

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky



Bakalářská práce

**Konformní zobrazení a zobecněná
Schwarzova–Christoffelova
transformace**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Plzni dne

Podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu Ing. Petru Nečasovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady a odborný dohled.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá především teorií konformního zobrazení v komplexní rovině. Dále je zde uvedeno, jak hledat řešení Laplaceovy rovnice pomocí konstrukce vhodné holomorfní funkce a konformního zobrazení. Poté je zde popsána Schwarzova–Christoffelova transformace pro jednoduše souvislou oblast. Poslední část je věnována konformnímu zobrazení vícenásobně souvislých oblastí.

Klíčová slova

konformní zobrazení, Laplaceova rovnice, zobrazení vícenásobně souvislé oblasti, Schwarzova–Christoffelova transformace

Abstract

This thesis deals with theory of a conformal map in a complex plane. We explain how to solve Laplace equation by constructing holomorphic function and conformal map. In the next part we focus on Schwarz–Christoffel transformation for simple connected domain. The last part is devoted to a conformal mapping of multiply connected domain.

Keywords

conformal map, Laplace equation, map of multiply connected domain, Schwarz–Christoffel transformation

Obsah

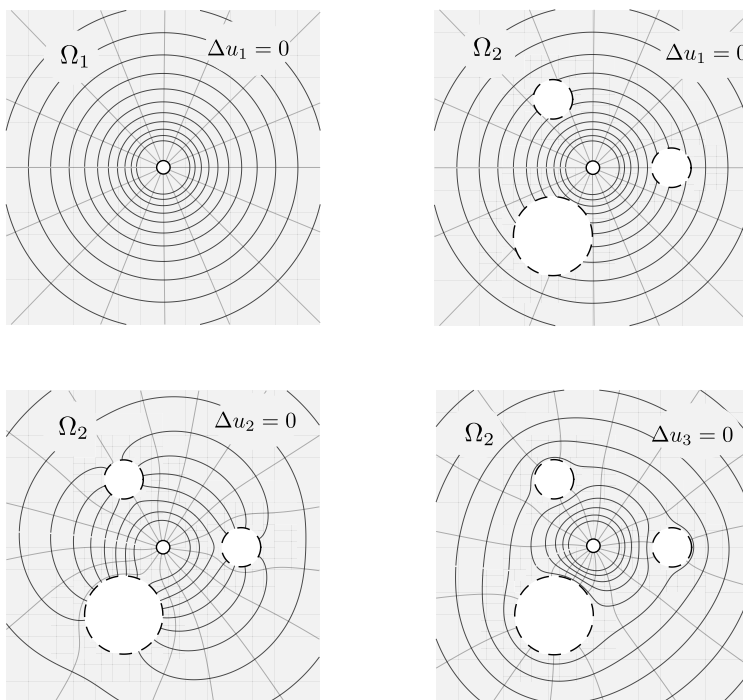
Prohlášení	iii
Poděkování	v
Abstrakt	vii
Úvod	1
1 Základní pojmy v komplexní analýze	3
1.1 Holomorfní a harmonické funkce	3
1.2 Möbiova transformace	7
1.3 Nekonečné součiny čísel	10
1.4 Nekonečné součiny funkcí	11
2 Konformní zobrazení	13
2.1 Definice konformního zobrazení	13
2.2 Invariantnost Laplaceovy rovnice	15
2.3 Konformnost Möbiovy transformace	16
3 Schwarzova–Christoffelova transformace	21
3.1 Schwarzova–Christoffelova věta	21
3.2 SC transformace pro zobecněnou polygonální oblast	29
4 Zobrazení vícenásobně souvislé oblasti	33
4.1 Kruhová doména	34
4.2 Kruhová inverze dle jedné kružnice	34
4.3 Vícenásobná kruhová inverze	36
4.4 Funkce zobrazující kružnici na přímku či úsečku	37
4.5 Ohraničená radial slit doména	41
4.6 Neohraničená radial slit doména	43
4.7 Neohraničená circular slit doména	46
4.8 Neohraničená polygonální doména	47
Shrnutí	49
Literatura	51
A Möbiova transformace je grupou – Důkaz	53
B Zobrazení kružnic na úsečky	55

C	Ilustrace zobrazení vícenásobně souvislých oblastí	59
C.1	Ohraničená radial slit doména	59
C.2	Neohraničená radial slit doména	61
C.3	Neohraničená circular slit doména	63
C.4	Neohraničená polygonální doména	64
D	Ukázka zdrojových kódů	67
D.1	Zobrazení na ohraničenou radial slit doménu	67
D.2	Zobrazení na neohraničenou circular slit doménu	69
	Použité značení	73

Úvod

Tato práce je věnována konformnímu zobrazení a řešení Laplaceovy rovnice pomocí konstrukce holomorfní funkce. Tuto problematiku si ilustrujme na obr. 1. V oblasti $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ můžeme vidět hladiny harmonické funkce $u_1(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (tmavší křivky) a křivky, jež jsou kolmé na hladiny funkce u_1 (světlejší křivky). Na funkci u_1 se můžeme dívat jako na reálnou část komplexní funkce $f_1 : w = \ln z$.

Nyní vyjme z oblasti Ω_1 tři kruhy, které jsou po dvou disjunktní, a označme novou oblast jako Ω_2 . Na oblasti Ω_2 funkce u_1 stále vyhovuje Laplaceově rovnici, avšak na hranicích kruhů nejsou obecně splněny ani Dirichletovy ani Neumannovy okrajové podmínky. V kapitole 4 si ukážeme, jak pomocí konformního zobrazení nalézt funkce u_2, u_3 , jež splňují Laplaceovu rovnici na oblasti Ω_2 a na hranicích kruhů jsou splněny Neumannovy okrajové podmínky (viz hladiny funkce u_2 na obr. 1 vlevo dole) či Dirichletovy okrajové podmínky (viz hladiny funkce u_3 na obr. 1 vpravo dole).



Obrázek 1: Hladiny funkcí u_1 , u_2 a u_3 , kde funkce u_1 , u_2 a u_3 splňují Laplaceovu rovnici na oblastech Ω_1 a Ω_2 .

V kapitole 1 uvedeme základní pojmy v komplexní rovině a souvislosti mezi holomorfními a harmonickými funkcemi. V kapitole 2 a 3 se budeme zabývat konformním zobrazením jednoduše souvislé oblasti. Podrobněji si rozebereme Möbiovu transformaci a především Schwarzovu–Christoffelovu transformaci. Kapitola 4 bude věnována konformnímu zobrazení vícenásobně souvislých oblastí.

Kapitola 1

Základní pojmy v komplexní analýze

Zde uvedeme několik základních pojmů komplexní analýzy, se kterými budeme často pracovat.

Definice 1.1 (Komplexní rovina). Množinu všech konečných komplexních čísel budeme nazývat otevřenou komplexní rovinou (zkráceně jen komplexní rovinou) a budeme ji značit \mathbb{C} . Množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ budeme nazývat uzavřenou komplexní rovinou a budeme ji značit \mathbb{C}^* .

Každému konečnému komplexnímu číslu $z = x + iy$, kde $z \in \mathbb{C}$, a $x, y \in \mathbb{R}$, lze přiřadit bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. V následujícím textu, v případě že nemůže dojít k nedorozuměním, budeme ztotožňovat body $z \in \mathbb{C}$ s body $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$.

Definice 1.2 (Komplexní funkce). Libovolné zobrazení z \mathbb{C}^* do \mathbb{C}^* nazveme komplexní funkcí komplexní proměnné.

Pro funkci $f : w = f(z)$, definovanou na M označme $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Nyní zavedme funkce $\tilde{u}(x, y) = u(z)$ a $\tilde{v}(x, y) = v(z)$, pro $(x, y) \in \tilde{M}$, kde

$$\tilde{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy \in M\}.$$

Tímto jsme komplexní funkci f definované v M přiřadili dvojici reálných funkcí $(\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y))$, které jsou definované v \tilde{M} .

V mnoha případech budeme nahrazovat vyšetřování komplexní funkce f vyšetřováním reálných funkcí \tilde{u}, \tilde{v} . Dále budeme využívat i opačného přístupu, neboli z dvou reálných funkcí \tilde{u}, \tilde{v} konstruovat jednu komplexní funkci f .

Abychom se vyhnuli složitému značení budeme, v případě že nemůže dojít k nedorozuměním, místo $\tilde{u}, \tilde{v}, (x, y), \tilde{M}$ psát u, v, z, M . A tedy budeme ztotožňovat funkce komplexní proměnné u, v s funkcemi dvou reálných proměnných \tilde{u}, \tilde{v} . Můžeme tedy psát

$$f(z) = f(x, y), f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

apod.

1.1 Holomorfní a harmonické funkce

Definice 1.3 (Holomorfní funkce). Řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když existuje takové okolí $U(z_0)$, že funkce f má v každém bodě v $U(z_0)$ derivaci.

Dále řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z_0 = \infty$ právě tehdy, když je funkce $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorfní v bodě 0.

Nyní zavedme holomorfnost na množině.

Definice 1.4. Řekneme, že funkce f je holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}^*$ právě tehdy, když je holomorfní v každém bodě množiny $M \subset \mathbb{C}^*$.

Definice 1.5 (Harmonická funkce). Reálnou funkci $g : z = g(x, y)$ nazveme harmonickou funkcí na oblasti Ω právě tehdy, když

(a) funkce g má spojité všechny parciální derivace do druhého řádu včetně,

(b) $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ na oblasti Ω .

Mějme komplexní funkci $f : w = f(z)$. Pro následující použití si rozepíšeme funkci f a proměnnou z pomocí jejich reálných a imaginárních částí

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$ a u, v jsou reálné funkce.

Nyní uvedeme větu, která spojuje holomorfnost funkce f a harmoničnost jejích složek u, v .

Věta 1.6 (Harmoničnost holomorfní funkce). *Mějme funkci f , jež je na oblasti Ω holomorfní, pak je její reálná i imaginární část harmonická na oblasti Ω .*

Důkaz. Jelikož je funkce f holomorfní na oblasti Ω , má zde spojité parciální derivace všech řádů (viz [6, str. 291]). Dále jsou pro funkce u, v splněny Cauchy-Riemannovy (zkráceně C-R) podmínky:

$$(1) \quad u_x = v_y,$$

$$(2) \quad u_y = -v_x.$$

Parciálním derivováním (1) dle x dostáváme $u_{xx} = v_{yx}$ a parciálním derivováním (2) dle y dostáváme $u_{yy} = -v_{xy}$. Jelikož jsou parciální derivace spojité, platí $v_{xy} = v_{yx}$, a tedy $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Funkce u je tedy harmonická.

Důkaz harmoničnosti funkce v je obdobný. □

Máme-li zadanou okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na oblasti Ω , pak dle věty 1.6 platí, že pokud najdeme holomorfní funkci, jejíž reálná (resp. imaginární) část splňuje okrajové podmínky, tak tato reálná (resp. imaginární) část holomorfní funkce řeší okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na oblasti Ω .

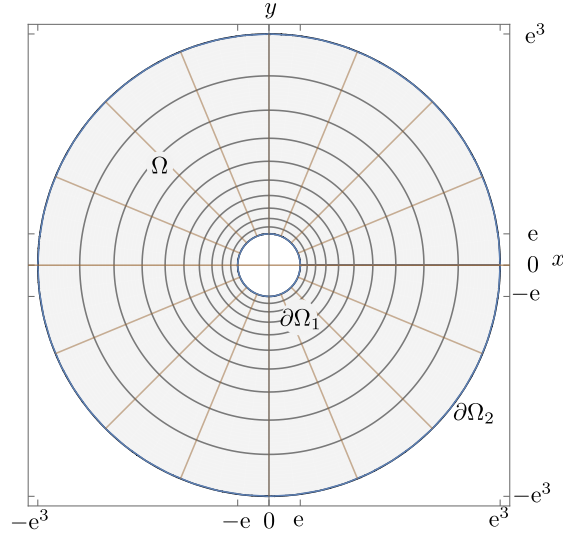
Příklad 1.7. Řešme následující okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \Delta U(x, y) = 0 & \text{pro } (x, y) \in \Omega, \\ U(x, y) = U_1 & \text{pro } (x, y) \in \partial\Omega_1, \\ U(x, y) = U_2 & \text{pro } (x, y) \in \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

kde $U_1, U_2 \in \mathbb{R}$ a

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e < \sqrt{x^2 + y^2} < e^3 \right\}, \\ \partial\Omega_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = e \right\}, \\ \partial\Omega_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = e^3 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nejprve ukážeme řešení okrajové úlohy s využitím aparátu reálné analýzy a poté řešení v komplexní rovině pomocí konstrukce vhodné holomorfní funkce.

Obrázek 1.1: Hladiny funkce U a ortogonální systém křivek na mezikružích.

- (i) Jelikož máme zadány Dirichletovy okrajové podmínky na soustředných kružnicích se středem v počátku, provedeme transformaci do polárních souřadnic:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.3)$$

kde $r > 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Můžeme tedy psát funkci U v nových proměnných ve tvaru $u(r, \varphi) = U(r(x, y), \varphi(x, y))$. Nyní použijeme vyjádření Laplaceovy rovnice v polárních souřadnicích (viz [[10], str.74])

$$\Delta_{r\varphi} u(r, \varphi) = 0,$$

kde

$$\Delta_{r\varphi} u(r, \varphi) = u_{rr}(r, \varphi) + \frac{u_r(r, \varphi)}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}(r, \varphi)}{r^2} = 0.$$

Jelikož jsou okrajové podmínky radiálně symetrické, budeme hledat radiálně symetrické řešení okrajové úlohy. A tedy předpokládáme, že u je závislá pouze na proměnné r neboli $u = u(r)$, z čehož plyne $u_{\varphi\varphi}(r) = 0$. Dostáváme tedy rovnici ve tvaru

$$u_{rr}(r) + \frac{u_r(r)}{r} = 0,$$

kterou lze řešit jako obyčejnou diferenciální rovnici.

Dostáváme novou okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{u'(r)}{r} = 0 \text{ pro } r \in (e, e^3), \\ u(e) = U_1, \\ u(e^3) = U_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Pokud u bude řešením okrajové úlohy (1.4), pak $U(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ bude řešením okrajové úlohy (1.1).

Rovnici

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} = 0 \quad (1.5)$$

vynásobíme r a upravíme

$$\begin{aligned} ru''(r) + u'(r) &= 0, \\ (ru'(r))' &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Po integraci (1.6) dostáváme

$$ru'(r) = C_1, \text{ kde } C_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Po vydělení r dostáváme

$$u'(r) = C_1 \frac{1}{r}. \quad (1.8)$$

Provedeme integraci rovnice (1.8), čímž dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2, \text{ kde } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro nalezení řešení okrajové úlohy zohledníme okrajové podmínky

$$\begin{aligned} U_1 &= C_1 + C_2 \ln(e) = C_1 + C_2, \\ U_2 &= C_1 + C_2 \ln(e^3) = C_1 + 3C_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Soustava rovnic 1.9 má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{U_2 - U_1}{2}, \\ C_1 &= \frac{3U_1 - U_2}{2}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy napsat řešení okrajové úlohy (1.4)

$$u(r) = \frac{3U_1 - U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \ln r.$$

Nyní se vrátíme zpět k funkci U

$$U(r(x, y)) = \frac{3U_1 - U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \ln r(x, y).$$

Po zpětné transformaci do kartézských souřadnic dostáváme řešení okrajové úlohy (1.1)

$$U(x, y) = \frac{3U_1 - U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- (ii) Nyní vyřešíme okrajovou úlohu (1.1) pomocí konstrukce holomorfní funkce. Budeme hledat funkci $f = u + iv$, jež je holomorfní na oblasti $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e < |z| < e^3\}$ a její reálná část splňuje tyto podmínky

$$\begin{cases} u = U_1 & \text{pro } z \in \partial\Omega_1, \\ u = U_2 & \text{pro } z \in \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (1.10)$$

kde

$$\begin{aligned} \partial\Omega_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = e\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = e^3\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Jelikož máme radiálně symetrické okrajové podmínky, převedeme úlohu do polárních souřadnic, kde $r = |z|$ a $\varphi = \arg z$. Dostáváme tedy funkce $U(r, \varphi) = u(r(x, y), \varphi(x, y))$ a $V(r, \varphi) = v(r(x, y), \varphi(x, y))$. Nyní si vyjádříme C-R podmínky v polárních souřadnicích

$$V_r = -\frac{U_\varphi}{r}, \quad (1.12)$$

$$U_r = \frac{V_\varphi}{r}. \quad (1.13)$$

Jelikož máme radiálně symetrické okrajové podmínky, předpokládáme i radiálně symetrické řešení, a tedy platí $U_\varphi = 0$ na oblasti Ω , můžeme tedy psát $U = U(r)$. Z čehož dále plyne dle (1.12), že $V_r = 0$, a tedy funkce V je nezávislá na r , můžeme tedy psát $V = V(\varphi)$.

Nyní si zavedme funkci $g(\varphi) = V_\varphi(\varphi)$. Použitím rovnice (1.13) dostáváme

$$g(\varphi) = rU_r(r).$$

Z toho plyne, že g je nezávislá na φ , a tedy je konstantní. Můžeme tedy psát

$$U_r(r) = \frac{C}{r}. \quad (1.14)$$

Po integraci (1.14) dostáváme

$$U(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (1.15)$$

Po zpětné transformaci do proměnných x, y dostáváme

$$u(x, y) = C_1 + C_2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dosazení okrajových podmínek je obdobné předchozí části příkladu (viz (1.9)), můžeme tedy psát

$$u(x, y) = \frac{3U_1 - U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \ln |z|.$$

Funkce $\ln |z|$ je reálnou částí funkce $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, a tedy $f(z) = \frac{3U_1 - U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \ln z$ je naší hledanou holomorfní funkcí, jejíž reálná část řeší okrajovou úlohu (1.1) a hladiny imaginární části tvoří systém ortogonálních hladin k hladinám reálné části.

Poznamenejme, že funkce f není holomorfní na záporné části reálné osy, jelikož $\arg z$ je zde nespojitý. Na harmoničnost reálné části funkce, a tedy i na naše řešení okrajové úlohy, to však nemá vliv.

Tento postup lze použít pouze pro řešení úloh s jednoduchými okrajovými podmínkami. Pokud budeme mít oblast s komplikovanější hranicí, je nalezení holomorfní funkce, jejíž reálná (resp. imaginární) část splňuje okrajové podmínky, velmi komplikované. Tento způsob hledání řešení okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici však lze zobecnit pomocí konformních zobrazení.

1.2 Möbiova transformace

Jednu důležitou třídu funkcí v komplexní rovině tvoří Möbiova transformace.

Definice 1.8. Každou funkci $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ve tvaru

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ pro } \forall z \in \mathbb{C},$$

kde a, b, c, d jsou libovolná konečná komplexní čísla splňující podmínku $ad - bc \neq 0$, nazveme Möbiovou transformací. Dále dodefinujeme

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Věta 1.9. Möbiova transformace f je prosté zobrazení \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* .

Dále platí, že inverzní zobrazení f^{-1} je opět Möbiovou transformací.

Důkaz. K funkci $f : w = f(z)$ ve tvaru

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.16)$$

vytvoříme inverzní funkci. Vyjádříme z z rovnice (1.16), čímž dostáváme

$$wcz + wd = az + b,$$

převědeme z na jednu stranu rovnosti

$$wcz - az = b - wd,$$

a vyjádříme z

$$z = \frac{b - wd}{wc - a}. \quad (1.17)$$

Po přeznačení dostáváme

$$z = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}, \quad (1.18)$$

kde $a' = -d$, $b' = b$, $c' = c$ a $d' = -a$. Je-li splněna podmínka $ad \neq bc$, je splněna i podmínka $a'd' \neq b'c'$, a tedy funkce $z = f^{-1}(w)$ je Möbiovou transformací. Z (1.16) plyne, že pro každé $z \in \mathbb{C}^*$ existuje právě jedno $w = f(z) \in \mathbb{C}^*$. Z (1.17) plyne, že pro každé $w \in \mathbb{C}^*$ existuje právě jedno $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}^*$. A tedy funkce f je prosté zobrazení a na \mathbb{C}^* . □

Nyní se pokusíme objasnit podmínku $ad - bc \neq 0$.

Poznámka 1.10. Provedeme rozbor výrazu

$$\frac{az + b}{cz + d} \quad (1.19)$$

v případě, že platí $ad = bc$.

1. Pro $a = 0$ a $c = 0$ se výraz (1.19) zredukuje do tvaru $\frac{b}{d}$. Výraz (1.19) je tedy konstantní s výjimkou $b = d = 0$, kdy je neurčitým výrazem.
2. Pro $a \neq 0$, $c = 0$ a $d = 0$ je jmenovatel výrazu (1.19) nulový, a tedy nabývá ve všech bodech hodnoty ∞ s výjimkou bodu $-\frac{b}{a}$, pro který dostáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.
3. Pro $c = 0$ a $d \neq 0$, musí platit $a = 0$, čímž se výraz (1.19) redukuje do tvaru $\frac{b}{d}$.
4. Pro $c \neq 0$ a $z = -\frac{d}{c}$ je číselník i jmenovatel výrazu (1.19) nulový, což je v \mathbb{C}^* neurčitý výraz.
5. Pro $c \neq 0$ a $z \neq -\frac{d}{c}$ můžeme upravit výraz (1.19) do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{a}{c} \frac{cz + b\frac{a}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{cz + b\frac{a}{c} + \left(d - b\frac{c}{a}\right) - \left(d - b\frac{c}{a}\right)}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{cz + d - \left(d - b\frac{c}{a}\right)}{cz + d} = \\ &= \frac{a}{c} \left(1 + \frac{-\left(d - b\frac{c}{a}\right)}{cz + d}\right) = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \frac{-\left(d - b\frac{c}{a}\right)}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{z + \frac{d}{c}}, \end{aligned}$$

a tedy pro $ad = bc$ je výraz (1.19) konstantní.

Z výše uvedeného rozboru plyne, že Möbiova transformace není zobrazením \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* právě, když $ad = bc$.

Věta 1.11. *Množina Möbiových transformací M , s operací skládání funkcí \circ tvoří grupu $G = (M, \circ)$.*

Důkaz. Důkaz spočívá v ukázání, že skládání Möbiových transformací je uzavřená a asociativní operace a že v množině M existuje jednotkový prvek, a ke každému prvku existuje inverzní prvek. Celý důkaz je proveden v příloze A. □

Nyní uvedeme několik speciálních tvarů Möbiovy transformace.

Poznámka 1.12 (Speciální případy funkce $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$).

1. Pro $a \neq 0, b = 0, c = 0, d \neq 0$ dostáváme funkci f ve tvaru $f(z) = a'z$, kde $a' = \frac{a}{d}$. Rozepíšeme si a' do exponenciálního tvaru $a' = |a'|e^{i\alpha}$. Dále funkci f rozepíšeme do tvaru $f = f_1 \circ f_2$, kde $f_1(z) = |a'|z$ a $f_2(z) = e^{i\alpha}z$. Funkce f_1 představuje stejnoolehlost dle počátku s koeficientem $|a'|$ a funkce f_2 představuje rotaci dle počátku o úhel α .
2. Pro $a \neq 0, b \neq 0, c = 0, d = a$ dostáváme funkci f ve tvaru $f(z) = z + b'$, kde $b' = \frac{b}{d}$, která představuje posunutí o b' .
3. Pro $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$ dostáváme funkci f ve tvaru $f(z) = \frac{1}{z}$, která popisuje inverzi.

Nyní provedme rozbor geometrických vlastností Möbiovy transformace.

Poznámka 1.13. Pro $c = 0$ a $d = 1$ dostáváme Möbiovou transformací f ve tvaru $f(z) = az + b$. Dle poznámky 1.12 a určuje koeficient stejnoolehlosti a rotace a b vektor posunutí.

Pro $c \neq 0$ máme Möbiovou transformací f ve tvaru $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Pak lze zapsat funkci f ve tvaru

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Funkci f můžeme zapsat jako složenou funkci

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1,$$

kde

1. $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ představuje posunutí o $\frac{d}{c}$,
2. $f_2(z) = \frac{1}{z}$ představuje inverzi (f_2 lze zapsat ve tvaru $f_2(z) = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$, a tedy inverze je složením kruhové inverze dle jednotkové kružnice v počátku a komplexního sdružení),
3. $f_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z$ představuje stejnoolehlost s koeficientem $\left|\frac{bc - ad}{c^2}\right|$ a rotaci dle počátku o úhel $\arg\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)$.
4. $f_4(z) = \frac{a}{c} + z$ představuje posunutí o $\frac{a}{c}$.

Zaveďme následující značení: pod pojmem zobecněná kružnice budeme rozumět kružnici nebo přímku.

Věta 1.14 (Zobrazení zobecněné kružnice, viz [6, str. 131]). *Je-li f Möbiovou transformací, pak obrazem zobecněné kružnice je opět zobecněná kružnice.*

1.3 Nekonečné součiny čísel

Nyní zdefinujeme nekonečný součin komplexních čísel. Dále uvedeme některé postačující podmínky konvergence nekonečného součinu.

Mějme posloupnost $(z_n) = (z_1, z_2, \dots)$ konečných komplexních čísel. Pak řekneme, že

$$p_n = \prod_{k=1}^n z_k = z_1 z_2 \dots z_n \quad (1.20)$$

je n -tým částečným součinem. A zápisem

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 z_2 \dots \quad (1.21)$$

označme nekonečný součin.

Definice 1.15 (Konvergence nekonečného součinu, viz [2, str. 25]). Řekneme, že nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$$

konverguje právě tehdy, když nastane jeden z následujících případů:

(a) Existuje konečná a nenulová limita

$$0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \neq \infty.$$

(b) V posloupnosti (z_n) je konečně mnoho nulových členů, a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow z_n \neq 0.$$

A nekonečný součin

$$\prod_{n=n_0+1}^{+\infty} z_n,$$

konverguje dle (a) neboli

$$0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=n_0+1}^n z_k \neq \infty.$$

V obou případech říkáme, že nekonečný součin konverguje k hodnotě p , kde

$$p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n z_k.$$

Poznámka 1.16. Výše uvedená definice nám zajišťuje, že nekonečný součin má podobné vlastnosti jako nekonečný součet. Hodnota výsledného součinu p nekonečného součinu závisí na hodnotách všech členů. Konvergence a divergence je však nezávislá na hodnotách konečného počtu členů.

