

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MATEMATIKY

## Bakalářská práce

Zobecněné úlohy na vlastní čísla  
s nelineárními okrajovými podmínkami

Plzeň, 2015

Martin KAISLER



PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 26.5.2015

.....

Martin KAISLER





## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. Ing. Gabriele HOLUBOVÉ, Ph.D. za zajímavý návrh tématu a čas, který mi věnovala nejen na mnoha konzultacích. Chci velmi ocenit její přístup k vedení bakalářské práce, ale i ke studentům vůbec.

Poděkování patří rovněž mé rodině a přítelkyni za jejich psychickou podporu.



### Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na studium nelokální nelineární okrajové úlohy s parametry ve tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = \lambda u, \quad u = u(x), x \in (0, \pi) \\ u(0) = 0, \\ \left( \int_0^\pi (u^+)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^\pi (u^-)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{array} \right.$$

Studujeme existenci a jednoznačnost prvního vlastního čísla zjednodušeného modelu, kdy uvažujeme  $p = 1$ , respektive  $q = 1$ .

Poté odvodíme rovnice, které popisují bodové spektrum této úlohy. Zavedením  $p = 1$ , respektive  $q = 1$  je znovu zjednodušíme a diskutujeme jejich řešitelnost.

**Klíčová slova:** vlastní čísla, okrajová úloha, nelokální okrajová úloha, Fučíkovo spektrum

### Abstract

This Bachelor thesis is devoted to study of a parameter dependent nonlocal nonlinear boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = \lambda u, \quad u = u(x), x \in (0, \pi) \\ u(0) = 0, \\ \left( \int_0^\pi (u^+)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^\pi (u^-)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{array} \right.$$

Our aim is to study the existence and uniqueness of the first eigenvalue of simplified model while we consider  $p = 1$  and  $q = 1$ , respectively.

We deduce equations that describe the point spectrum of this model. Afterthat, while considering  $p = 1$  and  $q = 1$ , respectively, we simplify these equations and discuss their solvability.

**Keywords:** eigenvalues, boundary value problem, nonlocal boundary value problem, the Fučík spectrum



<b>1 Přípravná část</b>	<b>5</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	5
<b>2 Diferenciální operátor</b>	<b>9</b>
<b>3 Známé úlohy na vlastní čísla</b>	<b>11</b>
3.1 Dirichletova okrajová úloha . . . . .	11
3.2 Nelokální okrajová úloha . . . . .	12
<b>4 Nelokální úloha s parametry</b>	<b>15</b>
4.1 První vlastní čísla . . . . .	21
4.1.1 Fixní parametr $q = 1$ . . . . .	22
4.1.2 Fixní parametr $p = 1$ . . . . .	28
4.2 Bodové spektrum nelokální úlohy s parametry . . . . .	33
4.2.1 Fixní parametr $q = 1$ . . . . .	38
4.2.2 Fixní parametr $p = 1$ . . . . .	40
4.3 Limitní chování vlastních čísel . . . . .	41
4.4 Některé další speciální případy parametrů . . . . .	42
<b>5 Fučíkovo spektrum</b>	<b>45</b>
5.1 Fučíkova úloha s Dirichletovou podmínkou . . . . .	46
5.2 Fučíkova nelokální úloha . . . . .	48
5.3 Kombinace předchozích úloh . . . . .	49
5.4 Fučíkova nelokální úloha s parametry . . . . .	50
<b>A Obrázky vyšších vlastních funkcí</b>	<b>51</b>
<b>B Limitní vlastní čísla</b>	<b>53</b>
<b>C Vztahy mezi funkcemi</b>	<b>55</b>



Při studiu obyčejných diferenciálních rovnic se lze vydat dvěma hlavními směry. Jeden z nich tvoří výzkum počátečních úloh a s ním spojená teorie dynamických systémů.

Druhou cestou, a také tou, kterou volíme v této práci, je studium okrajových úloh. Okrajová úloha může být zavedena nejrůznějšími způsoby, vždy se ale jedná o diferenciální rovnici, ke které jsou připojeny dodatečné podmínky na funkci, která diferenciální rovnici vyhovuje.

Můžeme požadovat, aby řešení úlohy splňovalo předepsané podmínky v předem daných bodech. Potom hovoříme o tzv.  $m$ -bodové okrajové úloze (z angl. multi-point boundary value problem). Takové úlohy nachází své uplatnění v mnoha reálných problémech.

