

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky

Diplomová práce  
**Hausdorffův integrál, jeho vlastnosti a aplikace**

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně, a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, z nichž jsem čerpal.

V Plzni dne . . . . .

. . . . .

## Poděkování

V první řadě bych rád poděkoval vedoucímu práce, RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc., za věnovaný čas, dobré připomínky, nápady a rady. Dále bych chtěl poděkovat kolegovi Tomáši Roubalovi za rady a zajímavé postřehy.

## Abstrakt

Cílem této diplomové práce je představit Hausdorffův integrál rozměru  $s$ , porovnat jej s jinými typy integrálů a ukázat jeho možné aplikace. S tím souvisí zavedení a analýza Hausdorffovy míry, včetně její obecnější varianty konstruované pomocí tzv. indexových funkcí. Dále je definována Hausdorffova  $s$ -derivace, jejíž chování je po odvození jejího výpočetního tvaru zkoumáno na několika příkladech. Práce pokračuje shrnutím důležitých tvrzení, která určují, jaké funkce lze reprezentovat Hausdorffovým integrálem z jejich  $s$ -derivace. Poslední kapitola se zabývá použitím zavedeného aparátu na příkladech, přičemž nejvíce prostoru je věnováno Cantorově funkci.

**Klíčová slova:** Hausdorffova míra, Hausdorffova dimenze, indexová funkce, Lebesgueův integrál, Hausdorffův integrál, Hausdorffova  $s$ -derivace, Cantorova funkce, Heavisideova funkce

## Abstract

The goal of this diploma thesis is to introduce the  $s$ -dimensional Hausdorff integral, to compare it to other types of integrals and to show its possible applications. Before that, it is necessary to define and study the Hausdorff measure, including the more general Hausdorff measure constructed using the so-called index function. Another tool connected to the theory of Hausdorff integration is the Hausdorff  $s$ -derivative. After its definition, several examples are presented, and its behaviour studied. The thesis continues with a brief summary of important theorems, which introduce the class of functions, that are representable as the Hausdorff integral of its  $s$ -derivative. In the last chapter, some examples (e.g. the Cantor function), where the theoretical tools of Hausdorff integration are used, are presented.

**Keywords:** Hausdorff measure, Hausdorff dimension, index function, Lebesgue integral, Hausdorff integral, Hausdorff  $s$ -derivative, Cantor function, Heaviside function

---

## Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>iv</b>
<b>Použité symboly</b>	<b>1</b>
<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Hausdorffova míra</b>	<b>4</b>
1.1 Měřitelný prostor . . . . .	4
1.2 Hausdorffova vnější míra a Hausdorffova míra . . . . .	6
1.3 Hausdorffova dimenze . . . . .	9
1.4 Další vlastnosti Hausdorffovy míry . . . . .	11
1.5 Zobecnění . . . . .	13
<b>2 Hausdorffův integrál</b>	<b>22</b>
2.1 Měřitelné zobrazení, abstraktní Lebesgueův integrál . . . . .	22
2.2 Hausdorffův integrál . . . . .	23
2.3 Neurčitý integrál a Hausdorffova derivace . . . . .	24
2.4 Fundamentální věty . . . . .	28
<b>3 Porovnání s jinými typy integrálů</b>	<b>30</b>
3.1 Riemannův integrál a Lebesgueův integrál . . . . .	30
3.2 Příklady . . . . .	31
<b>4 Aplikace</b>	<b>35</b>
4.1 Cantorova funkce . . . . .	35
4.2 Heavisideova funkce . . . . .	41
4.3 Další možnosti aplikací . . . . .	42
<b>Závěr</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>46</b>

## Použité symboly

$[a, b]$	...	uzavřený interval
$(a, b)$	...	otevřený interval
$[a, b] \times [c, d]$	...	kartézský součin intervalů
$\ell(a, b)$	...	délka intervalu
$A, M, \{a, b, c\}$	...	bodová množina
$\mathbb{N}$	...	množina přirozených čísel
$\mathbb{Q}$	...	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	...	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	...	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	...	množina kladných reálných čísel s nulou
$\mathbb{R}^*$	...	množina reálných čísel včetně prvků $+\infty$ a $-\infty$
$f(x)$	...	funkce $f$ proměnné $x$
$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$	...	průnik nekonečně mnoha prvků
$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$	...	sjednocení nekonečně mnoha prvků
$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$	...	součet (suma) nekonečně mnoha prvků
$A \rightarrow B$	...	zobrazení z množiny $A$ do množiny $B$
$2^X$	...	množina všech podmnožin množiny $X$ (potenční množina)
$B \setminus A$	...	doplňěk množiny $A$ do množiny $B$
$\bar{A}$	...	uzávěr množiny $A$
$(a_k)$	...	posloupnost reálných čísel
$(X, \Sigma)$	...	měřitelný prostor
$\mu^*(M)$	...	(abstraktní) vnější míra množiny $M$
$\mu(M)$	...	(abstraktní) míra množiny $M$
$(X, \Sigma, \mu)$	...	prostor s mírou

---

$\lambda(M)$	...	Lebesgueova míra množiny $M$
$P$	...	spočetné pokrytí
$\rho(a, b)$	...	eukleidovská metrika vyjadřující vzdálenost bodů $a, b \in \mathbb{R}^n$
$d(M)$	...	diametr množiny $M$
$\mathcal{H}^s(M)$	...	Hausdorffova míra rozměru $s$ množiny $M$
$\dim_H(M)$	...	Hausdorffova dimenze množiny $M$
$\psi(x)$	...	indexová funkce
$\mathcal{H}^\psi(M)$	...	Hausdorffova míra (vzhledem k indexové funkci) $\psi$ množiny $M$
$\mathcal{B}(\mathcal{M})$	...	$\sigma$ -algebra borelovských množin na $M$
$\chi_M(x)$	...	charakteristická funkce množiny $M$
At	...	atom (množina)
$D^\psi F(x)$	...	Hausdorffova $\psi$ -derivace funkce $F$ v bodě $x$
$F'(x)$	...	derivace funkce $F$ v bodě $x$

## Úvod

Teorie míry zaujímá mezi matematickými disciplínami důležité místo, a to nejen jako nástroj pro vybudování pojmu integrálu. Mezi největší osobnosti tohoto oboru matematiky jistě patřil Henri Lebesgue nebo Johann Radon, neméně významnou postavou však byl německý matematik Felix Hausdorff, který svou prací významně přispěl k řešení problémů týkajících se fraktálních množin a díky Hausdorffově míře a dimenzi mohla vzniknout celá řada dalších prací.

V následujícím textu jsme se zabývali integrálem definovaným pomocí Hausdorffovy míry. S tímto pojmem se lze setkat např. v článku [6], kde je ovšem definován jinak, než jak bude zaveden zde. Definice na základě abstraktního Lebesgueova integrálu, kterou jsme použili, je převzata z článku [14]. Hausdorffův integrál je nástroj, který je možno použít pro reprezentaci některých funkcí, jež nemohou být popsány integrálem Lebesgueovým (např. *Cantorova funkce*). Překvapivě i funkce tohoto druhu mohou mít nejen čistě teoretický význam, viz [6], [13]. Velmi důležitými publikacemi, které shrnují teorii Hausdorffovy míry, případně dokonce uvádějí tvrzení určující podmínky, za jejichž platnosti lze funkci interpretovat jako Hausdorffův integrál z derivace, jsou kniha [13] a článek [15]. V tomto případě ovšem nehovoříme o klasické derivaci, ale o tzv. Hausdorffově  $\psi$ -derivaci, s jejíž definicí se můžeme setkat rovněž v článku [15].

V této práci jsme nejprve zavedli Hausdorffovu míru rozměru  $s$  a některé pojmy abstraktní teorie míry, kterých bylo zapotřebí. Tato část (především kapitoly 1.2 - 1.4) vznikla převzetím a přepracováním některých pasáží z textu [7]. Následující část se týká Hausdorffovy míry zkonstruované na bázi tzv indexové funkce ([13], [15]). Další kapitola se věnuje definici a vlastnostem Hausdorffova integrálu rozměru  $s$ , Hausdorffově  $s$ -derivaci a dvěma pro další kapitoly důležitým tvrzením. Ve zbytku práce jsme se věnovali srovnání Hausdorffova integrálu s jinými integrály a posléze také aplikaci uvedené teorie na konkrétních příkladech.



## 1 Hausdorffova míra

V první kapitole zavedeme Hausdorffovu míru a prozkoumáme její vlastnosti. Ke korektní konstrukci Hausdorffovy míry ovšem potřebujeme definovat množství matematických pojmů (viz [11]) nejen z obecné teorie míry, čímž nyní začneme.

### 1.1 Měřitelný prostor

**Definice 1.1.1** (Potenční množina). Necht'  $X$  je libovolná abstraktní bodová množina. *Potenční množinou* nazveme množinu všech jejích podmnožin a značíme ji  $2^X$ .

**Definice 1.1.2** (Množinový systém). Libovolnou neprázdnou podmnožinu potenční množiny  $\mathcal{U} \subset 2^X$  nazveme *množinovým systémem* v  $X$ .

**Příklad 1.1.3.** Jako množinový systém na  $\mathbb{R}$  můžeme chápat množinu všech intervalů (uzavřených či otevřených), v  $\mathbb{R}^2$  jde například o obdélníky typu  $(a, b) \times (c, d)$ . Možnosti jsou velmi široké, množinovým systémem je například i prázdná množina, takový systém však nemá valného využití, proto budeme při konstruování měř uvažovat systémy, jejichž použití dává nějaký smysl.

Před zavedením míry tedy definujeme množinový systém, na němž budeme pracovat. Omezením se na vhodné podmnožiny abstraktní množiny (prostoru)  $X$  dojde k usnadnění práce při konstrukci míry.

**Definice 1.1.4** ( $\sigma$ -algebra). Necht'  $X$  je abstraktní bodová množina a  $\Sigma \subset 2^X$ . Řekneme, že množinový systém  $\Sigma$  je  $\sigma$ -algebra, jsou-li splněny následující vlastnosti:

1.  $\emptyset \in \Sigma$ ,
2.  $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$ ,
3.  $\forall i \in \mathbb{N} A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$ .

**Příklad 1.1.5.** Triviálními příklady  $\sigma$ -algeber jsou dvojice  $\{\emptyset, X\}$  a celá množina  $2^X$ . Ne-triviálním příkladem jsou všechny měřitelné množiny (bude vysvětleno níže).

**Definice 1.1.6** (Měřitelný prostor). Dvojici  $(X, \Sigma)$  z Definice 1.1.4, neboli množinu  $X$  s nějakou  $\sigma$ -algebrou na  $X$  nazýváme *měřitelným prostorem*.

**Příklad 1.1.7.** Dvojice

$$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}), (\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}) \text{ nebo také } (\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$$

jsou zřejmě měřitelnými prostory. Ve druhé kapitole nás bude především zajímat měřitelný prostor

$$(\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$$

vystavěný na  $\sigma$ -algebře borelovských množin. Zápisem  $\mathbb{R}^*$  rozumíme  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

**Definice 1.1.8** (Množinová funkce). Bud'  $\mathcal{U}$  množinový systém v  $X$ . Zobrazení

$$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \tag{1.1.1}$$

nazveme *množinovou funkcí* na  $\mathcal{U}$ .

**Příklad 1.1.9.** Necht'  $\mathcal{U}$  jsou intervaly  $I$  v  $\mathbb{R}$ . Zobrazení

$$\phi(I) = 0 \quad \forall I \in \mathcal{U} \quad (1.1.2)$$

je jistě množinovou funkcí, i když nevalného významu pro další práci. Přesuneme-li se do roviny  $\mathbb{R}^2$ , označíme-li  $R := (a, b) \times (c, d)$  obdélníky tvořící množinový systém (jako v Příkladu 1.1.3), je množinovou funkcí např.

$$\phi(R) = (b - a) \cdot (d - c). \quad (1.1.3)$$

Definice množinové funkce je velmi obecná, takže na stejném množinovém systému je množinovou funkcí také jen "délka základny"

$$\phi(R) = (b - a). \quad (1.1.4)$$

Taková funkce už ovšem charakterizuje obdélník  $R$  znatelně hůře, neboť vůbec nenese informaci o jeho "výšce"  $(c, d)$ .

Uvedeným příkladem jsme chtěli mimo jiné naznačit, že při konstrukci míry je třeba dávat pozor na vhodnou volbu množinové funkce, abychom nezískali míru, která nemá žádný praktický smysl (to by byla míra založená na množinové funkci 1.1.2).

**Definice 1.1.10** (Vnější míra). Necht'  $X$  je abstraktní bodová množina a množiny  $A, B \subset 2^X$ . Funkce  $\mu^*$ , která zobrazuje potenční množinu  $2^X$  do intervalu  $[0, \infty]$  a má následující vlastnosti, se nazývá *vnější míra* na množině  $X$ .

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
2.  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ,
3.  $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ .

**Definice 1.1.11** (Míra). Necht'  $(X, \Sigma)$  je měřitelný prostor a  $A_j$  jsou podmnožiny potenční množiny  $2^X$ . Množinová funkce  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  se nazývá *míra*, pokud

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2.  $\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j)$ , kde množiny  $A_j$  jsou po dvou disjunktní.

**Definice 1.1.12** (Prostor s mírou). Trojici  $(X, \Sigma, \mu)$ , neboli prostor, na němž existuje  $\sigma$ -algebra a zobrazení  $\mu$  nazýváme *prostor s mírou*.

**Pozorování 1.1.13** (Vztah míry a vnější míry). Zřejmě platí následující implikace:

$$\mu \text{ je míra} \Rightarrow \mu \text{ je vnější míra.}$$

Obrácená implikace ovšem obecně neplatí. Necht'  $I$  je reálný interval typu  $[a, b]$ . Bud'

$$\mu^*(I) = \begin{cases} 0 & \text{pro } I = \emptyset, \\ (b - a) + 1 & \text{pro } I = [a, b]. \end{cases}$$

Toto zobrazení zřejmě splňuje všechny vlastnosti Definice 1.1.10 a je tedy vnější mírou, o míru se ale rozhodně nejedná. Porušena je druhá vlastnost z definice míry, protože např.

$$\mu^*([0, 1]) + \mu^*([1, 2]) = 4 \neq 3 = \mu^*([0, 2]).$$

Vnější míra tedy není mírou automaticky, jen za určitých předpokladů, které si teď uvedeme.

**Definice 1.1.14.** Necht'  $\mu^*$  je vnější míra. Řekneme, že množina  $M$  je  $\mu^*$ -měřitelná, pokud pro libovolnou podmnožinu  $S \subset X$  platí:

$$\mu^*(S) = \mu^*(M \cap S) + \mu^*(S \setminus M). \quad (1.1.5)$$

Následující tvrzení uvedeme bez důkazu.

**Věta 1.1.15** (Carathéodory). *Necht'  $\mu^*$  je vnější míra. Potom je systém  $\mu^*$ -měřitelných množin  $\sigma$ -algebrou a restrikce  $\mu^*$  na  $\mu^*$ -měřitelné množiny je míra.*

## 1.2 Hausdorffova vnější míra a Hausdorffova míra

V této podkapitole zavedeme Hausdorffovu míru, pojem definovaný např. v [4], odkud čerpá i text této části. Ke konstrukci Hausdorffovy míry užijeme klasického ([11]) postupu. Ten spočívá v zavedení množinové funkce na nějakém množinovém systému. Z této množinové funkce zkonstruujeme vnější míru, která na dané  $\sigma$ -algebře bude mírou. Z abstraktní množiny  $X$  se teď přesuneme do prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 1.2.1** (Spočetné pokrytí). Buďte  $P_i$  podmnožiny  $\mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Necht'

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i.$$

Potom množině  $P$  říkáme *spočetné pokrytí množiny*  $M \subset \mathbb{R}^n$  právě tehdy, když platí

$$M \subseteq P. \quad (1.2.1)$$

**Poznámka 1.2.2.** Spočetným pokrytím je také konečné pokrytí

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i,$$

kde  $n$  je konečné přirozené číslo.

**Definice 1.2.3** (Eukleidovská metrika). Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Zobrazení  $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  ve tvaru

$$\rho(a, b) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}, \quad (1.2.2)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , nazveme *eukleidovskou metrikou* na  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 1.2.4** (Diametr). Necht'  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Číslo

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y), \quad (1.2.3)$$

které charakterizuje vzdálenost dvou navzájem nejvzdálenějších prvků množiny  $M$ , nazveme *diametrem množiny*  $M$ .

**Příklad 1.2.5.** Diametrem reálného otevřeného intervalu je jeho délka, diametrem kruhu v rovině je jeho průměr. Diametrem elipsy je vzdálenost mezi oběma průsečíky elipsy s přímkou procházející jejími ohnisky. V prostoru  $\mathbb{R}^3$  je diametrem koule její průměr.