Pro jednodušší zápis následujících vět si zavedme značení $z_n = 1 + w_n$

Lemma 1.17 (viz [2, str. 28]). *Pokud pro posloupnost reálných čísel (w_n) platí $w_n \geq 0$, pro $n = 1, 2, \dots$, pak*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + w_n) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \text{ konverguje.} \quad (1.22)$$

Definice 1.18 (Absolutní konvergence nekonečného součinu viz [2, str. 28]). Řekneme, že nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$$

konverguje absolutně právě tehdy, když konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + |w_n|) \quad (1.23)$$

neboli když konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + |z_n - 1|). \quad (1.24)$$

Věta 1.19 (viz [2, str. 28]). *Pro posloupnost komplexních čísel (w_n) platí*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + w_n) \text{ konverguje absolutně} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + |w_n|) \text{ konverguje.} \quad (1.25)$$

Věta 1.20 (viz [2, str. 29]).

- (a) *Absolutně konvergentní nekonečný součin je konvergentní.*
 (b) *Konvergence a hodnota absolutně konvergentního součinu je nezávislá na pořadí členů nekonečného součinu.*

1.4 Nekonečné součiny funkcí

Mějme posloupnost funkcí $(f_n) = (f_1, f_2, \dots)$, které jsou definované a konečné na neprázdné množině $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Pak řekneme, že

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^n f_k(z) = f_1(z)f_2(z)\dots f_n(z) \quad (1.26)$$

je n -tým částečným součinem. A zápisem

$$\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z)f_2(z)\dots \quad (1.27)$$

označme nekonečný součin.

Definice 1.21 (Bodová konvergence nekonečného součinu funkcí, viz [2, str. 31]). Řekneme, že nekonečný součin funkcí konverguje bodově na množině $\Omega_1 \subset \Omega$ právě tehdy, když pro každý bod $z_0 \in \Omega_1$ konverguje nekonečný součin čísel

$$\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0). \quad (1.28)$$

Řekneme, že nekonečný součin funkcí diverguje na množině $\Omega_1 \subset \Omega$ právě tehdy, když pro jakýkoli bod $z_0 \in \Omega_1$ diverguje nekonečný součin čísel

$$\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0). \quad (1.29)$$

Konverguje-li nekonečný součin funkcí $\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ na množině $\Omega_1 \subset \Omega$ a p je konečná komplexní funkce definovaná na Ω_1 taková, že platí

$$\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = p(z), \forall z \in \Omega_1,$$

pak řekneme, že nekonečný součin funkcí konverguje bodově k funkci p na množině Ω_1 .

Kapitola 2

Konformní zobrazení

Teorie konformních zobrazení je jednou z nejdůležitějších oblastí komplexní analýzy, která má mnoho aplikací v teorii řešení elektrostatického pole a hydrodynamiky.

2.1 Definice konformního zobrazení

Definice 2.1 (Konformní zobrazení, viz [4, str. 133]). Funkce f je konformní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$, pokud platí

- (a) funkce f je spojitá v bodě z_0 ,
- (b) funkce f zachovává orientované úhly sevřené křivkami, které vycházejí z bodu z_0 .

Věta 2.2 (Postačující podmínka konformnosti, viz [4, str. 134]). *Mějme funkci f , jež je v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorfní a platí $f'(z_0) \neq 0$. Pak je funkce f konformní v bodě z_0 .*

Věta 2.2 je pouze postačující podmínkou konformnosti, my však v následujícím textu budeme pod pojmem konformnost v bodě automaticky předpokládat, že zobrazení splňuje předpoklady věty 2.2.

Zatím máme definované konformní zobrazení pouze v konečných bodech a v bodech, ve kterých funkce f nabývá konečné hodnoty. Z tohoto důvodu je vhodné konformní zobrazení dále dodefinovat pro nevlastní body a póly, tyto body budeme nazývat kritické body konformního zobrazení.

Lemma 2.3 (viz [4, str. 135]). *Řekneme, že funkce $f : w = f(z)$ je konformní*

- (a) *ve vlastním pólu $z_0 \in \mathbb{C}$, právě když je v bodě z_0 konformní zobrazení $g(z) = \frac{1}{f(z)}$,*
- (b) *v nevlastním bodě $z_0 = \infty$, ve kterém nabývá konečné hodnoty, právě když je v bodě $t = 0$ konformní zobrazení $h : w = f(t)$, kde $t = \frac{1}{z}$,*
- (c) *v nevlastním pólu $z_0 = \infty$, právě když je v bodě $t = 0$ konformní zobrazení $h : w = \frac{1}{f(t)}$, kde $t = \frac{1}{z}$.*

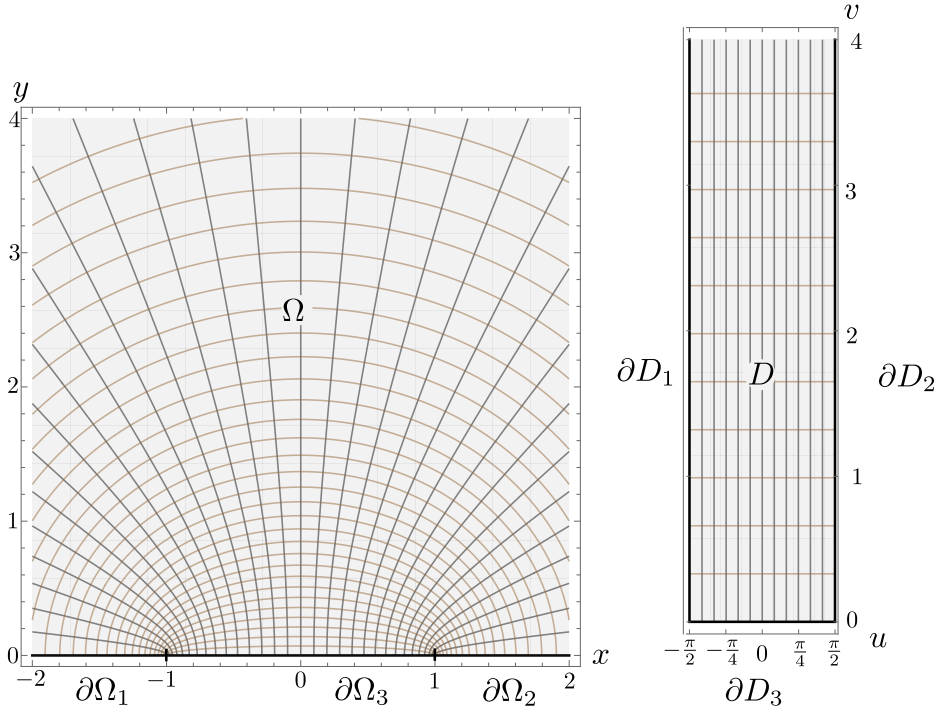
Nyní zavedeme pojem konformnosti na oblasti.

Definice 2.4 (Konformní zobrazení oblasti, viz [4, str. 136]). *Řekneme, že funkce f je konformní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ právě tehdy, když je prostá a spojitá na oblasti Ω a konformní v každém bodě oblasti Ω .*

Nyní si ukažme jak lze zobrazit horní polorovinu komplexní roviny na nekonečný polopás pomocí konformního zobrazení.

Příklad 2.5. Mějme oblast $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, s hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$, kde

$$\begin{cases} \partial\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) \leq -1\}, \\ \partial\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 1\}, \\ \partial\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \wedge -1 < \text{Re}(z) < 1\}. \end{cases} \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Znázornění oblastí z příkladu 2.5. Původní oblast (vlevo) a oblast po zobrazení pomocí funkce arcsin (vpravo).

Nyní ukážeme, že funkce arcsin zobrazí horní polorovinu na nekonečný polopás. Komplexní funkce Arcsin je definovaná jako inverzní funkce k funkci sin, tj. funkce $\text{Arcsin } z = \{w \in \mathbb{C} : \sin w = z\}$. Tuto nekonečně-značnou funkci lze vyjádřit ve tvaru

$$\text{Arcsin}(z) = -i \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Nyní vyjádříme hlavní hodnotu funkce Arcsin

$$\arcsin(z) = -i \ln(iz + (\sqrt{1 - z^2})_1),$$

kde $(\sqrt{1 - z^2})_1$ je jednou z větví druhé odmocniny ve tvaru

$$(\sqrt{1 - z^2})_1 = \sqrt{|1 - z^2| e^{i \arg(1 - z^2)}} = \sqrt{|1 - z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1 - z^2)}.$$

Můžeme tedy funkci arcsin zapsat ve tvaru

$$\arcsin(z) = -i \ln(iz + \sqrt{|1 - z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1 - z^2)}),$$

kteřou budeme považovat za naše konformní zobrazení f .

Pro reálnou část funkce f můžeme psát

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(z) = \operatorname{Re}(-i(\ln |iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}| + i \arg(iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}))) = \arg(iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}).$$

A pro imaginární část funkce f můžeme psát

$$\operatorname{Im}(f(z)) = v(z) = \operatorname{Im}(-i(\ln |iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}| + i \arg(iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}))) = -\ln |iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)}|.$$

Nyní prošetřeme chování funkce f pro body z hranice oblasti Ω . Budeme tedy v této části odvození uvažovat $z \in \mathbb{R}$.

Pro hodnoty mezi -1 a 1 se arcsin chová stejně jako v reálných číslech. Funkce u tedy nabývá všech hodnot mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ a funkce v je nulová.

Nyní prošetříme chování funkce u pro hodnoty $z > 1$ a $z < -1$, pro které dostáváme $u(z) = \arg(iz + \sqrt{|1-z^2|} e^{\frac{i}{2}(\pi)}) = \arg(iz + i\sqrt{|1-z^2|})$. Jelikož $|z| > \sqrt{z^2-1}$, dostáváme

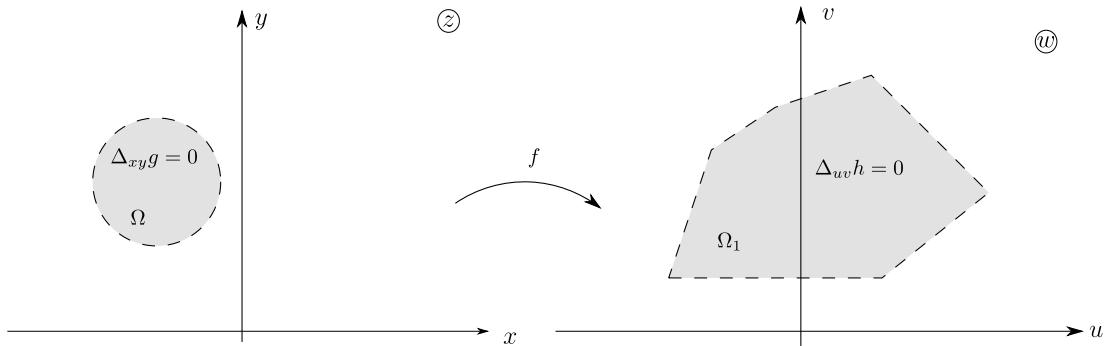
1. $u(z) = \frac{\pi}{2}$, pro $z > 1$,
2. $u(z) = -\frac{\pi}{2}$, pro $z < -1$.

Dále lze ukázat, že funkce v nabývá kladných hodnot na horní polorovině komplexní roviny, a tedy funkce f zobrazí horní polorovinu (oblast Ω) komplexní roviny na polopás v horní polorovině komplexní roviny (oblast D) (viz obr. 2.1). Hranice $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ a $\partial\Omega_3$ se zobrazí na ∂D_1 , ∂D_2 a ∂D_3 .

Pro lepší geometrickou představu zobrazení f si zavedeme dvě funkce $g(u, v) = u$ a $h(u, v) = v$, jejichž hladiny tvoří ortogonální systém křivek na oblasti D . Pro nalezení vzorů hladin funkce g a h v oblasti Ω nám stačí nalézt hladiny reálné a imaginární části funkce f (viz obr. 2.1), jelikož $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$.

2.2 Invariantnost Laplaceovy rovnice

V kapitole 1 jsme ukázali souvislost mezi holomorfností komplexní funkce a harmoničností jejích složek. Ukázali jsme si, jak lze této souvislosti využít pro řešení Laplaceovy rovnice. Použití této souvislosti dále rozšiřuje následující věta.



Obrázek 2.2: Zobrazení oblasti Ω na oblast Ω_1 pomocí funkce $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Věta 2.6 (Invariantnost Laplaceovy rovnice vůči konformnímu zobrazení). *Mějme*

(a) *oblasti* $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$,

(b) funkci f , jež je konformní na oblasti Ω (tj. pro $\forall z \in \Omega: f'(z) \neq 0$) a platí $f(\Omega) = \Omega_1$,

(c) funkci g , jež je harmonická na oblasti Ω .

Pak funkce h , splňující rovnost $h(f(z)) = g(z)$ pro $\forall z \in \Omega$, je harmonická na oblasti Ω_1 .

Důkaz. Rozepišme si funkci f na reálnou a imaginární část $f = u + iv$.

Mějme funkci h , pro kterou platí $\forall z \in \Omega: h(f(z)) = g(z)$. Ukážeme, že platí

$$\Delta_{xy}g = |f'|^2 \Delta_{uv}h \text{ na } \Omega,$$

kde $\Delta_{xy}g = g_{xx} + g_{yy}$ a $\Delta_{uv}h = h_{uu} + h_{vv}$. Nyní vyjádříme první parciální derivace.

$$g_x(x, y) = (h(f(x, y)))_x = h(u(x, y), v(x, y))_x = h_u u_x + h_v v_x.$$

$$g_y(x, y) = h_u u_y + h_v v_y.$$

Nyní vyjádříme druhou parciální derivaci dle proměnné x .

$$\begin{aligned} g_{xx} &= (h_u u_x + h_v v_x)_x = (h_{uu} u_x + h_{uv} v_x) u_x + h_u u_{xx} + (h_{vu} v_x + h_{vv} v_x) v_x + h_v v_{xx} = \\ &= h_{uu} u_x^2 + h_{uv} u_x v_x + h_u u_{xx} + h_{vu} u_x v_x + h_{vv} v_x^2 + h_v v_{xx}. \end{aligned}$$

Obdobně vyjádříme druhou parciální derivaci dle proměnné y .

$$g_{yy} = h_{uu} u_y^2 + h_{uv} u_y v_y + h_u u_{yy} + h_{vu} u_y v_y + h_{vv} v_y^2 + h_v v_{yy}.$$

Nyní vyjádříme vztah mezi $\Delta_{xy}g(x, y)$ a $\Delta_{uv}h(u, v)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}g(x, y) &= \\ &= h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + h_u(u_{xx} + u_{yy}) + h_v(v_{xx} + v_{yy}) + \\ &+ h_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + h_{vu}(u_x v_x + u_y v_y). \end{aligned}$$

Nyní využijeme C-R podmínky (1) a (2), jelikož je funkce f holomorfní, platí $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}g &= g_{uu} + g_{yy} = \\ &= h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vu}(2(u_x v_x - u_x v_x)) + h_u(u_{xx} + u_{yy}) + h_v(v_{xx} + v_{yy}) = \\ &= (h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + u_y^2). \end{aligned}$$

Což lze zapsat ve tvaru $\Delta_{xy}g(x, y) = \Delta_{u,v}h(u, v) |f'(x, y)|^2$.

Dostáváme tedy vztah mezi $\Delta_{uv}h$ a $\Delta_{xy}g$, jelikož dále platí, že funkce $|f'|^2$ je vždy nenulová (to plyne z nenulovosti derivace funkce f), můžeme psát

$$\Delta_{uv}h(u, v) = \frac{\Delta_{xy}g(x, y)}{|f'(x, y)|^2}.$$

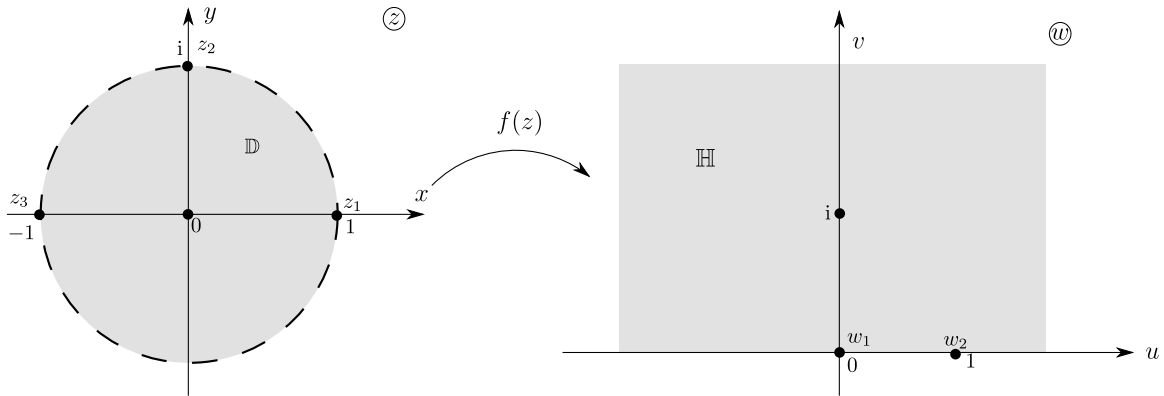
A tedy $\Delta g = 0$ na oblasti Ω právě tehdy, když $\Delta h = 0$ na oblasti Ω_1 . □

2.3 Konformnost Möbiovy transformace

V poznámce 1.10 jsme ukázali, že funkce ve tvaru Möbiovy transformace je zobrazením \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* . Z vyjádření derivace Möbiovy transformace

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad (2.2)$$

je patrné, že Möbiova transformace má ve všech bodech, s výjimkou jednoho či dvou kritických bodů, v \mathbb{C}^* nenulovou derivaci. Pomocí lemmatu 2.3 lze dodefinovat konformnost v kritických bodech Möbiovy transformace. Möbiova transformace je tedy konformním zobrazením \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* . Jde ovšem dokázat i opačné tvrzení (viz [6, str. 462]), a to že Möbiova transformace je jediným konformním zobrazením \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* .

Obrázek 2.3: Zobrazení oblasti \mathbb{D} na oblast \mathbb{H} , kde $\infty = w_3 = f(z_3)$.

Příklad 2.7. Mějme jednotkovou kružnici C se středem v počátku, pak označme $\mathbb{D} = \text{Int } C$. Dále označme horní polorovinu komplexní roviny \mathbb{U} jako \mathbb{H} . Najděme zobrazení f , které zobrazí \mathbb{D} na \mathbb{H} . Snadno lze ukázat, že pro funkci ve tvaru

$$w = f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \text{ kde } z_1 \neq z_2 \neq z_3$$

platí

$$w_1 = f(z_1) = 0,$$

$$w_2 = f(z_2) = 1,$$

$$w_3 = f(z_3) = \infty.$$

Pomocí Möbiovy transformace tedy můžeme zobrazit tři libovolné body na body $0, 1, \infty$. Nyní zvolme $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$. Dostáváme funkci ve tvaru

$$w = f(z) = \frac{z - 1}{z - (-1)} \frac{i - (-1)}{i - 1} = -i \frac{z - 1}{z + 1}.$$

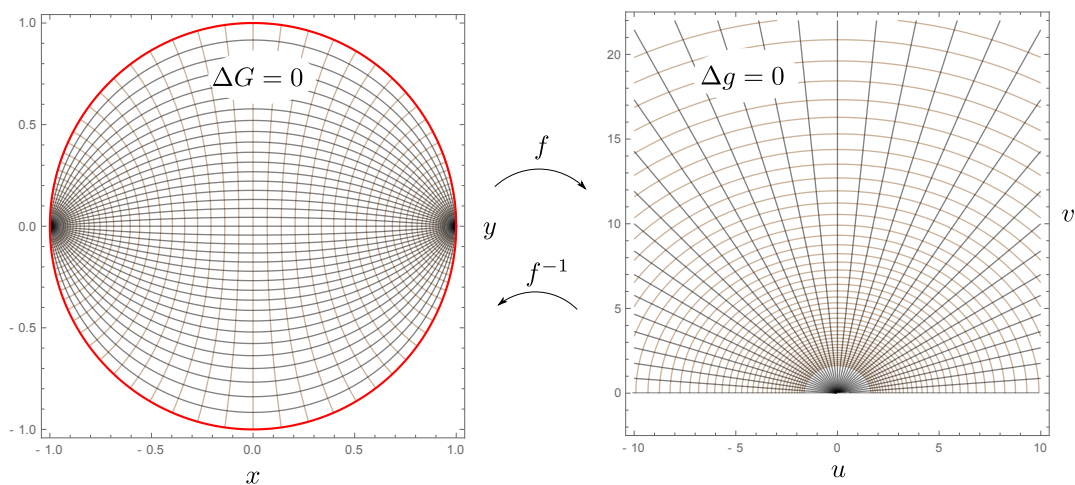
Funkci f můžeme rozepsat do tvaru

$$f(z) = -i \left(-\frac{2}{z + 1} + 1 \right) = i \left(\frac{2}{z + 1} - 1 \right),$$

a tedy funkci f vyjádřit jako složenou funkci $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde $f_1(z) = z + 1, f_2(z) = \frac{1}{z}, f_3(z) = 2z, f_4(z) = z - 1$ a $f_5(z) = iz$. Funkce f_1 představuje posunutí, f_2 inverzi, f_3 stejnoolehlost, f_4 druhé posunutí a f_5 rotaci.

Jelikož, dle věty 1.14, Möbiova transformace zobrazí zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici, body z_0, z_1, z_2 leží na kružnici a body $0, 1, \infty$ na přímce, zobrazí funkce f kružnici C na reálnou osu. Jelikož dále platí $f(0) = i$, funkce f zobrazí \mathbb{D} na \mathbb{H} . Na obr. 2.4 můžeme vidět zobrazení hladin reálné a imaginární části funkce $g(z) = \ln(z)$ z \mathbb{H} na \mathbb{D} pomocí funkce f^{-1} . Inverzní funkce k funkci f jistě existuje, a je také Möbiovou transformací, jelikož Möbiova transformace je grupou (viz příloha A).

Dále lze ukázat, že funkce f zobrazí půlkruh v horní polorovině komplexní roviny na první kvadrant komplexní roviny. Jelikož platí $f(0) = i$, funkce f zobrazí přímku procházející body $-1, 0, 1$ na přímku procházející body $\infty, i, 0$. A tedy funkce f zobrazí reálnou osu v rovině \mathbb{Z} na imaginární osu v rovině \mathbb{U} . Jelikož platí $f(i) = 1$, zobrazí funkce f horní polorovinu roviny \mathbb{Z} na pravou polorovinu roviny \mathbb{U} . A tedy část kruhu ležící v horní polorovině roviny \mathbb{Z} se zobrazí na první kvadrant roviny \mathbb{U} .



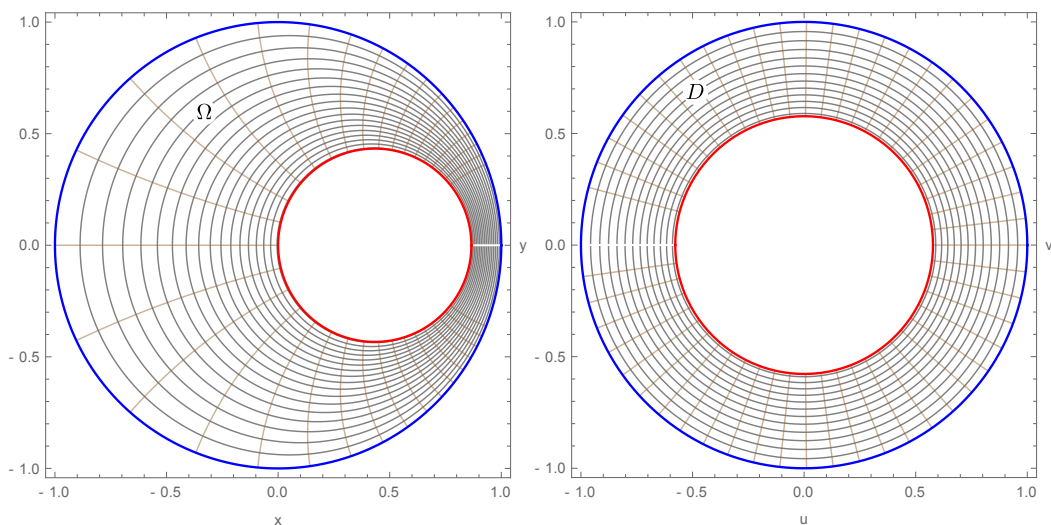
Obrázek 2.4: Zobrazení hladin harmonické funkce $g(z) = \ln |z|$ (hnědé křivky) a kolmé křivky na hladiny (hnědé křivky) z oblasti \mathbb{H} na oblast \mathbb{D} pomocí funkce f^{-1} . $G = f^{-1} \circ g$.

Věta 2.8 (viz [6, str. 467]). *Möbiova transformace zobrazí jednotkový kruh v počátku \mathbb{D} na sebe právě tehdy, když je ve tvaru*

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{D}$.

V příkladu 1.7 jsme si ukázali, jak řešit Laplaceovu rovnici na oblasti, jejíž hranice jsou dvě soustředné kružnice. V následujícím příkladu ukážeme, jak řešit pomocí věty 2.6 a 2.8 Laplaceovu rovnici na oblasti, jejíž hranice jsou dvě nesoustředné kružnice C_1, C_2 , pro které platí $C_2 \subset \text{Int } C_1$.



Obrázek 2.5: Zobrazení oblasti Ω na mezikruží D .