Okrajovou úlohu lze ale zavést i jinak. Je možné upustit od „bodových“ okrajových podmínek a můžeme požadovat splnění nějaké podmínky na celé množině, kde takovou úlohu řešíme. To dává možnost vzniku tzv. nelokálních úloh, ve kterých vystupuje integrální podmínka. Předepisuje tedy, jak se řešení chová na celém intervalu.

Nelokální úlohy jsou z našeho pohledu poměrně málo studovanou oblastí, většina autorů se totiž soustředí spíše na  $m$ -bodové úlohy. Nelokální pak zůstávají v ústraní. V naší práci se budeme zabývat zobecněnou nelokální úlohou s parametry.

Práce je rozdělena do pěti kapitol následujícím způsobem:

V první kapitole zadefinujeme a připomeneme pojmy, které nemusí být obecně známé a pomohou čtenáři ve snazší orientaci textem.

V druhé kapitole poprvé seznámíme s úlohou, kterou se budeme zabývat. Podáme řešení diferenciální rovnice, která přísluší této úloze, a v dalších částech budeme na toto řešení odkazovat.

Třetí kapitola bude sloužit jako první úvod do problematiky Dirichletovy, respektive nelokální, úlohy. Uvedeme dva výsledky, které jsou sice známé a prozkoumané, ale budou představovat zajímavé propojení s úlohou, kterou

budeme studovat ve čtvrté kapitole.

V ní zavedeme zobecněnou nelokální úlohou s parametry, která bude z celkového pohledu nejdůležitější. Nejprve prozkoumáme první vlastní čísla takové úlohy, načež následně navážeme při studiu jejího bodového spektra. V této kapitole také uvedeme, jak se úloha chová pro speciální volbu parametrů, případně při limitních přechodech.

V poslední, tedy páté, kapitole nastíníme úvod do zajímavého zobecnění okrajových úloh – tzv. Fučíkova spektra, které se v poslední době stalo intenzivněji studovanou oblastí.



# KAPITOLA 1

## PŘÍPRAVNÁ ČÁST

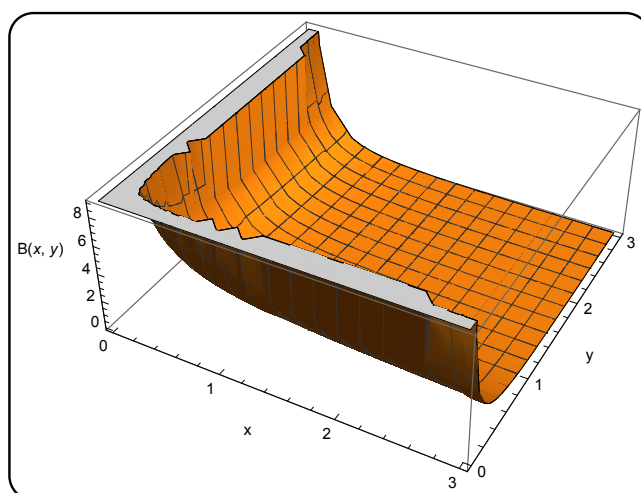
V některých částech dalšího textu budeme pracovat s pojmy, které nemusí být obecně známé. Tuto kapitolu tedy věnujeme zavedení potřebného teoretického aparátu.

### 1.1 Základní pojmy

**Definice 1.1** (Funkce Beta)

Nechť  $x, y > 0$  jsou reálné parametry. Funkci Beta definujeme předpisem

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta. \quad (1.1)$$



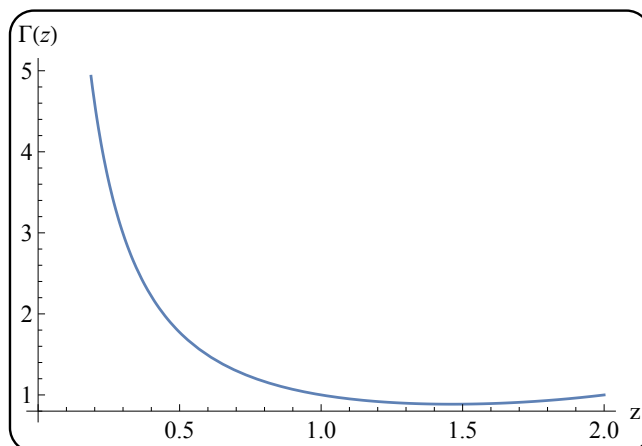
Obrázek 1.1: Funkce Beta

V některé literatuře bývá funkce Beta také označována jako tzv. Eulerův integrál prvního druhu.