**Definice 1.2.6** ( $\varepsilon$ -pokrytí). Necht'  $\varepsilon$  je kladné, reálné číslo. Bud'

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$$

spočetné pokrytí množiny  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že toto pokrytí je  $\varepsilon$ -pokrytí právě tehdy, když

$$d(P_i) \leq \varepsilon \tag{1.2.4}$$

pro všechny množiny  $P_i \in P$ .

V kapitole 1.1 byly zavedeny některé abstraktní pojmy, s nimiž můžeme ztotožnit některé objekty definované nyní. Výchozí množinovou funkcí pro konstrukci Hausdorffovy míry je diametr množiny, výchozím množinovým systémem jsou všechny podmnožiny  $\mathbb{R}^n$ , u nichž má smysl o diametru hovořit a u nichž je diametr menší než dané  $\varepsilon$ . Nyní už zbývá zkonstruovat Hausdorffovu vnější míru, z níž díky Větě 1.1.15 po restrikci na měřitelné množiny "zadarmo" získáme míru.

**Definice 1.2.7.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Potom pro  $\varepsilon > 0$  a  $s \geq 0$  bud'

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (d(P_i))^s : M \subseteq \cup P_i, d(P_i) \leq \varepsilon \right\}, \tag{1.2.5}$$

číslu  $s$  říkáme *rozměr* a množiny  $P_i$  tvoří  $\varepsilon$ -pokrytí množiny  $M$ .

Vzhledem k tomu, že množinu  $M$  se snažíme pokrýt co nejpřesněji, je přirozené uvažovat velmi malá kladná  $\varepsilon$ , pro něž se  $\varepsilon$ -pokrytími nejvíce přiblížíme množině  $M$ . Konkrétně uvažujeme  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . To vede k definici Hausdorffovy vnější míry:

**Definice 1.2.8** (Hausdorffova vnější míra rozměru  $s$ ).

$$\mathcal{H}^s(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon^s(M). \tag{1.2.6}$$

Zobrazení  $\mathcal{H}^s, M \mapsto \mathcal{H}^s(M)$  říkáme *Hausdorffova vnější míra (rozměru  $s$ )*.

**Poznámka 1.2.9** (Existence limity 1.2.6). Hodnota  $d(P_i)$ , tím pádem i  $(d(P_i))^s$  je kladné, konečné reálné číslo. Výraz 1.2.5 je infimem ze sumy těchto kladných čísel. Pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se množina možných různých pokrytí zmenšuje, a tedy z vlastností infima vyplývá, že

$$\varepsilon \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon^s(M) \text{ je rostoucí funkce.} \tag{1.2.7}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že limita 1.2.6 může nabývat pouze nezáporných reálných hodnot, nuly, nebo je to  $+\infty$ .

Zjistili jsme tedy, že výsledná hodnota  $\mathcal{H}^s(M)$  leží v intervalu  $[0, +\infty]$ . Dá se také ukázat, že pro některá  $s$  splývá Hausdorffova míra s mírou Lebesgueovou (viz [11]), a proto ji také můžeme považovat za určité zobecnění pojmu *objem*.

**Poznámka 1.2.10.** Pro množinu  $M$  výraz  $\mathcal{H}^s(M)$  s rostoucím  $s$  klesá, protože z nerovností

$$0 < d(P_i) \leq \varepsilon < 1 \quad (1.2.8)$$

vyplývá, že

$$s_1 < s_2 \Rightarrow (d(P_i))^{s_1} > (d(P_i))^{s_2}. \quad (1.2.9)$$

Zobrazení  $\mathcal{H}^s(\cdot)$ , které jsme definovali, nazýváme Hausdorffova vnější míra a tvrdíme o něm (viz začátek této podkapitoly 1.2), že je na  $\mu^*$ -měřitelných množinách z Definice 1.1.14 mírou. V první řadě je ovšem nezbytné ověřit, že jde skutečně o vnější míru. Ukážeme, že Hausdorffova vnější míra má vlastnosti vnější míry z Definice 1.1.10 a využitím zmiňované podmínky (1.1.5) získáme míru na  $\sigma$ -algebách z  $2^{\mathbb{R}^n}$ . Tento postup pochází z [10], strana 398, poznámka 51.37. Důkazy jsou převzaty z [12] a upraveny (totéž platí také pro podkapitulu 1.4).

**Věta 1.2.11.** Hausdorffova  $s$ -rozměrná vnější míra prázdné množiny je nula, tedy

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0 \text{ pro libovolné } s \in \mathbb{R}_0^+.$$

DŮKAZ.

Prázdnou množinu můžeme pokrýt jednou množinou, např. koulí o diametru  $\varepsilon$ . Tedy

$$0 \leq \mathcal{H}_\varepsilon^s(\emptyset) = \inf \left( \sum_{P_j \in \mathcal{P}} (d(P_j))^s \right). \quad (1.2.10)$$

Vzhledem k tomu, že k pokrytí stačí jedna množina  $P_j = P$ , vyskytuje se v sumě pouze jeden člen a  $d(P_j) = \varepsilon$ . Platí:

$$0 \leq \mathcal{H}_\varepsilon^s(\emptyset) = \inf \varepsilon^s. \quad (1.2.11)$$

Pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  a pevné  $s$  pak

$$\varepsilon^s \rightarrow 0^+, \text{ a tedy } \mathcal{H}^s(\emptyset) = 0. \quad (1.2.12)$$

□

**Věta 1.2.12.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n, O \subset \mathbb{R}^n$  a  $M \subset O$ . Potom  $\mathcal{H}^s(M) \leq \mathcal{H}^s(O)$ .

DŮKAZ

Protože  $M \subset O$ , je zřejmě každé  $\varepsilon$ -pokrytí množiny  $O$  také pokrytím  $M$ , které může být ale zbytečně rozsáhlé. Na výběr tak ještě mohou existovat některá další pokrytí, která pokryjí  $M$ , ale už nepokryjí  $O$ . (Tj. množina možných pokrytí  $M$  je větší). Z vlastností infima vyplývá:

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(M) \leq \mathcal{H}_\varepsilon^s(O). \quad (1.2.13)$$

Tedy i v případě, že  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , platí

$$\mathcal{H}^s(M) \leq \mathcal{H}^s(O). \quad (1.2.14)$$

□

**Věta 1.2.13.** *Nechť  $(M_i)$  je posloupnost navzájem disjunktních množin v  $\mathbb{R}^n$ . Potom*

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(M_i). \quad (1.2.15)$$

DŮKAZ

Předpokládejme, že součet  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\varepsilon}^s(M_i)$  je pro nějaké  $\varepsilon$ -pokrytí posloupnosti množin  $M_i$  konečný. Z definice infima vyplývá, že každou množinu  $M_i$  z dané posloupnosti množin lze pokrýt množinami  $P_{i,j}$  tak, že platí

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^s(M_i) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} (d(P_{i,j}))^s\right) < \mathcal{H}_{\varepsilon}^s(M_i) + \beta_i(\varepsilon), \quad (1.2.16)$$

kde  $\beta_i$  jsou kladné funkce  $\varepsilon$  takové, že splňují  $\varepsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow \beta_i(\varepsilon) \rightarrow 0^+$ . Množiny  $P_{i,j}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  tvoří  $\varepsilon$ -pokrytí množiny  $\bigcup_i M_i$ , tedy platí

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^s\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (d(P_{i,j}))^s\right). \quad (1.2.17)$$

Zvolíme-li nyní funkci  $\beta_i$  ve tvaru  $\beta_i(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2^i}$  (stačí zvolit jakékoli funkce  $\beta_i$ , které pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  jdou k nule zprava a jejich součet  $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\varepsilon) = \varepsilon$  (to bude využito v dalším kroku důkazu), tedy např.  $\beta_i(\varepsilon) = \frac{(n-1) \cdot \varepsilon}{n^i}$ ,  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), platí tyto nerovnosti:

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^s\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (d(P_{i,j}))^s\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}_{\varepsilon}^s(M_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\varepsilon}^s(M_i). \quad (1.2.18)$$

Nerovnosti v (1.2.18) platí pro jakékoli kladné  $\varepsilon$ , z čehož vyplývá, že limitním přechodem dostaneme

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(M_i). \quad (1.2.19)$$

□

Uvedená tři tvrzení tedy dokazují, že definované zobrazení  $\mathcal{H}^s(\cdot)$  má vlastnosti vnější míry, a tedy na množinách  $\sigma$ -algebry (splňujících vztah 1.1.5 z první kapitoly) je Hausdorffova vnější míra skutečně také míra.

### 1.3 Hausdorffova dimenze

V minulé podkapitole představená Hausdorffova míra úzce souvisí s tzv. rozměrem  $s$ . Nyní ukážeme jeho význam definicí Hausdorffovy dimenze a posléze objasníme její vztah k hodnotě Hausdorffovy míry dané množiny.

**Definice 1.3.1** (Hausdorffova dimenze). Číslo

$$\dim_H(M) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(M) > 0\} \quad (1.3.1)$$

říkáme *Hausdorffova dimenze množiny  $M$* .

**Pozorování 1.3.2** (Dimenze prázdné množiny). Již jsme ukázali, že

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$$

pro libovolné  $s \in [0, \infty]$ . Neexistuje tedy takové  $s$ , pro které by byla Hausdorffova míra prázdné množiny nenulová, neboli množina takových přípustných  $s$  je prázdná. Z toho plyne

$$\dim_H(\emptyset) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(\emptyset) > 0\} = \sup\{\emptyset\}.$$

Supremum prázdné množiny se běžně definuje jako  $-\infty$ , z čehož vyplývá, že

$$\dim_H(\emptyset) = \sup\{\emptyset\} = -\infty. \quad (1.3.2)$$

Nyní se budeme zabývat hodnotami Hausdorffovy míry v závislosti na rozměru  $s$ , čímž ukážeme význam Hausdorffovy dimenze.

**Lemma 1.3.3.** *Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$  a  $r > s > 0$  jsou reálná čísla. Potom*

$$\mathcal{H}_\varepsilon^r(M) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}_\varepsilon^s(M). \quad (1.3.3)$$

DŮKAZ

Nechť množiny  $P_i$  jsou  $\varepsilon$ -pokrytím množiny  $M$ . Potom

$$\mathcal{H}_\varepsilon^r(M) = \inf\left(\sum_i (d(P_i))^r\right) = \inf\left(\sum_i (d(P_i))^s \cdot (d(P_i))^{r-s}\right) \leq \inf\left(\varepsilon^{r-s} \cdot \sum_i (d(P_i))^s\right) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}_\varepsilon^s(M),$$

přičemž  $\varepsilon^{r-s}$  je konstanta a lze ji tedy ze sumy vytknout.

□

**Věta 1.3.4.** *Bud' te  $r > s > t > 0$  reálná čísla a  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Potom platí následující vztahy:*

$$\infty > \mathcal{H}^s(M) \Rightarrow \mathcal{H}^r(M) = 0 \quad (1.3.4)$$

a

$$\mathcal{H}^s(M) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(M) = \infty. \quad (1.3.5)$$

DŮKAZ

Pomocí Lemmatu 1.3.3 získáme nerovnosti

$$\mathcal{H}_\varepsilon^r(M) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}_\varepsilon^s(M) \quad (1.3.6)$$

a

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(M) \geq \frac{\mathcal{H}_\varepsilon^s(M)}{\varepsilon^{s-t}}. \quad (1.3.7)$$

Jde-li  $\varepsilon$  k nule zprava, potom

$$\mathcal{H}^r(M) = 0 \quad \text{a} \quad \mathcal{H}^t(M) = \infty. \quad (1.3.8)$$

□

**Pozorování 1.3.5.** Z předchozí věty vyplývá, že Hausdorffova míra množiny  $M$  nabývá hodnot 0 nebo  $\infty$ , až na číslo  $s$ . Právě toto  $s$  z předpokladů Věty 1.3.4 je *Hausdorffovou dimenzí* množiny  $M$  - přesně podle definice je to největší rozměr Hausdorffovy míry, pro nějž je ještě nenulová. Poznatky o Hausdorffově dimenzi tak můžeme shrnout do tří vztahů:

- $\mathcal{H}^s(M) = \infty$  pro  $s < \dim_H(M)$
- $\mathcal{H}^s(M) = 0$  pro  $s > \dim_H(M)$
- $\mathcal{H}^s(M) \in \mathbb{R}^+ \cup \infty$  pro  $s = \dim_H(M)$ .

Nakonec si spíše jen pro doplnění terminologie uvedeme následující definici.

**Definice 1.3.6** ( $s$ -množina). Nechť  $0 \leq s \leq 1$ . Množina  $M \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá  $s$ -množina, jestliže je její Hausdorffova míra rozměru  $s$  konečné, kladné číslo. Tedy platí

$$0 < \mathcal{H}^s(M) < \infty, \quad \text{neboli} \quad s = \dim_H(M). \quad (1.3.9)$$

**Příklad 1.3.7.** Libovolná podmnožina  $\mathbb{R}^n$  tvořená konečným počtem bodů je 0-množinou a reálné intervaly jsou 1-množiny, jak je vysvětleno v následující kapitole. Dále se v textu setkáme s fraktální množinou jménem *Cantorovo diskontinuum*, které je, jak bude dokázáno,  $\log_3(2)$ -množinou.

#### 1.4 Další vlastnosti Hausdorffovy míry

**Věta 1.4.1.** *Bud'  $M$  konečná podmnožina  $\mathbb{R}^n$  tvořená  $k$  body. Potom hodnota 0-rozměrné míry  $\mathcal{H}^0(M)$  je rovna počtu bodů tvořících množinu  $M$ , tedy*

$$\mathcal{H}^0(M) = k.$$

DŮKAZ

Nechť množiny  $P_i$  jsou  $\varepsilon$ -pokrytím množiny  $M$ . Zřejmě pro každou množinu  $P_i$  platí  $(d(P_i))^0 = 1$ , tedy  $\sum_i (d(P_i))^0$  je počet množin  $P_i$ . Protože je  $M$  tvořena  $k$  body, platí

$$\mathcal{H}_\varepsilon^0(M) \leq \sum_{i=1}^k \varepsilon^0 = k. \quad (1.4.1)$$

Pro libovolné kladné  $\varepsilon$  platí  $\varepsilon^0 = 1$ , tedy i pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . To znamená, že

$$\mathcal{H}^0(M) = k. \quad (1.4.2)$$

□

**Poznámka 1.4.2.** Zobrazení  $\mathcal{H}^0(\cdot)$  z Věty 1.4.1 se nazývá také *aritmetická míra*.

**Věta 1.4.3.** *Nechť  $M$  je konečná podmnožina  $\mathbb{R}^n$  tvořená  $k$  body a  $s > 0$ . Potom*

$$\mathcal{H}^s(M) = 0. \quad (1.4.3)$$

DŮKAZ

Množinu  $M$  pokryjeme koulemi o diametru  $\varepsilon$  a středy v bodech tvořících  $M$ . Platí:

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(M) \leq \sum_{i=1}^k \varepsilon^s, \quad (1.4.4)$$

kde  $k$  je konečné přirozené číslo. Potom pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\mathcal{H}^s(M) = 0. \quad (1.4.5)$$

□



**Věta 1.4.4.** V prostoru reálných čísel  $\mathbb{R}$  splývá jednorozměrná Hausdorffova míra  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  s Lebesgueovou mírou  $\lambda(\cdot)$ .

DŮKAZ

Nejprve zvolíme reálný interval  $I$  s konečnou délkou  $\ell(I)$ , kde

$$\ell(I) = \sup I - \inf I, \text{ kde } \sup I := b, \inf I := a. \quad (1.4.6)$$

Interval  $I = (a, b)$  lze rozdělit pomocí bodů  $x_i$  tak, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (1.4.7)$$

$\forall \varepsilon > 0$  je možné dále zavést takové dělení intervalu, že

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} : x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon. \quad (1.4.8)$$

Bez újmy na obecnosti může být příkladem takového dělení rozdělení na  $n$  stejně dlouhých intervalů

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \ell(I) = n \cdot \frac{b-a}{n}, \text{ kde } \frac{b-a}{n} \leq \varepsilon. \quad (1.4.9)$$

Interval  $I$  je tedy pokryt spočetným systémem  $n$  stejně dlouhých intervalů  $[x_i, x_{i+1}]$ , přičemž  $\varepsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow n \rightarrow \infty$ . Platí:

$$\mathcal{H}^1(I) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left( \sum_{i=1}^n ((d([x_i, x_{i+1}]))^1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left( n \cdot \frac{b-a}{n} \right) = b-a = \lambda(I). \quad (1.4.10)$$

Na jednorozměrném reálném intervalu tedy skutečně odpovídá Hausdorffova míra  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  míře Lebesgueově. □

S následující definicí se lze setkat v [1].