Příklad 2.9. Řešme tuto okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \Delta U(z) = 0 & , \text{ pro } z \in \Omega, \\ U(z) = U_1 & , \text{ pro } z \in \partial\Omega_1, \\ U(z) = U_2 & , \text{ pro } z \in \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\sqrt{3}}{4} \right| > \frac{\sqrt{3}}{4} \wedge |z| < 1 \right\}, \\ \partial\Omega_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Příklad budeme řešit pomocí převedení oblasti Ω na mezikruží D . Dle věty 2.8 zobrazí funkce $f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1}$ oblast \mathbb{D} na \mathbb{D} . Jelikož je funkce f ve tvaru Möbiovy transformace, jde o konformní zobrazení. Člen $e^{i\alpha}$ představuje pouze rotaci. Jelikož potřebujeme naši kružnici $\partial\Omega_1$ pouze posunout budeme hledat funkci f ve tvaru $f(z) = \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1}$. Abychom zobrazili kružnici $\partial\Omega_1$ na kružnici v počátku, zobrazíme bod $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $-C$ a bod 0 na C , kde $C \in (0, 1)$. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \zeta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\zeta} - 1} = -C \quad (2.5)$$

$$\frac{-\zeta}{-1} = C. \quad (2.6)$$

Po sečtení rovnic (2.5) a (2.6) dostáváme

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \zeta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\zeta} - 1} + \zeta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|\zeta|^2 - 2\zeta + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\zeta} - 1} = 0.$$

Řešíme tedy rovnici $\frac{\sqrt{3}}{2}|\zeta|^2 - 2\zeta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Z rovnice je vidět, že ζ je reálné číslo, a tedy dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta^2 - 2\zeta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

jejíž řešením je $\zeta \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right\}$. Nás zajímá pouze řešení, pro které platí $|\zeta| < 1$, a tedy dostáváme

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A po dosazení $\frac{1}{\sqrt{3}}$ do (2.5) dostáváme $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Máme tedy konformní zobrazení $w = f(z) =$

$\frac{z - \frac{1}{\sqrt{3}}}{z \frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{\sqrt{3}z - 1}{z - \sqrt{3}}$, které zobrazí oblast Ω na mezikruží D , ve tvaru

$$\begin{aligned} D &= \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{3}} < |w| < 1 \right\}, \\ \partial D_1 &= \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \partial D_2 &= \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}. \end{aligned}$$

Z příkladu 1.7 víme, že reálná část holomorfní funkce $g(w) = C_1 \ln w + C_2$ je radiálně symetrická, a tedy řeší Laplaceovu rovnici na oblasti D . Po zohlednění okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} U_1 &= C_1 + C_2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = C_1 - C_2 \ln(\sqrt{3}), \\ U_2 &= C_1 + C_2 \ln(1) = C_1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

A po vyřešení soustavy dostáváme

$$\begin{aligned} C_1 &= U_2, \\ C_2 &= \frac{U_2 - U_1}{\ln(\sqrt{3})}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy holomorfní funkci na oblasti D v proměnné w ,

$$g(w) = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{\ln(\sqrt{3})} \ln w.$$

Nyní se můžeme vrátit k proměnné z

$$g(f(z)) = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{\ln(\sqrt{3})} \ln \frac{z\sqrt{3} - 1}{z - \sqrt{3}}.$$

A tedy reálná část funkce $g(f(z))$ řeší naši okrajovou úlohu (to plyne z věty 2.6) a hladiny imaginární části tvoří systém ortogonálních křivek na hladiny reálné části.

Z příkladu je vidět, že jedno z důležitých použití konformního zobrazení je převedení složité oblasti, na které neumíme vyřešit danou úlohu, na jednodušší (vhodnější) oblast.

Kapitola 3

Schwarzova–Christoffelova transformace

V této kapitole uvedeme Schwarzovu–Christoffelovu transformaci (zkráceně jen SC transformaci), pomocí které lze konformně zobrazit horní polorovinu komplexní roviny na vnitřek libovolného polygonu. Hlavní částí této kapitole bude samotný důkaz Schwarzovy–Christoffelovy věty. Nejdříve zavedeme značení pro úsečky, zobecněné úsečky a polygony. Poté uvedeme několik vět, které budeme potřebovat pro dokázání Schwarzovy–Christoffelovy věty. Na konci kapitoly uvedeme některá zobecnění této věty a uvedeme příklad tohoto zobrazení. Nyní zavedeme značení pro úsečku a zobecněnou úsečku.

Definice 3.1. Mějme dva body $x, y \in \mathbb{C}$,

- (a) pak zápisem $\llbracket x, y \rrbracket$ budeme rozumět množinu bodů, $\llbracket x, y \rrbracket = \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$,
- (b) a zápisem $\llbracket x, y \rrbracket$ budeme rozumět množinu bodů, $\llbracket x, y \rrbracket = \{(1-t)x + ty : t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)\} \cup \{\infty\}$.

Definice 3.2 (Polygonální oblast). Polygonální oblastí v komplexní rovině nazveme jednoduše souvislou oblast $G \subset \mathbb{C}$, jejíž hranice je jednoduchá uzavřená křivka $\Gamma \subset \mathbb{C}$, jež je složená z konečného počtu úseček Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n; n \geq 3$).

Poznámka 3.3. Pro snazší orientaci si zavedeme následující pojmy (viz obr. 3.1):

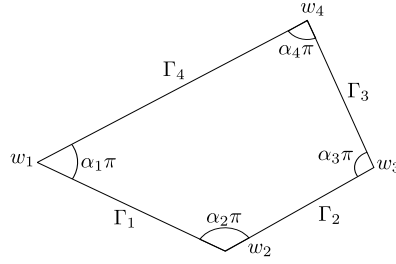
- (a) uzávěr množiny $\bar{G} = G \cup \Gamma$ nazveme polygon,
- (b) úsečky $\Gamma_k = \llbracket w_k, w_{k+1} \rrbracket$, pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ a $\Gamma_n = \llbracket w_n, w_1 \rrbracket$ nazveme stranami polygonu a w_k nazveme vrcholy polygonu,
- (c) α_k nazveme koeficienty úhlů o velikosti $\alpha_k \pi$, kde $\alpha_k \in (0, 2)$, které odpovídají vrcholům w_k ,
- (d) pro součet úhlů v polygonu o n vrcholech platí

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2. \quad (3.1)$$

3.1 Schwarzova–Christoffelova věta

Nyní uvedeme několik vět, které použijeme v důkazu Schwarzovy–Christoffelovy věty.

Věta 3.4 (Princip přiřazení hranic, viz [1, str. 200]). *Mějme dvě jednoduše souvislé oblasti P a S . Nechť hranice těchto množin ∂P a ∂S jsou jednoduché uzavřené křivky. Pak libovolné konformní zobrazení f oblasti P na oblast S lze spojitě rozšířit na \bar{P} tak, že toto spojitě rozšíření funkce f je spojitě a prostě na množinu \bar{S} .*

Obrázek 3.1: Polygon s vrcholy w_k , stranami Γ_k a úhly o velikostech $\pi\alpha_k$.

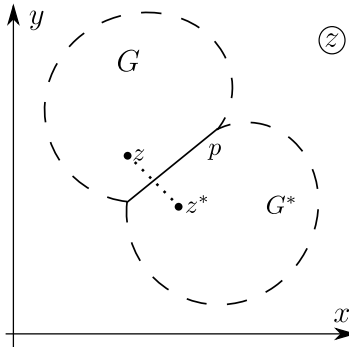
Další větou je Schwarzův princip zrcadlení, který nám umožňuje analyticky prodloužit funkci přes úsečku, polopřímku či přímku. Jelikož má tato věta mnoho předpokladů, uvedeme je pro přehlednost před větou (viz obr. 3.2).

- (P1) Mějme přímku, polopřímku či úsečku p a oblasti $G, G^* \subset \mathbb{C}$, pro které platí, že oblast G^* je symetrická s oblastí G podle p a platí $p \subset \partial G \wedge p \subset \partial G^*$. Dále označme z^* bod, jenž je symetrický s bodem z podle p .
- (P2) Na $G \cup p$ je definována funkce f , jež je spojitá na $G \cup p$ a holomorfní na G . Dále pro funkci f platí, že obraz p leží na přímce (neboli $q = f(p)$ leží na přímce).
- (P3) Na $G^* \cup p$ je definována funkce f^* , pro kterou platí: $\forall z \in p : f(z) = f^*(z)$. Dále pro každý bod $z^* \in G^*$ platí, že $f^*(z^*)$ je symetrický s $f(z)$ podle q .

Věta 3.5 (Schwarzův princip zrcadlení, viz [2, str. 66]). *Předpokládejme, že platí (P1), (P2) a (P3), pak funkce f^* je analytickým prodloužením funkce f z oblasti G do oblasti G^* přes p . A tedy funkce*

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in G \cup p, \\ f^*(z) & \text{pro } z \in G^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

je holomorfní na $G \cup p \cup G^*$.



Obrázek 3.2: Schwarzův princip zrcadlení.

Věta 3.6 (Liouvilleova věta, viz [6, str. 292]). *Je-li f holomorfní a omezená na \mathbb{C} , pak je funkce f konstantní.*

Důkaz. Funkce f je dle předpokladů věty omezená na \mathbb{C} , a tedy pro ní platí

$$\exists K > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < K. \quad (3.3)$$

Nyní pro libovolné $\zeta \in \mathbb{C}$ zvolme $R \in \mathbb{R}$ tak, že platí $R > |\zeta|$. A uvažujme křivku C s parametrizací $\varphi(t) = 2Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

S využitím Cauchyho integrálního vzorce vyjádříme hodnotu $f'(\zeta)$ pomocí funkčních hodnot funkce f na kružnici C . Dostáváme tedy vyjádření hodnoty $f'(\zeta)$ ve tvaru

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz. \quad (3.4)$$

Dále odhadneme shora absolutní hodnotu $f'(z)$ pomocí suprema funkce f a délky křivky C

$$|f'(\zeta)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in C} \left(\frac{|f(z)|}{|(z - \zeta)|^2} \right) l(C), \quad (3.5)$$

kde $l(C)$ je obvod kružnice C .

Jelikož platí (3.3) a $|z - \zeta| > R$ pro libovolné $z \in C$, můžeme psát

$$|f'(\zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in C} \left(\frac{K}{R^2} \right) 4\pi R = \frac{1}{2\pi} \frac{K}{R^2} 4\pi R = 2 \frac{K}{R}. \quad (3.6)$$

Jelikož R je libovolné reálné číslo, pro které platí $R > |\zeta|$, lze ho zvyšovat nade všechny meze, a tedy můžeme přejít v (3.6) k limitě, čímž dostáváme

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |f'(\zeta)| = 0, \quad (3.7)$$

což znamená, že funkce f má v libovolném bodě $\zeta \in \mathbb{C}$ nulovou derivaci, a tedy je v \mathbb{C} konstantní. \square

Pro snazší ověření holomorfnosti v bodě ∞ uvedeme následující lemma.

Lemma 3.7 (Holomorfnost funkce v nekonečnu, viz [6, str. 323]). *Funkce f je holomorfní v bodě ∞ právě tehdy, když*

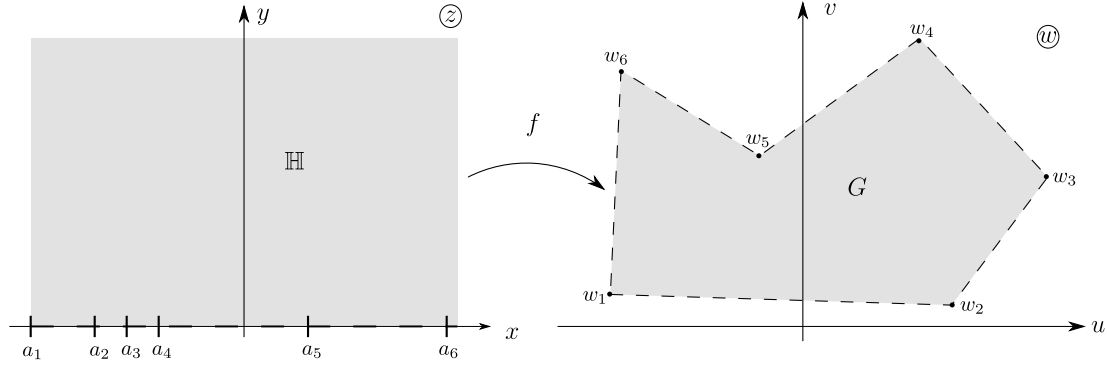
- (a) *existuje takové prstencové okolí $P(\infty)$, že funkce f je holomorfní v $P(\infty)$,*
- (b) *je spojitá v bodě ∞ ,*
- (c) *hodnota $f(\infty)$ je konečná.*

Věta 3.8 (Schwarzova-Christoffelova věta). *Mějme funkci $f : w = f(z)$, jež konformně zobrazí horní polorovinu komplexní roviny na polygonální oblast G , jež je vnitřkem polygonu, který má vrcholy $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 3$) s úhly $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, kde $\alpha_k \in (0, 2)$, pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Dále předpokládejme, že vrcholy w_1, w_2, \dots, w_n jsou obrazy bodů $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pro které platí $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty$. Pak pro libovolné konečné komplexní číslo z_0 , pro které platí $\text{Im}(z_0) \geq 0$, existují konstanty $A, C \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in \mathbb{H}$ platí*

$$f(z) = A + C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz. \quad (3.8)$$

Důkaz. Hledáme konformní zobrazení, čili funkci $f : w = f(z)$, která je holomorfní na \mathbb{H} a $\forall z \in \mathbb{H} : f'(z) \neq 0$, které zobrazí \mathbb{H} na vnitřek polygonu (viz obr. 3.3). Dále dle věty o přiřazení hranic (věta 3.4) platí, že reálná osa, jež je hranicí oblasti \mathbb{H} , se zobrazí na hranici ∂G polygonální oblasti G a funkci f lze spojitě rozšířit na uzávěr oblasti $\bar{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Dále označme body $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ jako vzory vrcholů polygonu $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Pak platí, že úsečky $\Lambda_1 = \llbracket a_1, a_2 \rrbracket, \Lambda_2 = \llbracket a_2, a_3 \rrbracket, \dots, \Lambda_{n-1} = \llbracket a_{n-1}, a_n \rrbracket$ a množinu $\Lambda_n = \llbracket a_n, a_1 \rrbracket$ zobrazí na úsečky, jež představují strany polygonu $\Gamma_1 = \llbracket w_1, w_2 \rrbracket, \Gamma_2 = \llbracket w_2, w_3 \rrbracket, \dots, \Gamma_n = \llbracket w_n, w_1 \rrbracket$.

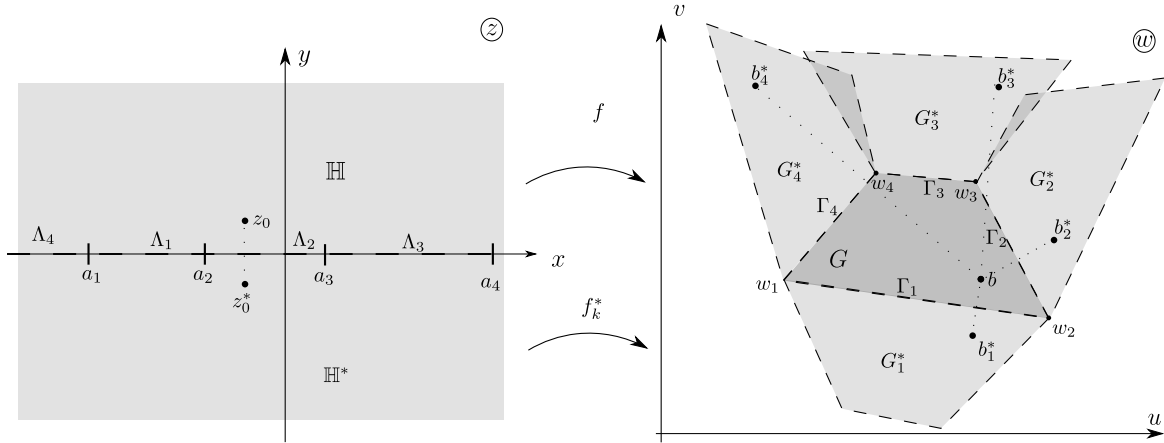
Nyní prošetřeme, na jakou oblast lze pomocí Schwarzova principu zrcadlení (viz věta 3.5) rozšířit funkci f (viz obr. 3.4). Nejprve prodlužme funkci f přes Λ_1 na dolní polorovinu, kterou označme \mathbb{H}^* . To lze, jelikož Λ_1 i Γ_1 jsou úsečky. Tímto jsme k funkci f , jež je definována na \mathbb{H} ,

Obrázek 3.3: Zobrazení oblasti \mathbb{H} na vnitřek polygonu G .

vytvořili funkci f_1^* , jež je analytickým prodloužením funkce f z \mathbb{H} na \mathbb{H}^* přes Λ_1 . Máme tedy funkci

$$F_1(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H} \cup (a_1, a_2), \\ f_1^*(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H}^*, \end{cases} \quad (3.9)$$

jež je holomorfní na $\mathbb{H} \cup (a_1, a_2) \cup \mathbb{H}^*$.

Obrázek 3.4: Zobrazení \mathbb{H} na G pomocí funkce f a zobrazení oblasti \mathbb{H}^* na oblasti G_k^* pomocí funkcí f_k^* .

Na \mathbb{H}^* máme tedy definovanou holomorfní funkci f_1^* , kde pro $\forall z_0 \in \mathbb{H}$ platí, že $b = f(z_0)$ je symetrický s bodem $b_1^* = f_1^*(z_0^*)$, kde $z_0^* = \bar{z}_0$, dle přímky procházející body w_1 a w_2 . Funkce f_1^* tedy zobrazí \mathbb{H}^* na polygonální oblast G_1^* , jež je symetrická s G dle strany Γ_1 . Obdobně lze prodloužit f dle libovolné Λ_k na \mathbb{H}^* , čímž dostáváme pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ funkci

$$F_k(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H} \cup (a_k, a_{k+1}), \\ f_k^*(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H}^*, \end{cases} \quad (3.10)$$

a pro $k = n$ funkci

$$F_k(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H} \cup (-\infty, a_1) \cup (a_n, +\infty) \cup \{\infty\}, \\ f_k^*(z) & \text{pro } z \in \mathbb{H}^*, \end{cases} \quad (3.11)$$

kde f_k^* je analytickým prodloužením funkce f přes Λ_k . Funkce f_k^* zobrazí \mathbb{H}^* na polygonální oblast G_k^* , jež je symetrická s G dle strany Γ_k . Nyní označme F^* jako n -značnou funkci, jejímiž větvemi jsou jednoznačné funkce $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$

Na \mathbb{H} máme tedy definovanou jednoznačnou holomorfní funkci f a na \mathbb{H}^* máme n -značnou funkci F^* , jejíž větve jsou holomorfními funkcemi na \mathbb{H}^* . Pro libovolné dvě větve f_i^*, f_j^* funkce F^* platí, že funkce f_i^*, f_j^* zobrazí \mathbb{H}^* na polygony, které jsou vůči sobě pouze otočeny a posunuty. Pro libovolné funkce f_i^*, f_j^* tedy existují takové konstanty $\alpha \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{C}$, že platí

$$f_i^*(z) = e^{i\alpha} f_j^*(z) + C. \quad (3.12)$$

Nyní uvažujme funkci φ ve tvaru $\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$. Funkce φ je dobře definována, jelikož funkce f je konformním zobrazením, a tedy $f'(z) \neq 0$, pro $\forall z \in \mathbb{H}$. Funkce φ je samozřejmě jednoznačnou funkcí na $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Nyní ukážeme, že φ je jednoznačnou funkcí i na \mathbb{H}^* . Pro libovolné dvě funkce f_i^*, f_j^* dostáváme dle (3.12)

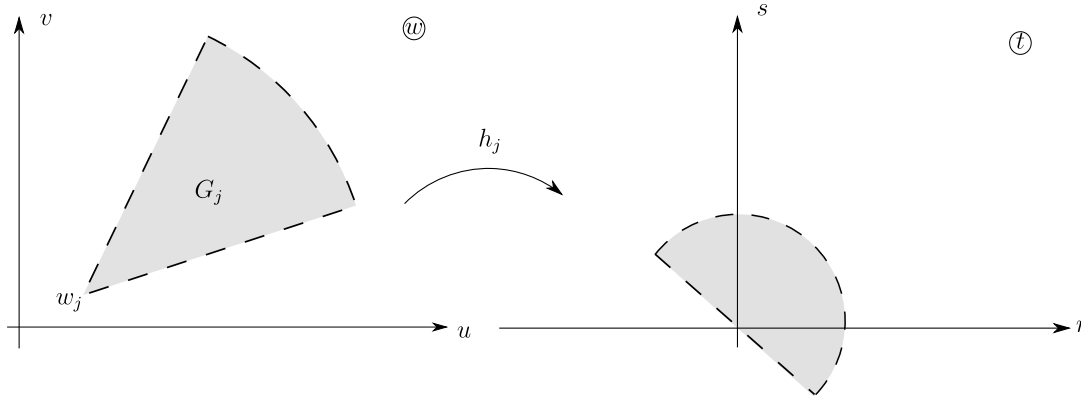
$$\begin{aligned} f_i^{*'} &= e^{i\alpha} f_j^{*'}, \\ f_i^{*''} &= e^{i\alpha} f_j^{*''}. \end{aligned}$$

A tedy platí

$$\frac{f_i^{*''}}{f_i^{*'}} = \frac{e^{i\alpha} f_j^{*''}}{e^{i\alpha} f_j^{*'}} = \frac{f_j^{*''}}{f_j^{*'}}.$$

Tímto jsme ukázali, že funkce φ je nezávislá na volbě větve funkce F^* , a tedy je jednoznačná a holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Nyní zbývá prošetřit chování funkce φ v problematických bodech a_1, a_2, \dots, a_n . V následujícím textu ukážeme, že a_1, a_2, \dots, a_n jsou izolovanými singulárními body, a to jednoduchými póly.



Obrázek 3.5: Zobrazení kruhové výseče na půlkruh v počátku.

Uvažujme kružnici opsanou kolem libovolného vrcholu w_j o dostatečně malém poloměru, aby v jejím vnitřku neležel žádný další vrchol polygonu. Pak jako průnik vnitřku této kružnice a oblasti G vznikne kruhová výseč G_j . Pak platí, že funkce $h_j : t = h_j(w)$ ve tvaru

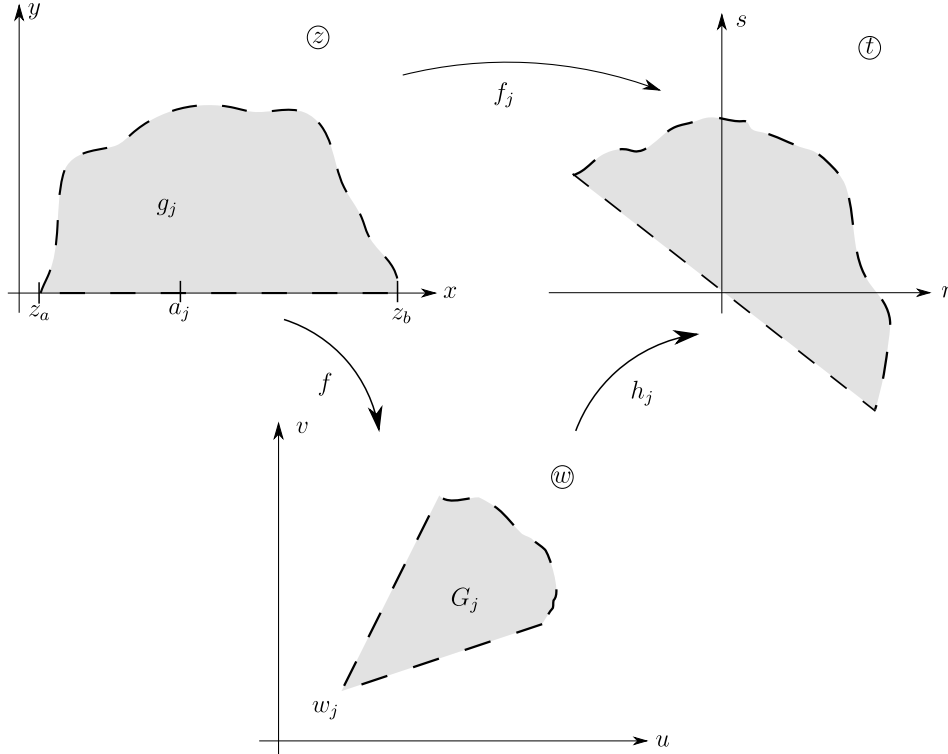
$$h_j(w) = (w - w_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} \quad (3.13)$$

zobrazí kruhovou výseč G_j na půlkruh se středem v počátku.

Nyní zavedeme složenou funkci f_j , jež vznikne složením funkcí f a h_j . Dostáváme tedy funkci ve tvaru

$$f_j(z) = h_j(f(z)) = (f(z) - f(z_j))^{\frac{1}{\alpha_j}}. \quad (3.14)$$

Nyní uvažujme oblast g_j v horní polorovině roviny \mathbb{Z} , pro kterou platí, že její hranice ∂g_j obsahuje interval (z_a, z_b) z reálné osy, přičemž platí $\exists! j : a_j \in (z_a, z_b)$. Pak funkce f_j zobrazí oblast g_j na podmnožinu půlkruhu se středem v $t = 0$.



Obrázek 3.6: Zobrazení oblasti v rovině \mathbb{Z} na oblast v rovině \mathbb{L} .