**Definice 1.2** (Funkce Gamma)

Nechť  $z > 0$  je reálný parametr, potom funkci Gamma definujeme předpisem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$



Obrázek 1.2: Funkce Gamma

O funkci Gamma se také někdy hovoří jako o tzv. Eulerově integrálu druhého druhu. Její ilustraci uvádíme na obrázku 1.2.

**Poznámka 1.3** (O speciálních funkcích)

- i) *Obě definované funkce lze obecně zavést i pro komplexní parametry. Pro naše účely stačí, budeme-li uvažovat pouze reálné hodnoty.*
- ii) *Obě předchozí definice lze modifikovat zavedením vhodné substituce v příslušných integrálech.*

**Věta 1.4** (O rozvoji podílu funkcí Gamma)

Nechť  $z > 0$ . Potom

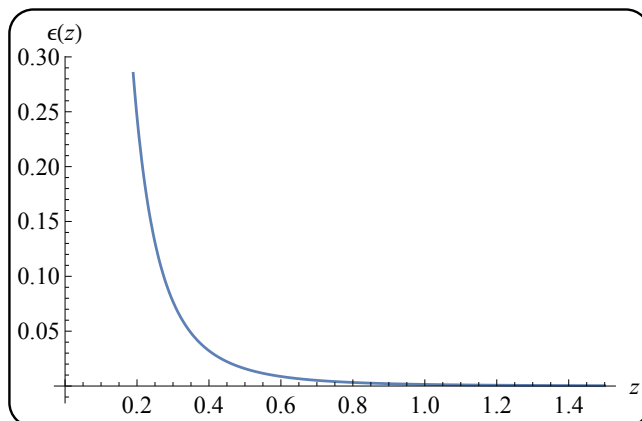
$$\frac{\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} = \sqrt{z} \left( 1 - \frac{1}{8z} + \frac{1}{128z^2} + \frac{5}{1024z^3} + \dots \right) \quad (1.3)$$

DŮKAZ. Viz. [2]. □

Na obrázku 1.3 je vykreslen rozdíl

$$\epsilon(z) = \left| \frac{\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} - \sqrt{z} \left( 1 - \frac{1}{8z} + \frac{1}{128z^2} + \frac{5}{1024z^3} \right) \right|,$$

který představuje chybu aproximace podílu funkcí Gamma rozvojem (1.3).



Obrázek 1.3: Chyba aproximace podílu funkcí Gamma.

**Lemma 1.5** (Vztah mezi funkcemi Beta a Gamma)

Nechť  $x, y > 0$ , potom pro funkce Gamma a Beta platí vztah

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.4)$$

DŮKAZ. Lze nalézt v [5]. □

**Lemma 1.6** (Vztah funkce Gamma a faktoriálu)

Nechť  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , potom lze psát

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (1.5)$$

DŮKAZ. Z definice (1.2) plyne

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Integrací per partes dostaneme

$$\Gamma(n+1) = [-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Výraz  $[-t^n e^{-t}]_0^{+\infty}$  je roven nule, neboť  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^n e^{-t} = 0$ . Využijeme-li znovu definici (1.2), dostaneme vztah

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n), \quad (1.6)$$

který je platný obecně pro  $n > 0$ .

Z (1.6) a rovnosti

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1,$$

lze pro  $n \in \mathbb{N}$  rekurzivně odvodit

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n!.\end{aligned}\tag{1.7}$$

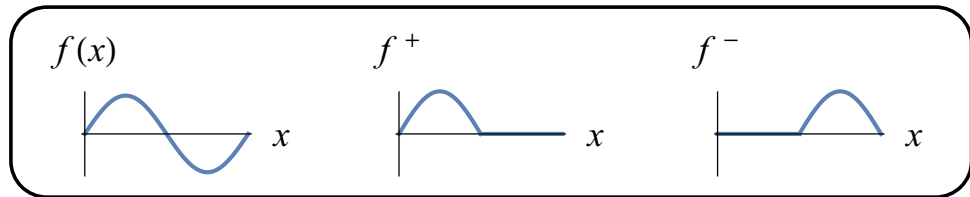
Vztah (1.5) je tedy dokázán.  $\square$

**Definice 1.7** (Kladná a záporná část funkce)

Nechť  $f(x)$  je reálná funkce a  $D(f)$  definiční obor této funkce. Potom kladnou, respektive zápornou část funkce  $f$  definujeme předpisem