**Definice 1.4.5** ( $\sigma$ -konečná míra). Necht'  $(X, \Sigma, \mu)$  je prostor s mírou. Existují-li množiny  $X_1, X_2, \dots \in \Sigma$  takové, že

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X \quad \text{a} \quad \forall i \in \mathbb{N} : \mu(X_i) < \infty,$$

řekneme, že míra  $\mu$  je v  $X$   $\sigma$ -konečná.

**Příklad 1.4.6.** Jednoduchým příkladem  $\sigma$ -konečné míry je Lebesgueova míra v  $\mathbb{R}$ . Celou reálnou osu můžeme pokrýt spočetným systémem neprázdných intervalů konečné délky (a tedy i konečné Lebesgueovy míry). Dle Věty 1.4.4 lze jednorozměrnou Hausdorffovu míru  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  ztotožnit s mírou Lebesgueovou. To ale znamená, že  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  je také  $\sigma$ -konečná. Jiným případem je ovšem Hausdorffova míra rozměru  $s$ , kde  $0 \leq s < 1$ .

**Věta 1.4.7.** Necht'  $0 \leq s < 1$ . Potom Hausdorffova míra  $\mathcal{H}^s(\cdot)$  není na  $\mathbb{R}$   $\sigma$ -konečná.

DŮKAZ

Z Věty 1.4.1 vyplývá, že míra  $\mathcal{H}^0(\cdot)$  je vlastně aritmetickou mírou a jako taková nemůže být pro reálný interval nenulové délky konečná, navíc množinami, které obsahují konečný počet bodů, nelze  $\mathbb{R}$  pokrýt.

V případě, že  $0 < s < 1$ , použijeme Větu 1.3.4. Protože pro libovolný neprázdný interval  $I \subset \mathbb{R}$  platí, že  $\mathcal{H}^1(I) = \lambda(I)$  (viz Věta 1.4.4), je zřejmé, že  $\mathcal{H}^1(I) > 0$ . Užitím Věty 1.3.4 zřejmě  $\mathcal{H}^s(I) = \infty$  a tato míra tedy nemůže být  $\sigma$ -konečná.

□

Po uvedení některých zajímavých vlastností je vhodné na závěr této podkapitoly upozornit na důležitý fakt, že pro měnící se  $s$  se mění pro danou množinu na daném prostoru nejen hodnota Hausdorffovy míry, ale poměrně značně se může měnit i charakter zobrazení  $\mathcal{H}^s(\cdot)$ , některé vlastnosti se mohou s klesajícím  $s$  ztrácet (příkladem budiž právě ona  $\sigma$ -konečnost míry). Hausdorffovu míru tedy nelze zcela chápat jako jednu míru, ale spíše jako celou množinu měr, které mohou mít v závislosti na rozměru  $s$  různé vlastnosti.

## 1.5 Zobecnění

Výše jsme si tedy ukázali, že pojem *Hausdorffova míra* je poměrně obecný. V obecnosti je však možno zajít dále, Hausdorffova míra tak, jak jsme ji definovali, lze ještě zobecnit volbou jiné množinové funkce, než je  $(d(P_i))^s$ . Taková funkce ovšem musí splňovat jisté předpoklady, neboli požadujeme, aby některé vlastnosti funkce  $(d(P_i))^s$  zůstaly zachovány. Definice v této podkapitole jsou převzaty z knih [13], [11] a z článku [15].

**Definice 1.5.1** (Zprava spojitá funkce). Nechť funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  je v bodě  $x_0$  *spojitá zprava*, jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \quad (1.5.1)$$

**Definice 1.5.2** (Indexová funkce). Bud'  $l > 0$ . Nechť  $\psi : [0, l) \rightarrow [0, \infty)$  je rostoucí, zprava spojitá funkce taková, že

$$\psi(0) = 0. \quad (1.5.2)$$

Takové funkci  $\psi$  říkáme *indexová funkce*.

Nyní již můžeme přejít k definici obecnější Hausdorffovy míry.

**Definice 1.5.3.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Potom pro  $\varepsilon > 0$  a indexovou funkci  $\psi$  bud'

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \psi(d(P_i)) : M \subseteq \cup P_i, d(P_i) \leq \varepsilon \right\}. \quad (1.5.3)$$

V následující definici již tedy nemá smysl hovořit o rozměru  $s$ .

**Definice 1.5.4** (Hausdorffova vnější míra).

$$\mathcal{H}^\psi(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M). \quad (1.5.4)$$

Zobrazení  $\mathcal{H}^\psi : M \mapsto \mathcal{H}^\psi(M)$  se nazývá *Hausdorffova vnější míra* vzhledem k indexové funkci  $\psi$ .

Ted' už stačí jen ukázat (stejně jako v kapitole 1.2), že zobrazení  $M \mapsto \mathcal{H}^\psi(M)$  opravdu má vlastnosti vnější míry, která na množinách  $\sigma$ -algebry splňujících podmínku Věty 1.1.15 je také mírou. Toho dosáhneme formulováním tří pomocných tvrzení, díky nimž ověříme vlastnosti vnější míry. Důkazy budou velice podobné důkazům v kapitole 1.2 u vět 1.2.11, 1.2.12 a 1.2.13.

**Věta 1.5.5.** *Hausdorffova vnější míra prázdné množiny  $\mathcal{H}^\psi(\emptyset) = 0$  pro libovolnou indexovou funkci  $\psi$ .*

DŮKAZ.

Prázdnou množinu i v tomto případě pokryjeme koulí o diametru  $\varepsilon$ . Tedy

$$0 \leq \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(\emptyset) = \inf \left( \sum_{P_j \in P} \psi(d(P_j)) \right). \quad (1.5.5)$$

V sumě se vyskytuje jen jeden člen a  $d(P_j) = \varepsilon$ . Platí:

$$0 \leq \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(\emptyset) = \inf \psi(\varepsilon). \quad (1.5.6)$$

Funkce  $\psi$  je indexová, tedy rostoucí, zprava spojitá a navíc  $\psi(0) = 0$ . Pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  tedy platí

$$\psi(\varepsilon) \rightarrow 0^+, \text{ a tedy } \mathcal{H}^\psi(\emptyset) = 0. \quad (1.5.7)$$

□

**Věta 1.5.6.** *Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n, O \subset \mathbb{R}^n$  a  $M \subset O$ . Potom  $\mathcal{H}^\psi(M) \leq \mathcal{H}^\psi(O)$ .*

DŮKAZ

Důkaz je prakticky totožný s důkazem Věty 1.2.12, zde tedy pouze budeme konstatovat, že i v tomto obecnějším tvrzení díky množství možných pokrytí a vlastnostem infima platí, že

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M) \leq \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(O). \quad (1.5.8)$$

Tedy i pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  platí

$$\mathcal{H}^\psi(M) \leq \mathcal{H}^\psi(O). \quad (1.5.9)$$

□

**Věta 1.5.7.** *Nechť  $(M_i)$  je posloupnost disjunktních množin v  $\mathbb{R}^n$ . Potom*

$$\mathcal{H}^\psi \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^\psi(M_i). \quad (1.5.10)$$

DŮKAZ

I důkaz třetího tvrzení je velmi blízký důkazu Věty 1.2.13 a opět spočívá ve vhodné volbě funkce  $\beta_i(\cdot)$ , která je využita pro omezení Hausdorffovy míry jednotlivých množin  $M_i$ . Tedy opět za předpokladu, že výraz  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M_i) < \infty$  pro nějaké  $\varepsilon$ -pokrytí posloupnosti množin  $M_i$  vyplývá z definice infima, že každou množinu  $M_i$  z dané posloupnosti množin lze pokrýt množinami  $P_{i,j}$  takovými, že platí

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M_i) \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \psi(d(P_{i,j})) \right) < \mathcal{H}_\varepsilon^\psi(M_i) + \beta_i(\varepsilon), \quad (1.5.11)$$

kde  $\beta_i$  jsou kladné funkce  $\varepsilon$  s vlastností

$$\varepsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow \beta_i(\varepsilon) \rightarrow 0^+. \quad (1.5.12)$$

Množiny  $P_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}$  tvoří  $\varepsilon$ -pokrytí sjednocení  $\bigcup_i M_i$ , tedy platí

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\psi\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \psi(d(P_{i,j})) \right). \quad (1.5.13)$$

Zvolíme-li nyní funkce  $\beta_i(\cdot)$  ve tvaru  $\beta_i(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2^i}$  (obecně stačí zvolit funkce tak, jak bylo naznačeno v důkazu Věty 1.2.13), jsou v platnosti tyto nerovnosti:

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\psi\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \psi(d(P_{i,j})) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mathcal{H}_{\frac{\varepsilon}{2^i}}^\psi(M_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\frac{\varepsilon}{2^i}}^\psi(M_i). \quad (1.5.14)$$

Uvedené nerovnosti jsou ale splněny pro jakékoli kladné  $\varepsilon$ , a tedy

$$\mathcal{H}^\psi\left(\bigcup_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^\psi(M_i). \quad (1.5.15)$$

□

Z předchozích tří tvrzení vyplývá, že i zobrazení  $\mathcal{H}^\psi(\cdot)$  definované na bázi indexové funkce je vnější mírou, to znamená, že na množinách  $\sigma$ -algebry, pro něž platí vztah 1.1.5 z první kapitoly, je Hausdorffova vnější míra také míra.

Po definici obecnější varianty Hausdorffovy míry si nyní na třech příkladech (v  $\mathbb{R}$ ) předvedeme, jak může tato míra konkrétně vypadat.

**Příklad 1.5.8** (Hausdorffova míra pro  $\psi(d(P_i)) = e^{d(P_i)} - 1$ ). Nejprve musíme ověřit, že funkce

$$\psi(d(P_i)) = e^{d(P_i)} - 1 \quad (1.5.16)$$

je skutečně indexovou funkcí. Toho dosáhneme poměrně snadno, protože daná funkce je rostoucí a spojitá (tedy i zprava spojitá), navíc

$$e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^0 - 1 = 0.$$

Zadaná funkce je tedy opravdu indexovou funkcí dle Definice 1.5.2. Nyní budeme zkoumat, jakou Hausdorffovu míru vzhledem k této indexové funkci má reálný interval  $[a, b]$ . Nejprve musíme nalézt vhodné  $\varepsilon$ -pokrytí. Bez újmy na obecnosti můžeme interval  $[a, b]$  ekvidistantně rozdělit na  $n$  podintervalů délky  $\frac{b-a}{n}$ , kde  $\frac{b-a}{n} \leq \varepsilon$ . Platí:

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) = n \cdot \psi\left(\frac{b-a}{n}\right), \quad (1.5.17)$$

a tedy

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( n \cdot \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) \right), \quad \frac{b-a}{n} \leq \varepsilon. \quad (1.5.18)$$

To je ekvivalenční s limitou

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left( n \cdot \psi \left( \frac{b-a}{n} \right) \right). \quad (1.5.19)$$

Po dosazení za  $\psi$  a po úpravách:

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left( (n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n \right). \quad (1.5.20)$$

Protože  $(n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n$  je klesající posloupnost, platí

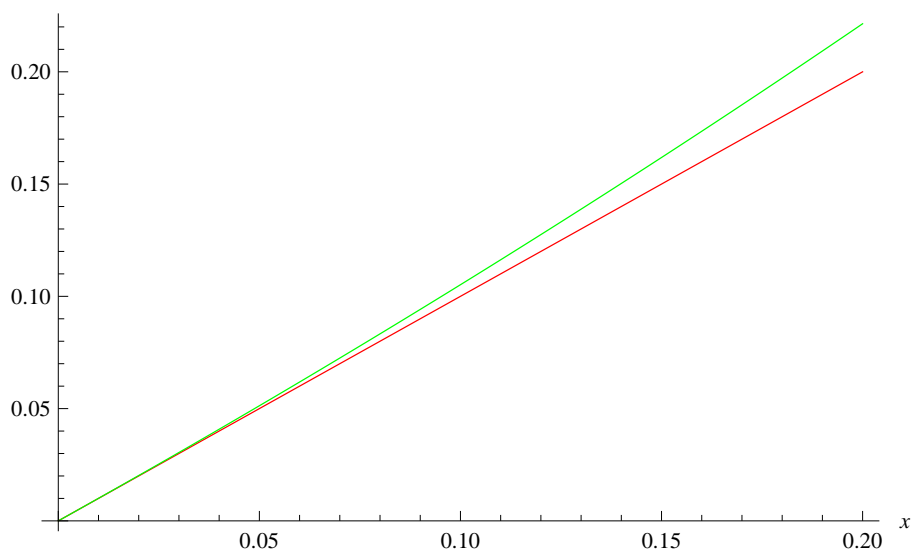
$$\inf \left( (n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n \right) = b - a. \quad (1.5.21)$$

To znamená, že

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} b - a = b - a = \mathcal{H}^1([a, b]). \quad (1.5.22)$$

Tato na první pohled překvapivá shoda má ovšem jednoduchou příčinu. V okolí nuly se funkce  $x$  a  $e^x - 1$  chovají velmi podobně, neboli

$$x \approx e^x - 1, \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.5.23)$$



Obrázek 1: Srovnání funkcí  $x$  (červená) a  $e^x - 1$  (zelená) v pravém okolí nuly

V dalších dvou příkladech ukážeme, pro které indexové funkce Hausdorffova míra reálného intervalu  $[a, b]$  s mírou  $\mathcal{H}^1([a, b])$  nesplyvá.

**Příklad 1.5.9** (Hausdorffova míra pro  $\psi(d(P_i)) = \cosh(d(P_i)) - 1$ ). Opět je nezbytné napřed ověřit, že funkce

$$\psi(d(P_i)) = \cosh(d(P_i)) - 1 \quad (1.5.24)$$

je indexovou funkcí. To je i v tomto případě velmi snadné ukázat, protože daná funkce je v  $\mathbb{R}_0^+$  rostoucí a spojitá (tedy i zprava spojitá), navíc

$$\cosh(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh(0) - 1 = 0.$$

Zadaná funkce je tedy i zde funkcí indexovou. Tak jako v minulém příkladě budeme zkoumat, jakou Hausdorffovu míru vzhledem k této indexové funkci má reálný interval  $[a, b]$ . Ten pokryjeme stejným způsobem, tj. interval  $[a, b]$  bez újmy na obecnosti ekvidistantně rozdělíme na  $n$  podintervalů délky  $\frac{b-a}{n}$ , kde  $\frac{b-a}{n} \leq \varepsilon$ . Tedy platí vztah (1.5.17) a to znamená, že

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( n \cdot \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) \right), \quad \frac{b-a}{n} \leq \varepsilon. \quad (1.5.25)$$

To opět přeformulujeme na limitu

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) \right). \quad (1.5.26)$$

Po dosazení za  $\psi$  a po jednoduchých úpravách:

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \left( n \cdot \cosh\left(\frac{b-a}{n}\right) - n \right) \right). \quad (1.5.27)$$

Protože také  $(n \cdot \cosh(\frac{b-a}{n})) - n$  je klesající posloupnost, platí

$$\inf((n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((n \cdot e^{\frac{b-a}{n}}) - n) = 0. \quad (1.5.28)$$

Z toho ale plyne, že

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = 0 < b - a = \mathcal{H}^1([a, b]). \quad (1.5.29)$$

V pravém okolí nuly je funkce  $x$  mnohem větší než indexová funkce  $\cosh(x) - 1$  (viz Obrázek 2), neboli

$$\forall \varepsilon \in (0, 1) \forall x \in (0, \varepsilon) : \quad x > \cosh(x) - 1, \quad (1.5.30)$$

takže pro velká  $n$  platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) < \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}.$$

Nyní si uvedeme poslední důležitý příklad, jehož výsledek je přesně opačný, než u příkladu předchozího.