Funkce f_j je spojitá na uzávěru $\overline{g_j}$ a obrazem úsečky (z_a, z_b) je opět úsečka, a tedy můžeme použít Schwarzův princip zrcadlení, díky kterému můžeme funkci f_j analyticky prodloužit do dolní poloroviny komplexní roviny. Funkce f_j je tedy holomorfní na okolí bodu a_j , a tedy ji lze rozvinout do Taylorovy řady ve tvaru

$$f_j(z) = b_1(z - a_j) + b_2(z - a_j)^2 + b_3(z - a_j)^3 + \dots \quad (3.15)$$

Nyní vyjádříme f z rovnice (3.14)

$$f(z) = f(z_j) + (f_j(z))^{\alpha_j},$$

$$f(z) = f(z_j) + (z - a_j)^{\alpha_j} \phi_1(z), \quad (3.16)$$

kde

$$\phi_1(z) = (b_1 + b_2(z - a_j) + b_3(z - a_j)^2 + \dots)^{\alpha_j}$$

Funkce ϕ_1 je holomorfní v bodě a_j , a tedy jí můžeme rozvinout v Taylorovu řadu. Dostáváme tedy funkci f ve tvaru

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_j) + (z - a_j)^{\alpha_j} (c_1 + c_2(z - a_j) + c_3(z - a_j)^2 + \dots) = \\ &= f(z_j) + c_1(z - a_j)^{\alpha_j} + c_2(z - a_j)^{\alpha_j+1} + c_3(z - a_j)^{\alpha_j+2} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nyní si vyjádříme první a druhou derivaci funkce f

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1 \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} + c_2 (\alpha_j + 1) (z - a_j)^{\alpha_j} + c_3 (\alpha_j + 2) (z - a_j)^{\alpha_j + 1} + \dots, \\ f''(z) &= (z - a_j)^{\alpha_j - 2} [c_1 \alpha_j (\alpha_j - 1) + c_2 (\alpha_j + 1) \alpha_j (z - a_j) + c_3 (\alpha_j + 2) (\alpha_j + 1) (z - a_j)^2 + \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(z) &= c_1 \alpha_j (\alpha_j - 1) (z - a_j)^{\alpha_j - 2} + c_2 (\alpha_j + 1) \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} + c_3 (\alpha_j + 2) (\alpha_j + 1) (z - a_j)^{\alpha_j} + \dots, \\ f''(z) &= (z - a_j)^{\alpha_j - 2} [c_1 \alpha_j (\alpha_j - 1) + c_2 (\alpha_j + 1) \alpha_j (z - a_j) + c_3 (\alpha_j + 2) (\alpha_j + 1) (z - a_j)^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme funkci φ v bodě a_j

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{z - a_j} \phi_2(z), \quad (3.18)$$

kde

$$\phi_2(z) = \frac{c_1 \alpha_j (\alpha_j - 1) + c_2 (\alpha_j + 1) \alpha_j (z - a_j) + \dots}{c_1 \alpha_j + c_2 (\alpha_j + 1) (z - a_j) + \dots}$$

Čitatel i jmenovatel v předpisu funkce ϕ_2 je holomorfní funkcí v bodě a_j , z čehož plyne, že i ϕ_2 je holomorfní v bodě a_j , a tedy můžeme funkci ϕ_2 rozvinout v Taylorovu řadu. Funkci φ lze tedy napsat tvaru

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - a_j} [(\alpha_j - 1) + d_1 (z - a_j) + d_2 (z - a_j)^2 + \dots]. \quad (3.19)$$

Dostáváme rozvoj funkce φ ve tvaru Laurentovy řady se středem v bodě a_j , ve kterém má izolovaný singulární bod, který je jednoduchým pólem s hodnotou rezidua $\alpha_j - 1$. Funkce φ má tedy v \mathbb{C} pouze n jednoduchých pólů v bodech a_1, a_2, \dots, a_n s hodnotami reziduí $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_n - 1$. Nyní zavedeme funkci η ve tvaru

$$\eta(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}, \quad (3.20)$$

která obsahuje hlavní části Laurentových rozvoju funkce φ v bodech a_j . Nyní si zdefinujeme funkci ψ ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \varphi(z) - \eta(z), \\ \psi(z) &= \varphi(z) - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

která vznikla odečtením všech hlavních částí Laurentových rozvoju funkce φ v okolí pólů od funkce φ . Funkce ψ je tedy holomorfní v celé komplexní rovině, a tedy je celou funkcí.

Nyní musíme prošetřit vlastnosti funkce φ v bodě ∞ . Jak už bylo dříve zmíněno, funkce f je spojitá na uzávěru oblasti \mathbb{H} , a tedy i v ∞ . Funkce f je dále omezená, protože zprostředkovává zobrazení na polygonální oblast. Dále je funkce f holomorfní v prstencovém okolí nekonečna, a tedy je funkce f podle lemmatu 3.7 holomorfní v bodě ∞ . Z čehož plyne, že ji můžeme rozvinout v Taylorovu řadu se středem v bodě ∞

$$f(z) = m_0 + \frac{m_1}{z} + \frac{m_2}{z^2} + \frac{m_3}{z^3} + \frac{m_4}{z^4} + \dots \quad (3.22)$$

Nyní vyjádříme první a druhou derivaci rozvoje funkce f v nekonečnu

$$f'(z) = -\frac{m_1}{z^2} - 2\frac{m_2}{z^3} - 3\frac{m_3}{z^4} - 4\frac{m_4}{z^5} + \dots, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2\frac{m_1}{z^3} + 6\frac{m_2}{z^4} + 12\frac{m_3}{z^5} + 20\frac{m_4}{z^6} + \dots, \\ f''(z) &= \frac{1}{z} \left(2\frac{m_1}{z^2} + 6\frac{m_2}{z^3} + 12\frac{m_3}{z^4} + 20\frac{m_4}{z^5} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nyní můžeme vyjádřit Taylorův rozvoj funkce φ v bodě ∞

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{z} \frac{2\frac{m_1}{z^2} + 6\frac{m_2}{z^3} + 12\frac{m_3}{z^4} + 20\frac{m_4}{z^5} + \dots}{-\frac{m_1}{z^2} - 2\frac{m_2}{z^3} - 3\frac{m_3}{z^4} - 4\frac{m_4}{z^5} + \dots},$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \phi_3(z), \quad (3.25)$$

kde

$$\phi_3(z) = \frac{2m_1 + 6\frac{m_2}{z} + 12\frac{m_3}{z^2} + 20\frac{m_4}{z^3} + \dots}{-m_1 - 2\frac{m_2}{z} - 3\frac{m_3}{z^2} - 4\frac{m_4}{z^3} + \dots}.$$

Funkce $\phi_3(z)$ je holomorfní v bodě ∞ , a tedy jí lze rozvinout do Taylorovy řady. Jelikož platí $\phi_3(\infty) = -2$ dostáváme rozvoj funkce φ v nekonečnu ve tvaru

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \left(-2 + \frac{n_1}{z} + \frac{n_2}{z^2} + \frac{n_3}{z^3} + \dots \right). \quad (3.26)$$

Nyní přejdeme k určení hodnoty funkce ψ v nekonečnu. Z rovnic (3.20) a (3.26) plyne, že $\eta(\infty) = 0$ a $\varphi(\infty) = 0$, a tedy i $\psi(\infty) = 0$. Jelikož je ψ holomorfní a omezenou funkcí v \mathbb{C} , tak je podle Liouvilleovy věty konstantní na \mathbb{C} .

Jelikož je funkce ψ konstantní, platí

$$\psi(z) = \varphi(z) - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} = 0. \quad (3.27)$$

Můžeme tedy psát

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j},$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}. \quad (3.28)$$

Nyní provedeme integraci (3.28)

$$\int \frac{f''(z)}{f'(z)} dz = \int \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} dz,$$

$$\ln(f'(z)) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) \ln(z - a_j) + C_1 \text{ kde } C_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Nyní upravíme rovnici (3.29) dle věty o logaritmu

$$\ln(f'(z)) = \sum_{j=1}^n \ln(z - a_j)^{\alpha_j - 1} + C_1. \quad (3.30)$$

Jelikož součet logaritmů je roven logaritmu součinu jednotlivých členů, lze rovnici (3.30) upravit do tvaru

$$\ln(f'(z)) = \ln \left(C \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\alpha_j - 1} \right), \quad (3.31)$$

kde $C = e^{C_1}$. Rovnost logaritmů nastává právě tehdy, když se rovnají argumenty logaritmů. Můžeme tedy rovnici (3.31) přepsat do tvaru

$$f'(z) = C \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\alpha_j - 1}. \quad (3.32)$$

Po integraci (3.32) podle libovolné křivky ležící v \mathbb{H} dostáváme výsledný tvar Schwarzovy - Christoffelovy formule

$$\begin{aligned} f(z) &= A + C \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\alpha_j - 1} dz, \\ f(z) &= A + C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz. \end{aligned} \quad (3.33)$$

□

3.2 SC transformace pro zobecněnou polygonální oblast

Nyní zavedeme zobecněnou polygonální oblast a SC transformaci z \mathbb{H} na zobecněnou polygonální oblast.

Definice 3.9 (Zobecněná polygonální oblast). Zobecněnou polygonální oblastí v komplexní rovině nazveme jednoduše souvislou oblast $G \subset \mathbb{C}$, jejíž hranice je uzavřená křivka $\Gamma \subset \mathbb{C}^*$, jež je složená z konečného počtu úseček, přímků či polopřímek Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$, kde $n \geq 1$).

Poznámka 3.10. Zobecněný polygon může mít tedy vrcholy i v bodě ∞ . Dále jeho hranicí není jednoduchá křivka, a tedy se dvě strany polygonu s opačnou orientací mohou dotýkat. Úhel α_k , který odpovídá vrcholu a_k v bodě ∞ , se uvažuje se znaménkem mínus.

I u zobecněného polygonu platí vztah pro součet úhlů ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2. \quad (3.34)$$

Věta 3.11 (Schwarzova-Christoffelova věta pro zobecněnou polygonální oblast, viz [2, str. 97]). Mějme funkci $f : w = f(z)$, jež konformně zobrazí horní polorovinu komplexní roviny \mathbb{H} na zobecněnou polygonální oblast G , jež je vnitřkem zobecněného polygonu, který má vrcholy $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 1$) s úhly $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, kde $\alpha_k \in [-2, 2]$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Dále platí, že vrcholy w_1, w_2, \dots, w_n jsou obrazy bodů $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pro které platí $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty$. Pak funkci f lze vyjádřit ve tvaru

$$w = f(z) = A + C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz, \quad (3.35)$$

kde pro libovolné komplexní číslo z_0 , pro které platí $\text{Im}(z_0) \geq 0$, existují konstanty $A, C \in \mathbb{C}$.

Poznámka 3.12. Schwarzovu-Christoffelovu větu lze dále zobecnit. Jednou z možností je uvažovat, že jeden z bodů a_1, a_2, \dots, a_n je bodem v nekonečnu. Uvažujme tedy $a_n = \infty$, dále předpokládejme, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n - 1$ platí $a_k \neq 0$. Pro převedení tohoto případu na výše definovanou SC transformaci (věta 3.11) použijeme zobrazení

$$\zeta = \frac{1}{z}, \quad (3.36)$$

které zobrazí \mathbb{H} na \mathbb{H} a body $a_1, a_2, \dots, a_n = \infty$ na $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, 0$.

Po této transformaci dostáváme SC formuli ve tvaru

$$w = A' + C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left(\zeta - \frac{1}{a_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(\zeta - \frac{1}{a_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta)^{\alpha_n-1} d\zeta, \quad (3.37)$$

nyň se vrátíme k proměnné z pomocí substituce $\zeta = \frac{1}{z}$, $d\zeta = -\frac{dz}{z^2}$

$$w = A' + C' \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n-1} \left(-\frac{dz}{z^2}\right), \quad (3.38)$$

poté z každého členu uvnitř integrálu v rovnici (3.38) vytkneme $\frac{1}{z^{\alpha_k-1}}$ a dostáváme

$$w = A' - C' \int_{z_0}^z \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots (1) \frac{dz}{z^{2-n+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}. \quad (3.39)$$

Nyní použijeme vztah pro součet úhlů v polygonu (3.1), čímž se nám vztah zjednoduší do tvaru

$$w = A' - C' \int_{z_0}^z \left(\frac{z}{a_1} - 1\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{z}{a_2} - 1\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(\frac{z}{a_{n-1}} - 1\right)^{\alpha_{n-1}-1} dz, \quad (3.40)$$

ve kterém zavedeme novou konstantu C'' ve tvaru $C'' = -\frac{C'}{a_1^{\alpha_1-1} a_2^{\alpha_2-1} \dots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}}$, čímž dostáváme vztah pro SC transformaci

$$w = f(z) = A'' + C'' \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz, \quad (3.41)$$

který je obdobný vztahu (3.35), avšak neobsahuje poslední člen $(z - a_n)^{\alpha_n-1}$.

V příkladu 2.5 jsme si ukázali, jak lze pomocí konformního zobrazení zobrazit \mathbb{H} na nekonečný polopás. Jelikož lze nekonečný polopás chápat jako zobecněnou polygonální oblast s jedním bodem v nekonečnu, lze toto konformní zobrazení hledat ve tvaru SC transformace.

Příklad 3.13. Najděme zobrazení, které zobrazí \mathbb{H} na vnitřek polopásu $P = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0, -s < \text{Re } w < s\}$, kde s je libovolná reálná konstanta.

Polopás je tedy polygonální oblast s vrcholy $w_0 = -s, w_1 = s$ a $w_2 = \infty$. Z teorie konformního zobrazení plyne, že libovolné tři vzory lze zobrazit na libovolné tři obrazy daného zobrazení. Můžeme tedy body a_1, a_2 a a_3 libovolně zvolit. Jelikož je polygon souměrný podle imaginární osy, zvolíme i vzory vrcholů souměrně $a_0 = -1, a_1 = 1$ a pro jednoduchost zvolíme $a_2 = \infty$, protože dle poznámky 3.12 tento člen nebude obsažen v SC formuli. Volbu bodů zapíšeme pro přehlednost do tabulky.

k	a_k	w_k	α_k
0	-1	-s	$\frac{1}{2}$
1	1	s	$\frac{1}{2}$
2	∞	∞	0

SC formule tedy nabývá tvaru

$$w = f(z) = A + C \int_0^z (\zeta + 1)^{\frac{1}{2}-1} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}-1} d\zeta,$$

$$w = f(z) = A + C \int_0^z \frac{1}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta = A + C \arcsin(z),$$

Nyní zbývá jen dopočítat konstanty A a C . Obecně musí platit, že

$$w_k = A + C \arcsin(a_k). \quad (3.42)$$

Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} -s &= A + C \arcsin(-1) = A - C \frac{\pi}{2} \\ s &= A + C \arcsin(1) = A + C \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

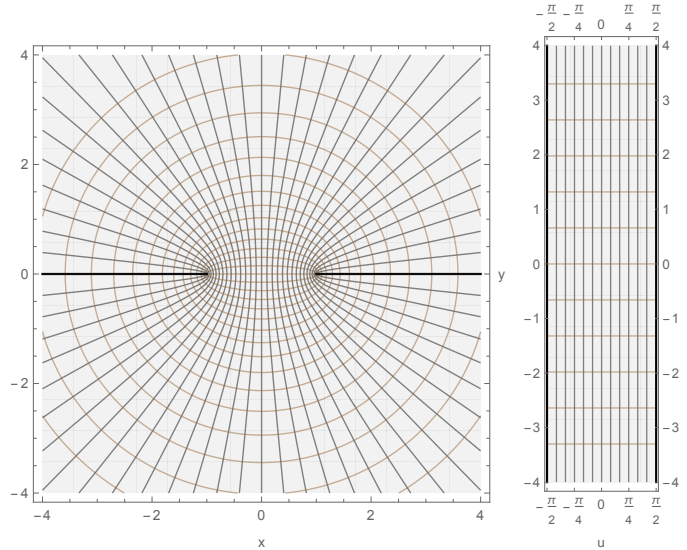
Po vyřešení soustavy dostáváme

$$A = 0, C = \frac{2s}{\pi}.$$

A tedy můžeme zobrazení, jež zobrazí \mathbb{H} na P , zapsat ve tvaru

$$f : f(z) = w = \frac{2s}{\pi} \arcsin(z). \quad (3.43)$$

Jelikož je tedy funkce \arcsin speciálním případem Schwarzovy–Christoffelovy transformace, můžeme pomocí Schwarzova principu zrcadlení rozšířit \arcsin i na dolní polorovinu komplexní roviny (viz obr. 3.7).



Obrázek 3.7: Zobrazení hladin reálné a imaginární části funkce \arcsin .

V případě, že hledáme zobrazení na polygon, jenž má více než tři vrcholy, může být nalezení vhodných parametrů (vzorů a_k a konstant A, C) velmi obtížné. Hledání parametrů spočívá v řešení soustavy n nelineárních rovnic ve tvaru

$$w_k = f(a_k) = A + C \int_{z_0}^{a_k} \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j)^{\alpha_j - 1} d\zeta,$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet vrcholů.

Pro nalezení vhodných parametrů lze využít například SC Toolbox pro Matlab, viz [14].

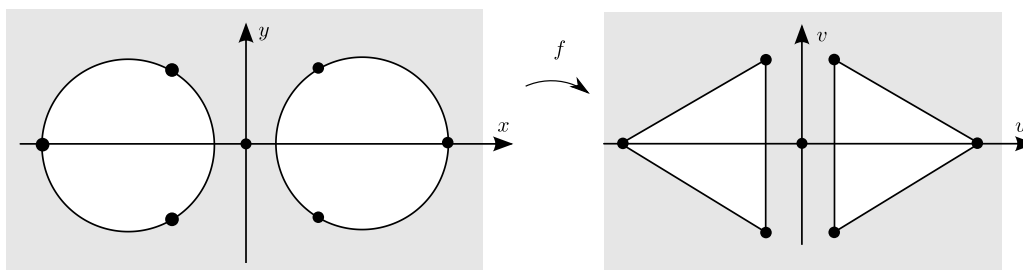
Kapitola 4

Zobrazení vícenásobně souvislé oblasti

V kapitole 3 jsme si ukázali Schwarzovu–Christoffelovu větu pro jednoduše souvislou oblast, jež byla dokázána kolem roku 1869. V této kapitole se budeme zabývat Schwarzovou–Christoffelovou transformací pro vícenásobně souvislou oblast, která byla dokázána o více než 100 let později. Darren Crowdy odvodil v roce 2005 SC formuli pro ohraničenou vícenásobně souvislou oblast (viz [11]) a v roce 2007 SC formuli pro neohraničenou vícenásobně souvislou oblast (viz [12]). Crowdy pro odvození použil Schottkyho grupy a Schottky–Kleineho primární funkce. Později byly odvozeny i jiné formule, kde se místo Schottkyho grup využívají vícenásobné reflexe kružnic, které tvoří kruhovou doménu. Tento způsob je popsán a odvozen v [7], [8] a [9]. My se budeme zabývat formulí, jež byla odvozena právě tímto způsobem pro neohraničenou vícenásobně souvislou oblast, ve tvaru

$$f(z) = C + A \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^{V_k} \prod_{\substack{j=0 \\ \nu \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \left(\frac{\zeta - \rho_\nu(z_{k,i})}{\zeta - \rho_\nu(s_k)} \right)^{\beta_{k,i}} d\zeta.$$

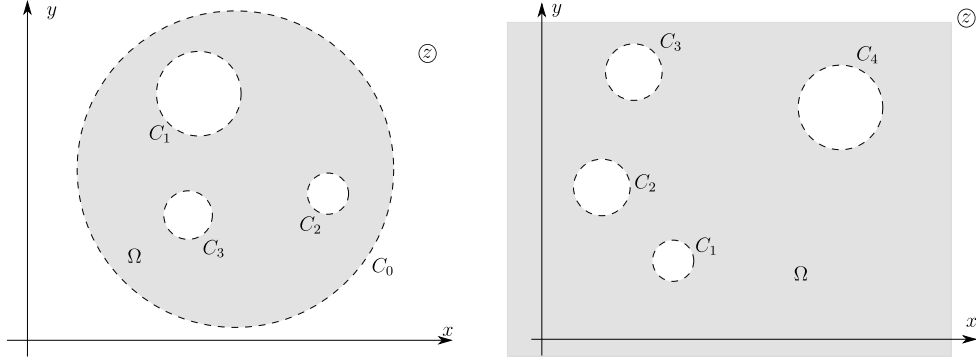
Nevýhodou formulí, jež byly odvozeny pomocí Schottky–Kleineho primárních funkcí a vícenásobných reflexí kružnic, je vysoká numerická složitost, která roste exponenciálně s počtem kružnic v kruhové doméně a počtem prováděných reflexí. Z tohoto důvodu se používá také numerická metoda využívající Laurentovy rozvoje a metodu nejmenších čtverců. Tento postup má polynomiální složitost a je popsán v [9].



Obrázek 4.1: Zobrazení vícenásobně souvislé oblasti pomocí Schwarzovy–Christoffelovy transformace pro vícenásobně souvislou oblast.

V této kapitole nejprve uvedeme kruhovou inverzi a vícenásobnou kruhovou inverzi, kterou budeme potřebovat ke konstrukci konformních zobrazení vícenásobně souvislých oblastí. Pomocí

kruhové inverze zdefinujeme funkce, které zobrazí kružnici na přímku či úsečku. Dále ukáží konformní zobrazení vícenásobně souvislých oblastí, jejichž hranicemi jsou kružnice, na vícenásobně souvislé oblasti, jejíž hranice jsou tvořeny přímkami, úsečkami či oblouky. Na závěr uvedeme Schwarzovu–Christoffelovu transformaci neohraničené vícenásobně souvislé oblasti.



Obrázek 4.2: 4-násobně souvislá omezená kruhová doména (vlevo) a 5-násobně souvislá neomezená kruhová doména (vpravo) v \mathbb{C}^* .

4.1 Kruhová doména

Nejprve uveďme definici vícenásobně souvislé oblasti v komplexní rovině.

Definice 4.1 (Vícenásobně souvislá oblast). Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ je n -násobně souvislá oblast, pokud platí, že množina $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ je tvořena právě n komponentami.

Jelikož se zde budeme zabývat převážně konformním zobrazením vícenásobně souvislých oblastí, jejichž hranice jsou tvořeny konečně mnoha kružnicemi, zavedeme pojem ohraničené a neohraničené kruhové domény (viz obr. 4.2).

Definice 4.2 (Ohraničená vícenásobně souvislá kruhová doména). Mějme kružnice $C_0, C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{C}$. Dále označme K_0, K_1, \dots, K_n jako vnitřky kružnic C_0, C_1, \dots, C_n . Pokud platí $K_1, \dots, K_n \subset K_0$ a $\forall i, j \in \mathbb{N} : 1 \leq i, j \leq n : K_i \cap K_j = \emptyset$, řekneme, že oblast $\Omega = K_0 \setminus (\overline{K_1} \cup \overline{K_2} \cup \dots \cup \overline{K_n})$ je ohraničená $(n+1)$ -násobně souvislá kruhová doména.

Definice 4.3 (Neohraničená vícenásobně souvislá kruhová doména). Mějme kružnice $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{C}$. Dále označme K_1, \dots, K_n jako vnitřky kružnic C_1, \dots, C_n . Pokud platí $\forall i, j \in \mathbb{N} : 1 \leq i, j \leq n : K_i \cap K_j = \emptyset$, řekneme, že oblast $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\overline{K_1} \cup \overline{K_2} \cup \dots \cup \overline{K_n})$ je neohraničená $(n+1)$ -násobně souvislá kruhová doména.

4.2 Kruhová inverze dle jedné kružnice

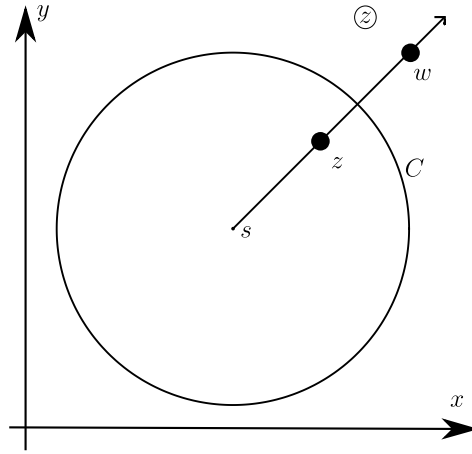
Nejprve zdefinujeme pojem kruhové inverze (zkráceně reflexe).

Definice 4.4 (Kruhová inverze (reflexe)). Mějme kružnici C se středem $s \in \mathbb{C}$ a poloměrem $r > 0$. Funkci $w = \rho(z)$ nazveme kruhovou inverzí (zkráceně reflexí) v \mathbb{C}^* , pokud pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{s\}$ platí

$$(1) \quad |w - s||z - s| = r^2, \quad (4.1)$$

(2) w leží na polopřímce, která začíná v bodě s a prochází bodem z .

Dále dodefinujeme $\rho(s) = \infty$ a $\rho(\infty) = s$.



Obrázek 4.3: Kruhová inverze ρ bodu z dle kružnice C se středem s na bod $w = \rho(z)$.

Věta 4.5. Pro kruhovou inverzi ρ dle kružnice C se středem s a poloměrem r platí

$$w = \rho(z) = s + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{s}}. \quad (4.2)$$

Důkaz. Nejprve si vyjádříme $w - s$ v exponenciálním tvaru.

$$w - s = |w - s|e^{i\alpha}, \quad (4.3)$$

kde $\alpha = \arg(w - s)$. Jelikož body w , z a s leží na jedné polopřímce, musí platit $\arg(z - s) = \arg(w - s)$. Můžeme tedy psát

$$z - s = |z - s|e^{i\alpha}.$$

Z rovnosti (4.1) vyjádříme $|w - s|$ a dosadíme do (4.3), čímž dostáváme

$$w - s = \frac{r^2}{|z - s|}e^{i\alpha} = \frac{r^2}{|z - s|e^{-i\alpha}} = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{s}}.$$

Můžeme tedy psát výsledný tvar pro kruhovou inverzi $w = \rho(z)$

$$\rho : w = s + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{s}}.$$

□

Poznámka 4.6. Nyní uvedeme základní vlastnosti reflexe ρ podle kružnice C se středem s a poloměrem r .