$$f^\pm(x) := \max\{\pm f(x), 0\}, \quad \forall x \in D(f).\tag{1.8}$$

Ilustraci kladné a záporné části reálné funkce uvádíme na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Funkce s její kladnou a zápornou částí.

**Definice 1.8** (Vlastní číslo diferenciálního operátoru)

Nechť  $L$  je diferenciální operátor. Potom vlastním číslem operátoru  $L$  rozumíme takovou hodnotu  $\lambda$ , pro kterou existuje netriviální řešení rovnice

$$Lu = \lambda u.\tag{1.9}$$

**Definice 1.9** (Vlastní funkce diferenciálního operátoru)

Nechť  $L$  je diferenciální operátor a  $\lambda$  jeho vlastní číslo. Potom nenulovou funkci  $u$ , která řeší rovnici (1.9), nazveme vlastní funkcí operátoru  $L$  příslušnou vlastnímu číslu  $\lambda$ .

**Definice 1.10** (Bodové spektrum)

Množinu všech vlastních čísel operátoru  $L$  budeme nazývat bodovým spektrem operátoru  $L$ .

## KAPITOLA 2

# DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTOR

Definujme obyčejný diferenciální operátor  $L$  předpisem

$$\begin{aligned} Lu &:= -u'', \\ D(L) &:= \{u \in C^2((0, \pi)) \cap C([0, \pi]) : u(0) = 0\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Úloha, kterou se budeme zabývat, má v operátorovém zápisu tvar

$$Lu = \lambda u, \quad u = u(x). \quad (2.2)$$

Řešením této úlohy budeme rozumět klasické řešení, tedy takovou funkci  $u$ , která splňuje rovnici (2.2) bodově pro všechna  $x \in (0, \pi)$  a navíc vyhovuje okrajové podmínce v (2.1). Druhou okrajovou podmínku budeme postupně modifikovat.

Nalezněme tedy nejprve řešení úlohy (2.2). Hledejme obecné řešení diferenciální rovnice

$$u'' + \lambda u = 0, \quad (2.3)$$

které očekáváme ve tvaru

$$u(x) = e^{\alpha x}. \quad (2.4)$$

Po dosazení do (2.3) dostáváme po vydělení nenulovým výrazem  $e^{\alpha x}$  charakteristickou rovnici závislou na parametru  $\lambda$  ve tvaru

$$\alpha^2 + \lambda = 0. \quad (2.5)$$

Nyní bude nutné rozlišit tři případy.

1.  $\lambda = 0$  :

Pro nulovou hodnotu parametru  $\lambda$  bude mít charakteristická rovnice

dvojnásobný nulový kořen, fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (2.3) tvoří funkce 1,  $x$  a obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(x) = c_1 x + c_2, \quad (2.6)$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

2.  $\lambda > 0$  :

Pokud  $\lambda$  nabývá pouze kladných hodnot, charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny  $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$  a reálný fundamentální systém řešení tvoří funkce  $\sin \sqrt{\lambda}x$  a  $\cos \sqrt{\lambda}x$ . Obecné řešení lze pak zapsat ve tvaru

$$u(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x, \quad (2.7)$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

3.  $\lambda < 0$  :

Pro záporné hodnoty parametru  $\lambda$  má charakteristická rovnice dva reálné kořeny  $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ , fundamentální systém řešení tvoří funkce  $e^{\sqrt{-\lambda}x}$  a  $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Funkce

$$u(x) = k_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + k_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

kde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , potom řeší rovnici (2.3) pro  $\lambda < 0$ .