**Příklad 1.5.10** (Hausdorffova míra pro  $\psi(d(P_i)) = \operatorname{arccosh}(d(P_i) + 1)$ ). Na úvod i nyní ověříme, že

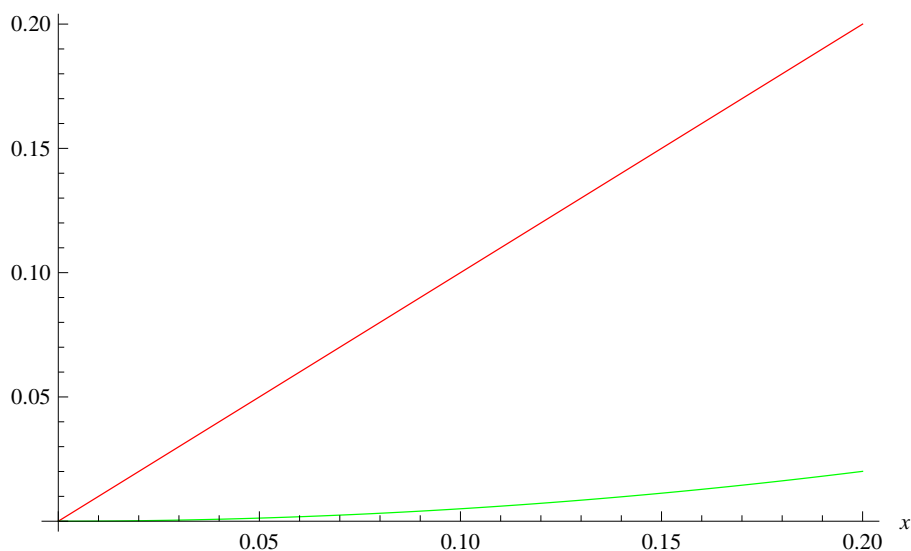
$$\psi(d(P_i)) = \operatorname{arccosh}(d(P_i) + 1) \quad (1.5.31)$$

je skutečně indexovou funkcí. Vzhledem k tomu, že daná funkce je v  $\mathbb{R}_0^+$  rostoucí a spojitá (tím pádem zprava spojitá), navíc

$$\psi(0) = \operatorname{arccosh}(1) = 0,$$

je tedy  $\psi(\cdot)$  opravdu indexovou funkcí dle Definice 1.5.2. I v posledním příkladu se budeme zabývat Hausdorffovou mírou reálného intervalu  $[a, b]$  vzhledem k této indexové funkci. Zvolíme totožné  $\varepsilon$ -pokrytí jako v minulých příkladech (ekvidistantní rozdělení  $[a, b]$  na  $n$  podintervalů délky  $\frac{b-a}{n}$ , kde  $\frac{b-a}{n} \leq \varepsilon$ ). Úvodní tři kroky výpočtu proběhnou stejně, tedy opět platí vztah (1.5.17). Výraz (1.5.18) převedeme na

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) \right). \quad (1.5.32)$$



Obrázek 2: Srovnání funkcí  $x$  (červená) a  $\cosh(x) - 1$  (zelená) v pravém okolí nuly

Dosadíme  $\psi(\cdot) = \operatorname{arccosh}(\cdot + 1)$  a upravíme.

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{b-a}{n} + 1\right) \right). \quad (1.5.33)$$

Protože  $n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{b-a}{n} + 1\right)$  je rostoucí posloupnost, musíme tentokrát postupovat jinak. V Poznámce 1.2.9 jsme se už zabývali tím, že

$$\inf \left\{ \sum d(P_i)^s : d(P_i) \leq \varepsilon \right\}$$

je pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  rostoucí. Tato úvaha se nemění ani pro indexové funkce  $\psi(\cdot)$ . Tedy platí:

$$n \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \inf \left( n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{b-a}{n} + 1\right) \right) \rightarrow +\infty.$$

Proto můžeme rovnou psát:

$$\mathcal{H}^\psi([a, b]) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{b-a}{n} + 1\right) \right) = +\infty > b - a = \mathcal{H}^1([a, b]). \quad (1.5.34)$$

V pravém okolí nuly je funkce  $x$  mnohem menší než  $\operatorname{arccosh}(x + 1)$ , neboli

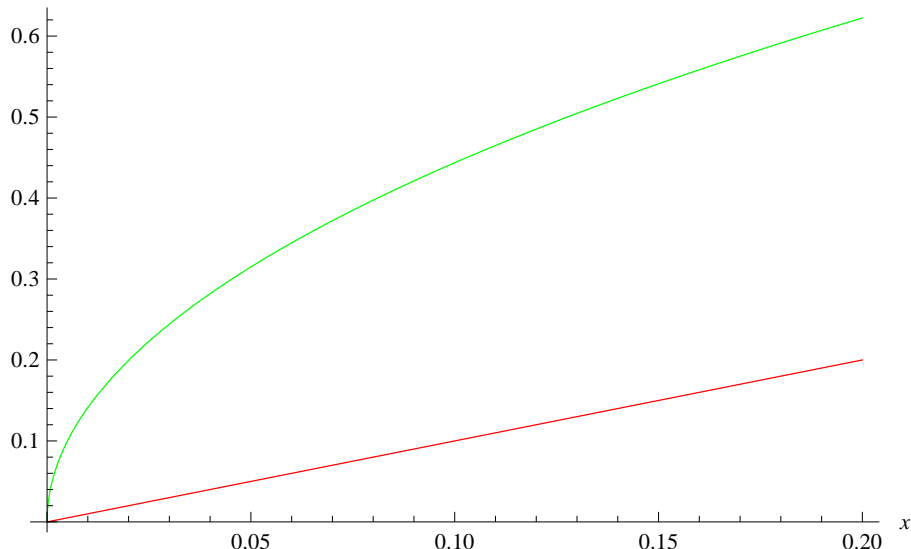
$$\forall \varepsilon \in (0, 1) \forall x \in (0, \varepsilon) : \quad x < \operatorname{arccosh}(x + 1). \quad (1.5.35)$$

Z toho vyplývá, že součty hodnot indexové funkce splňují nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{b-a}{n}\right) > \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}$$

pro velká  $n$ .

Uvedené příklady nás přivádí k myšlence, není-li možné nějak odhadnout hodnotu obecné Hausdorffovy míry podle klasifikace výchozí indexové funkce  $\psi$ , ideálně při porovnání s  $s$ -rozměrnou Hausdorffovou mírou. Tuto myšlenku formulujeme jako následující pozorování.



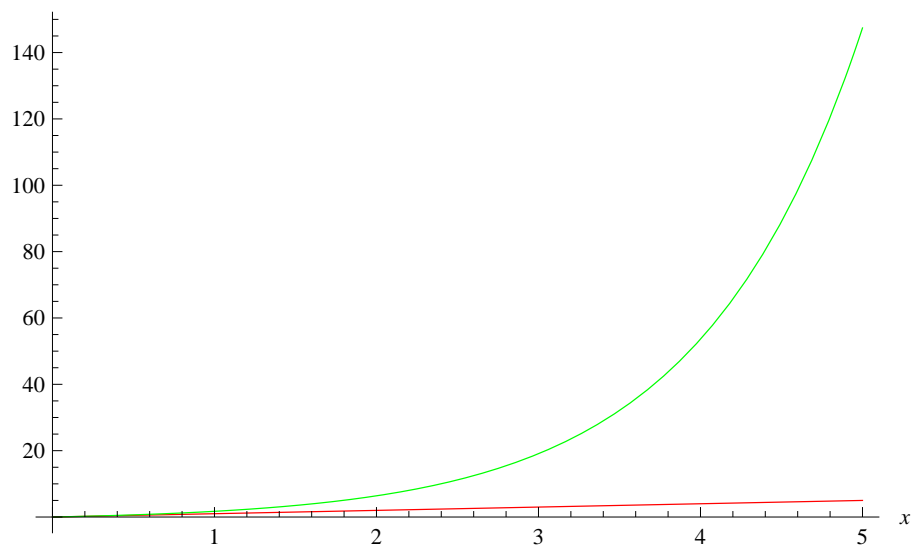
Obrázek 3: Srovnání funkcí  $x$  (červená) a  $\operatorname{arccosh}(x+1)$  (zelená) v pravém okolí nuly

**Pozorování 1.5.11.** Buďte  $M \in \mathbb{R}^n$  a  $\bigcup_i P_i$   $\varepsilon$ -pokrytí  $M$ . Necht'  $\mathcal{H}^s(\cdot)$  je Hausdorffova míra rozměru  $s$ , necht'  $\mathcal{H}^\psi(\cdot)$  je Hausdorffova míra vzhledem k indexové funkci  $\psi$ . Potom

1.  $d(P_i)^s \approx \psi(d(P_i)) \Rightarrow \mathcal{H}^s(M) \approx \mathcal{H}^\psi(M)$ ,
2.  $\left( d(P_i)^s \ll \psi(d(P_i)) \wedge \mathcal{H}^s(M) \in (0, \infty) \right) \Rightarrow \mathcal{H}^\psi(M) = 0$ ,
3.  $\left( d(P_i)^s \gg \psi(d(P_i)) \wedge \mathcal{H}^s(M) \in (0, \infty) \right) \Rightarrow \mathcal{H}^\psi(M) = \infty$ ,
4.  $\left( d(P_i)^s < \psi(d(P_i)) \wedge \mathcal{H}^s(M) = 0 \right) \Rightarrow \mathcal{H}^\psi(M) = 0$ ,
5.  $\left( d(P_i)^s > \psi(d(P_i)) \wedge \mathcal{H}^s(M) = \infty \right) \Rightarrow \mathcal{H}^\psi(M) = \infty$ .

Nejprve objasníme volbu symbolů  $\ll, \gg, \approx$ . Těmito symboly vyjadřujeme, že hodnoty daných indexových funkcí jsou buď převážně mnohem menší, mnohem větší, případně na nějakém intervalu přibližně stejné jako hodnoty porovnávané  $s$ -té mocniny. Formulace “převážně mnohem menší” nekorresponduje s lokálním chováním indexové funkce v pravém okolí nuly, ale s globálním chováním funkce pro argument jdoucí do nekonečna. Pro ilustraci tohoto jevu a pro porovnání se třemi uvedenými příklady indexových funkcí (doporučujeme porovnat s Obrázky 1, 2 a 3) předkládáme následující obrázky.



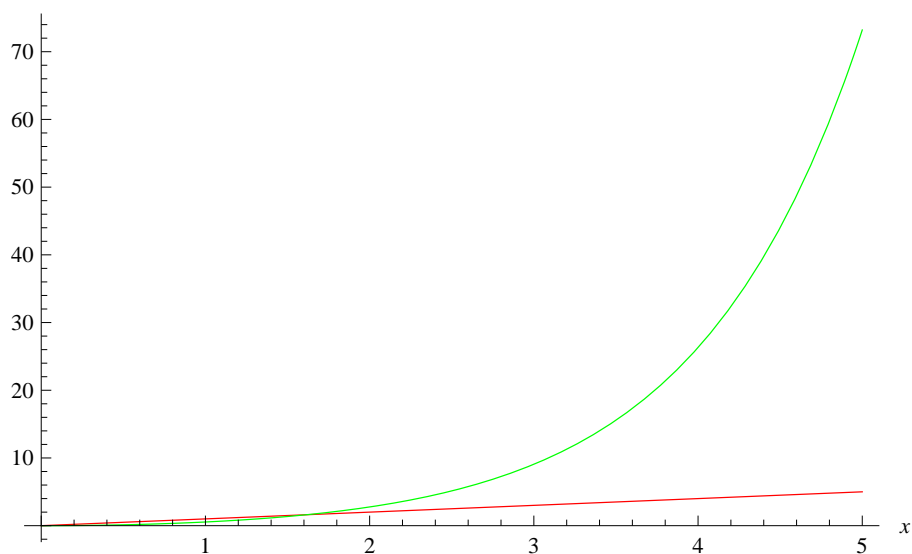


Obrázek 4: Globální pohled na indexovou funkci  $e^x - 1$  (zelená) v porovnání s  $x$  (červená)

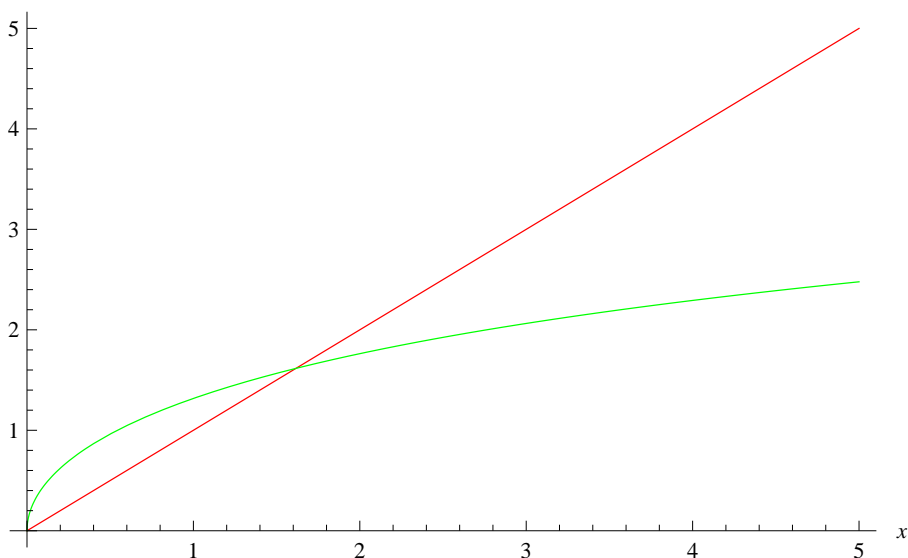
Funkce  $e^x - 1$  se tedy chová přibližně stejně jako funkce  $x$  pouze v pravém okolí nuly, pro rostoucí argument má mnohem rychlejší růst než  $x$ . Na dalších obrázcích (Obrázek 5 a 6) si můžeme všimnout, že funkce  $\cosh(x) - 1$  a  $\operatorname{arccosh}(x + 1)$  se pro velké hodnoty argumentů chovají přesně opačně, než v pravém okolí nuly. Proto např. výraz

$$d(P_i)^s \ll \psi(d(P_i))$$

ve skutečnosti znamená, že v okolí nuly nabývá indexová funkce  $\psi(\cdot)$  mnohem menších hodnot než daná  $s$ -tá mocnina.



Obrázek 5: Globální pohled na indexovou funkci  $\cosh(x) - 1$  (zelená) v porovnání s  $x$  (červená)



Obrázek 6: Globální pohled na indexovou funkci  $\operatorname{arccosh}(x+1)$  (zelená) v porovnání s  $x$  (červená)

Zavedeme-li uspořádání (viz [13], strana 78) na množině indexových funkcí ve tvaru

$$\psi_1 \prec \psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)} = 0, \quad (1.5.36)$$

lze uvedené pozorování spolu s Větou 1.3.4 zastřešit dvěma porovnávacími větami (viz [13], *Theorem 40* a jeho důsledek). Tato tvrzení uvedeme v mírně upraveném znění a bez důkazů, které jsou provedeny také v knize [13].

**Věta 1.5.12.** *Nechť  $\psi_1, \psi_2$  jsou indexové funkce,  $\psi_1 \prec \psi_2$ . Bud'  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Jestliže*

$$\mathcal{H}^{\psi_1}(M) \in (0, \infty),$$

*pak*

$$\mathcal{H}^{\psi_2}(M) = 0.$$

**Důsledek 1.5.13.** *Nechť  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  jsou indexové funkce, nechť*

$$\psi_1 \prec \psi_2 \prec \psi_3.$$

*Dále bud'  $M \in \mathbb{R}^n$ . Jestliže*

$$\mathcal{H}^{\psi_2}(M) \in (0, \infty),$$

*potom*

$$\mathcal{H}^{\psi_1}(M) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{\psi_3}(M) = 0.$$

V tuto chvíli, po formulování všech potřebných tvrzení a po provedení několika pozorování, už máme dostatek poznatků o chování Hausdorffovy míry a můžeme přejít ke kapitole týkající se Hausdorffova integrálu.

## 2 Hausdorffův integrál

Podobně, jako je definován integrál podle Lebesgueovy míry (viz [11]), lze zavést integrál podle Hausdorffovy míry, pro nějž budeme kvůli zjednodušení názvosloví v dalším textu užívat názvu Hausdorffův integrál. K definici Hausdorffova integrálu tedy využijeme klasickou teorii abstraktního Lebesgueova integrálu, s níž souvisí několik důležitých pojmů, které si na úvod definujeme. Čerpáno je z [1] a [11].

### 2.1 Měřitelné zobrazení, abstraktní Lebesgueův integrál

**Definice 2.1.1** (Měřitelné zobrazení). Nechť  $(X, \Sigma)$  a  $(Y, \mathcal{T})$  jsou měřitelné prostory. Nechť  $D \in \Sigma$ . Zobrazení  $\varphi : D \rightarrow Y$  je měřitelné, jestliže

$$\forall E \in \mathcal{T} \text{ existuje inverze } \varphi^{-1}(E) \in \Sigma. \quad (2.1.1)$$

Základní vlastností, kterou musí funkce mít, abychom ji mohli (abstraktně lebesgueovsky, tím pádem i lebesgueovsky, či hausdorffovsky) integrovat, je její měřitelnost. Tu lze nyní snadno zavést s využitím definice měřitelného zobrazení a  $\sigma$ -algebry tzv. *borelovských množin*.

**Definice 2.1.2** (Měřitelná funkce). Nechť  $(X, \Sigma)$  je měřitelný prostor, buď  $f : D \in \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Funkci  $f$  říkáme *měřitelná* právě tehdy, když  $f$  je měřitelné zobrazení do  $(\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ , kde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$  označuje  $\sigma$ -algebru borelovských množin na  $\mathbb{R}^*$ .

Borelovské množiny tvoří nejmenší  $\sigma$ -algebru, která obsahuje všechny intervaly v  $\mathbb{R}^*$  (bližší informace o borelovských množinách v [11], s. 8-9). Před definicí integrálu zbývá zavést ještě dva důležité objekty: jednoduchou funkci a rozklad, které budou využity k aproximaci integrálu tzv. dolními součty, jejichž supremem bude právě abstraktní Lebesgueův integrál.

