím pětiparametrového modelu nebyly oproti výsledkům Kelvin-Zenerova modelu získány výrazně lepší výsledky. Výsledné křivky z těchto modelů jsou téměř identické. Jak se dalo předpokládat, rozšíření Kelvin-Zenerova modelu o další paralelně řazený Maxwellův element, který obsahuje lineární pružinu a lineární tlumič, nedokáže postihnout nelinearity v chování chrupavčité tkáně.

7. Závěr

Tato práce byla zaměřena na popis mechanických vlastností lidské chrupavky odebrané z kyčelního kloubu. Cílem práce bylo vyzkoušet aplikovatelnost lineárních modelů viskoelastického materiálu k modelování vlastností chrupavčité tkáně, která se obecně chová nelineárně, a osvojit si metody identifikace optimálních materiálových parametrů.

V úvodu byla nastíněna motivace studia vlastností chrupavčité tkáně.

Ve druhé kapitole byla popsána obecná anatomie tkání, na kterou navazoval popis anatomie chrupavky a druhy chrupavky. Detailněji byla popsána anatomie a funkce kloubní chrupavky, pro kterou je celá práce realizována.

Třetí kapitola byla věnována mechanickým vlastnostem měkkých tkání, u nichž jsme se soustředili na popis viskoelasticity. Byly zde popsány základní vlastnosti materiálu. Pomocí jednoduchých reologických modelů byly sestaveny modely složitější, které jsme následně zkoušeli pro popis mechanických vlastností chrupavky. Byl odvozen Kelvin-Zenerův model se třemi parametry a model s pěti parametry.

Čtvrtá kapitola byla věnována popisu získávání dat z experimentu a následnému zpracování těchto dat. Bylo zde popsáno odvození a upravení konstitutivní rovnice, která byla použita pro numerické řešení odezvy materiálových modelů.

V páté kapitole byla vysvětlena úloha optimalizace. Byla zde uvedena metoda největšího spádu a metoda zlatého řezu. Obě metody byly zprogramovány (viz příloha) a použity pro optimalizaci parametrů materiálových modelů.

V šesté kapitole jsou předloženy výsledky optimalizace obou vybraných reologických modelů. Bylo zjištěno, že odchylky ve výsledcích optimalizace pomocí metody největšího spádu a optimalizace pomocí funkce *fmincon.m* jsou minimální. Byla provedena citlivostní analýza programu *metodanejvetsihospadu.m* pro různé relaxační doby. Ve všech případech bylo ověřeno, že metoda je stabilní a není citlivá na polohu výchozích bodů optimalizace. Z odezvy Kelvin-Zenerova modelu lineárního viskoelastického kontinua s optimálními parametry je vidět, že model není schopen postihnout nelineární chování chrupavčité tkáně. Optimalizací parametrů modelu s pěti parametry nebyly získány lepší výsledky. Z toho vyplývá, že nemá význam zkoušet postihnout nelineární chování chrupavky přidáváním dalších paralelních větví Maxwelllova kontinua ke Kelvin-Zenerovu modelu. V případě potřeby aproximace vlastností chrupavčité tkáně lineárním materiálovým modelem (např. v komerčním výpočetním softwaru) je Kelvin-Zenerův model dostatečný.

Rozšíření této práce by mohlo spočívat v hledání a sestrojení nelineárního modelu, který by postihl nelineární chování kloubní chrupavky. Nelineární model by se mohl použít při výpočtech a případně při volbě vhodného materiálu pro náhradu kloubní chrupavky.