Funkci  $u$  lze s využitím exponenciálních definic hyperbolických funkcí přepsat do tvaru

$$u(x) = c_1 \sinh \sqrt{-\lambda}x + c_2 \cosh \sqrt{-\lambda}x, \quad (2.8)$$

kde jsme zvolili

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{c_1 + c_2}{2}, \\ k_2 &= \frac{c_2 - c_1}{2}, \end{aligned}$$

a  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Zabývejme se nyní požadavkem  $u(0) = 0$  v definici operátoru  $L$ . Opět je nutné postupovat v závislosti na parametru  $\lambda$ . Postupným dosazením tohoto požadavku do (2.6), (2.7) a (2.8) zjistíme, že konstanta  $c_2$  musí být nulová ve všech studovaných případech a řešení úlohy (2.2) má tvar

$$u(x) = \begin{cases} c_1 x & \text{pro } \lambda = 0, \\ c_1 \sin \sqrt{\lambda}x & \text{pro } \lambda > 0, \\ c_1 \sinh \sqrt{-\lambda}x & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

kde  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

## KAPITOLA 3

### ZNÁMÉ ÚLOHY NA VLASTNÍ ČÍSLA

V této sekci uvedeme úlohy na vlastní čísla, jejichž bodové spektrum je již známé. Ukazuje se, že úloha, kterou se budeme zabývat dále, sdílí řadu zajímavých vlastností právě s těmito prozkoumanými úlohami. Příslušné věty uvádíme pro úplnost i s patřičnými důkazy.

#### 3.1 Dirichletova okrajová úloha

První úlohou, které je dobré věnovat zvláštní pozornost, je okrajová úloha Dirichletova typu, tedy

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, \\ u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde  $L$  je operátor definovaný v (2.1). Ze znalosti obecného řešení úlohy (2.2), které jsme uvedli v kapitole 2, je možné snadno určit vlastní čísla a k nim příslušné vlastní funkce úlohy (3.1).

**Věta 3.1** (O bodovém spektru Dirichletovy úlohy)

*Vlastní čísla Dirichletovy okrajové úlohy (3.1) tvoří rostoucí posloupnost  $\lambda_n = n^2$ . K nim příslušné vlastní funkce mají tvar  $u_n(x) = c_n \sin nx$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .*

DŮKAZ. Řešení úlohy (2.2) má tvar

$$u(x) = \begin{cases} c_1 x & \text{pro } \lambda = 0, \\ c_1 \sin \sqrt{\lambda} x & \text{pro } \lambda > 0, \\ c_1 \sinh \sqrt{-\lambda} x & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases}$$

kde  $c_1 \in \mathbb{R}$ . V závislosti na parametru  $\lambda$  dostáváme tedy tři kvalitativně odlišné funkce a situace se rozpadne na tři případy. Budeme zkoumat chování těchto funkcí v bodě  $\pi$ .

1.  $\lambda = 0$  :

Pokud je parametr  $\lambda$  nulový, řešením úlohy (2.2) je funkce  $u(x) = c_1 x$  a přímým dosazením podmínky  $u(\pi) = 0$  zjistíme, že úloha má pouze triviální řešení a  $\lambda = 0$  není vlastní číslo.

2.  $\lambda < 0$  :

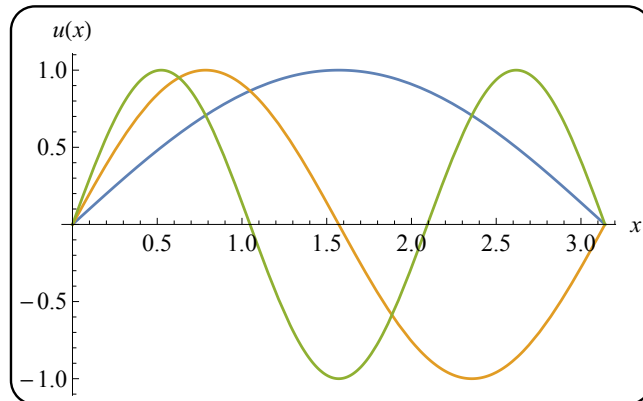
Pro záporné hodnoty  $\lambda$  je řešením funkce  $u(x) = c_1 \sinh \sqrt{-\lambda} x$ . Hodnota funkce  $u$  v bodě  $\pi$  je  $u(\pi) = c_1 \sinh \sqrt{-\lambda} \pi \neq 0$  pro  $c_1 \neq 0$  a zřejmě ani pro tento případ neexistuje netriviální řešení.

3.  $\lambda > 0$  :

Pro  $\lambda > 0$  řeší úlohu (2.2) funkce  $u(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x$ .