**Definice 2.1.3** (Charakteristická funkce množiny). Nechť  $X$  je libovolná abstraktní bodová množina a  $M$  její podmnožina. Potom funkci

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \notin M. \end{cases}$$

nazýváme *charakteristickou funkcí* množiny  $M$ .

**Definice 2.1.4** (Jednoduchá funkce). Nechť  $(X, \Sigma)$  je měřitelný prostor,  $D \in \Sigma$ . Funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  je *jednoduchá*, jestliže existují množiny  $R_1, R_2, \dots, R_m \in \Sigma$  a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  tak, že

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{R_i}(x). \quad (2.1.3)$$

Je patrné, že jednoduchá funkce je taková funkce, která na svém definičním oboru nabývá pouze konečně mnoha hodnot. Jednoduchými funkcemi jsou tak například všechny konstantní, případně po částech konstantní funkce.

**Definice 2.1.5** (Rozklad). Buď  $(X, \Sigma)$  měřitelný prostor,  $D \in \Sigma$ . Potom řekneme, že systém množin  $\{R_1, \dots, R_m\} \subset \Sigma$  je *rozklad* množiny  $D$ , jestliže jsou všechny množiny  $R_i, R_j$ ,  $i \neq j$  po dvou disjunktní a navíc platí

$$\bigcup_{i=1}^m R_i = D. \quad (2.1.4)$$

**Definice 2.1.6** (Abstraktní Lebesgueův integrál). Necht'  $(X, \Sigma, \mu)$  je prostor s mírou, necht'  $D \in \Sigma$ . Bud'  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  měřitelná funkce,  $f \geq 0$ . Potom číslo

$$\int_D f \, d\mu = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(R_i) : \{R_i\} \text{ je rozklad } D, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} : 0 \leq \alpha_i \leq f \text{ na } R_i \right\}. \quad (2.1.5)$$

nazýváme *abstraktním Lebesgueovým integrálem* funkce  $f$  na  $D$ .

V případě, že  $f$  může nabývat i záporných hodnot, označíme

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\{f(x), 0\} \quad (\text{kladná část funkce } f(x)), \\ f^-(x) &:= \max\{-f(x), 0\} \quad (\text{záporná část funkce } f(x)) \end{aligned}$$

a definujeme:

$$\int_D f \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu, \quad (2.1.6)$$

není-li rozdílem na pravé straně rovnosti neurčitý výraz.

Následující tvrzení je důležitým nástrojem pro výpočet integrálu jednoduché funkce, je sice formulováno pro abstraktní Lebesgueův integrál, ale jak je patrné níže, lze jej použít i pro výpočet Hausdorffova integrálu jednoduché funkce. Uvedeme jej bez důkazu, bližší informace jsou k dispozici např. v [11], s. 29-30.

**Věta 2.1.7** (Integrál jednoduché funkce). Necht'  $(X, \Sigma, \mu)$  je prostor s mírou, necht'  $D \in \Sigma$ . Bud'  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  rozklad  $D$ , buďte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  reálná čísla taková, že  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Potom

$$\int_D \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{R_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(R_i). \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Hausdorffův integrál

Nyní využijeme postup z [14], vyjdeme tedy přímo z definice abstraktního Lebesgueova integrálu a definujeme Hausdorffův integrál rozměru  $s$ .

**Definice 2.2.1** (Hausdorffův integrál). Necht'  $(X, \Sigma, \mathcal{H}^s)$  je prostor s (Hausdorffovou) mírou, necht'  $D \in \Sigma$ . Bud'  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  měřitelná funkce,  $f \geq 0$ . Potom číslo

$$\int_D f \, d\mathcal{H}^s = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathcal{H}^s(R_i) : \{R_i\} \text{ je rozklad } D, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} : 0 \leq \alpha_i \leq f \text{ na } R_i \right\}. \quad (2.2.1)$$

nazýváme *Hausdorffovým integrálem* rozměru  $s$  funkce  $f$  na  $D$ .

Přesně podle definice abstraktního Lebesgueova integrálu, v případě, že  $f$  může nabývat i záporných hodnot, definujeme:

$$\int_D f \, d\mathcal{H}^s = \int_D f^+ \, d\mathcal{H}^s - \int_D f^- \, d\mathcal{H}^s, \quad (2.2.2)$$

není-li rozdílem na pravé straně rovnosti neurčitý výraz. Symboly  $f^+$ , respektive  $f^-$  mají stejný význam jako v Definici 2.1.6.

Vzhledem k tomu, že definice Hausdorffova integrálu je jen dosazením Hausdorffovy míry do definice abstraktního Lebesgueova integrálu, znamená to, že Hausdorffův integrál má všechny "pěkné" vlastnosti abstraktního Lebesgueova integrálu, které budou shrnuty v následujících několika tvrzeních (viz [1] nebo [11], s. 32-33).

**Věta 2.2.2** (Linearita Hausdorffova integrálu). *Nechť  $(X, \Sigma, \mathcal{H}^s)$  je prostor s mírou, nechť  $D \in \Sigma$ . Nechť  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  jsou měřitelné funkce. Bud'  $\alpha, \beta$  reálná čísla. Potom*

$$\int_D \alpha f + \beta g \, d\mathcal{H}^s = \alpha \int_D f \, d\mathcal{H}^s + \beta \int_D g \, d\mathcal{H}^s, \quad (2.2.3)$$

*mají-li všechny součty smysl.*

**Věta 2.2.3** (Absolutní konvergence). *Nechť  $(X, \Sigma, \mathcal{H}^s)$  je prostor s mírou, nechť  $D \in \Sigma$ . Bud'  $f$  měřitelná funkce. Potom*

$$\int_D f \, d\mathcal{H}^s < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_D |f| \, d\mathcal{H}^s < \infty \quad (2.2.4)$$

*a navíc*

$$\left| \int_D f \, d\mathcal{H}^s \right| \leq \int_D |f| \, d\mathcal{H}^s. \quad (2.2.5)$$

**Věta 2.2.4.** *Nechť  $f, g$  jsou měřitelné funkce v prostoru s mírou  $(X, \Sigma, \mathcal{H}^s)$ . Bud'  $D \in \Sigma$ . Dále nechť*

$$f \leq g \quad \mathcal{H}^s\text{-skoro všude,}$$

*neboli uvedená nerovnost neplatí na množině Hausdorffovy míry nula a navíc platí*

$$\int_D f \, d\mathcal{H}^s < \infty \quad \text{a} \quad \int_D g \, d\mathcal{H}^s < \infty.$$

*Potom*

$$\int_D f \, d\mathcal{H}^s \leq \int_D g \, d\mathcal{H}^s. \quad (2.2.6)$$

Hausdorffův integrál má tedy zřejmě mnoho klasických vlastností. Ještě než jej porovnáme s jinými integrály a než objasníme důvod jeho existence na příkladech, definujeme také tzv. *Hausdorffovu  $s$ -derivaci*.

### 2.3 Neurčitý integrál a Hausdorffova derivace

Význam Hausdorffova integrálu tkví především v tom, že některé funkce, které jsou komplikovaně definovány (např. Cantorova funkce nebo funkce “Minkowski Question Mark”), je možné zapsat jako neurčitý Hausdorffův integrál z derivace dané funkce. Nejprve tedy musíme definovat neurčitý integrál a poté speciální druh derivace. Dále uvedeme dvě důležité věty, které určují, za jakých podmínek lze nějakou funkci jako integrál z derivace zapsat. Definice Hausdorffovy  $\psi$ -derivace pochází z [15], kde se lze rovněž setkat s neurčitým Hausdorffovým integrálem.

**Definice 2.3.1** (Neurčitý Hausdorffův integrál). *Funkci*

$$F(x) = \int_a^x f \, d\mathcal{H}^s + F(a), \quad (2.3.1)$$

*nazveme neurčitým Hausdorffovým integrálem rozměru  $s$ .*

**Definice 2.3.2** (Hausdorffova  $\psi$ -derivace). Necht'  $\psi$  je indexová funkce, necht'  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a neklesající funkce. Číslo

$$D^\psi F(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} \quad (2.3.2)$$

říkáme *Hausdorffova  $\psi$ -derivace* funkce  $F$  v bodě  $x$ , kde  $J = (\xi_1, \xi_2)$  je množina otevřených intervalů obsahujících bod  $x$ , které mají délku menší než  $\varepsilon$ .

Speciálním případem je potom *Hausdorffova  $s$ -derivace* tvaru

$$D^s F(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^s}. \quad (2.3.3)$$

Abychom si mohli předvést výpočet Hausdorffovy  $s$ -derivace na příkladech, provedeme nejdříve jedno důležité pozorování.

**Pozorování 2.3.3** (Výpočetní tvar  $\psi$ -derivace). Necht'

$$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Dále buď  $J_1$  množina všech intervalů obsahujících bod  $x$  s délkou menší než  $\varepsilon_1$  (přesně jako v Definicí 2.3.2), buď  $J_2$  množina intervalů obsahujících bod  $x$  s délkou menší než  $\varepsilon_2$ . Zřejmě

$$J_2 \subset J_1.$$

Potom z vlastností suprema vyplývá, že

$$\sup_{J_1} \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} \geq \sup_{J_2} \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (2.3.4)$$

To ale znamená, že při hledání Hausdorffovy  $\psi$ -derivace zadané funkce tedy platí

$$\inf_{\varepsilon > 0} \sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (2.3.5)$$

Podívejme se teď na výraz

$$\sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)}.$$

Necht' i nyní  $\varepsilon > 0$ , přičemž  $J$  je množina intervalů jako v Definicí 2.3.2. Potom pro *klesající* funkci  $F(x)$  je zřejmě

$$\sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (2.3.6)$$

Naopak pro *neklesající* funkci  $F(x)$  mohou nastat tyto možnosti. Buď

$$\sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} \quad \text{pro } \xi_2 - \xi_1 = \varepsilon, \quad (2.3.7)$$

nebo je také možné, že indexová funkce  $\psi$  jde k nule mnohem rychleji, než rozdíl  $F(\xi_2) - F(\xi_1)$ . Potom dochází ke stejnému jevu, jako u klesající funkce (proto jsme vlastně chování klesající

funkce vůbec studovali), a platí rovnost (2.3.6). Ze vztahů (2.3.5), (2.3.6) a (2.3.7) vyplývá, že můžeme psát

$$\forall(\xi_1, \xi_2) : (\xi_2 - \xi_1) < \varepsilon : D^\psi F(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_J \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{\psi(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (2.3.8)$$

V příkladech navíc bez újmy na obecnosti použijeme úpravu

$$D^\psi F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \frac{\varepsilon}{4}) - F(x - \frac{\varepsilon}{4})}{\psi(x + \frac{\varepsilon}{4} - (x - \frac{\varepsilon}{4}))}. \quad (2.3.9)$$

Zde si všimneme, že

$$(\xi_1, \xi_2) = (x - \frac{\varepsilon}{4}, x + \frac{\varepsilon}{4}),$$

tím pádem

$$x \in (\xi_1, \xi_2) \quad \wedge \quad \xi_2 - \xi_1 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nyní se podívejme na několik jednoduchých příkladů výpočtu Hausdorffovy  $s$ -derivace (zde se hodí připomenout, že jde pouze o speciální případ  $\psi$ -derivace).

**Příklad 2.3.4** (Hausdorffova  $s$ -derivace konstantní funkce). Nechť

$$F(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pro libovolné  $s \geq 0$  platí

$$D^s F(x) = D^s c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \frac{\varepsilon}{4}) - F(x - \frac{\varepsilon}{4})}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c - c}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = 0, \quad (2.3.10)$$

stejně jako v případě klasické derivace.

O něco zajímavější je situace při  $s$ -derivování lineární funkce.

**Příklad 2.3.5** (Hausdorffova  $s$ -derivace lineární funkce). Nechť

$$F(x) = c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$\begin{aligned} D^s F(x) &= D^s(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c(x + \frac{\varepsilon}{4}) - c(x - \frac{\varepsilon}{4})}{(x + \frac{\varepsilon}{4} - (x - \frac{\varepsilon}{4}))^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2c\frac{\varepsilon}{4}}{(\frac{2\varepsilon}{4})^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c\frac{\varepsilon}{2}}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^s c \varepsilon}{2\varepsilon^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{s-1} \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^{s-1}}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Pro  $s = 0$  platí

$$D^0(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{s-1} \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^{s-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varepsilon = 0. \quad (2.3.12)$$

Pro  $s \in (0, 1)$  je výraz  $s - 1 < 0$ , a tedy  $1 - s > 0$ . Platí:

$$D^s(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{s-1} \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^{s-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2^{1-s}} \cdot c \cdot \varepsilon^{1-s} = 0. \quad (2.3.13)$$

V případě, že  $s = 1$ , je

$$D^1(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^0 \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^0} = c, \quad (2.3.14)$$

jako při klasickém derivování lineární funkce.

Pro ilustraci chování Hausdorffovy  $s$ -derivace v případě, že  $s > 1$ , uvedeme napřed příklad pro  $s = 2$ .

$$D^s(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^1 \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^1} = \infty$$

a je zřejmé, že obecně

$$D^s(c \cdot x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{s-1} \cdot c \cdot \frac{1}{\varepsilon^{s-1}} = \infty \quad (2.3.15)$$

pro  $s > 1$ .

Nyní ještě prozkoumáme  $s$ -derivaci funkce  $F(x) = x^2$ .

**Příklad 2.3.6** (Hausdorffova  $s$ -derivace kvadratické funkce). Necht'

$$F(x) = x^2.$$

Pak

$$\begin{aligned} D^s F(x) = D^s(x^2) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \frac{\varepsilon}{4})^2 - (x - \frac{\varepsilon}{4})^2}{(x + \frac{\varepsilon}{4} - (x - \frac{\varepsilon}{4}))^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 + x\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} - (x^2 - x\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16})}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon x}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^s x}{\varepsilon^{s-1}}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

V tomto příkladě zvolíme obrácený postup, napřed se podíváme na případ  $s = 1$ .

$$D^1(x^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^1 x}{\varepsilon^0} = 2x \quad (2.3.17)$$

a to je opět stejný výsledek, jako při klasickém derivování. Nyní buď  $s \in (0, 1)$ . Potom  $s - 1 < 0$  a získáváme

$$D^s(x^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^s x}{\varepsilon^{s-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^s \cdot \varepsilon^{1-s} \cdot x = 0. \quad (2.3.18)$$

Také pro  $s = 0$  obdržíme výsledek

$$D^0(x^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^0 x}{\varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot x = 0. \quad (2.3.19)$$

Lineární, ani kvadratický růst funkce tedy není pro  $s \in [0, 1)$  dostatečný. Funkce  $F(x) = cx$  a  $F(x) = x^2$  mají nulovou  $s$ -derivaci a chovají se tak stejně jako funkce konstantní. Proto si uvedeme ještě jeden příklad, v němž budeme analyzovat funkci, která v jednom bodě není spojitá (dalo by se říci, že v tomto bodě jde o nekonečný růst).

**Příklad 2.3.7** (Hausdorffova  $s$ -derivace Heavisideovy funkce v nule). Necht'

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Je zřejmé, že  $H(x)$  je jednoduchá, po částech konstantní funkce. To znamená (viz Příklad 2.3.4), že

$$D^s H(x) = 0 \quad \forall s > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0.$$



Jediným zajímavým bodem je tak bod  $x = 0$ , kterým se teď budeme zabývat. Platí:

$$D^s H(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(0 + \frac{\varepsilon}{4}) - H(0 - \frac{\varepsilon}{4})}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\varepsilon}{2})^s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^s}{\varepsilon^s}. \quad (2.3.20)$$

Pro  $s \in (0, 1]$  je

$$D^s H(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^s}{\varepsilon^s} = \infty. \quad (2.3.21)$$

Nejzajímavější je chování Hausdorffovy  $s$ -derivace pro  $s = 0$ .

$$D^0 H(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^0}{\varepsilon^0} = 1. \quad (2.3.22)$$

K Heavisideově funkci se ještě vrátíme v poslední kapitole. Teď ale provedeme pozorování popisující měnící se význam Hausdorffovy  $s$ -derivace pro různá  $s$ .