8. Příloha

Příloha č. 1

Program pro výpočet cílové funkce pomocí Kelvin-Zenerova modelu

```
function [y]= KelvinZener(x)

% výpočet cílové funkce pomocí Kelvin-Zenerova modelu

% načtení vstupních dat ze souboru KelvinZener.mat
load('KelvinZener.mat','epsilon','cas','sigma');

t = cas;
sigma_exp = sigma;

% parametry modelu
E0 = x(1);
E1 = x(2);
eta =x(3);

% relaxační čas
t_r = eta./E1;

% zavedení nulových vektorů proměnných
sigma_an = zeros(length(t),1);
sigma_n = zeros(length(t),1);
dti=zeros(length(t),1);
delta = zeros(length(t),1);

% výpočet Boltzmannova integrálu
sigma_an(1) = 0;
sigma_n(1) = 0;
delta(1) = 0;

for i=2:length(t)
    dti(i)=t(i-1)-t(i);
    delta(i)=(E1)*((epsilon(i)-epsilon(i-1))/2)*(1+exp(dti(i)/t_r));
    sigma_n(i)= exp(dti(i)/t_r)*sigma_n(i-1)+delta(i-1);
    sigma_an(i)= E0*epsilon(i) + exp(dti(i)/t_r)*sigma_n(i-1) + delta(i-1);
end

% výpočet cílové funkce
y = 0;
y = sum ((sigma_an - sigma_exp).^2);

% vykreslení předepsané deformace
figure
title('Kelvin-Zenerův model: předepsané deformace')
hold on
xlabel('t [s]')
ylabel('\epsilon [-]')
plot(t,epsilon,'b');

% vykreslení hodnot deformace na počátku schodu
tt = [t(71),t(5825),t(11577),t(17324),t(23074),t(28823),t(33779),t(36614),
t(39296), t(41812)];
ee = [epsilon(71),epsilon(5825),epsilon(11577),epsilon(17324),
epsilon(23074), epsilon(28823),epsilon(33779),epsilon(36614),
epsilon(39296), epsilon(41812)];
```



```

for i = 1:length(tt)
    plot(tt(i),ee(i),'k*');
end

% vykreslení napětí
figure
title('Kelvin-Zenerův model')
hold on
xlabel('t [s]')
ylabel('\sigma')

% analyticky zjištěné hodnoty napětí
plot(t,sigma_an,'g');

% experimentálně zjištěné napětí
plot(t,sigma_exp,'b');
legend('výpočet','experiment')

% vykreslení hodnot napětí v okamžiku zvýšení deformace
tt = [t(71),t(5825),t(11577),t(17324),t(23074),t(28823),t(33779),t(36614),
t(39296), t(41812)];
ss = [sigma_exp(71),sigma_exp(5825),sigma_exp(11577),sigma_exp(17324),
sigma_exp(23074),sigma_exp(28823),sigma_exp(33779),sigma_exp(36614),
sigma_exp(39296),sigma_exp(41812)];

for i = 1:length(tt)
    plot(tt(i),ss(i),'k*');
end

end

```

Příloha č. 2

Program pro výpočet gradientu cílové funkce Kelvin-Zenerova modelu

```
function [gradient]= KelvinZenerGradient(x)

% výpočet gradientu cílové funkce Kelvin-Zenerova modelu

% parametry modelu
E0 = x(1);
E1 = x(2);
eta =x(3);

% zavedení nulových proměnných
dydE0 = 0;
dydE1 = 0;
dydeta= 0;

% velikost kroku
delta = 1e-4;

% dydE0
a0 = 0;
a1 = 0;

[a0]= KelvinZener(x);

A1 = [x(1)+delta*x(1), x(2), x(3)];
[a1]= KelvinZener(A1);

dydE0 = (a1-a0)/delta;

% dydE1
b0 = 0;
b1 = 0;

[b0]= KelvinZener(x);

B1 = [x(1), x(2)+delta*x(2), x(3)];
[b1]= KelvinZener(B1);

dydE1 = (b1-b0)/delta;

% dydeta
c0 = 0;
c1 = 0;

[c0]= KelvinZener(x);

C1 = [x(1), x(2), x(3)+delta*x(3)];
[c1]= KelvinZener(C1);

dydeta = (c1-c0)/delta;

% vektor gradientu
gradient = zeros(3,1);
gradient = [dydE0,dydE1,dydeta];

end
```

Příloha č. 3

Program pro parametrickou optimalizaci metodou největšího spádu

```
function [m]= metodanejvetsihospadu(x)

% optimalizace metodou největšího spádu
% x ...startovací bod

% zastavovací podmínka
stop = 1e-4;

% první iterace
minimum = x;
[gradient]= KelvinZenerGradient(x);

d = - gradient;
[t]= zlatyrez(x,gradient);
min = minimum + d.*t;

% cyklus metody největšího spádu
while norm(min-minimum) >= stop

    minimum = min ;
    [gradient]= KelvinZenerGradient(minimum);

    d = - gradient;
    [t] = zlatyrez(minimum,gradient);
    min = minimum + d.*t;

end

m = min;

end
```