Potom  $u(\pi) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ . Požadujeme netriviální řešení, tedy konstanta  $c_1$  musí být nutně nenulová a musí být  $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ , což má řešení jen pro hodnoty  $\lambda = n^2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a tvrzení je dokázáno.

□



Obrázek 3.1: První tři vlastní funkce Dirichletovy úlohy (3.1).

## 3.2 Nelokální okrajová úloha

Další, do jisté míry standardní, úlohou na vlastní čísla je nelokální okrajová úloha. Tuto úlohu později zobecníme zavedením nezávislých parametrů  $p, q$ , proto je zajímavé sledovat a porovnat kvalitativní změnu obou bodových spekter.

Uvažujme tedy úlohu typu

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, \\ \int_0^\pi u \, dx = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$



kde  $L$  je operátor definovaný v (2.1).

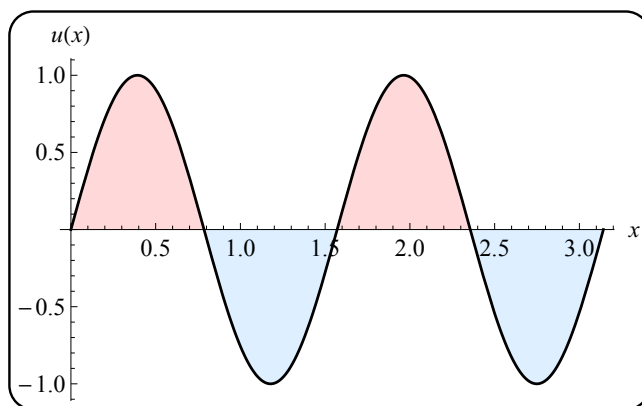
Má smysl se zabývat takto formulovanou úlohou, neboť z definice operátoru  $L$  plyne, že  $u \in C^2(0, \pi)$ , tj. funkce  $u$  je spojitá pro  $x \in (0, \pi)$  a tedy také integrovatelná.

**Poznámka 3.2** (O ekvivalentním zápisu integrální podmínky)

Rozdělíme-li funkci  $u$  na kladnou a zápornou část, lze integrální podmínku úlohy (3.2) jako

$$\int_0^\pi u^+ dx = \int_0^\pi u^- dx.$$

Geometrická interpretace této integrální podmínky je nasnadě – jedná se o obsah plochy, kterou vymezuje kladná (červeně), respektive záporná (modře) část řešení.



Obrázek 3.2: Ilustrace integrální podmínky.

Informaci o bodovém spektru této úlohy poskytne následující věta.

**Věta 3.3** (O bodovém spektru nelokální úlohy)

Vlastní čísla nelokální úlohy tvoří rostoucí posloupnost  $\lambda_n = 4n^2$ . K nim příslušné vlastní funkce mají tvar  $u_n(x) = c_n \sin 2nx$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .

DŮKAZ. Vyjdeme opět ze znalosti obecného řešení úlohy (2.2), tedy

$$u(x) = \begin{cases} c_1 x, & \text{pro } \lambda = 0, \\ c_1 \sin \sqrt{\lambda} x & \text{pro } \lambda > 0, \\ c_1 \sinh \sqrt{-\lambda} x & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases}$$

kde  $c_1 \in \mathbb{R}$  a provedeme analogickou diskuzi jako v případě úlohy s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

1.  $\lambda = 0$  :

Pro hodnotu  $\lambda = 0$  je  $u(x) = c_1 x$ . Potom zřejmě

$$\int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2} \neq 0$$

a integrální podmínku úlohy (3.2) splníme pouze volbou  $c_1 = 0$ . Hodnota  $\lambda = 0$  tedy není vlastním číslem.

2.  $\lambda < 0$  :

Uvažujeme-li záporné hodnoty parametru, potom má funkce  $u$  tvar  $u(x) = c_1 \sinh \sqrt{-\lambda}x$ . Dále

$$\int_0^\pi \sinh \sqrt{-\lambda}x > 0,$$

neboť  $\sinh \sqrt{-\lambda}x > 0$  pro  $x \in (0, \pi)$  a je zřejmé, že pouze volba  $c_1 = 0$  zajistí splnění integrální podmínky. To ale znamená, že dostáváme triviální řešení a hodnoty  $\lambda < 0$  nejsou vlastními čísly příslušné úlohy.