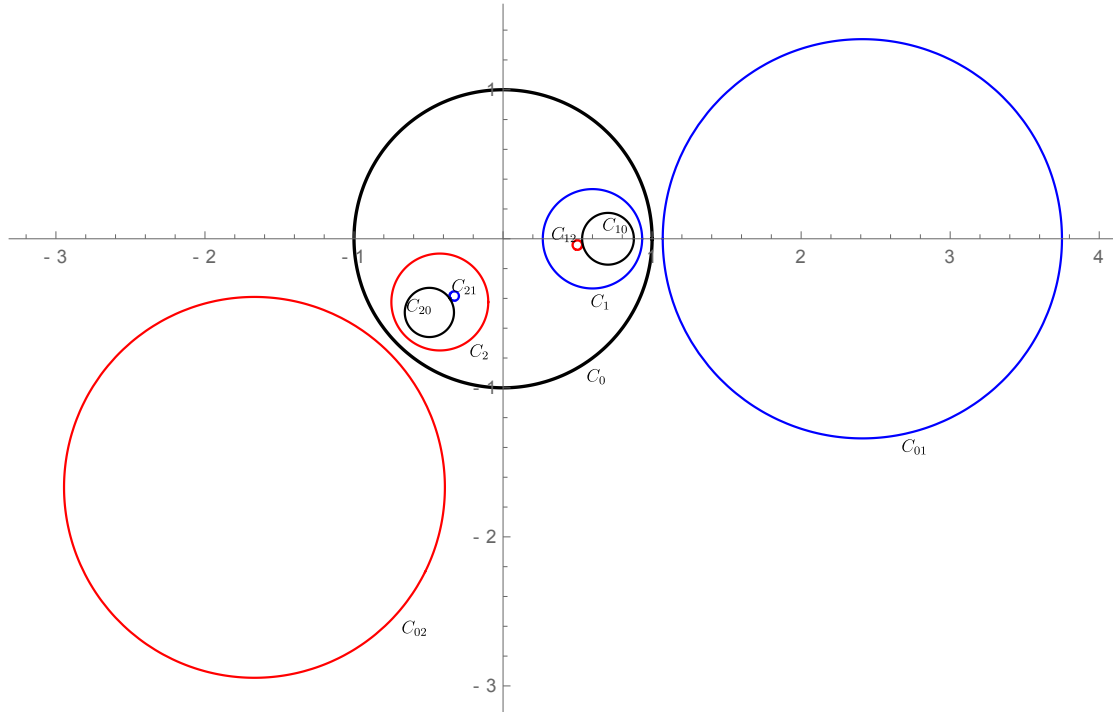
- (a) Reflexe je prosté zobrazení množiny \mathbb{C}^* na \mathbb{C}^* .
- (b) Pro $\forall z \in \mathbb{C}^* : \rho(\rho(z)) = z$.
- (c) Pro $\forall z \in C : \rho(z) = z$.
- (d) Obrazem kružnice, která neprochází středem s , je kružnice.
- (e) Obrazem kružnice, která prochází středem s , je přímka.
- (f) Obrazem přímky, která neprochází středem s , je kružnice.
- (g) Obrazem přímky, která prochází středem s , je identická přímka.

Speciálním případem kruhové inverze je reflexe podle jednotkové kružnice umístěné v počátku, která má tvar

$$\rho(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

4.3 Vícenásobná kruhová inverze

Nyní uvažujme několik kružnic a budeme generovat jejich obrazy pomocí reflexí dle ostatních kružnic. Poté označíme reflexi kružnice C_k dle kružnice C_n jako C_{nk} , přičemž platí $C_{nk} = \rho_n(C_k)$, kde ρ_n je reflexe dle kružnice C_n (viz obr. 4.4). Stejně zavedeme i reflexi bodu z_k podle kružnice C_n jako z_{nk} .



Obrázek 4.4: První reflexe kružnic C_0, C_1, C_2 .

Pro zobecnění reflexe podle jedné kružnice na reflexi dle libovolného počtu kružnic zavedeme multi-index ν .

Definice 4.7 (Multi-index).

- (a) V n -násobně souvislé ohraničené kruhové doméně Ω zavedeme multi-index ν délky $k \in \mathbb{N}$ jako posloupnost k čísel $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k$ takových, že platí $0 \leq \nu_i < n, \nu_i \neq \nu_{i+1}$, pro $i = 1, 2, \dots, k-1$.
- (b) V n -násobně souvislé neohraničené kruhové doméně Ω zavedeme multi-index ν délky $k \in \mathbb{N}$ jako posloupnost k čísel $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k$ takových, že platí $1 \leq \nu_i \leq n, \nu_i \neq \nu_{i+1}$, pro $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Definice 4.8 (Množina multi-indexů). Množinou multi-indexů σ_k rozumíme množinu všech multi-indexů ν délky k . Množinou multi-indexů $\sigma_k(p)$ rozumíme množinu všech multi-indexů ν délky k , pro které platí $\nu_k \neq p$. Dále dodefinujeme $\sigma_0 = \emptyset$.

Pro ilustraci uved'eme následující příklad.

Příklad 4.9. Pro 4-násobnou kruhovou doménu dostáváme množiny multi-indexů

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset, \\
\sigma_1 &= \{0, 1, 2\}, \\
\sigma_2 &= \{01, 02, 10, 12, 20, 21\}, \\
\sigma_3 &= \{010, 012, 020, 021, 101, 102, 120, 121, 201, 202, 210, 212\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A množinu multi-indexů nekončících na 0

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset, \\
\sigma_1 &= \{1, 2\}, \\
\sigma_2 &= \{01, 02, 12, 21\}, \\
\sigma_3 &= \{012, 021, 101, 102, 121, 201, 202, 212\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definice 4.10 (Vícenásobná reflexe). Pro bod $z \in \mathbb{C}^*$ definujeme vícenásobnou reflexi podle multi-indexu $\nu = \nu_1\nu_2\nu_3 \dots \nu_n \in \sigma_n$ jako složenou funkci ve tvaru

$$\rho_\nu(z) = \rho_{\nu_1}(\rho_{\nu_2}(\rho_{\nu_3}(\dots(\rho_{\nu_n}(z))\dots))).$$

Příklad 4.11. Pod označením C_{2310} budeme tedy rozumět obraz kružnice C_0 přes reflexe podle kružnic C_1 , C_3 a C_2 .

Poznámka 4.12. Zdůvodněme, proč jsme v předchozích definicích 4.7 a 4.8 použili jistá omezení.

- (a) Podmínku $v_k \neq v_{k+1}$ zavádíme, abychom se vyhnuli vícenásobné reflexi podle stejné kružnice, protože platí $\rho_n(\rho_n(z)) = z$. Dvojnásobná reflexe podle stejné kružnice je identitou.
- (b) Pokud budeme dělat reflexi bodu $z \in C_p$, je zbytečné dělat první reflexi přes kružnici C_p , protože platí $\rho_p(z) = z$. Proto zavádíme množinu $\sigma_k(p)$, kde neprovádíme nikdy první reflexi dle kružnice C_p .

4.4 Funkce zobrazující kružnici na přímce či úsečku

V podkapitole 4.5 a 4.6 uvedeme funkce, které zobrazí libovolný konečný počet kružnic na konečný počet úseček. Před konstrukcí funkce zobrazující konečný počet kružnic si nejprve ukážeme, že funkce $f(z) = \frac{z-b}{z-a}$ zobrazí jednu kružnici na přímce a funkce $f(z) = \frac{z-b}{z-a} \frac{z-\rho_C(b)}{z-\rho_C(a)}$ či $f(z) =$

$\frac{z-b}{z-s} (z-\rho_C(b))$ zobrazí jednu kružnici na úsečku.

Nejprve uvedeme funkci zobrazující kružnici na přímce.

Lemma 4.13. *Mějme kružnici C se středem s a poloměrem r a dva body $a, b \in C$. Pak platí, že funkce f ve tvaru*

$$f(z) = \frac{z-b}{z-a} \tag{4.4}$$

zobrazí kružnici C na přímce procházející počátkem, přičemž $f(a) = \infty$ a $f(b) = 0$.

Důkaz. Funkce f je ve tvaru Möbiovy transformace, a tedy dle věty 1.14 zobrazí kružnici na kružnici nebo přímce. Jelikož platí $f(a) = \infty$, funkce f zobrazí kružnici na přímce. \square

Nyní rozeberme funkce, jež zobrazí kružnici na úsečku. Aby funkce f , jež má derivaci ve všech bodech kružnice C , zobrazila kružnici C se středem s a poloměrem r na množinu bodů se stejným argumentem, musí platit $\forall z \in C : \arg f(z) = \text{konst.}$ Což lze zapsat ve tvaru

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s+re^{it})) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \{ \ln(f(s+re^{it})) \} = \text{Im} \left\{ \frac{f'(s+re^{it})}{f(s+re^{it})} rie^{it} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{f'(s+re^{it})}{f(s+re^{it})} re^{it} \right\}.$$

A po zpětné substituci $z = s + re^{it}$, dostáváme

$$\text{Re} \left\{ (z-s) \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = 0.$$

V následující části se budeme zabývat speciálním případem $f(z) = z - \mu$. Pro snazší orientaci v následujícím textu si zavedme funkci $\varphi(\mu) = (z-s) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z-s}{z-\mu}$ a funkci $\psi(\mu) = \text{Re} \{ \varphi(\mu) \}$. Nyní uvedeme dvě pomocná tvrzení, která se týkají funkce ψ .

Lemma 4.14. *Mějme kružnici C se středem s , bod μ_1 ve tvaru $\mu_1 = rbe^{i\beta} + s$ a bod $\mu_2 = \rho_C(\mu_1) = \frac{r}{b}e^{i\beta} + s$, kde ρ_C představuje reflexi dle kružnice C , pak platí*

$$\psi(\mu_1) + \psi(\mu_2) = 1.$$

Důkaz. Zvolme obecně bod μ ve tvaru $\mu = rve^{iu} + s$. A spočteme hodnotu funkce φ

$$\varphi(\mu) = (z-s) \frac{f'(z)}{f(z)} = (re^{it} + s - s) \frac{1}{(re^{it} + s) - (rve^{iu} + s)} = \frac{e^{it}}{e^{it} - ve^{iu}}.$$

Nyní přičteme do čitatele $0 = -ve^{iu} + ve^{iu}$, čímž dostaneme

$$\varphi(\mu) = \frac{e^{it} - ve^{iu} + ve^{iu}}{e^{it} - ve^{iu}} = 1 + \frac{ve^{iu}}{e^{it} - ve^{iu}}.$$

Nyní rozepíšeme e^{it} na reálnou a imaginární část

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{v \cos(u) + vi \sin(u)}{\cos(t) + i \sin(t) - v \cos(u) - vi \sin(u)} = 1 + \frac{v \cos(u) + vi \sin(u)}{\cos(t) - v \cos(u) + i(\sin(t) - v \sin(u))}.$$

Zlomek nyní usměrníme

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{v \cos(u) + vi \sin(u)}{(\cos(t) - v \cos(u)) + i(\sin(t) - v \sin(u))} \frac{(\cos(t) - v \cos(u)) - i(\sin(t) - v \sin(u))}{(\cos(t) - v \cos(u)) - i(\sin(t) - v \sin(u))}.$$

Po roznásobení a vyjádření reálné části dostáváme

$$\psi(\mu) = 1 + \frac{v \cos(u) \cos(t) - v^2 \cos^2(u) + v \sin(u) \sin(t) - v^2 \sin^2(u)}{(\cos^2(t) + v^2 \cos^2(u) - 2v \cos(t) \cos(u)) + (\sin^2(t) + v^2 \sin^2(u) - 2v \sin(t) \sin(u))}.$$

Po zjednodušení dostáváme

$$\psi(\mu) = 1 - \frac{v^2 - v(\cos(u) \cos(t) + \sin(u) \sin(t))}{1 - 2v(\cos(t) \cos(u) + \sin(t) \sin(u)) + v^2} = 1 - \frac{v^2 - v(\cos(u-t))}{1 - 2v(\cos(u-t)) + v^2}.$$

Pro zkrácení vztahu si zavedme substituci $w = \cos(u-t)$

$$\psi(\mu) = 1 - \frac{v^2 - vw}{1 - 2vw + v^2}.$$

Nyní prozkoumejme vlastnost funkce ψ v závislosti na volbě bodu μ . Pro $\mu_1 = s + rbe^{i\beta}$ dostáváme

$$\psi(\mu_1) = 1 - \frac{b^2 - bw}{1 - 2bw + b^2},$$

a pro $\mu_2 = \rho_C(\mu_1) = s + r\frac{1}{b}e^{i\beta}$ dostáváme

$$\psi(\mu_2) = 1 - \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b}w}{1 - 2\frac{1}{b}w + \frac{1}{b^2}}.$$

Nyní sečteme funkční hodnoty $\psi(\mu_1)$ a $\psi(\mu_2)$

$$\psi(\mu_1) + \psi(\mu_2) = 1 - \frac{b^2 - bw}{1 - 2bw + b^2} + 1 - \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b}w}{1 - 2\frac{1}{b}w + \frac{1}{b^2}} = 2 - \left(\frac{b^2 - bw}{1 - 2bw + b^2} + \frac{1 - bw}{b^2 - 2bw + 1} \right).$$

Po sečtení zlomků a zjednodušení dostáváme

$$\psi(\mu_1) + \psi(\mu_2) = 2 - \frac{b^2 - 2bw + 1}{b^2 - 2bw + 1} = 1.$$

□

Lemma 4.15. *Mějme kružnici C se středem s , pak platí $\psi(s) = 1$.*

Důkaz. Pro funkci f ve tvaru $f = z - s$ dostáváme

$$\varphi(s) = (z - s) \frac{f'(z)}{f(z)} = (re^{it} + s - s) \frac{1}{(re^{it} + s - s)} = 1.$$

□

Nyní můžeme uvést dvě funkce, které zobrazí kružnici na úsečku. Tyto funkce využijeme pro konstrukci konformního zobrazení z kruhové domény na radial slit domény.

Věta 4.16. *Mějme kružnici C se středem s a poloměrem r , dva body $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{s\}$ a funkci ρ_C , jež je reflexí dle kružnice C . Pokud dále platí, že bod a neleží na kružnici C , tak funkce*

$$f(z) = \frac{z - b}{z - a} \frac{z - \rho_C(b)}{z - \rho_C(a)} \quad (4.5)$$

zobrazí kružnici C na úsečku.

Důkaz. Vyjádřeme si funkci f ve tvaru $f = \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}$, kde

- (a) $f_1(z) = z - b$,
- (b) $f_2(z) = z - \rho_C(b)$,
- (c) $f_3(z) = z - a$,
- (d) $f_4(z) = z - \rho_C(a)$.

Nejprve ukážeme, že $\arg(f(z)) = \text{konst}$, pro $\forall z \in C$. Pro body na kružnici můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \left\{ \ln(f(s + re^{it})) \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \left\{ \ln \left(\frac{f_1(s + re^{it}) f_2(s + re^{it})}{f_3(s + re^{it}) f_4(s + re^{it})} \right) \right\}.$$

Nyní použijeme větu o logaritmech a provedeme derivaci dle proměnné t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) &= \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \left\{ (\ln(f_1(s + re^{it})) + \ln(f_2(s + re^{it}))) - (\ln(f_3(s + re^{it})) + \ln(f_4(s + re^{it}))) \right\} &= \\ \text{Im} \left\{ \left(\frac{f_1'(s + re^{it})}{f_1(s + re^{it})} re^{it} + \frac{f_2'(s + re^{it})}{f_2(s + re^{it})} re^{it} \right) - \left(\frac{f_3'(s + re^{it})}{f_3(s + re^{it})} re^{it} + \frac{f_4'(s + re^{it})}{f_4(s + re^{it})} re^{it} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A vytkneme ze všech členů i , čímž můžeme psát

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = \\ & \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{f'_1(s + re^{it})}{f_1(s + re^{it})} re^{it} + \frac{f'_2(s + re^{it})}{f_2(s + re^{it})} re^{it} \right) - \left(\frac{f'_3(s + re^{it})}{f_3(s + re^{it})} re^{it} + \frac{f'_4(s + re^{it})}{f_4(s + re^{it})} re^{it} \right) \right\} = \\ & \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_1(s + re^{it})}{f_1(s + re^{it})} re^{it} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_2(s + re^{it})}{f_2(s + re^{it})} re^{it} \right\} \right) - \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_3(s + re^{it})}{f_3(s + re^{it})} re^{it} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_4(s + re^{it})}{f_4(s + re^{it})} re^{it} \right\} \right). \end{aligned}$$

Což můžeme zapsat pomocí funkce ψ do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = (\psi(b) + \psi(\rho_C(b))) - (\psi(a) + \psi(\rho_C(a))).$$

A dle lemmatu 4.14 platí $\psi(b) + \psi(\rho_C(b)) = 1$ a $\psi(a) + \psi(\rho_C(a)) = 1$, čímž dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = 0.$$

Z čehož plyne, že argument funkce f je konstantní na C . Dále platí, že pro body na kružnici C je funkce f omezená a spojitá, a tedy i absolutní hodnota funkce $|f|$ je spojitá a omezená. Jelikož $|f|$ je reálnou funkcí, můžeme použít Weierstrassovu větu o nabývání minima a maxima. Minimum označíme u a maximum v . Ze spojitosti plyne, že funkce $|f|$ nabývá všech hodnot mezi hodnotami u a v , a tedy funkce f zobrazí kružnici C na úsečku spojující body $ue^{\arg(f(s+re^{it}))}$ a $ve^{\arg(f(s+re^{it}))}$. \square

Věta 4.17. *Mějme kružnici C se středem s a poloměrem r , bod $b \in \mathbb{C} \setminus \{s\}$ a funkci ρ_C , jenž je reflexí dle kružnice C . Tak platí, že funkce*

$$f(z) = (z - b) \frac{z - \rho_C(b)}{z - s} \quad (4.6)$$

zobrazí kružnici C na úsečku.

Důkaz. Důkaz je podobný důkazu věty 4.16. Obdobně zavedeme funkce

- (a) $f_1 = z - b$,
- (b) $f_2 = z - \rho_C(b)$,
- (c) $f_3 = z - s$.

A vyjádříme $\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it}))$ jako v předchozím důkazu, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = \\ & \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_1(s + re^{it})}{f_1(s + re^{it})} re^{it} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_2(s + re^{it})}{f_2(s + re^{it})} re^{it} \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_3(s + re^{it})}{f_3(s + re^{it})} re^{it} \right\}. \end{aligned}$$

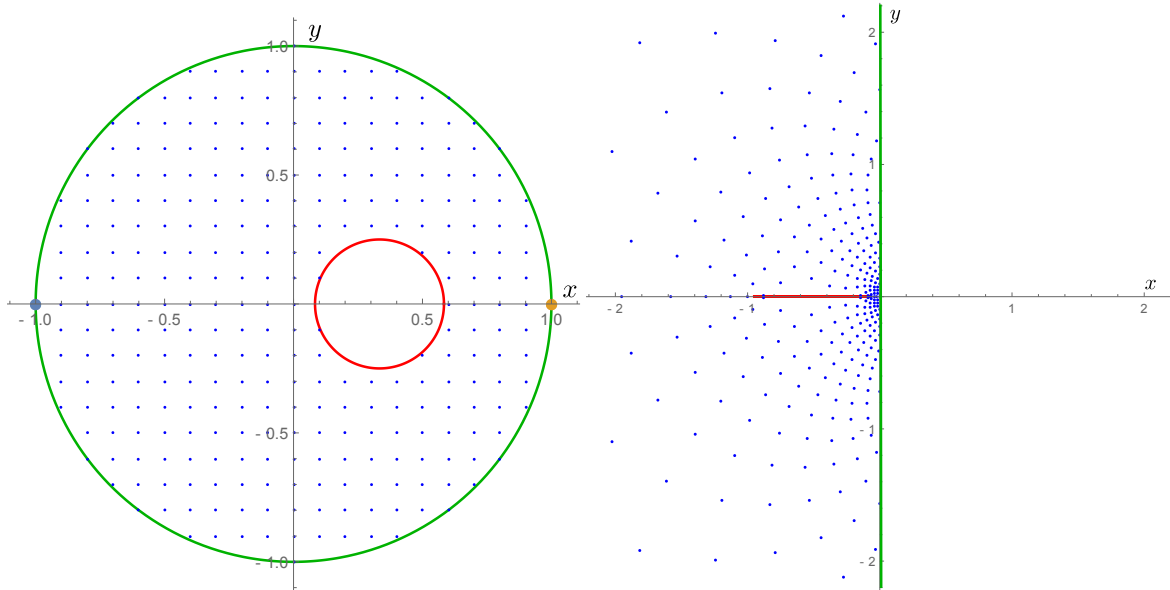
Což lze přepsat pomocí funkce ψ do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = \psi(b) + \psi(\rho_C(b)) - \psi(s).$$

Dle lemmatu 4.14 $\psi(b) + \psi(\rho_C(b)) = 1$ a dle lemmatu 4.15 platí $\psi(s) = 1$. Dostáváme tedy

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(f(s + re^{it})) = 0.$$

Z čehož plyne, že argument funkce f je konstantní. Jelikož dále platí, že pro body na kružnici C je funkce f omezená a spojitá, zobrazí funkce f kružnici C na úsečku. \square

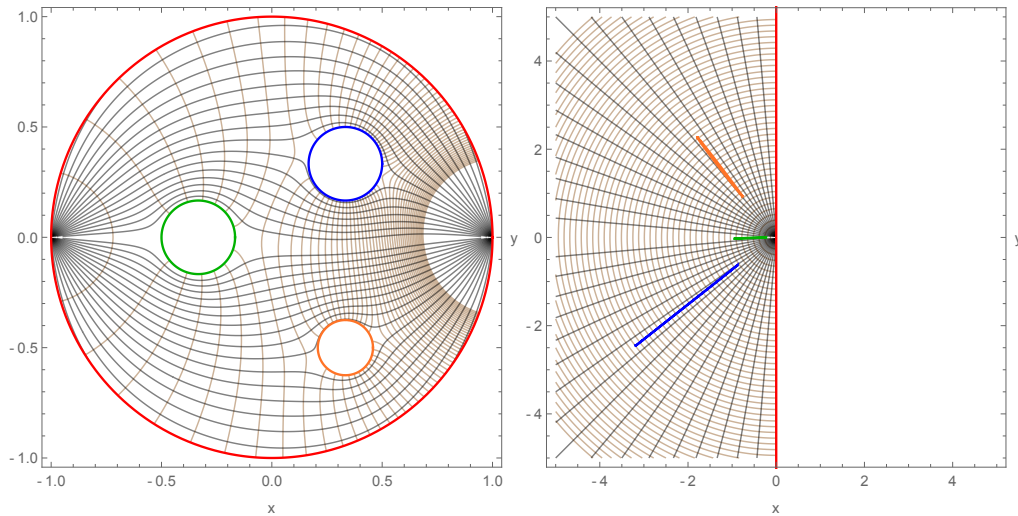


Obrázek 4.5: Zobrazení ohraničené kruhové domény na ohraničenou radial slit doménu.

4.5 Ohraničená radial slit doména

Nejprve zdefinujeme ohraničenou radial slit doménu (viz 4.5 vpravo).

Definice 4.18 (Ohraničená vícenásobně souvislá radial slit doména). Mějme úsečky $p_1, p_2, \dots, p_n \subset \mathbb{C}$ takové, že platí $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n : p_i \cap p_j = \emptyset$. Dále mějme polorovinu $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$, jejíž hranicí je přímka p_0 , pak řekneme, že oblast $\Omega = \Omega_1 \setminus (p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_n)$ je ohraničená $(n + 1)$ -násobně souvislá radial slit doména.



Obrázek 4.6: Zobrazení 4-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z ohraničené radial slit domény na ohraničenou kruhovou doménu.

Nyní zavedeme oddělující parametr Δ .

Definice 4.19 (Oddělující parametr).

- (a) Mějme k kružnic C_1, \dots, C_k se středy s_1, \dots, s_k a poloměry r_1, \dots, r_k , pro které platí, $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq k : \text{Int } C_i \cap \text{Int } C_j = \emptyset$. Pak hodnotu

$$\Delta = \max_{i,j:i \neq j} \frac{r_i + r_j}{|s_i - s_j|} \quad (4.7)$$

nazveme oddělujícím parametrem kružnic C_1, \dots, C_k .

- (b) Mějme $(k+1)$ kružnic C_0, C_1, \dots, C_k se středy s_0, s_1, \dots, s_k a poloměry r_0, r_1, \dots, r_k , kde kružnice C_1, \dots, C_k leží uvnitř kružnice C_0 . Pak provedeme reflexi všech kružnic dle kružnice C_0 , čímž dostáváme kružnice C'_0, C'_1, \dots, C'_k se středy s'_0, s'_1, \dots, s'_k a poloměry r'_0, r'_1, \dots, r'_k . Pak hodnotu

$$\Delta = \max_{i,j:i \neq j} \frac{r'_i + r'_j}{|s'_i - s'_j|} \quad (4.8)$$

nazveme oddělujícím parametrem kružnic C_1, \dots, C_k .

Oddělující parametr je tedy dán vzdáleností středů kružnic a jejich poloměry. U kružnic, které jsou velmi blízko u sebe, se oddělující parametr Δ blíží k jedné. Pokud máme naopak kružnice s malým poloměrem, které jsou daleko od sebe, oddělující parametr Δ se blíží k nule. Ve větách 4.20, 4.22, 4.25 a 4.28, které popisují zobrazení z vícenásobně souvislých oblastí, se jako jedna z postačujících podmínek konvergence nekonečných součinů funkcí používá omezení na oddělující parametr

$$\Delta < \frac{1}{\sqrt[k]{k-1}},$$

kde k je počet kružnic v kruhové doméně. V případě, že je kruhová doména tvořena právě dvěma kružnicemi, dostáváme podmínku $\Delta < 1$, což znamená, že se kružnice nesmějí dotýkat.

Věta 4.20 (Zobrazení ohraničené kruhové domény na radial slit doménu, viz [7, str. 201]). *Mějme $(n+1)$ násobně souvislou kruhovou doménu Ω , pro kterou je splněna podmínka $\Delta < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ pro $n \geq 1$. Potom pro libovolné $a, b \in C_0$ funkce f ve tvaru*

$$f(z) = C \prod_{\substack{j=0 \\ \nu \in \sigma_j(0)}}^{\infty} \frac{z - \rho_\nu(b)}{z - \rho_\nu(a)} \quad (4.9)$$

zobrazí kruhovou doménu na radial slit doménu, přičemž $f(a) = \infty$ a $f(b) = 0$. Kružnice C_0 se zobrazí na přímku a kružnice C_1, C_2, \dots, C_n se zobrazí na úsečky.