**Pozorování 2.3.8.** Z uvedených příkladů a z tvaru limity (2.3.9) je patrné, že pro  $s = 1$  splývá Hausdorffova  $s$ -derivace s “klasickou” derivací pro reálné funkce jedné reálné proměnné, neboli lze psát

$$D^1 F(x) = F'(x). \quad (2.3.23)$$

Hausdorffova 0-derivace  $D^0(\cdot)$  naproti tomu charakterizuje rozdíl funkčních hodnot v daném bodě (to je zřejmé především z Příkladu 2.3.7) a není tedy překvapením, že pro spojitě nabývající nulové hodnoty v libovolném bodě. Jakousi “šedou zónu” tvoří  $s$ -derivace pro  $s \in (0, 1)$ , přesto si v poslední kapitole předvedeme, že existuje spojitá funkce, jejíž Hausdorffova  $\log_3(2)$ -derivace není identicky nulovou funkcí. Jako nevýznamná se pro reálné funkce jedné reálné proměnné (minimálně pro funkce z uvedených příkladů) jeví  $s$ -derivace pro  $s > 1$ , která nabývá nekonečných hodnot ve všech bodech.

## 2.4 Fundamentální věty

Ve dvou nejdůležitějších tvrzeních této kapitoly se setkáme s termínem *atom* (viz [2]), který je třeba nejdříve vysvětlit.

**Definice 2.4.1** (Atom). Nechť  $(X, \Sigma, \mu)$  je prostor s mírou. Množinu  $At \in \Sigma$  nazveme *atomem*, má-li následující vlastnosti:

1.  $\mu(At) > 0$ ,
2.  $\forall M \subset At$  měřitelné množiny:  $\mu(M) = 0$ , nebo  $\mu(At \setminus M) = 0$ .

**Poznámka 2.4.2.** Atomem je tedy každá množina  $\sigma$ -algebry kladné míry, která neobsahuje podmnožinu menší, nenulové míry.

**Příklad 2.4.3.** (Atom) Nechť  $X = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$  a  $\mu$  je aritmetická míra. Potom každá jednoprvková podmnožina  $X$  je atomem. Jako příklad uveďme množinu  $\{2\}$  - ta je kladné míry (konkrétně hodnoty 1, protože obsahuje jeden prvek), ale neobsahuje žádnou podmnožinu, jejíž aritmetická míra by ležela v intervalu  $(0, 1)$ .

Veškerý uvedený aparát lze využít k formulování následujících dvou vět, viz [15]. Z obecné Hausdorffovy míry se omezíme na jednodušší  $s$ -rozměrnou Hausdorffovu míru.

**Věta 2.4.4** (První fundamentální věta matematické analýzy pro Hausdorffovu míru). *Nechť  $\mathcal{H}^s(\cdot)$  je Hausdorffova míra rozměru  $s$ , která negeneruje atomy. Nechť  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$  je hausdorffovsky integrovatelná (Hausdorffův intergrál existuje a je konečný) funkce. Nechť*

$$F(x) = \int_a^x f \, d\mathcal{H}^s + F(a). \quad (2.4.1)$$

*Potom  $f(x) = D^s F(x)$   $\mathcal{H}^s$ -skoro všude.*

V následující větě tedy použijeme označení  $f(x) := D^s F(x)$ .

**Věta 2.4.5** (Druhá fundamentální věta matematické analýzy pro Hausdorffovu míru). *Nechť  $\mathcal{H}^s(\cdot)$  je Hausdorffova míra rozměru  $s$ , která negeneruje atomy. Nechť  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je neklesající a spojitá funkce. Označme  $X := \{x : D^s F(x) = 0\}$  a  $Y := \{x : D^s F(x) = \infty\}$ . Jestliže  $\lambda(F(X)) = \lambda(F(Y)) = 0$ , pak*

$$F(x) = \int_a^x f \, d\mathcal{H}^s + F(a), \quad (2.4.2)$$

$x \in [a, b]$ .

Pro upřesnění dodejme, že zápisem  $F(X)$  se rozumí obraz množiny  $X$  při zobrazení  $F(\cdot)$ . Důkazy uvedených fundamentálních vět jsou k dispozici také v [15].

**Poznámka 2.4.6.** Výrazem “míra, která negeneruje atomy” je myšleno, že pro konkrétní míru  $\mu$  na  $\sigma$ -algebře  $\Sigma$  v daném prostoru  $X$  neexistuje množina  $A_t$ , která by vyhovovala Definicí 2.4.1. Příkladem takové míry je právě Hausdorffova míra rozměru  $s > 0$  (obecně každá Hausdorffova míra vzhledem k indexové funkci  $\psi$ , viz [15]).

**Poznámka 2.4.7.** Všimněme si, že Věta 2.4.5 je pouze postačující podmínkou. V poslední kapitole ukážeme příklad (*Heavisideova funkce*), v němž jsou sice předpoklady této věty porušeny, ale tvrzení přesto platí.

Větou 2.4.4 a 2.4.5 jsme tedy završili shrnutí základů teorie Hausdorffova integrálu (rozměru  $s$ ) a Hausdorffovy  $s$ -derivace. V následující kapitole si ukážeme konkrétní příklady výpočtu Hausdorffova integrálu a porovnáme jej s jinými integrály.

### 3 Porovnání s jinými typy integrálů

Jednou z vlastností Riemannova a Lebesgueova integrálu je, že existují-li oba, pak je jejich hodnota stejná. Cílem této kapitoly bude na příkladech ukázat tu zvláštnost Hausdorffova integrálu, že jeho existence (a zároveň existence jeho Lebesgueova či Riemannova protějšku) nemusí znamenat totožnost jejich hodnot, což pramení z odlišného chování Lebesgueovy a Hausdorffovy míry. Tohoto faktu se dá využít, jak bude patrné v následující kapitole o aplikacích. Nyní uvedeme definice Riemannova i Lebesgueova integrálu, přičemž začneme (Darbouxovou) definicí Riemannova integrálu.

#### 3.1 Riemannův integrál a Lebesgueův integrál

**Definice 3.1.1** (Riemannův integrál). Nechť  $f$  je omezená funkce,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť  $D$  je dělení intervalu  $[a, b]$  takové, že  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Označme

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n \left( (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \right) \quad \text{jako horní součet pro dělení } D,$$

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n \left( (t_i - t_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \right) \quad \text{jako dolní součet pro dělení } D,$$

$$(S) \int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D) \quad \text{jako horní součet,}$$

$$(s) \int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D) \quad \text{jako dolní součet.}$$

Potom  $f$  je riemannovsky integrovatelná právě tehdy, když

$$(S) \int_a^b f(x) dx = (s) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

Číslo  $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$  je Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

Definice Lebesgueova integrálu vychází přímo z definice integrálu abstraktního, stejně jako v případě Hausdorffova integrálu, jen místo abstraktní míry je použita míra Lebesgueova:

**Definice 3.1.2** (Lebesgueův integrál). Nechť  $(X, \Sigma, \lambda)$  je prostor s (Lebesgueovou) mírou, nechť  $D \in \Sigma$ . Bud'  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  měřitelná funkce,  $f \geq 0$ . Potom číslu

$$\int_D f d\lambda = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \lambda(R_i) : \{R_i\} \text{ je rozklad } D, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} : 0 \leq \alpha_i \leq f \text{ na } R_i \right\}. \quad (3.1.1)$$

říkáme *Lebesgueův integrál* funkce  $f$  na  $D$ .

Před příklady ještě uvedeme tvrzení vycházející z Věty 1.4.4, které dává do souvislosti Lebesgueův a Hausdorffův integrál pro  $s = 1$ .

**Pozorování 3.1.3.** Nechť  $f$  je měřitelná funkce,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ . Potom

$$\int_D f d\mathcal{H}^1 = \int_D f d\lambda. \quad (3.1.2)$$

DŮKAZ.

Je triviální, protože z Věty 1.4.4 vyplývá, že v  $\mathbb{R}$  jsou míry  $\lambda(\cdot)$  a  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  totožné. To ovšem znamená, že totožné jsou i integrály, které jsou podle nich zkonstruované ve smyslu Definice 2.1.6.

□

### 3.2 Příklady

Na několika příkladech si teď předvedeme rozdílnost Riemannova, Lebesgueova a Hausdorffova integrálu.

**Poznámka 3.2.1.** Pro účely teorie míry a jejích aplikací při výpočtu integrálů nechápeme výraz

$$"0 \cdot \infty"$$

jako neurčitý, ale uvažujeme

$$0 \cdot \infty = 0. \quad (3.2.1)$$

Jak bude patrné níže, taková úvaha má reálný smysl.

První příklad se bude týkat známé Dirichletovy funkce.

**Příklad 3.2.2** (Dirichletova funkce). Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{pro } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tato funkce je zřejmě jednoduchá, k výpočtu Lebesgueova a Hausdorffova integrálu tedy budeme moci využít Věty 2.1.7. Platí:

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 \quad \text{a} \quad \lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1. \quad (3.2.2)$$

Potom Lebesgueův integrál nabývá hodnoty

$$\int_0^1 f \, d\lambda = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0. \quad (3.2.3)$$

Teď přejdeme k výpočtu Hausdorffova integrálu této funkce. Pro množinu  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  platí následující rovnosti.

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0, \quad s \in (0, 1] \quad (3.2.4)$$

a

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = +\infty, \quad s = 0. \quad (3.2.5)$$

Naproti tomu, pro množinu  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  platí:

$$\mathcal{H}^s([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = +\infty, \quad s \in (0, 1) \quad (3.2.6)$$

a

$$\mathcal{H}^s([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1, \quad s = 1 \text{ (stejně jako Lebesgueova míra)}. \quad (3.2.7)$$

Nechť  $0 < s < 1$ . Potom Hausdorffův integrál zadané funkce nabývá hodnoty

$$\int_0^1 f d\mathcal{H}^s = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (+\infty) = 0. \quad (3.2.8)$$

Pro  $s = 1$  splývá Hausdorffův integrál s Lebesgueovým. Poslední případ nastává pro  $s = 0$ :

$$\int_0^1 f d\mathcal{H}^0 = 1 \cdot (+\infty) + 0 \cdot (+\infty) = +\infty. \quad (3.2.9)$$

V případě, že  $s = 0$ , získáváme konečně jinou hodnotu Hausdorffova integrálu, než je hodnota integrálu Lebesgueova. K ideální demonstraci rozdílnosti Hausdorffova integrálu má ovšem takový příklad ještě daleko. Pro  $\mathcal{H}^0(\cdot)$  jde vlastně o integrál podle aritmetické míry, jehož smysl není na první pohled zřejmý. Lepší ukázkou si předvedeme v dalším příkladu, ale předtím je ještě nezbytné zabývat se tzv. Cantorovým diskontiuem (budeme značit jako  $\mathcal{C}$ , blíže se seznámit s touto množinou lze např. v [3], s. 2 nebo v [4]) a především výpočtem jeho Hausdorffovy míry.

**Tvrzení 3.2.3.** *Hausdorffova  $\log_3(2)$  - rozměrná míra Cantorova diskontinua*

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = 1.$$

DŮKAZ.

Cantorovo diskontiuum se dá vzhledem ke své konstrukci pokrýt zbývajícími intervaly, které budou odebrány v dalších krocích konstrukce. Hausdorffovu  $\log_3(2)$  - rozměrnou míru Cantorova diskontinua tedy vypočteme jako limitu

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (d(P_i))^{\log_3(2)} : \mathcal{C} \subseteq \cup P_i, d(P_i) \leq \varepsilon \right\}. \quad (3.2.10)$$

Po  $n$ -tém kroku odebírání vždy zůstane  $2^n$  intervalů délky  $3^{-n}$ . Rovnost 3.2.10 tedy můžeme přeformulovat do tvaru

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot (3^{-n})^{\log_3(2)}. \quad (3.2.11)$$

Protože

$$3^{\log_3(2)} = 2,$$

platí:

$$2^n \cdot (3^{-n})^{\log_3(2)} = 2^n \cdot (3^{\log_3(2)})^{-n} = 2^n \cdot 2^{-n} = 1. \quad (3.2.12)$$

Tedy

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = 1. \quad (3.2.13)$$

□

Následuje důležitý příklad funkce, která nalezne uplatnění v následující kapitole.

**Příklad 3.2.4.** Nechť  $\mathcal{C}$  je Cantorovo diskontiuum. Uvažujme funkci tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathcal{C} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{pro } x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}. \end{cases}$$

I v tomto příkladu je zřejmě zadána jednoduchá funkce, což implikuje možnost použití Věty 2.1.7. Pro výpočet Lebesgueova integrálu využijeme znalosti Lebesgueovy míry Cantorova diskontinua.

$$\lambda(\mathcal{C}) = 0. \quad (3.2.14)$$

Cantorovo diskontinuum je tedy poměrně známým příkladem nespočetné množiny, jehož Lebesgueova míra je nulová. Ovšem nyní už můžeme spočítat Lebesgueův integrál zadané funkce  $f(x)$ .

$$\int_0^1 f \, d\lambda = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \quad (3.2.15)$$

což je stejný výsledek, který jsme získali pro funkci v Příkladu 3.2.2. Podívejme se však teď na Hausdorffův integrál rozměru  $\log_3(2)$ .

$$\int_0^1 f \, d\mathcal{H}^{\log_3(2)} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (+\infty) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f \, d\lambda. \quad (3.2.16)$$

Příkladem 3.2.4 naznačujeme, že Hausdorffův integrál by se opravdu mohl hodit pro integraci funkcí definovaných na množinách, které mají nulovou Lebesgueovu míru. Abychom ještě lépe vymezili sféru užitečnosti Hausdorffova integrálu, uvedeme si před koncem kapitoly jednoduchý příklad funkcí, ve spojení s nimiž Hausdorffův integrál pro změnu nic nového nepřináší, i když se pro ně dá spočítat.

**Příklad 3.2.5** (Konstantní a lineární funkce). Uvažujme funkci

$$f(x) = c, \quad c \neq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Potom Riemannův a Lebesgueův integrál splývají s Newtonovým integrálem, který má hodnotu

$$\int_0^1 c \, dx = c \cdot 1 - c \cdot 0 = c. \quad (3.2.17)$$

Té samé hodnoty nabývá také Hausdorffův integrál rozměru 1, neboli

$$\int_0^1 c \, d\mathcal{H}^1 = c. \quad (3.2.18)$$

Pro  $s \in [0, 1)$  je ovšem při libovolné volbě rozkladu  $\{R_i\}$  (viz Definice 2.1.5)

$$\int_0^1 c \, d\mathcal{H}^s = \sup \left( \sum_{i=1}^m c \cdot \mathcal{H}^s(R_i) \right) = \infty, \quad (3.2.19)$$

protože

$$\mathcal{H}^s([0, 1]) = \infty \quad \forall s \in [0, 1),$$

nepodaří se nám tedy nalézt rozklad  $\{R_i\}$  takový, že

$$\mathcal{H}^s(R_i) < \infty \quad \forall s \in [0, 1) \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.2.20)$$

Stejně tak, uvažujme-li lineární funkci

$$f(x) = c \cdot x,$$

platí

$$(\mathcal{R}) \int_0^1 c \cdot x \, dx = \int_0^1 c \cdot x \, d\lambda = \int_0^1 c \cdot x \, d\mathcal{H}^1 = \int_0^1 c \cdot x \, dx = c \cdot \frac{1}{2}, \quad (3.2.21)$$

jde tedy o konečné číslo. Náleží-li ovšem  $s \in [0, 1)$ , získáváme opět

$$\int_0^1 c \cdot x \, d\mathcal{H}^s = \infty \quad (3.2.22)$$

ze stejných důvodů, jako v případě (3.2.20).

Je patrné, že na množině funkcí, kde je Lebesgueův integrál nenulový a kde nejsou žádné problémy s jeho definicí (a také kde je každá funkce rovna Lebesgueově integrálu ze své derivace), je používání Hausdorffova integrálu zbytečné. V následující kapitole se však budeme zabývat konkrétními aplikacemi teorie Hausdorffova integrálu, jež jsme zatím pouze naznačili v kapitole 2.3.

## 4 Aplikace

Už jsme uvedli v kapitole 2.3, že Hausdorffův integrál je možné použít pro lepší vyjádření některých funkcí, které jsou např. definovány na množině nulové Lebesgueovy míry. V téže kapitole jsme zároveň uvedli podmínky, za jakých je takové vyjádření přípustné. Nyní si ukážeme konkrétní příklady využití Hausdorffova integrálu. Nejprve je ale nutné blíže se seznámit s Cantorovou funkcí, jejíž definici převezmeme z [3], s. 2.