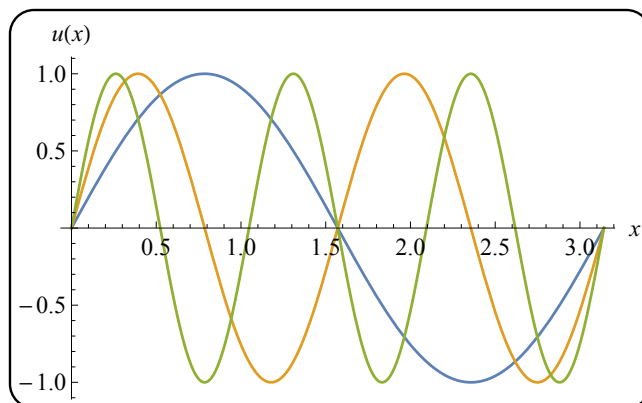
3.  $\lambda > 0$  :

Nyní  $u(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x$ . Z integrální podmínky dostáváme

$$\int_0^\pi \sin \sqrt{\lambda}x \, dx = \frac{1 - \cos \pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0. \quad (3.3)$$

Hledání vlastních čísel úlohy (3.2) je tedy převedeno na hledání řešení rovnice (3.3). Této rovnici zřejmě vyhovují hodnoty  $\lambda_n = 4n^2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a příslušné vlastní funkce mají tvar  $u_n(x) = c_n \sin 2nx$ , kde  $c_n \in \mathbb{R}$ .

□



Obrázek 3.3: První tři vlastní funkce nelokální úlohy (3.2)

## KAPITOLA 4

### NELOKÁLNÍ ÚLOHA S PARAMETRY

V této kapitole představíme novou úlohu, která, jak uvidíme dále, přinese zajímavý vztah k úlohám již zmíněným a bude umožňovat napojení na další partie matematiky. Po zbytek práce se budeme zabývat touto úlohou, případně její drobnou modifikací.

Nechť  $p, q \geq 1$  a definujme novou úlohu předpisem

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, \\ \|u^+\|_{L^p} = \|u^-\|_{L^q}, \end{cases} \quad (4.1)$$

kde  $L$  je operátor zavedený v (2.1),  $u^\pm$  je kladná, respektive záporná část funkce  $u$  a

$$\|\cdot\|_{L^p} := \left( \int_0^\pi |\cdot|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.2)$$

Předpisem (4.2) lze obecně definovat normu na tzv. Lebesgueových prostorech na intervalu  $(0, \pi)$ , tedy podmínkou (4.1) dostáváme zajímavé propojení s funkcionální analýzou. Tyto prostory hrají důležitou roli jak v teoretické funkcionální analýze, tak při řešení řady reálných problémů z oblasti např. diferenciálních rovnic.

**Poznámka 4.1** (O metrických prostorech)

*Lebesgueovy prostory na obecném intervalu  $(a, b)$  obvykle značíme  $L^p(a, b)$ . Tyto prostory jsou Banachovy pro libovolné  $p \in [1, +\infty)$ , pro  $p = 2$  jde dokonce o Hilbertův prostor.*

Úlohu (4.1) můžeme chápat jako zobecnění nelokální úlohy (3.2), kterou dostaneme speciální volbou parametrů  $p = q = 1$ . Informaci o bodovém spektru tohoto speciálního případu jsme poskytli v sekci 3.2.

Nyní zavedeme další úlohu, která bude mít tvar

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, \\ \left( \int_0^\pi (u^+)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^\pi (u^-)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{cases} \quad (4.3)$$

kde  $L$  je operátor definovaný v (2.1) a  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Tato úloha je ekvivalentní s (4.1), ale navíc umožňuje studovat i  $p, q \notin [1, \infty)$ , což se jeví velmi zajímavě a po zbytek práce se budeme zabývat touto úlohou.

Dalším důvodem (kromě již zmíněné souvislosti s Lebesgueovými prostory), proč se pokoušet takto formulovanou úlohu řešit, může být zajímavá vlastnost, která plyne z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Uvažujme zcela libovolnou lineární diferenciální rovnici. Ze zmíněné teorie víme, že tyto rovnice „přenáší“ na svá řešení následující užitečné vlastnosti.