Nyní se pokusím objasnit tvar funkce (4.9). Pro zjednodušení uvažujme pouze dvě kružnice C_0 a C_1 . Po rozepsání několika prvních členů funkce f dostáváme

$$f(z) = \frac{z-b}{z-a} \frac{z-\rho_1(b)}{z-\rho_1(a)} \frac{z-\rho_{01}(b)}{z-\rho_{01}(a)} \frac{z-\rho_{101}(b)}{z-\rho_{101}(a)} \frac{z-\rho_{0101}(b)}{z-\rho_{0101}(a)} \frac{z-\rho_{10101}(b)}{z-\rho_{10101}(a)} \dots$$

Z lemmatu 4.13 plyne, že první člen zobrazí kružnici C_0 na přímku. Dosazením parametrizace kružnice C_0 do prvního členu funkce f dostáváme parametrizaci přímky. Dále z lemmatu 4.16 plyne, že součin druhého a třetího členu zobrazí kružnici C_0 na úsečku. Dosazením parametrizace kružnice C_0 do součinu druhého a třetího členu funkce f dostáváme parametrizaci úsečky. To samé platí o součinu čtvrtého a pátého členu atd. Jelikož součinem parametrizací úseček dostáváme opět úsečku a součinem parametrizace úsečky a přímky dostáváme přímku, získáme součinem lichého počtu členů funkce f přímku. Pokud bychom však vytvořili součin sudého (konečného) počtu členů, výsledný součin již nebude přímkou. Z tohoto důvodu zavádíme nekonečný součin, protože členy našeho nekonečného součinu konvergují k jedné, a tedy má poslední sudý člen na výsledný

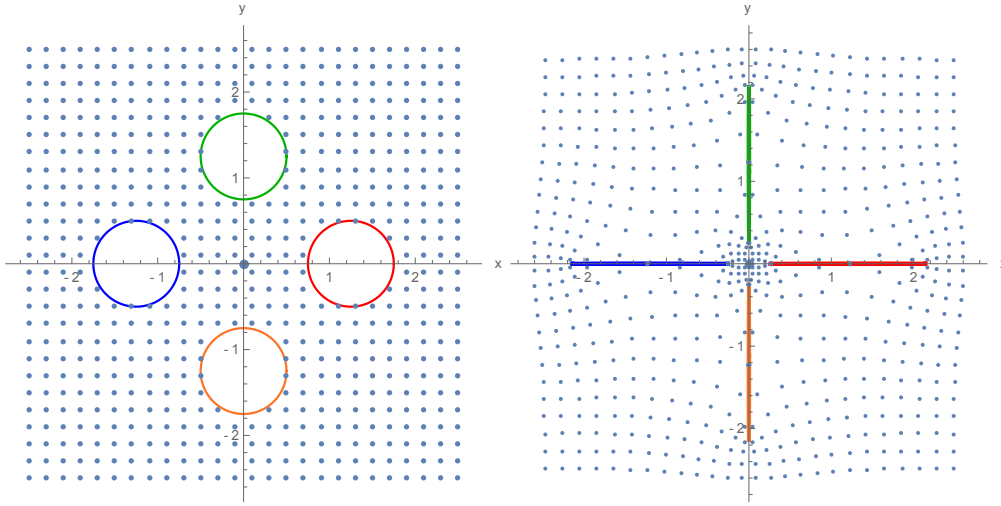
tvár přímky stále menší vliv.

Na podobném principu funguje také zobrazení kružnice C_1 na úsečku. Dle lemmatu 4.16 platí, že dosazením parametrizace kružnice C_1 do součinu prvního a druhého členu dostáváme úsečku. To samé platí o součinu třetího a čtvrtého členu atd. Součinem parametrizací úseček dostáváme opět úsečku, tato nově vzniklá úsečka může mít jinou délku a směr. Jelikož však členy nekonečného součinu konvergují k jedné, směr i délka se mění stále méně. A tedy součinem sudého počtu členů funkce f zobrazíme kružnici C_1 na úsečku.

Hladiny zobrazení na ohraničenou radial slit doménu můžeme vidět na obr. 4.6 a v příloze C.1, C.2 a C.3.

V příloze D.1 jsou k nahlédnutí zdrojové kódy pro zobrazení 4.9.

4.6 Neohraničená radial slit doména



Obrázek 4.7: Zobrazení neohraničené kruhové domény na neohraničenou radial slit doménu.

Nejdříve zadefinujeme neohraničenou radial slit doménu (viz obr. 4.7 vpravo).

Definice 4.21 (Neohraničená vícenásobně souvislá radial slit doména). Mějme úsečky $p_1, p_2, \dots, p_n \subset \mathbb{C}$ takové, že pro $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n : p_i \cap p_j = \emptyset$, pak řekneme, že oblast $\Omega = \mathbb{C} \setminus (p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_n)$ je neohraničená $(n+1)$ -násobně souvislá radial slit doména.

Věta 4.22 (Zobrazení neohraničené kruhové domény na radial slit doménu, viz [7, str. 204]). Mějme $(n+1)$ násobně souvislou neohraničenou kruhovou doménu Ω (kružnice C_0 má nekonečný poloměr a doména obsahuje bod ∞), ve které je splněna podmínka $\Delta < \frac{1}{\sqrt[n-1]{n-1}}$ pro $n \geq 1$. Pak pro libovolný bod $b \in \Omega$ platí, že funkce f ve tvaru

$$f(z) = A(z-b) \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ \nu \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \frac{z - \rho_\nu(b_k)}{z - \rho_\nu(s_k)} \right), \quad (4.10)$$

kde $b_k = \rho_k(b)$ a s_k je střed kružnice C_k , zobrazí kruhovou doménu na radial slit doménu, přičemž $f(\infty) = \infty$ a $f(b) = 0$. Kružnice C_1, C_2, \dots, C_n se zobrazí na úsečky.

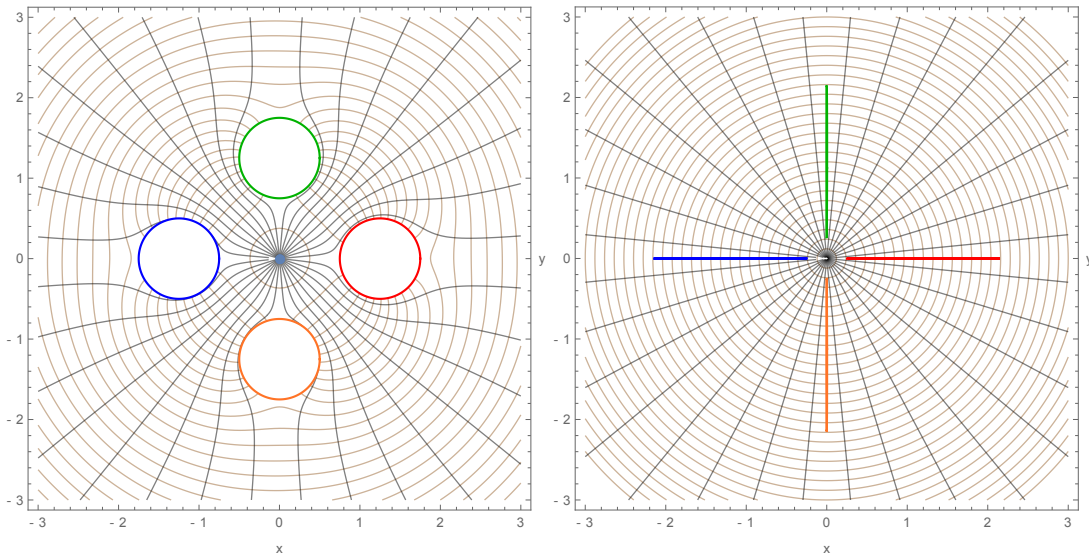
Nyní se pokusím objasnit tvar funkce (4.10). Pro zjednodušení uvažujme pouze dvě kružnice

C_2 a C_1 . Po rozepsání několika prvních členů funkce f dostáváme

$$f(z) = \underbrace{(z-b)}_{\text{člen 0}} \cdot \underbrace{\frac{z-b_1}{z-s_1}}_{\text{člen 1.1}} \underbrace{\frac{z-\rho_2(b_1)}{z-\rho_2(s_1)}}_{\text{člen 1.2}} \underbrace{\frac{z-\rho_{12}(b_1)}{z-\rho_{12}(s_1)}}_{\text{člen 1.3}} \frac{z-\rho_{212}(b_1)}{z-\rho_{212}(s_1)} \cdots \cdot \underbrace{\frac{z-b_2}{z-s_2}}_{\text{člen 2.1}} \underbrace{\frac{z-\rho_2(b_2)}{1-\rho_1(s_2)}}_{\text{člen 2.2}} \underbrace{\frac{z-\rho_{21}(b_2)}{z-\rho_{21}(s_2)}}_{\text{člen 2.3}} \frac{z-\rho_{121}(b_2)}{z-\rho_{121}(s_2)} \cdots$$

Z lemmatu 4.17 plyne, že součin členů 0 a 1.1 zobrazí kružnici C_1 na úsečku. Dosazením parametrizace kružnice C_1 do součin členů 0 a 1.1 funkce f dostáváme parametrizaci úsečky. Dále z lemmatu 4.16 plyne, že součin členů 1.2 a 1.3 zobrazí kružnici C_1 na úsečku. To samé platí o součinu členů 1.4 a 1.5 atd, a také o součinu členů 2.1 a 2.2, členů 2.3 a 2.4 atd. Součinem parametrizací úseček dostáváme opět úsečku, a tedy součinem výše uvedených členů funkce f zobrazíme kružnici C_1 na úsečku.

Na stejném principu funguje zobrazení kružnice C_2 .



Obrázek 4.8: Zobrazení 5-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraněnou kruhovou doménu.

Hladiny zobrazení na neohraněnou radial slit doménu můžeme vidět na obr. 4.8, 4.9 a v příloze C.4, C.5, C.6 a C.7.

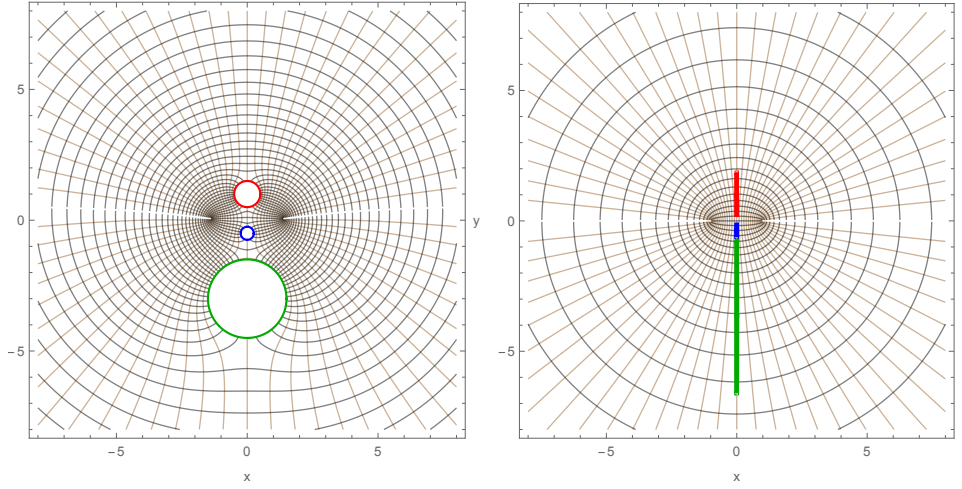
Pro ilustraci zde uvedeme příklad.

Příklad 4.23. Mějme dvě kružnice C_1, C_2 se středy $s_1 = 1, s_2 = -1$ a poloměry $r_1 = 1, r_2 = 1$. Dále zvolme bod $b = 0$. Celý postup je uveden v příloze B.

Zde budou pouze některé části postupu.

Nyní si pro přehlednost zavedme značení $s_{1,k}$ ($s_{2,k}$) jako obraz s_1 (s_2) po k reflexích. Dostáváme tedy funkce f ve tvaru

$$f(z) = (z-b) \cdot \frac{z-b}{z-s_{1,0}} \frac{z-b}{z-s_{1,1}} \frac{z-b}{z-s_{1,2}} \frac{z-b}{z-s_{1,3}} \cdots \cdot \frac{z-b}{z-s_{2,0}} \frac{z-b}{z-s_{2,1}} \frac{z-b}{z-s_{2,2}} \frac{z-b}{z-s_{2,3}} \cdots$$



Obrázek 4.9: Zobrazení 4-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraněnou kruhovou doménu.

Funkci f si nyní přepíšeme do následujícího tvaru

$$f(z) = f_0(z)f^*(z)f^{**}(z),$$

kde

$$f_0(z) = (z - b) \frac{z - b}{z - s_{1,0}},$$

$$f^*(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{z - b}{z - s_{1,2k+1}} \frac{z - b}{z - s_{1,2k+2}} = \prod_{k=0}^{+\infty} f_k^*(z),$$

$$f^{**}(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{z - b}{z - s_{2,2k}} \frac{z - b}{z - s_{2,2k+1}} = \prod_{k=0}^{+\infty} f_k^{**}(z).$$

Pro body na kružnici C_1 dostáváme

$$f_0(t) = 2(\cos(t) + 1).$$

$$f^*(t) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2(2k+2)(2k+3)(\cos(t)+1)+1} \right). \quad (4.11)$$

$$f^{**}(t) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2(2k+1)(2k+2)(\cos(t)+1)+1} \right) \quad (4.12)$$

Z předpisu f_0 je patrné, že zobrazí kružnici C_1 na úsečku. Pro $t = \pi$ součiny (4.11) a (4.12) divergují k 0 dle definice 1.15. Pro $t \neq \pi$ součiny (4.11) a (4.12) konvergují bodově a absolutně podle věty 1.19, protože řady

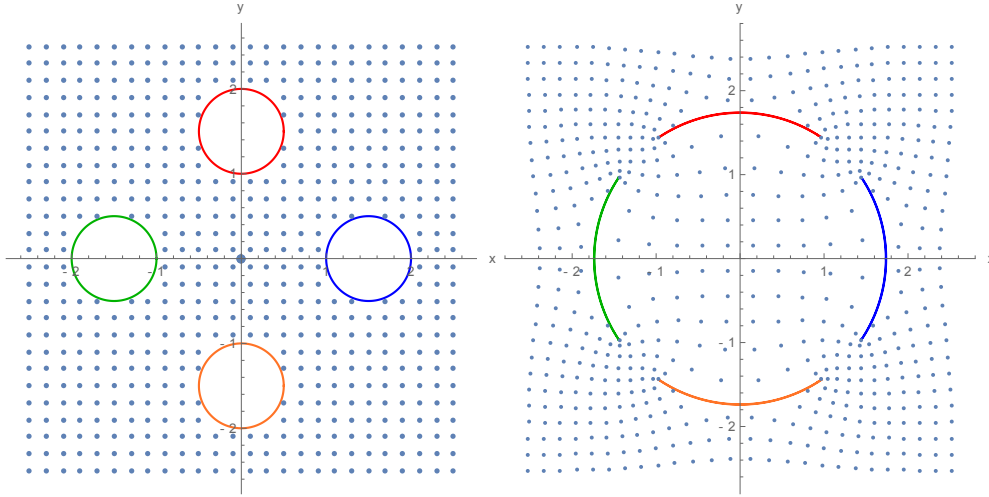
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2(2k+2)(2k+3)(\cos(t)+1)+1} \right|,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2(2k+1)(2k+2)(\cos(t)+1)+1} \right|$$

konvergují.

Jelikož jsou funkce f_0, f^*, f^{**} reálné a nekonečné součiny (4.11) a (4.12) konvergují, s výjimkou jednoho bodu, jehož obrazem je však bod 0, pro body na kružnici C_1 , zobrazí funkce $f = f_0 f^* f^{**}$ kružnici C_1 na úsečku ležící na reálné ose. Analýza funkce f pro body na kružnici C_2 je obdobná.

4.7 Neohraňčená circular slit doména



Obrázek 4.10: Zobrazení neohraňčené kruhové domény na neohraňčenou circular slit doménu.

Nejprve zadefinujeme neohraňčenou circular slit doménu (viz obr. 4.10).

Definice 4.24 (Neohraňčená vícenásobně souvislá circular slit doména). Mějme oblouky $c_1, c_2, \dots, c_n \subset \mathbb{C}$ takové, že platí $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n : c_i \cap c_j = \emptyset$. Pak řekneme, že oblast $\Omega = \mathbb{C} \setminus (c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n)$ je neohraňčená $(n+1)$ -násobně souvislá circular slit doména.

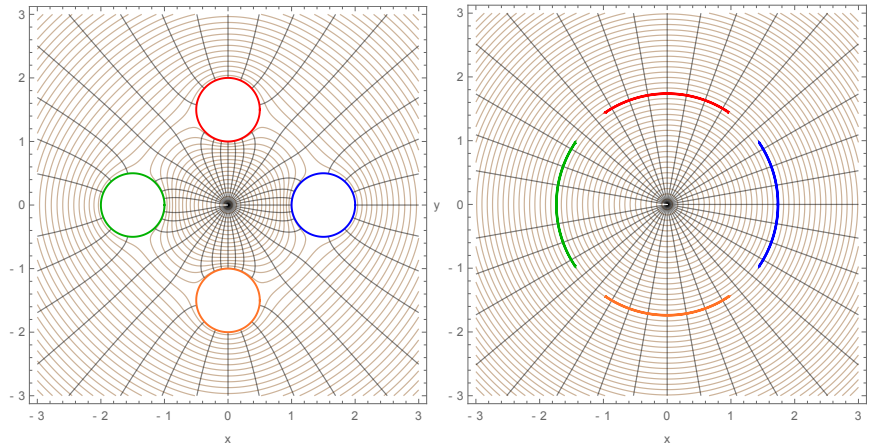
Věta 4.25 (Zobrazení neohraňčené kruhové domény na circular slit doménu, viz [7, str. 208]). Mějme $(n+1)$ násobně souvislou neohraňčenou kruhovou doménu Ω , ve které je splněna podmínka $\Delta < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ pro $n \geq 1$. Pak pro libovolný bod $b \in \Omega$ platí, že funkce f ve tvaru

$$f(z) = A(z-b) \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ \nu_e \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \left(\frac{z - \rho_{\nu_e}(s_k)}{z - \rho_{\nu_e}(b_k)} \right) \prod_{\substack{j=0 \\ \nu_o \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \left(\frac{z - \rho_{\nu_o}(b_k)}{z - \rho_{\nu_o}(s_k)} \right) \right), \quad (4.13)$$

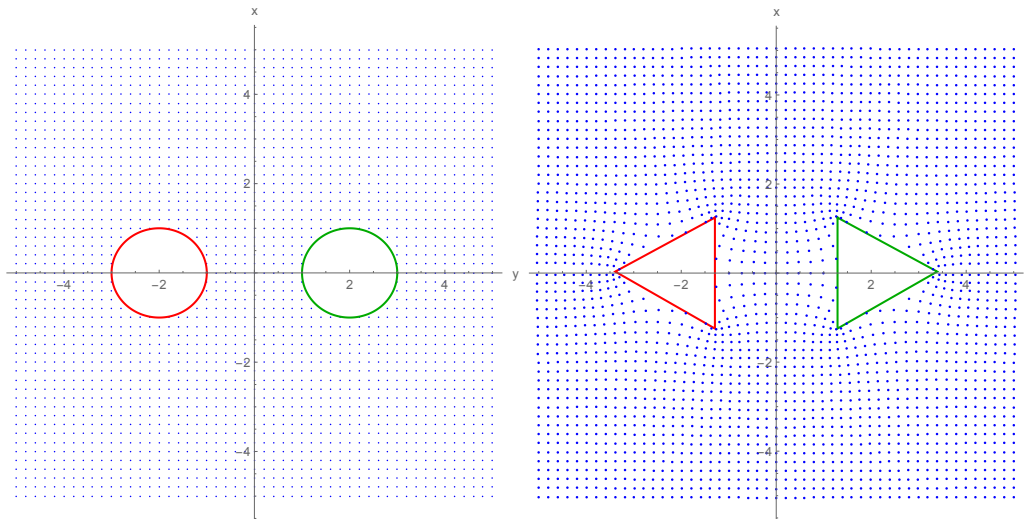
kde $b_k = \rho_k(b)$ a s_k je střed kružnice C_k , zobrazí kruhovou doménu na circular slit doménu, kde ν_o je multi-index liché délky a ν_e je multi-index sudé délky. Kružnice C_1, C_2, \dots, C_n se zobrazí na oblouky.

Hladiny zobrazení na neohraňčenou circular slit doménu jsou zachyceny na obr. 4.11 a v příloze C.8 a C.9.

V příloze D.2 jsou k nahlédnutí zdrojové kódy pro zobrazení 4.13.



Obrázek 4.11: Zobrazení 5-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené circular slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.



Obrázek 4.12: Zobrazení neohraničené kruhové domény na neohraničenou polygonální doménu.

4.8 Neohraničená polygonální doména

Nejprve zdefinujeme neohraničenou polygonální doménu (viz 4.12 vpravo). Poté zavedeme značení pro polygonu v této doméně a na závěr si ukážeme příklad zobrazení kruhové domény na polygonální doménu.

Definice 4.26 (Neohraničená vícenásobně souvislá polygonální doména). Mějme polygony $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \dots, \overline{G_n} \subset \mathbb{C}$ takové, že pro $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n : \overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$, pak řekneme, že oblast $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\overline{G_1}, \overline{G_2}, \dots, \overline{G_n})$ je neohraničená $(n + 1)$ -násobně souvislá polygonální doména.

Nyní zavedeme značení pro vrcholy a vnitřní úhly polygonů.

Poznámka 4.27. Mějme polygony $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \dots, \overline{G_n} \subset \mathbb{C}$, pak zavedeme značení

- (a) V_i je počet vrcholů polygonu $\overline{G_i}$,
- (b) $w_{i,j}$ je j -tý vrchol polygonu $\overline{G_i}$,
- (c) $\alpha_{i,j}\pi$ je vnitřní úhel polygonu odpovídající vrcholu $w_{i,j}$,

(d) $\beta_{i,j} = 1 - \alpha_{i,j}$.

Nyní uvedeme zobrazení neohraničené kruhové domény na neohraničenou polygonální doménu

Věta 4.28 (Schwarzova–Christoffelova transformace pro neohraničenou polygonální doménu, viz [9, str. 19]). *Mějme $(n + 1)$ násobně souvislou neohraničenou kruhovou doménu Ω , ve které je splněna podmínka $\Delta < \frac{1}{\sqrt[n-1]{n-1}}$, pro $n \geq 1$. Pak funkce f ve tvaru*

$$f(z) = A \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{V_k} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ \nu \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \left(\frac{\zeta - \rho_\nu(z_{k,i})}{\zeta - \rho_\nu(s_k)} \right)^{\beta_{k,i}} \right) \right) d\zeta + C, \quad (4.14)$$

kde A, C jsou libovolné konečné komplexní konstanty a $z_{k,i}$ jsou vzory vrcholů $w_{k,i}$, pro jejichž úhly platí $-1 < \beta_{k,i} < 1$ a $\sum_{i=1}^{V_k} \beta_{k,i} = 2$.

Příklad 4.29. Provedme zobrazení z 3-násobně souvislé kruhové domény na 3-násobně souvislou polygonální doménu. Mějme dvě kružnice C_1, C_2 se středy $s_1 = 2, s_2 = -2$ a poloměry $r_1 = r_2 = 1$. Nyní zvolme vzory $z_{k,i}$, pro vrcholy $w_{k,i}$ na polygonu, na kružnicích a koeficienty úhlů $\beta_{k,i}$,

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= 2, \quad z_{1,2} = 1 + e^{i\pi\frac{2}{3}}, \quad z_{1,3} = 1 + e^{-i\pi\frac{2}{3}}, \\ z_{2,1} &= -2, \quad z_{2,2} = -1 - e^{i\pi\frac{2}{3}}, \quad z_{2,3} = -1 - e^{-i\pi\frac{2}{3}}, \\ \beta_{1,1} &= \frac{2}{3}, \quad \beta_{1,2} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{1,3} = \frac{2}{3}, \\ \beta_{2,1} &= \frac{2}{3}, \quad \beta_{2,2} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{2,3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nyní sestavme rovnici zobrazení na neohraničenou polygonální doménu pro naše nastavení bodů $z_{k,i}$ a koeficientů úhlů $\beta_{k,i}$. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze jednu reflexi. Pro volbu $A = 1$ a $C = 0$ dostáváme funkci \mathcal{F} ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \int_0^z \left(\frac{z-3}{z-2} \right)^{2/3} \left(\frac{z-\frac{9}{5}}{z-\frac{7}{4}} \right)^{2/3} \left(\frac{z+\frac{9}{5}}{z+\frac{7}{4}} \right)^{2/3} \left(\frac{z+3}{z+2} \right)^{2/3} \\ &\quad \left(\frac{z - e^{-\frac{i\pi}{3}} + 2}{z+2} \right)^{2/3} \left(\frac{z - e^{\frac{i\pi}{3}} + 2}{z+2} \right)^{2/3} \left(\frac{z - e^{-\frac{2i\pi}{3}} - 2}{z-2} \right)^{2/3} \left(\frac{z - e^{\frac{2i\pi}{3}} - 2}{z-2} \right)^{2/3} \\ &\quad \left(\frac{z - \frac{1}{-4+e^{-\frac{i\pi}{3}}} - 2}{z-\frac{7}{4}} \right)^{2/3} \left(\frac{z - \frac{1}{-4+e^{\frac{i\pi}{3}}} - 2}{z-\frac{7}{4}} \right)^{2/3} \left(\frac{z - \frac{1}{4+e^{-\frac{2i\pi}{3}}} + 2}{z+\frac{7}{4}} \right)^{2/3} \left(\frac{z - \frac{1}{4+e^{\frac{2i\pi}{3}}} + 2}{z+\frac{7}{4}} \right)^{2/3} dz \end{aligned}$$

Funkce \mathcal{F} je aproximací funkce f viz 4.14.