### 4.1 Cantorova funkce

**Definice 4.1.1** (Cantorova funkce). Nejdříve zavedeme tzv. triadický rozvoj čísla (bodu)  $x \in [0, 1]$  ve smyslu

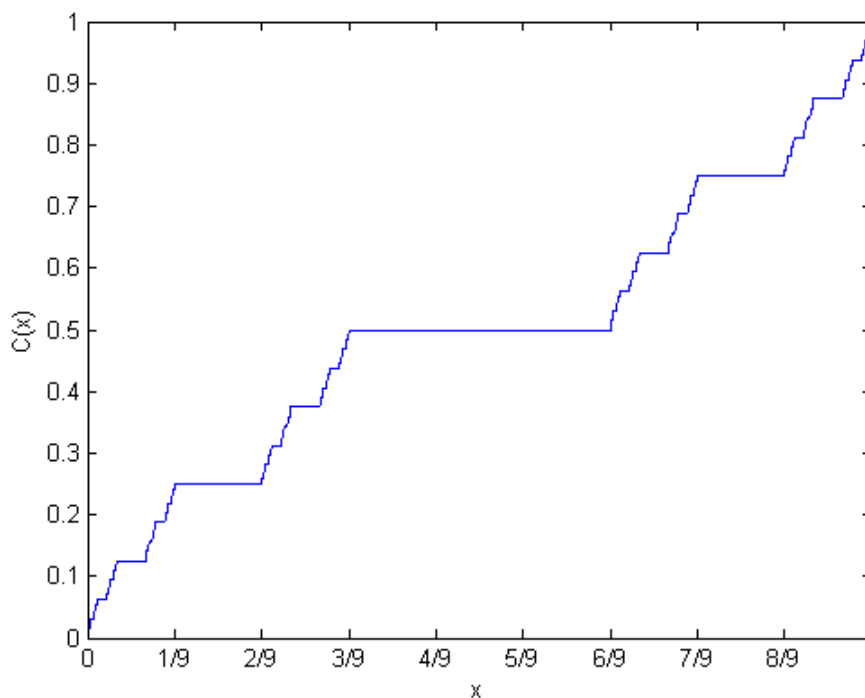
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}. \quad (4.1.1)$$

Označme

$$N(x) := \begin{cases} \min(\{n : x_n = 1\}) & \text{pokud takové } x_n \text{ existuje,} \\ \infty & \text{pokud neexistuje.} \end{cases}$$

Potom *Cantorovu funkci* (viz Obrázek 7) zavádíme součtem

$$C(x) := \frac{1}{2^{N(x)}} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N(x)-1} \frac{x_n}{2^n}. \quad (4.1.3)$$



Obrázek 7: Cantorova funkce  $C(x)$



**Pozorování 4.1.2.** Nyní prozkoumáme význam čísla  $N(x)$ . Všimněme si, že např. pro  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  získáváme

$$N(x) = 1,$$

protože

$$x = \frac{1}{3^1} + \dots \quad \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Potom

$$C(x) := \frac{1}{2^{N(x)}} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{1-1} \frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad (4.1.4)$$

a to je výsledek, který můžeme snadno odečíst i z Obrázku 7.

Dále např. pro  $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  je

$$N(x) = 2$$

vzhledem k tomu, že

$$x = \frac{0}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad \forall x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),$$

nabývá na tomto intervalu Cantorova funkce konstantní hodnoty

$$C(x) := \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2-1} \frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4}. \quad (4.1.5)$$

Obecně na každém intervalu, který je při konstrukci (viz [3], s. 2 - 3) Cantorova diskontinua odebrán, je Cantorova funkce konstantní, ale rozhodně není konstantní na celém intervalu  $[0, 1]$ , jak je vidět nejen z Obrázku 7, ale především z uvedených vypočtených hodnot (4.1.4) a (4.1.5). To ale znamená, že ke "skokům" ve funkčních hodnotách musí docházet právě v bodech Cantorova diskontinua  $\mathcal{C}$  (jde o body, pro něž  $N(x) = \infty$ , protože v triadickém rozvoji bodů množiny  $\mathcal{C}$  není  $x_n = 1$  pro žádné  $n$ , viz [3], s. 2), neboli tyto změny se dějí na množině, jejíž Lebesgueova míra  $\lambda(\mathcal{C}) = 0$ . To znamená, že derivace  $C'(x) = 0$   $\lambda$ -skoro všude a funkce  $C(x)$  tak zřejmě nemůže být reprezentována jako Lebesgueův integrál z derivace  $C'(x)$ . Zde se tedy objevuje příležitost pro teorii Hausdorffova integrálu.

V Příkladu 3.2.4 jsme se setkali s funkcí, kterou nyní přeznačíme na

$$D^{\log_3(2)}(C(x)) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathcal{C} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{pro } x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases}$$

protože se jedná o Hausdorffovu  $\log_3(2)$ -derivaci Cantorovy funkce (viz [15], s. 584). Ještě předtím, než budeme moci tvrdit, že Cantorovu funkci je možné zapsat jako Hausdorffův integrál z  $\log_3(2)$ -derivace, musíme ověřit, že tato funkce  $C(x)$  splňuje předpoklady Věty 2.4.5.

**Pozorování 4.1.3** (Ověření předpokladů Věty 2.4.5 pro Cantorovu funkci).

1.  $C(x)$  je neklesající. Nechť  $x_2 \geq x_1$ . Rozvineme-li  $x_1$  a  $x_2$  do triadických rozvojų

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{1n}}{3^n}, \quad x_{1n} \in \{0, 1, 2\}, \quad x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{3^n}, \quad x_{2n} \in \{0, 1, 2\},$$

pak určitě existuje takové  $n$ , pro které

$$x_{2n} \geq x_{1n},$$

a tedy (vzhledem k (4.1.3))

$$C(x_2) \geq C(x_1).$$

2.  $C(x)$  je spojitá. Viz [3], s. 3. Zde jen uvedeme, že toto tvrzení můžeme podpořit následujícími vztahy.

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2, x_1 \neq x_2, |x_1 - x_2| \rightarrow 0 &\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{1n}}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{3^n} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |C(x_1) - C(x_2)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

3. Označme  $I_C := [0, 1] \setminus \mathcal{C}$ . Pro  $x \in I_C$  platí

$$D^{\log_3(2)} C(x) = 0 \quad \text{a také} \quad C(x) \in \mathbb{Q}, \quad (4.1.8)$$

protože zřejmě

$$\frac{1}{2^{N(x)}} \in \mathbb{Q} \quad (4.1.9)$$

a rovněž

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N(x)-1} \frac{x_n}{2^n} \quad (4.1.10)$$

je racionální číslo, vzhledem k tomu, že součet (4.1.10) je konečný. To ale znamená, že

$$C(I_C) \subset \mathbb{Q}, \quad (4.1.11)$$

a tedy

$$\lambda(I_C) = 0. \quad (4.1.12)$$

□

Předpoklady Věty 2.4.5 jsme tím pádem ověřili, a tak Cantorovu funkci můžeme interpretovat jako integrál

$$C(x) = \int_0^x D^{\log_3(2)}(C(x)) \, d\mathcal{H}^{\log_3(2)}, \quad x \in [0, 1]. \quad (4.1.13)$$

Vztahu (4.1.13) můžeme tedy využít pro poměrně jednoduché vypočtení hodnot Cantorovy funkce v bodě  $x$ . Nyní provedeme ještě jedno pozorování, které napoví, jak tento výpočet realizovat.

**Pozorování 4.1.4** (Hausdorffova míra  $\mathcal{C}$  na podmnožinách intervalu  $(0, 1)$ ). V intervalech odebraných při konstrukci Cantorova diskontinua zjevně žádné body množiny  $\mathcal{C}$  neleží, tedy např. platí

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\mathcal{C} \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \mathcal{H}^{\log_3(2)}(\emptyset) = 0.$$

Dále platí:

$$\mathcal{C} = \left(\mathcal{C} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \cup \left(\mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \quad (4.1.14)$$

a protože  $\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = 1$  a odebírání prostředních třetin intervalů probíhá symetricky je Hausdorffova míra podmnožin z (4.1.14) rovna

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\mathcal{C} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) = \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \frac{1}{2}. \quad (4.1.15)$$

Stejně tak

$$\mathcal{C} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left(\mathcal{C} \cap \left[0, \frac{1}{9}\right]\right) \cup \left(\mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\right) \quad (4.1.16)$$

a symetricky

$$\mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left(\mathcal{C} \cap \left[1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{9}\right]\right) \cup \left(\mathcal{C} \cap \left[1 - \frac{1}{9}, 1\right]\right), \quad (4.1.17)$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[0, \frac{1}{9}\right]\right) &= \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\right) = \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{9}\right]\right) = \\ &= \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[1 - \frac{1}{9}, 1\right]\right) = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

a tedy např.

$$\mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[0, 1 - \frac{1}{9}\right]\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (4.1.19)$$

Stejnou filozofii výpočtu Hausdorffovy míry aplikujeme i pro menší podintervaly v délkách  $\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ , obecně  $\frac{1}{3^n}$ . Výpočet funkčních hodnot  $C(x)$  je pak realizován spočítáním např. těchto integrálů:

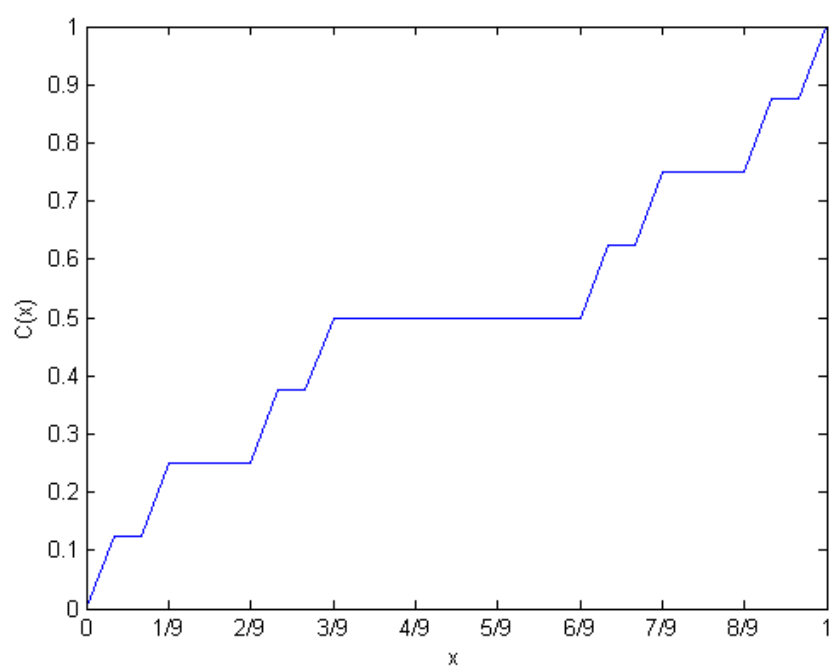
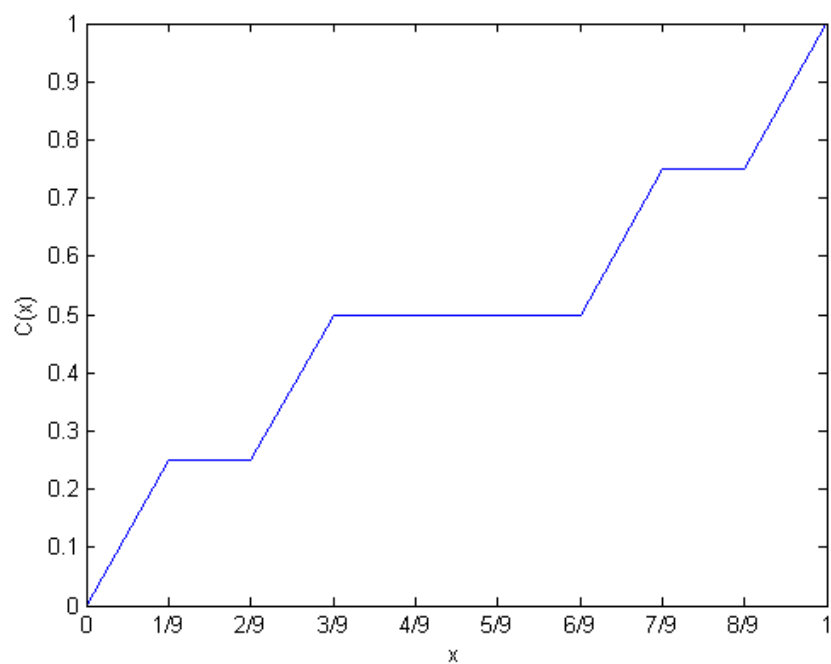
$$C\left(\frac{1}{3}\right) = C\left(\frac{2}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} D^{\log_3(2)}(C(x)) d\mathcal{H}^{\log_3(2)} = 1 \cdot \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) + 0 \cdot \infty = \frac{1}{2}, \quad (4.1.20)$$

$$C\left(\frac{1}{9}\right) = C\left(\frac{2}{9}\right) = \int_0^{\frac{1}{9}} D^{\log_3(2)}(C(x)) d\mathcal{H}^{\log_3(2)} = 1 \cdot \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[0, \frac{1}{9}\right]\right) + 0 \cdot \infty = \frac{1}{4} \quad (4.1.21)$$

a symetricky

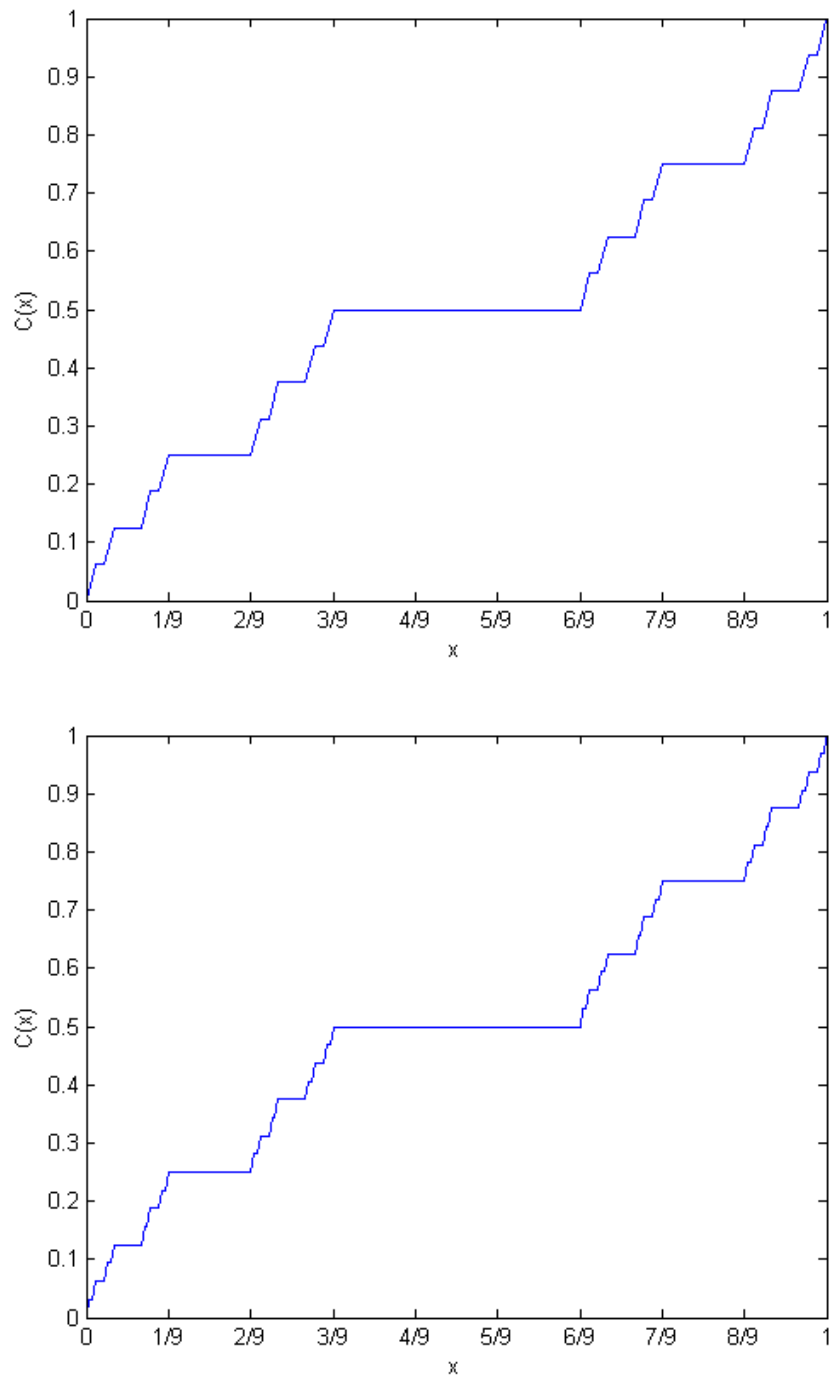
$$\begin{aligned} C\left(\frac{8}{9}\right) = C\left(1 - \frac{1}{9}\right) = C\left(\frac{7}{9}\right) = C\left(1 - \frac{2}{9}\right) &= \int_0^{\frac{7}{9}} D^{\log_3(2)}(C(x)) d\mathcal{H}^{\log_3(2)} = \\ &= 1 \cdot \mathcal{H}^{\log_3(2)}\left(\left[0, \frac{7}{9}\right]\right) + 0 \cdot \infty = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

**Příklad 4.1.5** (Aproximace Cantorovy funkce). Uvedených pozorování nyní využijeme k postupné aproximaci a vykreslení Cantorovy funkce pomocí Hausdorffova integrálu její  $\log_3(2)$ -derivace. Hodnotu integrálu vždy vypočteme v předem zadaném počtu bodů, konkrétně se jedná o 8, 16, 32, 64 a  $2^{21}$  bodů. Výsledky, vypočtené a vykreslené v prostředí MATLAB, jsou na Obrázcích 8, 9 a 10.