Příloha č. 4

Program pro jednorozměrnou optimalizaci metodou zlatého řezu

```
function [t] = zlatyrez(x0,gradient)

% program hledá minimum na intervalu (a,b)
% m...minimum

x = x0;

% koeficient metody zlatého řezu
gama=0.5*(1+ sqrt(5));

% počáteční interval
a0 = 0;
b0 = 2e-9;

% vybraný podinterval
d0=(b0-a0)/gama + a0;
c0=a0+b0-d0;

% funkční hodnoty krajních bodů c0 a d0
[fck]= KelvinZener(x-gradient.*c0);
[fdk]= KelvinZener(x-gradient.*d0);

ak = a0;
bk = b0;
ck = c0;
dk = d0;

% požadovaná přesnost
epsilon = 0.01*(bk-ak);

% cyklus metody zlatého řezu
while bk-ak > epsilon

    a = ak;
    b = bk;
    c = ck;
    d = dk;

    fc=fck;
    fd=fdk;

    if fc < fd
        ak = a;
        bk = d;
        dk = c;
        ck = ak + bk - dk;

        [fck]= KelvinZener(x-gradient.*ck);
        fdk = fc;

        fc = fck;
        fd = fdk;
```

```

elseif fd < fc
    ak = c;
    bk = b;
    ck = d;
    dk = ak + bk - ck;

    [fdk]= KelvinZener(x-gradient.*dk);
    fck = fd;

    fc = fck;
    fd = fdk;

elseif fc == fd
    ak = c;
    bk = d;
    dk = (bk - ak)/gama + ak;
    ck = ak + bk - dk;

    [fck]= KelvinZener(x-gradient.*ck);
    [fdk]= KelvinZener(x-gradient.*dk);

    fc = fck;
    fd = fdk;

end
end

% minimum je ve středu nalezeného intervalu
t = (ak + bk)/2;

end

```

Příloha č. 5

Program pro výpočet cílové funkce pomocí modelu s pěti parametry

```
function [y]= model2(x)

% výpočet cílové funkce pomocí modelu s pěti parametry

% načtení vstupních dat ze souboru model2.mat
load('model2.mat','epsilon','cas','sigma');

% úprava vstupních dat
t = cas(1:end);
sigma_exp = sigma(1:end);

% parametry modelu
E0 = x(1);
E1 = x(2);
E2 = x(3);
eta1 = x(4);
eta2 = x(5);

% relaxační časy
t_r1 = eta1./E1;
t_r2 = eta2./E2;

% zavedení nulových vektorů proměnných
sigma_an = zeros(length(t),1);
sigma_n1 = zeros(length(t),1);
sigma_n2 = zeros(length(t),1);
dti=zeros(length(t),1);
delta1 = zeros(length(t),1);
delta2 = zeros(length(t),1);

% výpočet Boltzmannova integrálu
sigma_an(1) = 0;
sigma_n1(1) = 0;
sigma_n2(1) = 0;
delta1(1) = 0;
delta2(1) = 0;

for i = 2:length(t)
    dti(i)=t(i-1)-t(i);

    delta1(i) = E1 * ((epsilon(i)-epsilon(i-1))/2)*(1+ exp(dti(i)/(t_r1)));
    delta2(i) = E2 * ((epsilon(i)-epsilon(i-1))/2)*(1+ exp(dti(i)/(t_r2)));

    sigma_n1(i)= (exp(dti(i)/(t_r1)))*(sigma_n1(i-1)) +delta1(i-1);
    sigma_n2(i)= (exp(dti(i)/(t_r2)))*(sigma_n2(i-1)) +delta2(i-1);

    sigma_an(i)= E0*epsilon(i) + (exp(dti(i)/(t_r1)))*sigma_n1(i-1)+
    delta1(i-1)+ (exp(dti(i)/(t_r2)))*sigma_n2(i-1)+ delta2(i-1);
end

% výpočet cílové funkce
y=0;
y = sum ((sigma_an - sigma_exp).^2);
```

```

% vykreslení předepsané deformace na počátku schodu
figure
title('Model: předepsané deformace')
hold on
xlabel('t [s]')
ylabel('\epsilon [-]')
plot(t,epsilon,'b');

% vykreslení hodnot deformace v okamžiku zvýšení deformace
tt = [t(71),t(5825),t(11577),t(17324),t(23074),t(28823),t(33779),t(36614),
t(39296), t(41812)];
ee =[epsilon(71),epsilon(5825),epsilon(11577),epsilon(17324),
epsilon(23074),epsilon(28823),epsilon(33779),epsilon(36614),epsilon(39296),
epsilon(41812)];

for i = 1:length(tt)
    plot(tt(i),ee(i),'k*');
end

% vykreslení napětí
figure
title('Model')
hold on
xlabel('t [s]')
ylabel('\sigma')

% analyticky zjištěné hodnoty napětí
plot(t,sigma_an,'g');

% experimentálně zjištěné napětí
plot(t,sigma_exp,'b');
legend('výpočet','experiment')

% vykreslení hodnot napětí v okamžiku zvýšení deformace
tt =[t(71),t(5825),t(11577),t(17324),t(23074),t(28823),t(33779),t(36614),
t(39296), t(41812)];
ss = [sigma_exp(71),sigma_exp(5825),sigma_exp(11577),sigma_exp(17324),
sigma_exp(23074),sigma_exp(28823),sigma_exp(33779),sigma_exp(36614),
sigma_exp(39296),sigma_exp(41812)];

for i = 1:length(tt)
    plot(tt(i),ss(i),'k*');
end

end