Hladiny tohoto zobrazení lze nalézt v příloze (viz obr.C.10 a obr.C.11)

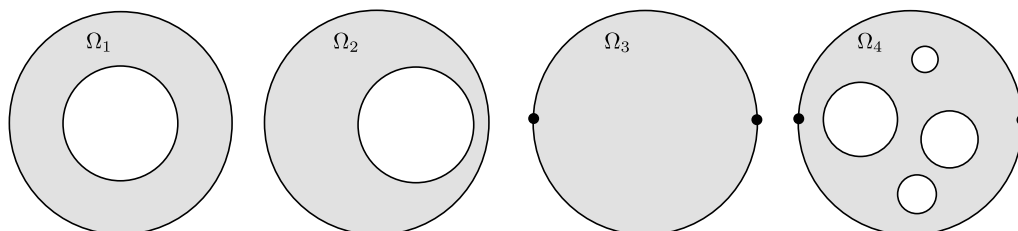
V příkladu 4.29 jsme si ukázali, jak zobrazit kruhovou doménu na polygonální doménu. V tomto příkladě jsme si však zvolili vzory $z_{k,i}$. V praxi se však setkáváme s opačným problémem, a to najít k zadané polygonální doméně vhodnou kruhovou doménu. Tento problém spočívá ve vyřešení soustavy nelineárních rovnic, kde dostáváme pro každý vrchol $w_{k,i}$ rovnici ve tvaru

$$w_{k,i} = f(z_{k,i}) = C + A \int^{z_{k,i}} \prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{V_k} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ \nu \in \sigma_j(k)}}^{\infty} \left(\frac{\zeta - \rho_\nu(z_{k,i})}{\zeta - \rho_\nu(s_k)} \right)^{\beta_{k,i}} \right) \right) d\zeta.$$

Nalezení efektivního způsobu hledání parametrů SC formule pro vícenásobně souvislou oblast je velmi obtížné a přesahuje rámec této práce. Touto problematikou se zabývají články [7], [9] a [13].

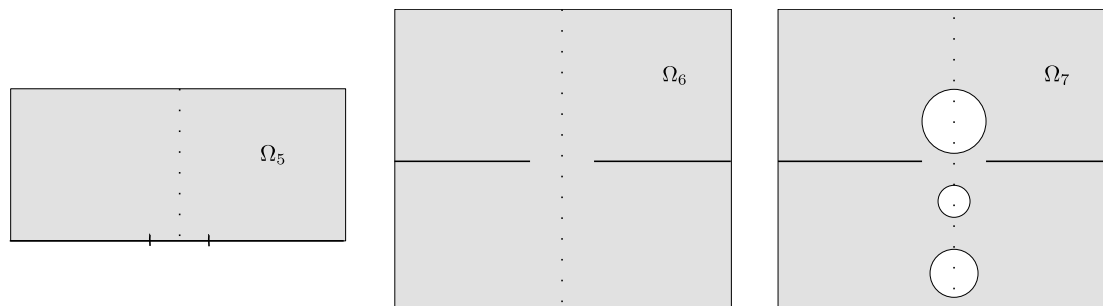
Shrnutí

V této práci jsme se zabývali konformním zobrazením a hledáním řešení Laplaceovy rovnice pomocí konstrukce holomorfní funkce. V příkladu 1.7 jsme řešili Laplaceovu rovnici na mezikruží (viz Ω_1 na obr. 4.13) s Dirichletovými podmínkami na hranici. V příkladu 2.9 jsme si ukázali, jak pomocí konformního zobrazení řešit Laplaceovu rovnici s Dirichletovými podmínkami na hranici, kterou tvoří dvě nesoustředné kružnice (viz Ω_2 na obr. 4.13). V příkladu 2.7 jsme řešili Laplaceovu rovnici na kruhu (viz Ω_3 na obr. 4.13), na jehož hranici jsme měli Neumannovu okrajovou podmínku, s výjimkou dvou bodů, ve kterých jsou předepsány nevlastní dvojně limity, a to $+\infty$ a $-\infty$. V podkapitole 4.5 jsme řešili podobný příklad na kruhové doméně (viz Ω_4 na obr. 4.13), na jejíž vnější hranici (kružnici C_0) jsme měli Neumannovu podmínku, s výjimkou dvou bodů, ve kterých jsou předepsány nevlastní dvojně limity, a to $+\infty$ a $-\infty$. Dále na vnitřních kružnicích C_1, C_2, \dots, C_n byla definována Neumannova podmínka.



Obrázek 4.13: Mezikruží, oblast mezi nesoustřednými kružnicemi, kruh, 5-násobně souvislá kruhová doména.

Pomocí konformního zobrazení jsme v příkladu 2.5 zkonstruovali funkci, jež je harmonická na horní polorovině komplexní roviny a splňuje kombinované (Dirichletovy i Neumannovy) okrajové podmínky na reálné ose (viz Ω_5 na obr. 4.14). V příkladu 3.13 jsme našli stejné řešení pomocí Schwarzovy–Christoffelovy transformace a ukázali jsme si, že tuto funkci lze analyticky prodloužit i na dolní polorovinu komplexní roviny (viz Ω_6 na obr. 4.14). V podkapitole 4.6 (viz obr. 4.9, C.6 a C.7) se nám poté podařilo nalézt funkci, jež je harmonická na kruhové doméně a splňuje Dirichletovy okrajové podmínky na hranicích kruhů (viz Ω_7 na obr. 4.14).



Obrázek 4.14: Komplexní rovina, neohraničená kruhová doména.

Literatura

- [1] Šulista, M.: Základy analýzy v komplexním oboru. Matematika pro VŠT, sešit XIII. Praha, SNTL 1981.
- [2] Šulista, M.: Analýza v komplexním oboru. Matematika pro VŠT, sešit XXIII. Praha, SNTL 1982.
- [3] Fuks, B. A. – Šabat, B. V.: Funkce komplexní proměnné. (Překlad z Ruštiny.) Praha, NČSAV 1961.
- [4] Polák, J.: Matematická analýza v komplexním oboru 1. svazek, ZČU, Plzeň, 2002.
- [5] Polák, J.: Matematická analýza v komplexním oboru 2. svazek, ZČU, Plzeň, 2000.
- [6] Černý, I.: Základy analýzy v komplexním oboru. Praha, Academia 1967.
- [7] DeLillo TK, Kropf EH: 2010, Slit maps and Schwarz-Christoffel maps for multiply connected domains, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol: 36, Pages: 195-223
- [8] DeLillo, Thomas K., Driscoll, T. A., Elcrat, Alan R., Pfaltzgraff, J. A.: (2008). "Radial and circular slit maps of unbounded multiply connected circle domains." *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 464(2095): 1719-1737.
- [9] E. Kropf, Numerical computation of schwarz-christoffel transformations and slit maps for multiply connected domains, Wichita State University, College of Liberal Arts and Sciences, Department of Mathematics, Statistics and Physics, 2012.
- [10] P. Drábek, G. Holubová: Elements of partial differential equations. 2nd revised and extended ed. De Gruyter Textbook. Berlin: Walter de Gruyter. xiii, 277 p. (2014).
- [11] D. Crowdy, The Schwarz-Christoffel mapping to bounded multiply connected polygonal domains, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 461 (2005), pp. 2653–2678.
- [12] D. Crowdy, Schwarz-Christoffel mapping to unbounded multiply connected polygonal regions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 142 (2007), pp. 319–339
- [13] T.K. DeLillo and E.H. Kropf, Numerical Computation of the Schwarz-Christoffel transformation for multiply connected domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, 33 (2011), pp. 1369-1394.
- [14] T. A. Driscoll, A MATLAB Toolbox for Schwarz-Christoffel mapping, *ACM Trans. Math. Software*, 22 (1996), pp. 168–186.
<http://www.math.udel.edu/~driscoll/software/SC/index.html>

Příloha A

Möbiova transformace je grupou – Důkaz

Ukážeme, že množina Möbiových transformací s operací skládání funkcí je grupou, tj. je uzavřená, asociativní, existuje v ní neutrální prvek a ke každému prvku existuje inverzní prvek.

- (a) Nejdříve ukážeme uzavřenost. Mějme funkce $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ a $g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$, pak složením funkcí $f \circ g$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{\frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{c'z + d'}}{\frac{ca'z + cb' + dc'z + dd'}{c'z + d'}} = \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{ca'z + cb' + dc'z + dd'} = \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \end{aligned}$$

kde jsme označili $a_1 = aa' + bc'$, $b_1 = ab' + bd'$, $c_1 = ca' + dc'$, $d_1 = cb' + dd'$.

Složení funkcí $f \circ g$ je tedy opět Möbiova transformace.

- (b) Dále dokážeme, asociativitu. Mějme funkce $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$ a $h(z) = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}$.

Nejdříve vyjádříme funkci $\varphi = f \circ g$. Toto složení funkcí jsme řešili během důkazu uzavřenosti.

Můžeme tedy psát $\varphi(z) = f(g(z)) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$, kde $a_1 = aa' + bc'$, $b_1 = ab' + bd'$, $c_1 = ca' + dc'$, $d_1 = cb' + dd'$.

Obdobně můžeme psát $\psi(z) = g(h(z)) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$, kde $a_2 = a'a'' + b'c''$, $b_2 = a'b'' + b'd''$, $c_2 = c'a'' + d'c''$, $d_2 = c'b'' + d'd''$.

Dále pro složení funkcí $(f \circ g) \circ h$ dostáváme $\varphi(h(z)) = \frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3}$, kde

$$a_3 = a_1a'' + b_1c'' = aa'a'' + a''bc' + ab'c'' + bc'd'',$$

$$b_3 = a_1b'' + b_1d'' = aa'b'' + bb''c' + ab'd'' + bd'd'',$$

$$c_3 = c_1a'' + d_1c'' = a'a''c + a''dc' + b'c'' + c'dd'',$$

$$d_3 = c_1b'' + d_1d'' = a'b''c + b''c'd + b'cd'' + d'dd''.$$

Dále pro složení funkcí $f \circ (g \circ h)$ dostáváme $f(\psi(z)) = \frac{a_4z + b_4}{c_4z + d_4}$, kde

$$a_4 = aa_2 + bc_2 = aa'a'' + ab'c'' + a''bc' + bc'd'',$$

$$\begin{aligned} b_4 &= ab_2 + bd_2 = aa'b'' + ab'd'' + bb''c' + bd'd'', \\ c_4 &= a_2c + c_2d = a'a''c + b'cc'' + a''c'd + c''dd', \\ d_4 &= b_2c + dd_2 = a'b''c + b'cd'' + b''c'd + dd'd''. \end{aligned}$$

Jelikož $a_3 = a_4$, $b_3 = b_4$, $c_3 = c_4$ a $d_3 = d_4$, platí i $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. A tedy skládání Möbiových transformací je asociativní.

(c) Existence neutrálního prvku: Pro funkci $I(z) = z$ a libovolnou funkci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ platí $f \circ I = I \circ f = f$. Zobrazení I je tedy neutrálním prvkem.

(d) K funkci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ existuje funkce g ve tvaru $g(z) = \frac{b-zd}{zc-a}$. Pro jejich složení platí

$$f(g(z)) = \frac{\frac{b-zd}{zc-a} + b}{\frac{b-zd}{c(zc-a)} + d} = \frac{\frac{ab-azd+zbz-ab}{zc-a}}{\frac{bc-czd+dzc-da}{zc-a}} = \frac{z(bc-ad)}{bc-ad} = z$$

a

$$g(f(z)) = \frac{b - \frac{az+b}{cz+d}d}{\frac{az+b}{cz+d}c - a} = \frac{\frac{bcz+bd-adz-bd}{cz+d}}{\frac{acz+bc-acz-ad}{cz+d}} = \frac{z(bc-ad)}{bc-ad} = z.$$

A tedy $f \circ g = g \circ f = I$, což znamená, že pro jakoukoli funkci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ existuje inverzní prvek ve tvaru $f^{-1}(z) = \frac{b-zd}{zc-a}$.

Množina Möbiových transformací s operací skládání funkcí je tedy uzavřená, asociativní, existuje v ní nulový prvek a ke každému prvku existuje inverzní prvek. Tím jsme dokázali, že $G = (M, \circ)$ je grupa.

Příloha B

Zobrazení kružnic na úsečky

Příklad B.1. Mějme dvě kružnice C_0, C_1 se středy $s_1 = 1, s_2 = -1$ a poloměry $r_1 = 1, r_2 = 1$. Dále zvolme bod $b = 0$. Nyní si pro přehlednost zavedme značení $s_{1,k}$ ($s_{2,k}$) jako obraz s_1 (s_2) po k reflexích. Tento způsob značení můžeme zavést, jelikož pro bod s_1 nebo s_2 existuje právě jeden multi-index určité délky. Jelikož bod b leží na kružnici C_1 i C_2 , je každou jeho reflexí dle kružnic C_1 a C_2 opět bod b . Vzhledem k volbě středů a poloměrů dostáváme $\rho_1(z) = 1 + \frac{1}{\bar{z} - 1}$ a $\rho_2(z) = -1 + \frac{1}{\bar{z} + 1}$. Následný postup výpočtu bude znázorněn pouze pro zobrazení kružnice C_1 . Pro kružnici C_2 je postup obdobný.

$$f(z) = (z - b) \frac{z - b}{z - s_{1,0}} \frac{z - b}{z - s_{1,1}} \frac{z - b}{z - s_{1,2}} \frac{z - b}{z - s_{1,3}} \dots$$

$$\frac{z - b}{z - s_{2,0}} \frac{z - b}{z - s_{2,1}} \frac{z - b}{z - s_{2,2}} \frac{z - b}{z - s_{2,3}} \dots$$

Vypišme si nyní několik prvních členů posloupností $(s_{1,k})_{k=0}^{+\infty}$ a $(s_{2,k})_{k=0}^{+\infty}$

$$(s_{1,k}) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right), \quad s_{1,k} = (-1)^n \frac{1}{n+1},$$

$$(s_{2,k}) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right), \quad s_{2,k} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}.$$

Nyní si vytvořme několik speciálních posloupností pro následující použití.

$$(a) \quad (s_{1,k+1} + s_{1,k+2})_{k=0}^{+\infty} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{42}, \dots\right), \quad s_{1,k+1} + s_{1,k+2} = -\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}.$$

$$(b) \quad (s_{1,k+1} s_{1,k+2})_{k=0}^{+\infty} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{42}, \dots\right), \quad s_{1,k+1} s_{1,k+2} = -\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}.$$

$$(c) \quad (s_{2,k} + s_{2,k+1})_{k=0}^{+\infty}, \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{30}, \dots\right) = s_{2,k} + s_{2,k+1} = -\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

$$(d) \quad (s_{2,k} s_{2,k+1})_{k=0}^{+\infty} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{30}, \dots\right), \quad s_{2,k} s_{2,k+1} = -\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

A přepíšeme si funkci f do tvaru

$$f(z) = f_0(z) f^*(z) f^{**}(z),$$

kde

$$f_0(z) = (z - b) \frac{z - b}{z - s_{1,0}},$$

$$f^*(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{z - b}{z - s_{1,2k+1}} \frac{z - b}{z - s_{1,2k+2}} = \prod_{k=0}^{+\infty} f_k^*(z),$$

$$f^{**}(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{z - b}{z - s_{2,2k}} \frac{z - b}{z - s_{2,2k+1}} = \prod_{k=0}^{+\infty} f_k^{**}(z).$$

Nyní postupně prozkoumáme vlastnosti funkcí f_0 , f^* a f^{**} . Začneme s funkcí f_0

$$f_0 = (z - b) \frac{z - b}{z - s_{1,0}}.$$

Po dosazení předpisu kružnice C_1 a bodu b dostáváme

$$f_0 = (e^{it} + 1) \frac{e^{it} + 1}{e^{it}} = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{it}}.$$

Po rozepsání e^{it} na reálnou a imaginární složku dostáváme

$$f_0 = \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t) + 2i \cos(t) \sin(t) + 2 \cos(t) + 2i \sin(t) + 1}{\cos(t) + i \sin(t)}.$$

Po zkrácení a vytknutí $\cos(t)$ dostáváme

$$f_0 = \frac{2 \cos(t)(\cos(t) + i \sin(t) + 2(\cos(t) + i \sin(t)))}{\cos(t) + i \sin(t)} = 2(\cos(t) + 1).$$

Je tedy vidět, že funkce f_0 zobrazí kružnici na úsečku.

Nyní prostudujme chování funkce f^* . Jelikož je ve formě nekonečného součinu, prozkoumáme si její jednotlivé části f_k^* .

$$f_k^* = \frac{z - b}{z - s_{1,2k+1}} \frac{z - b}{z - s_{1,2k+2}}$$

Po dosazení předpisu kružnice C_1 a bodu b dostáváme

$$f_k^* = \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + 1 - s_{1,2k+1}} \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + 1 - s_{1,2k+2}} = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{2it} + 1 + s_{1,2k+1}s_{1,2k+2} + 2e^{it} - (s_{1,2k+1} + s_{1,2k+2}) - e^{it}(s_{1,2k+1} + s_{1,2k+2})}.$$

Nyní využijeme dříve odvozených posloupností $s_{1,2k+1}s_{1,2k+2}$ a $s_{1,2k+1} + s_{1,2k+2}$ a využijeme rovnosti $s_{1,2k+1}s_{1,2k+2} = s_{1,2k+1} + s_{1,2k+2}$

$$f_k^* = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{2it} + 1 + pl1_k + 2e^{it} - (sl1_k) - e^{it}sl1_k} = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{2it} + 1 + 2e^{it} + e^{it} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}.$$

Nyní do čitatele přičteme $0 = e^{it} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} - e^{it} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}$, čímž dostáváme

$$f_k^* = 1 - \frac{e^{it} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}{e^{2it} + 1 + 2e^{it} + e^{it} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}.$$

Po rozepsání e^{it} na reálnou a imaginární složku dostáváme

$$f_k^* = 1 - \frac{(\cos(t) + i \sin(t)) \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}{\cos^2(t) - \sin^2(t) + 2i \cos(t) \sin(t) + 1 + (\cos(t) + i \sin(t)) \left(2 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\right)}.$$

Nyní opět zkrátíme a vyjádříme $\cos(t)$, čímž dostáváme

$$f_k^* = 1 - \frac{(\cos(t) + i \sin(t)) \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}{2 \cos(t)(\cos(t) + i \sin(t)) + (\cos(t) + i \sin(t)) \left(2 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\right)}.$$

Opět zkrátíme a vyjádříme $\cos(t)$, čímž dostáváme

$$f_k^* = 1 - \frac{\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}}{2 \cos(t) + 2 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}} = 1 - \frac{1}{2(2k+2)(2k+3)(\cos(t) + 1) + 1}.$$

Funkci f^* tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$f^* = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2(2k+2)(2k+3)(\cos(t) + 1) + 1}\right). \quad (\text{B.1})$$

Pro $t = \pi$ nekonečný součin (B.1) diverguje dle definice 1.15 k 0. Pro $t \neq \pi$ nekonečný součin (B.1) konverguje bodově a absolutně podle věty 1.19, protože řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2(2k+2)(2k+3)(\cos(t) + 1) + 1} \right|$$

konverguje.

Obdobně vyšetříme funkci f^{**} . Opět si vyjádříme

$$f_k^{**} = \frac{z-b}{z-s_{2,2k}} \frac{z-b}{z-s_{2,2k+1}} = \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + 1 - s_{2,2k}} \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + 1 - s_{2,2k+1}} = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{2it} + 1 + s_{2,2k}s_{2,2k+1} + 2e^{it} - (s_{2,2k} + s_{2,2k+1}) - e^{it}(s_{2,2k} + s_{2,2k+1})}.$$

Využijeme dříve odvozených posloupností $s_{2,2k} + s_{2,2k+1}$, $s_{2,2k}s_{2,2k+1}$ a rovnosti $s_{2,2k} + s_{2,2k+1} = s_{2,2k}s_{2,2k+1}$

$$f_k^{**} = \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{e^{2it} + 1 + 2e^{it} + e^{it} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}} = 1 - \frac{e^{it} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}{e^{2it} + 1 + 2e^{it} + e^{it} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}.$$

Opět použijeme rovnost $e^{2it} + 1 = 2 \cos(t)e^{it}$, čímž dostáváme

$$f_k^{**} = 1 - \frac{e^{it} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}{2 \cos(t)e^{it} + 2e^{it} + e^{it} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}} =$$

$$1 - \frac{\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}{2(\cos(t)+1) + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}} = 1 - \frac{1}{2(2k+1)(2k+2)(\cos(t)+1) + 1}.$$

Vlastnosti funkce

$$f^{**} = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2(2k+1)(2k+2)(\cos(t)+1) + 1} \right) \quad (\text{B.2})$$

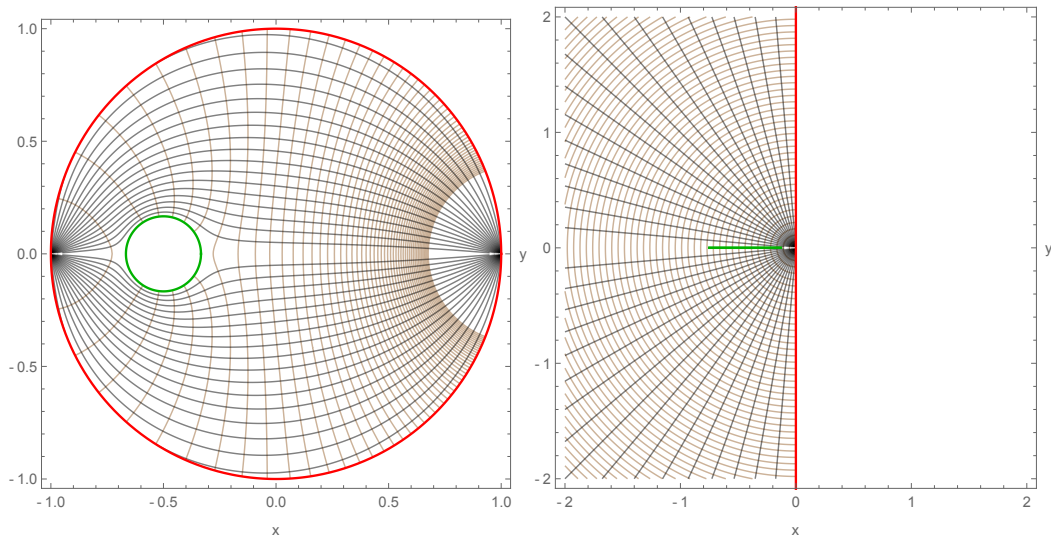
jsou podobné funkci f^* . Nekonečný součin B.2 diverguje pro $t = \pi$ k 0 a v ostatních bodech konverguje.

Jelikož jsou funkce f_0, f^*, f^{**} reálné, pro body na kružnici C_1 , zobrazí funkce $f = f_0 f^* f^{**}$ kružnici C_1 na úsečku ležící na reálné ose. Analýza funkce f pro body na kružnici C_2 je obdobná.

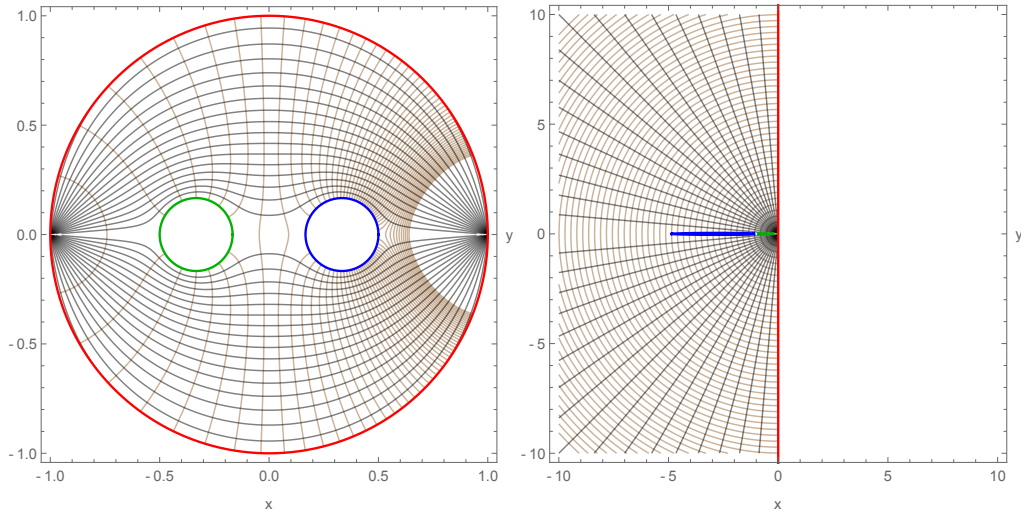
Příloha C

Ilustrace zobrazení vícenásobně souvislých oblastí

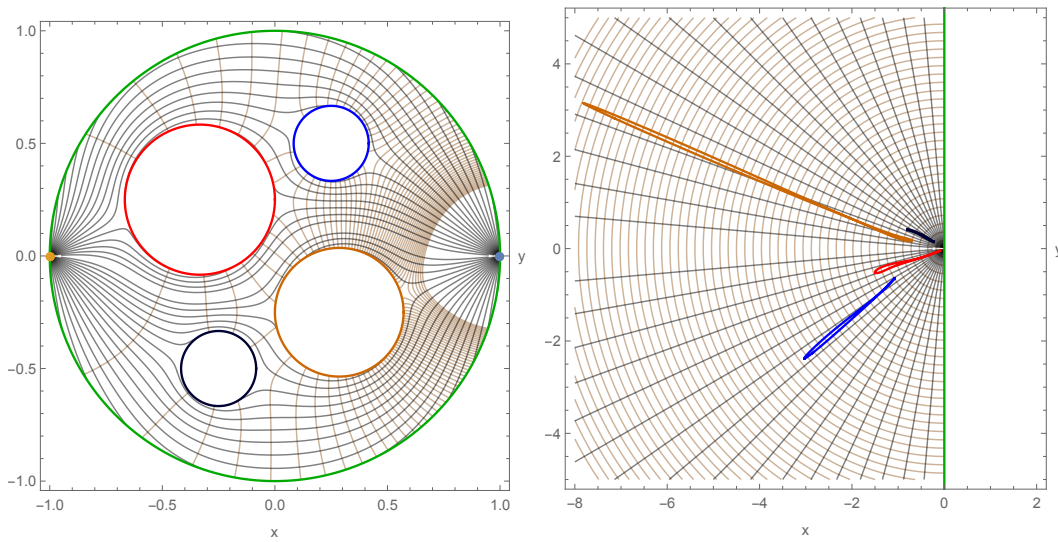
C.1 Ohraničená radial slit doména



Obrázek C.1: Zobrazení 2-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z ohraničené radial slit domény na ohraničenou kruhovou doménu.