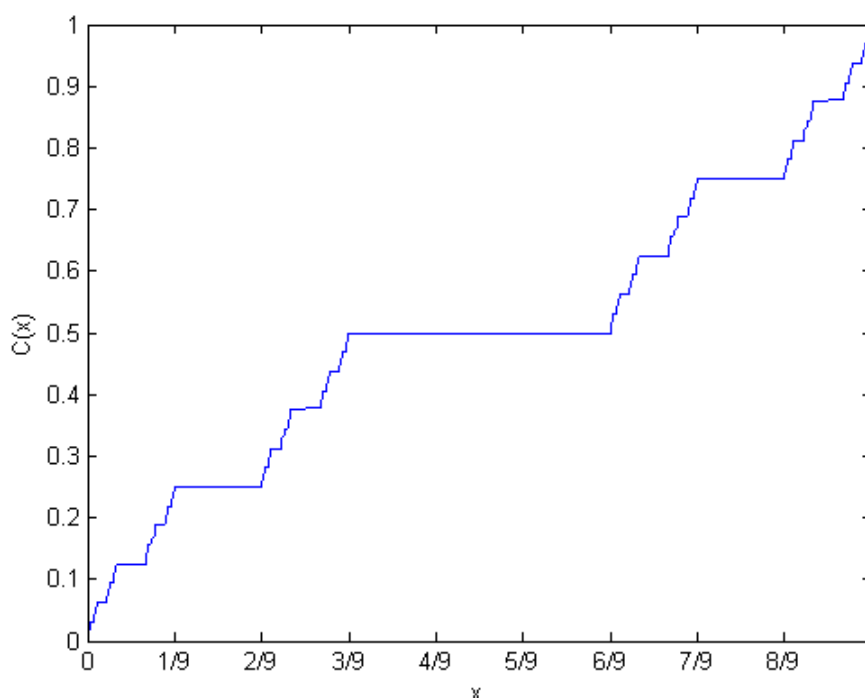
Obrázek 8: Aproximace Cantorovy funkce pro spočítání osmi (nahore) a šestnácti (dole) hodnot Hausdorffova integrálu rozměru  $\log_3(2)$

Na dalším obrázku (Obrázek 9) se podíváme na ještě přesnější aproximaci, která vznikla spočtením hodnot Hausdorffova integrálu ve dvaatřiceti, respektive čtyřiašedesáti bodech.



Obrázek 9: Aproximace Cantorovy funkce pro spočítání 32 (nahore) a 64 (dole) hodnot Hausdorffova integrálu rozměru  $\log_3(2)$

Na Obrázku 10 vidíme, že výpočtem Hausdorffova integrálu v příliš mnoha bodech už dochází k numerickým chybám (ve jmenovatelích zlomků jsou již obrovská čísla řádu  $3^{20}$ ) a mírné deformaci Cantorovy funkce i v místech, kde by měla být konstantní.



Obrázek 10: Aproximace Cantorovy funkce pro spočítání  $2^{21}$  hodnot Hausdorffova integrálu rozměru  $\log_3(2)$

Po Cantorově funkci předvedeme ještě jeden (v jistém smyslu extrémní) příklad aplikace teorie Hausdorffova integrálu.

## 4.2 Heavisideova funkce

V podkapitole 2.3 jsme se již setkali s Heavisideovou funkcí

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Nyní si ukážeme, že i tuto nespojitou funkci je možno interpretovat jako (Hausdorffův) integrál z  $s$ -derivace, konkrétně nás bude zajímat Hausdorffova 0-derivace Heavisideovy funkce. Už v Příkladu 2.3.7 jsme ukázali, že

$$D^0 H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \text{ a } x > 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že  $\mathcal{H}^0(\cdot)$  je aritmetická míra, která generuje atomy (viz Příklad 2.4.3) a funkce  $H(x)$  není spojitá, jsou porušeny předpoklady Věty 2.4.5. I přesto můžeme zřejmě Heavisideovu funkci na omezeném intervalu

$$(-a, a), \quad a \in \mathbb{R}$$

zapsat jako integrál

$$H(x) = \int_{-a}^x D^0(H(x)) \, d\mathcal{H}^0, \quad x \in (-a, a). \quad (4.2.2)$$

Tedy platí

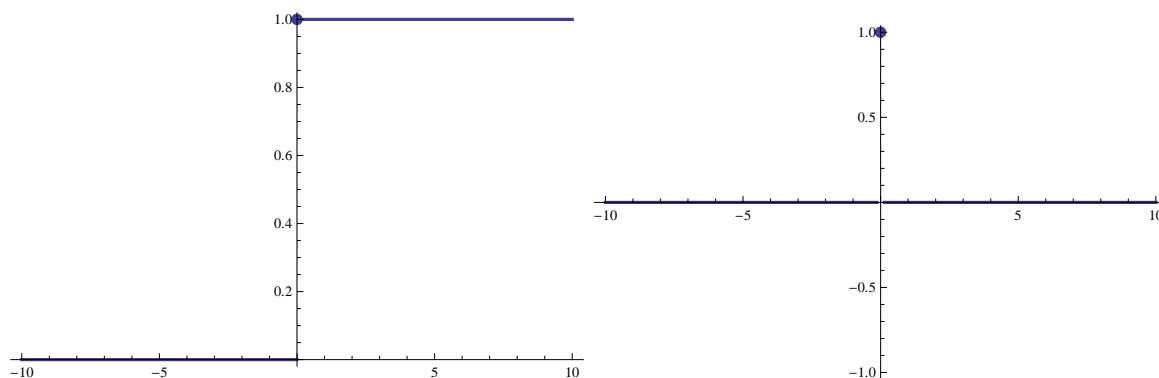
$$\forall x \in (-a, 0) : \int_{-a}^x D^0(H(x)) \, d\mathcal{H}^0 = 0 \cdot \infty = 0 = H(x) \quad (4.2.3)$$

a také

$$\forall x \in [0, a) : \int_{-a}^x D^0(H(x)) \, d\mathcal{H}^0 = 0 \cdot \infty + 1 \cdot 1 + 0 \cdot \infty = 1 = H(x), \quad (4.2.4)$$

protože

$$\mathcal{H}^0(\{0\}) = 1.$$



Obrázek 11: Heavisideova funkce (vlevo) a její 0-derivace (vpravo) na intervalu  $[-10, 10]$

### 4.3 Další možnosti aplikací

Na závěr už si bez další analýzy pouze ukážeme příklady funkcí, které jsou z hlediska Hausdorffova integrálu nějak zajímavé.

**Příklad 4.3.1.** Není nezbytné se omezovat na funkce pouze s jednou nespojitostí, jako je Heavisideova funkce z kapitoly 4.2. Hausdorffovým integrálem rozměru 0 můžeme reprezentovat libovolnou neklesající “schodovitou” funkci s konečně mnoha nespojitostmi tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_1, \\ c_1 & \text{pro } x_1 \leq x < x_2, \\ c_2 & \text{pro } x_2 \leq x < x_3, \\ \vdots & \\ c_n & \text{pro } x \geq x_n, \end{cases}$$

kde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , stejně tak  $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Hausdorffova 0-derivace této funkce potom nabývá hodnot

$$D^0(F(x)) = \begin{cases} c_1 & \text{pro } x = x_1, \\ c_2 - c_1 & \text{pro } x = x_2, \\ \vdots & \\ c_n - c_{n-1} & \text{pro } x = x_n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom můžeme na omezeném intervalu  $(-a, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $-a < x_1$  psát

$$F(x) = \int_{-a}^x D^0(F(x)) \, d\mathcal{H}^0, \quad x \in (-a, a). \quad (4.3.3)$$

Jako poslední si ukážeme funkci, jejíž název zde ponecháme bez překladu, a která je do jisté míry podobná Cantorově funkci (především graficky).

**Příklad 4.3.2** (Minkowski Question Mark Function). Funkce, kterou se velmi detailně zabývají články [8] a [9], souvisí s tzv. Fareyovými zlomky ([9]) tvaru

$$F_n = \left\{ \frac{b}{a}, 0 \leq b \leq a \leq n \right\}, \quad (4.3.4)$$

přičemž největší společný dělitel čísel  $a, b$  je 1. Funkce  $?(x)$  je definována rekurentně (viz opět [9]), pro ukázkou položme  $n = 1$ . Potom

$$[0, 1] = \left[ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right], \quad ?(0) = 0, \quad ?(1) = 1 \quad (4.3.5)$$

a tzv. *mediant* tohoto intervalu spočteme jako

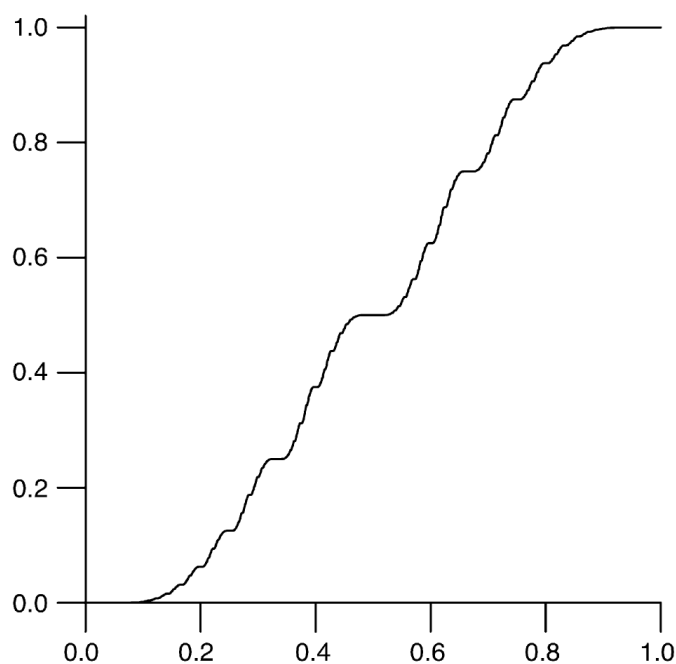
$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad ?\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{?(0)+?(1)}{2}, \quad (4.3.6)$$

čímž se původní interval rozdělí na dva, konkrétně

$$\left[ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right] = \left[ \frac{0}{1}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right]. \quad (4.3.7)$$

Opět najdeme medianty intervalů, např. pro interval  $\left[ \frac{0}{1}, \frac{1}{2} \right]$

$$\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad ?\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{?\left(\frac{0}{1}\right) + ?\left(\frac{1}{2}\right)}{2}. \quad (4.3.8)$$



Obrázek 12: Funkce  $?(x)$ . Převzato z [8].



Tento proces stále opakujeme teoreticky nekonečněkrát, v praxi do předem zvoleného maximálního počtu kroků. Článek [8] nabízí dokonce odhady Hausdorffovy dimenze pro množiny, na nichž je derivace této funkce nulová, nekonečná, nebo kde neexistuje, což z ní dělá kandidáta pro analýzu prostředky teorie Hausdorffova integrálu. Pro ilustraci grafické podobnosti s Cantorovou funkcí předkládáme Obrázek 12.

## Závěr

Cílem této práce bylo představit Hausdorffův integrál a na příkladech ukázat možnosti jeho použití. S tímto úkolem ovšem souviselo množství dalších problémů. V první kapitole jsme nejprve definovali a na příkladech vysvětlili některé obecné pojmy teorie míry. Na jejich základě jsme vybudovali Hausdorffovu míru a ukázali některé její zásadní vlastnosti. Neopomněli jsme také zavést Hausdorffovu dimenzi. První kapitolu jsme zakončili zobecněním Hausdorffovy míry, které jsme analyzovali pomocí několika příkladů a pozorování.

Dále jsme se stručně zabývali základy teorie abstraktního Lebesgueova integrálu, na které jsme přímo navázali definicí Hausdorffova integrálu rozměru  $s$  a shrnutím jeho základních vlastností. Následovala pasáž týkající se Hausdorffovy  $\psi$ -derivace a  $s$ -derivace, u níž jsme napřed odvodili výpočetní tvar a následně jsme prozkoumali její chování na několika příkladech. Druhá kapitola byla završena uvedením dvou (pro aplikace Hausdorffova integrálu) důležitých vět. Tím jsme ukončili více teoretickou část práce a ve třetí kapitole jsme na příkladech porovnávali různé typy integrálů, včetně Hausdorffova.

V poslední kapitole jsme použili zavedený aparát pro reprezentaci funkcí neurčitým Hausdorffovým integrálem rozměru  $s$  z Hausdorffovy  $s$ -derivace. Nejvíce jsme se věnovali Cantorově funkci, jejíž aproximace (přesnost závisela na počtu bodů, v nichž jsme hodnotu integrálu vypočítali) jsme také vykreslili. Poté jsme uvedli ještě několik dalších příkladů a tím jsme celou práci zakončili.

Hausdorffův integrál je zajímavým propojením již existujících teoretických nástrojů a umožňuje reprezentovat některé funkce, u nichž Lebesgueův integrál a klasická derivace selhávají. Měli bychom si však uvědomit, že jeho používání má jistá úskalí. Výpočet Hausdorffovy míry a dimenze pro některé množiny může být velmi komplikovaný, případně metodami matematické analýzy nedosažitelný. Také určení Hausdorffovy  $s$ -derivace může být velice složité.

Některé problémy jsme ponechali otevřené. Týkají se např. zmírnění předpokladů Věty 2.4.5, kde se uvažují pouze neklesající, spojitě funkce. S tím souvisí předefinování Hausdorffovy  $s$ -derivace a její další analýza. Nabízí se také zobecnění do více dimenzí, tedy např. zkoumání funkcí dvou proměnných, jejichž derivace je nenulová na nějaké fraktální podmnožině roviny  $\mathbb{R}^2$ . A konečně, posledním otevřeným problémem je důkladná analýza (z hlediska Hausdorffova integrálu) Minkovské funkce  $\mathcal{M}(x)$  z kapitoly 4.3. Všechny uvedené problémy jsou tak motivací k dalšímu studiu.

## Reference

- [1] BENEDIKT, J. - GIRG, P. *Prostory funkcí a řešitelnost základních typů parciálních diferenciálních rovnic*. 2011. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/prostory-funkci-resitelnost-zakladnich-typu-parcialnich-diferencialnich-rovnic>
- [2] BRUCKNER, A. M. - BRUCKNER, J. B. - THOMSON, B. S. *Real Analysis, Second Edition*. 2008. Dostupné z: <http://classicalrealanalysis.info/Free-Downloads.php>
- [3] DOVGOSHEY, O. - MARTIO, O. - RYAZANOV, V. - VUORINEN, M. *The Cantor Function*. s. 1-37, *Expositiones Mathematicae*, 24, 2006.
- [4] FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. s. 3-44. John Wiley & Sons Ltd., 1990.
- [5] FALCONER, K. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] FU, S. *The s-dimensional Hausdorff Integral and Its Physical Interpretation*. s. 308-316, *Real Analysis Exchange*, 21 (1), 1995-1996. Dostupné z: <http://projecteuclid.org/euclid.rae/1341343247>
- [7] JANOUŠEK, J. *Hausdorffova míra a Cantorova množina*. Bakalářská práce, ZČU, Plzeň 2013.
- [8] KESSEBÖHMER, M. - STRATMANN, B. O. *Fractal analysis for sets of non-differentiability of Minkowski's question mark function*, s. 2663-2686, *Journal of Number Theory*, 128, 2008.
- [9] LAMBERGER, M. *On a family of singular measures related to Minkowski's  $\varphi(x)$  function*, s. 45-63, *Indag. Mathem., N. S.*, 17 (1), 2006.
- [10] LUKEŠ, J. a kol. *Problémy z matematické analýzy*. Katedra matematiky MFF UK, Praha 1982.
- [11] LUKEŠ, J. - MALÝ, J. *Measure and Integral*. Matfyzpress, Praha 2005.
- [12] PAUŠ, P. *Počítačové metody analýzy fraktálních množin (diplomová práce, FJFI ČVUT)*. s. 18-21. Dostupné z <http://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/files/DIPLOMKA.pdf>
- [13] ROGERS, C. A. *Hausdorff Measures*. Cambridge University Press, 1970.
- [14] SHIPAN, L. *Hausdorff Calculus and Some of Its Applications*. s. 479-488, *Northeast Math. J.*, 14 (4), 1998. Dostupné z <http://166.111.121.20:9080/mathjournal/DBSX804/dbsx804013.caj.pdf>
- [15] WITHERS, W. D. *Fundamental Theorems of Calculus for Hausdorff Measures on the Real Line*. s. 581-595, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 129, 1988.