```

Příloha č. 6

Program pro výpočet gradientu cílové funkce modelu s pěti parametry

```
function [gradient]= model2Gradient(x)

% výpočet gradientu cílové funkce Kelvin-Zenerova modelu

% parametry modelu
E0 = x(1);
E1 = x(2);
E2 = x(3);
eta1= x(4);
eta2= x(5);

% zavedení nulových proměnných
dydE0 = 0;
dydE1 = 0;
dydE2 = 0;
dydeta1 = 0;
dydeta2 = 0;

% velikost kroku
delta = 1e-4;

% dydE0
a0 = 0;
a1 = 0;
[a0]= model2(x);

A1 = [x(1)+delta*x(1), x(2), x(3),x(4),x(5)];
[a1]= model2(A1);

dydE0 = (a1-a0)/delta;

% dydE1
b0 = 0;
b1 = 0;

[b0]= model2(x);

B1 = [x(1), x(2)+delta*x(2), x(3),x(4),x(5)];
[b1]= model2(B1);

dydE1 = (b1-b0)/delta;

% dydE2
c0 = 0;
c1 = 0;

[c0]= model2(x);

C1 = [x(1), x(2), x(3)+delta*x(3),x(4),x(5)];
[c1]= model2(C1);

dydE2 = (c1-c0)/delta;
```



```

% dydeta1
d0 = 0;
d1 = 0;

[d0]= model2(x);

D1 = [x(1), x(2), x(3),x(4)+delta*x(4),x(5)];
[d1]= model2(D1);

dydeta1 = (d1-d0)/delta;

% dydeta2
e0 = 0;
e1 = 0;

[e0]= model2(x);

E1 = [x(1), x(2), x(3),x(4),x(5)+delta*x(5)];
[e1]= model2(E1);

dydeta2 = (e1-e0)/delta;

% vektor gradientu
gradient = zeros(5,1);
gradient = [dydE0,dydE1,dydE2,dydeta1,dydeta2];

end

```

Literatura

- [1] Aframová, M.A.G.: *Experimentální modelování kloubů*, bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2013
- [2] <http://www.cartiheal.com/>
- [3] <http://www.cellthera.cz/>
- [4] Čech, S., Horký, D.: *Histologie a mikroskopická anatomie pro bakaláře I.* dotisk, 1. Vydání, Masarykova univerzita, Brno 2009
- [5] Čihák, R.: *Anatomie I*, Grada, Praha 2001, ISBN 80 – 7169- 970 - 5
- [6] Dylevský, I.: *Obecná kineziologie*, Grada, Praha 2007, ISBN 987 – 80 – 247 – 1649 – 7
- [7] <http://old.lf3.cuni.cz/studium/materialy/revmatologie/degenerativni.html>
- [8] <http://www.fnbrno.cz/bez-bolesti-a-bez-potizi/t4485?page=6>
- [9] http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpk/kompendum/biomechanika/vlastnosti_tkane_chrupavka.php
- [10] Fung, Y.C. *Biomechanics - mechanical properties of living tissues*, Springer - Verlag, New York 2004
- [11] Hlaváč, Z.: *Dynamická syntéza a optimalizace*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 1995, ISBN 80- 7082 – 205 – 8
- [12] <http://www.homolka.cz/cs-CZ/oddeleni/vseobecna-chirurgie.html>
- [13] Křen, J. ,Rosenberg, J., Janíček, P.: *Biomechanika*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2001, ISBN 80 – 7082 – 792 - 0
- [14] Lakes R. S., *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, New York 2009, ISBN 978 – 0 – 521 – 88568 – 3
- [15] <http://www.mathworks.com/>
- [16] Míka, S.: *Matematická optimalizace*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 1997, ISBN 80 – 7082 – 319 – 4
- [17] Naňka, O., Elišková, M., *Přehled anatomie*, Galén, Praha 2009, ISBN 978 – 80 – 7262 – 612 - 0
- [18] <http://www.natic.cz/>
- [19] <http://mi21.vsb.cz/modul/metody-optimalizace>