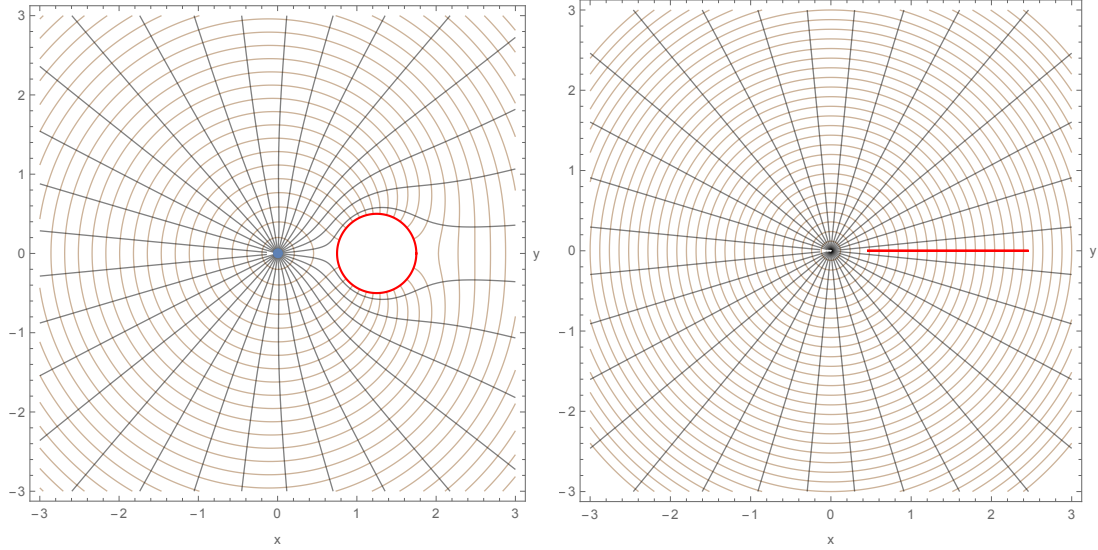


Obrázek C.2: Zobrazení 3-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z ohraničené radial slit domény na ohraničenou kruhovou doménu.

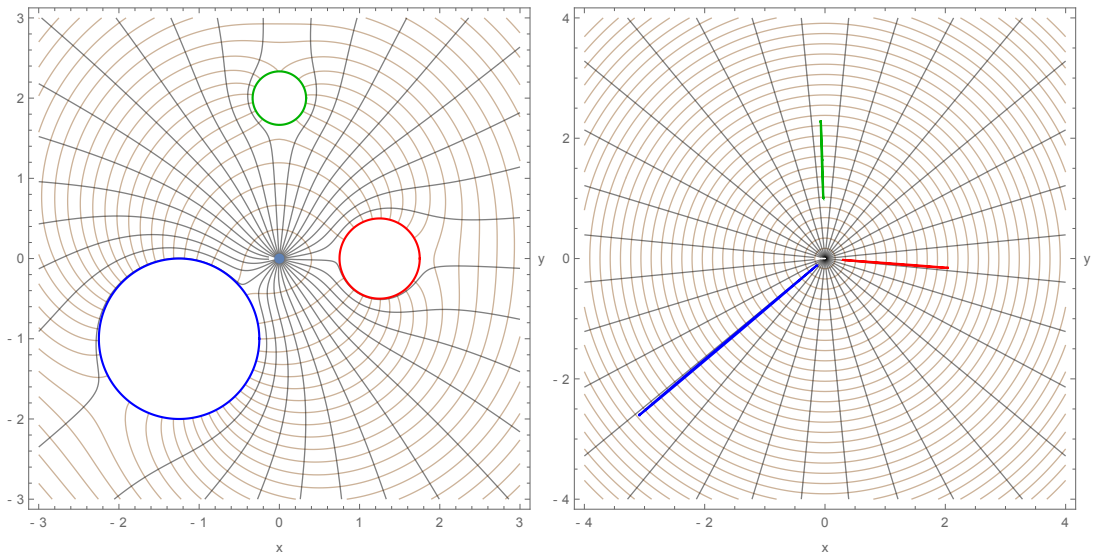


Obrázek C.3: Zobrazení 5-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z ohraničené radial slit domény na ohraničenou kruhovou doménu.

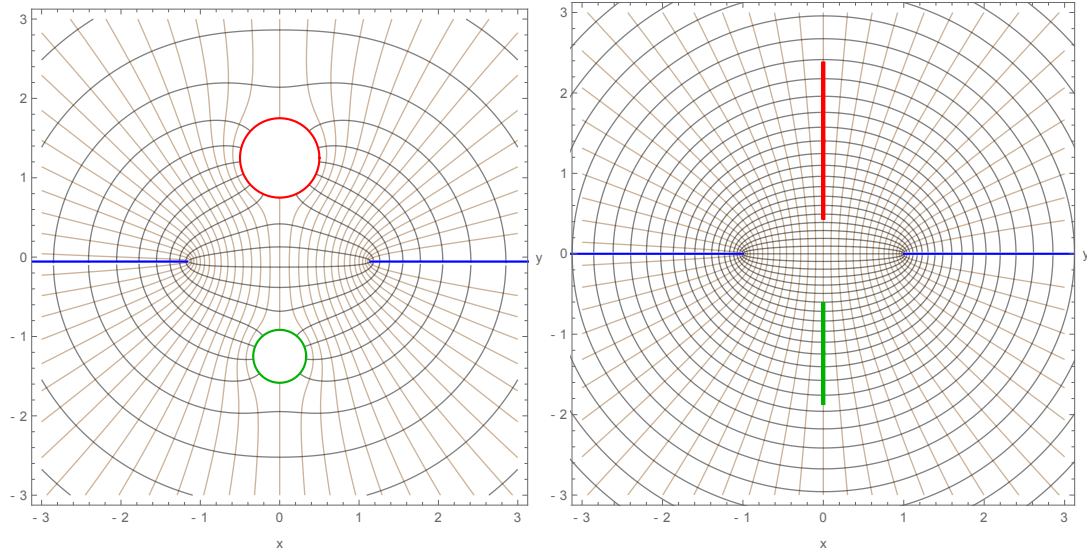
C.2 Neohraničená radial slit doména



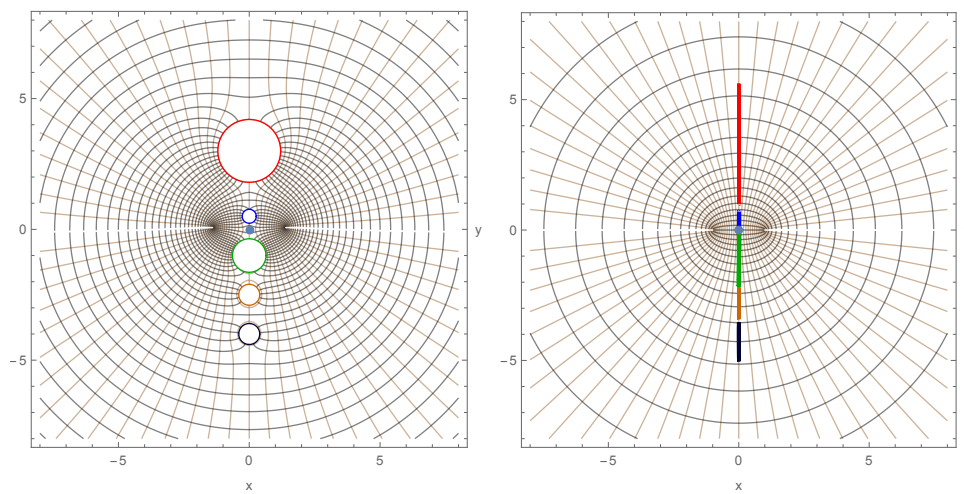
Obrázek C.4: Zobrazení 2-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.



Obrázek C.5: Zobrazení 4-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.

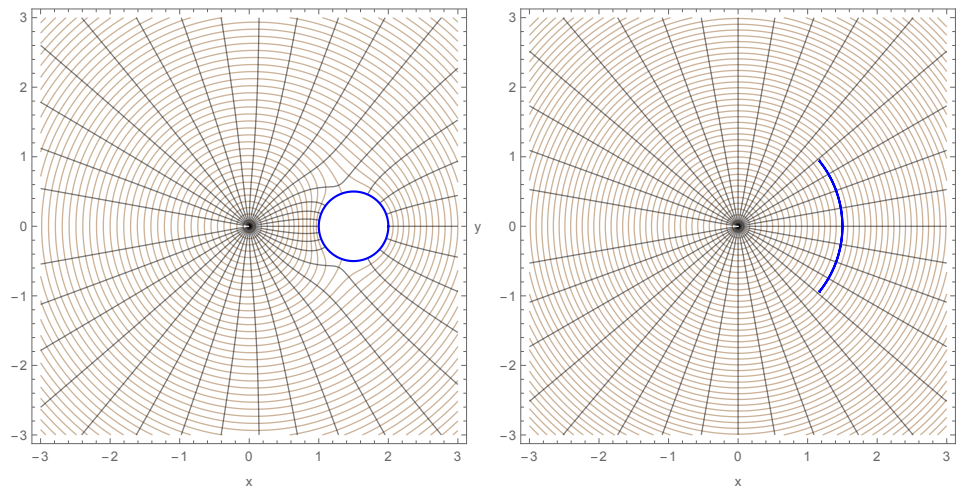


Obrázek C.6: Zobrazení 3-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.

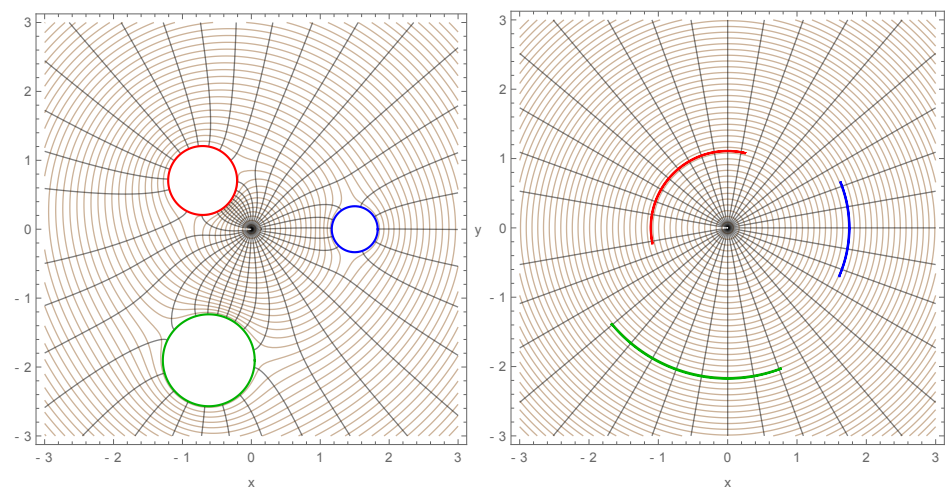


Obrázek C.7: Zobrazení 6-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené radial slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.

C.3 Neohraničená circular slit doména

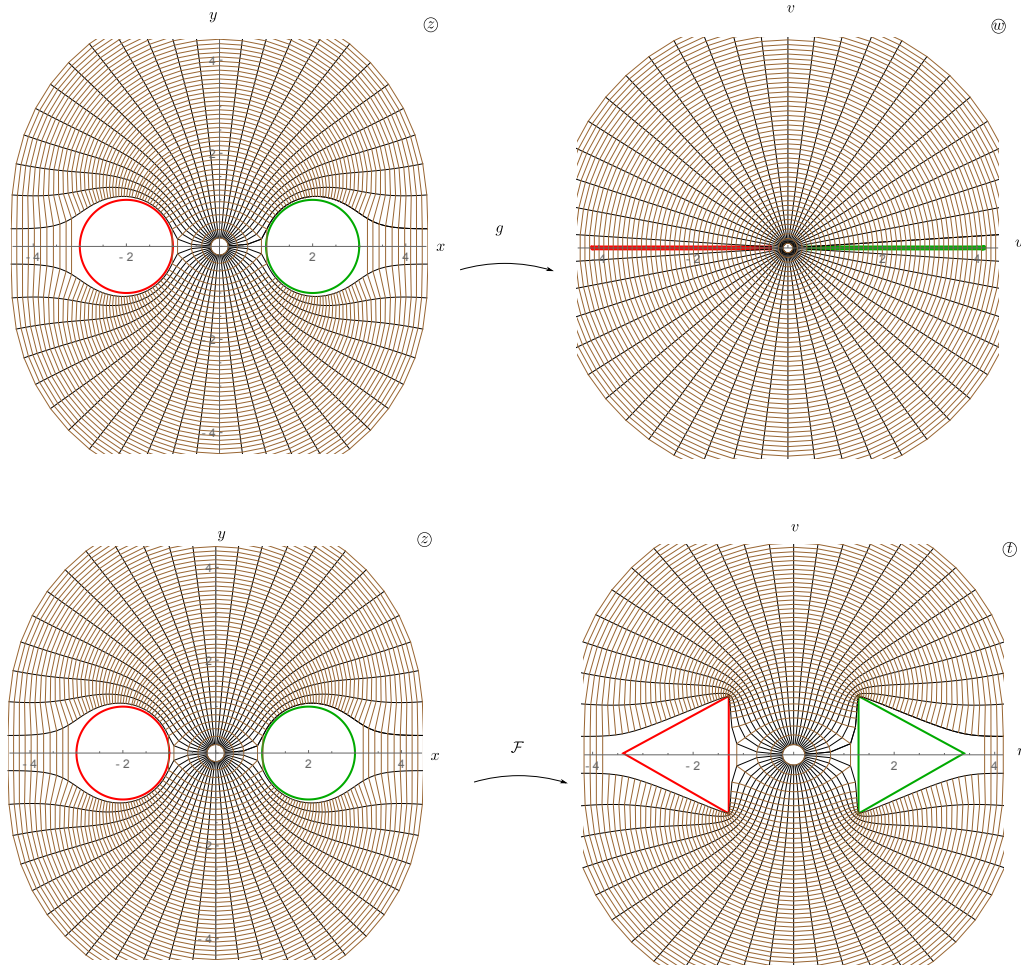


Obrázek C.8: Zobrazení 2-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené circular slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.

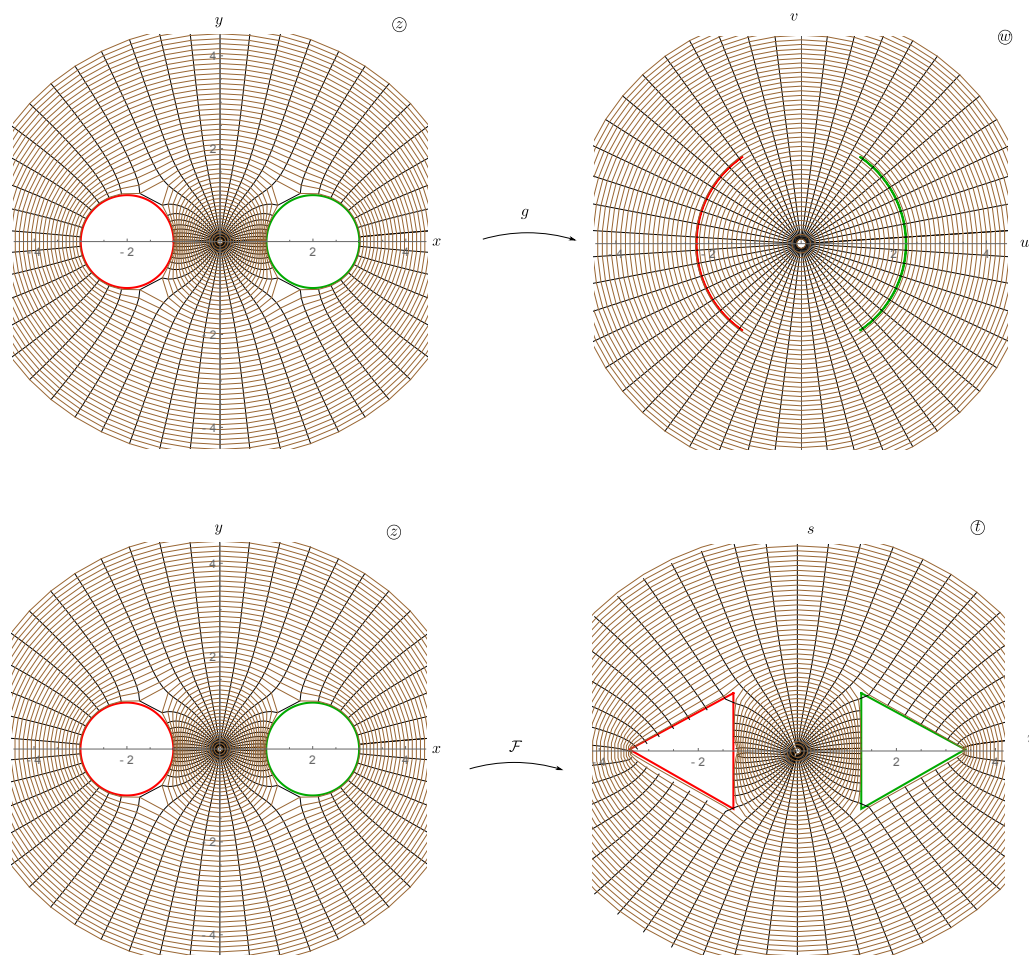


Obrázek C.9: Zobrazení 4-násobně souvislé oblasti. Zobrazení hladin z neohraničené circular slit domény na neohraničenou kruhovou doménu.

C.4 Neohraničená polygonální doména



Obrázek C.10: Zobrazení 3-násobně souvislé oblasti. Ortogonální systém křivek v oblasti ㉞ jsme získali jako vzory křivek v oblasti ㉠ pomocí funkce g . Systém křivek v oblasti ㉡ jsme získali následným zobrazením křivek z oblasti ㉞ pomocí funkce \mathcal{F} .



Obrázek C.11: Zobrazení 3-násobně souvislé oblasti. Ortogonální systém křivek v oblasti ㉔ jsme získali jako vzory křivek v oblasti ㉕ pomocí funkce g . Systém křivek v oblasti ㉖ jsme získali následným zobrazením křivek z oblasti ㉔ pomocí funkce F .

Příloha D

Ukázka zdrojových kódů

D.1 Zobrazení na ohraničenou radial slit doménu

```
Zdruz[z_] := Conjugate[z]
Slozky[f_] := {Re[f], Im[f]}

(*Reflexe dle kružnice Cp*)
Fi[z_, Cp_] := Zdruz[Zdruz[Cp[[1]]] + (Cp[[2]]*Cp[[2]])/(z - Cp[[1]])]

(*Reflexe dle multiindexu ny*)
fRo[z_, ny_] := Module[{nyLenght, out, CpNy, i},
  nyLenght = Length[ny];
  out = z;
  For[i = nyLenght, i >= 1, i--,
    CpNy = Cp[[ ny[[i]] + 1    ]];
    out = Fi[out, CpNy];
  ];
  Return[out]
]

(*Generuje multiindexy s hodnotami od 0 do maxCislo a určité délky *)
NyGen[maxCislo_, delka_] := Module[{out},
  RetezecNy = {};
  For[i = 1, i <= delka, i++,
    NyRek[maxCislo, i, -1, {}];
  ];
  out = RetezecNy;
  Return[out];
]

(* Generování samotných multiindexů *)
NyRek[maxCislo_, delka_, last_, podretezec_] :=
Module[{i, novyPodretezec},
  If[delka == 1,
    For[i = 0, i <= maxCislo, i++,
      If[i != last,
        RetezecNy = Append[RetezecNy, Append[podretezec, i]];
      ];
  ];
];
```

```

]
,
For[i = 0, i <= maxCislo, i++,
  If[i != last,
    novyPodretezec = Append[podretezec, i];
    NyRek[maxCislo, delka - 1, i, novyPodretezec];
  ];
];
]
]

(* Funkce zobrazující kružnice na přímku, a úsečky *)
fRad[z_, nyString_] := Module[{nyLenght, out, i},
  nyLenght = Length[nyString];
  out = 1;
  For[i = 1, i <= nyLenght, i++,
    If[nyString[[i, Length[nyString][[i]]]] != 0 ||
      Length[nyString[[i]]] == 1,
      out = out*(z - fRo[b, nyString[[i]]])/(z -
        fRo[a, nyString[[i]]]) ];
  ];
  Return[out];
]

(*Bod který se zobrazí na bod \[Infinity] *)
a = E^(Pi /2*I);
(*Bod který se zobrazí na bod 0 *)
b = E^(Pi *I);

(*Nastavení středů a poloměrů
*)s0 = 0;
r0 = 1;
s1 = 1/2;
r1 = 1/4;
s2 = -1/2 - 1/2 I;
r2 = 1/5;
Cp0 = {s0, r0};
Cp1 = {s1, r1};
Cp2 = {s2, r2};
Cp = {Cp0, Cp1, Cp2};

(* Zadání počtu reflexí*)
pocetRefl = 4;

C0 = Cp0[[2]] E^(I * t) + Cp0[[1]];
C1 = Cp1[[2]] E^(I * t) + Cp1[[1]];
C2 = Cp2[[2]] E^(I * t) + Cp2[[1]];
Show[
  ParametricPlot[Slozky[C0], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Green},
    PlotPoints -> 200],
  ParametricPlot[Slozky[C1], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Red},
    PlotPoints -> 200],
  ParametricPlot[Slozky[C2], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue},
    PlotPoints -> 200],

```

```

ListPlot[{Slozky[a], Slozky[b]}]
]

nyString = NyGen[Length[Cp] - 1, pocetRef1];
RadC0 = fRad[C0, nyString];
RadC1 = fRad[C1, nyString];
RadC2 = fRad[C2, nyString];
Show[
  ParametricPlot[Slozky[RadC0], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Green},
    PlotPoints -> 2000],
  ParametricPlot[Slozky[RadC1], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Red},
    PlotPoints -> 200],
  ParametricPlot[Slozky[RadC2], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue},
    PlotPoints -> 200],
  PlotRange -> 5
]

```

D.2 Zobrazení na neohraničenou circular slit doménu

(* Stejné funkce jako ve zdrojovém kódu, pro ohraničenou radial slit \ doménu *)

```
Zdruz[z_], Slozky[f_], SlozkySi[f_], RetezecNy, Fi[z_, Cp_], fRo[z_, \
ny_], NyRek[maxCislo_, delka_, last_, podretezec_]
```

(* Funkce zobrazující kružnice na oblouky *)

```
fCirc[z_, maxReflexi_] :=
Module[{pocetKruznic, i, j, k, out, ak, ck, nyStr, nyStrLeng, ny, ou,
  iter},
  pocetKruznic = Length[Cp];
  out = z - a;
  For[k = 1, k <= pocetKruznic, k++,

    ak = Fi[a, Cp[[k]] ];
    ck = Fi[ComplexInfinity, Cp[[k]] ];

    ou = ( (z - ck) ) / ( (z - ak) );
    out = out*ou;

  For[iter = 1, iter <= maxReflexi, iter = iter + 2,
    RetezecNy = {};
    NyRek[pocetKruznic - 1, iter, -1, {}];
    nyStr = RetezecNy;
    nyStrLeng = Length[nyStr];

    For[i = 1, i <= nyStrLeng, i++,
      ny = nyStr[[i]];
      If[ny[[ Length[ny] ]] != (k - 1),
        ou = ( (z - fRo[ak, ny]) ) / ( (z - fRo[ck, ny]) );
        out = ou*out;
      ];
    ];
  ];
];
```

```

For[iter = 2, iter <= maxReflexi, iter = iter + 2,
  RetezecNy = {};
  NyRek[pocetKruznic - 1, iter, -1, {}];
  nyStr = RetezecNy;
  nyStrLeng = Length[nyStr];

  For[i = 1, i <= nyStrLeng, i++,
    ny = nyStr[[i]];
    If[ny[[ Length[ny] ]] != (k - 1),
      ou = ( (z - fRo[ck, ny]) ) / ( (z - fRo[ak, ny]) );
      (*Print["uvnitř"];
      Print[ou];
      Print[N[ou/.{t\[Rule]3/2}]];*)
      out = ou*out;
    ];
  ];
];
Return[out]
]

(* Generování multiindexů liché délky *)
NyGenO[maxCislo_, delka_] := Module[{out, i},
  RetezecNy = {};
  For[i = 1, i <= delka, i = i + 2,
    NyRek[maxCislo, i, -1, {}];
  ];
  out = RetezecNy;
  Return[out]
]

(* Generování multiindexů sudé délky *)
NyGenE[maxCislo_, delka_] := Module[{out, i},
  RetezecNy = {};
  For[i = 2, i <= delka, i = i + 2,
    NyRek[maxCislo, i, -1, {}];
  ];
  out = RetezecNy;
  Return[out]
]

a = 0;
s0 = 3/2;
r0 = 1/2;
Cp0 = {s0, r0};
s1 = -3/2;
r1 = 1/2;
Cp1 = {s1, r1};
Cp = {Cp0, Cp1};
C0 = Cp0[[2]] E^(I * t) + Cp0[[1]];
C1 = Cp1[[2]] E^(I * t) + Cp1[[1]];

Show[

```



```
ParametricPlot[Slozky[C0], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue},  
  PlotPoints -> 200],  
ParametricPlot[Slozky[C1], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Red},  
  PlotPoints -> 200],  
ListPlot[{Slozky[a]}], PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0}  
]  
  
CirC0 = fCirc[C0, 2];  
CirC1 = fCirc[C1, 2];  
Show[  
  ParametricPlot[Slozky[CirC0], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue},  
    PlotPoints -> 200],  
  ParametricPlot[Slozky[CirC1], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Red},  
    PlotPoints -> 200],  
  ListPlot[{Slozky[a]}],  
  PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0}  
]
```


Použité značení

\mathbb{C}	množina všech konečných komplexních čísel
\mathbb{C}^*	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
\mathbb{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbb{R}	množina všech konečných reálných čísel
\mathbb{R}^2	kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\operatorname{Re} z$	reálná část komplexního čísla
$\operatorname{Im} z$	imaginární část komplexního čísla
\bar{z}	komplexně sdružené číslo k číslu z
\overline{M}	uzávěr množiny M
$\operatorname{Int} C$	vnitřek křivky C
∂M	hranice množiny M
$U(z_0)$	okolí bodu z_0
$u \circ v$	složení funkcí u a v
\mathbb{H}	$= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
\mathbb{D}	$= \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$
$[[x, y]]$	$= \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$
$]x, y[$	$= \{(1-t)x + ty : t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)\} \cup \{\infty\}$
(a, b)	$= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - otevřený interval
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - uzavřený interval