- (i) Nechť funkce  $u$  a  $v$  jsou řešením lineární diferenciální rovnice. Potom jejich součet je také řešením této rovnice.
- (ii) Nechť funkce  $u$  řeší lineární diferenciální rovnici. Potom také libovolný reálný násobek funkce  $u$  řeší tuto rovnici.

Úloha (4.3) je bez integrální podmínky poměrně snadno řešitelná. Ovšem v kombinaci s nelineární integrální podmínkou dostáváme obecně nelineární úlohu, což se projeví, budeme-li se zabývat otázkou řešitelnosti, respektive vlastnostmi (i), (ii) výše. Vlastnost (i) zřejmě nemůže být splněna. Vlastnost (ii) splníme, budeme-li uvažovat pouze taková řešení, kde multiplikační konstanta je kladné číslo, což plyne z tzv. pozitivní homogenity úlohy.

Věnujme se nyní řešitelnosti úlohy (4.3) v závislosti na parametru  $\lambda$ . Nejprve se omezíme na hodnoty tohoto parametru, pro které má smysl hledat netriviální řešení.

**Věta 4.2** (O nepřipustných hodnotách parametru  $\lambda$ )

*Nechť  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Je-li  $\lambda \leq 0$ , potom má úloha (4.3) pouze triviální řešení.*

**DŮKAZ.** Důkaz založíme na diskuzi o splnění podmínek v úloze (4.3) pro různé hodnoty parametru  $\lambda$ . Využijeme řešení uvedené v (2.9).

1.  $\lambda = 0$  :

Z (2.9) plyne  $u(x) = c_1 x$ , kde  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Dále rozlišme různé hodnoty konstanty  $c_1$ . Pokud  $c_1 > 0$ , potom zřejmě  $u(x) = (c_1 x)^p > 0$  pro  $x \in (0, \pi)$  a pro všechna  $p$ , tj.  $u^- \equiv 0$ , tedy v integrální podmínce úlohy (4.3) dostáváme požadavek

$$\left( \int_0^\pi (c_1 x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0, \quad (4.4)$$

což z nezápornosti integrandu nemůže nastat. Analogickým způsobem postupujeme, pokud uvažujeme  $c_1 < 0$ . V tomto případě bychom pouze zaměnili roli kladné a záporné části funkce  $u$ . Integrální podmínku tedy splníme pouze volbou  $c_1 = 0$  a  $\lambda = 0$  není vlastním číslem úlohy (4.3).

2.  $\lambda < 0$  :

Z obecného řešení (2.9) dostáváme pro tuto volbu parametru  $\lambda$  funkci  $u(x) = c_1 \sinh \sqrt{-\lambda}x$ , kde  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Uvažujme nejprve hodnoty  $c_1 > 0$ . Potom funkce  $(c_1 \sinh \sqrt{-\lambda}x)^p$  je nezáporná na intervalu  $(0, \pi)$  pro  $p \in \mathbb{R}$ , což znamená, že záporná část bude identicky nulová na tomto intervalu a dojdeme ke stejnému závěru, jako v předchozím případě. Pro případ  $c_1 < 0$  postupujeme analogicky a tedy záporné hodnoty parametru  $\lambda$  nejsou vlastními čísly příslušné úlohy.

□

Z věty 4.2 tedy plyne, že má smysl studovat pouze kladné hodnoty parametru  $\lambda$ . Z kapitoly 2 dále víme, že vlastní funkce, které jsou příslušné kladným hodnotám  $\lambda$ , mají tvar  $u(x) = c \sin \sqrt{\lambda}x$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ . Pro další potřeby ještě označme nulové body této funkce – jsou to body  $x_n := n\pi/\sqrt{\lambda}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .

Další zajímavé propojení se ukazuje ve vztahu integrální podmínky s funkcí Gamma, které využijeme v dalším textu.

**Lemma 4.3** (Vztah integrální podmínky úlohy (4.3) s funkcí Gamma)  
Nechť  $p > -1$ , potom

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(\frac{p}{2} + 1)} \quad (4.5)$$

**DŮKAZ.** Upravme nejprve integrál na levé straně vztahu (4.5). Zavedením substituce  $z = \sqrt{\lambda}x$  dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} |\sin z|^p dz.$$

Absolutní hodnotu dále vynecháme, neboť funkce  $\sin x$  je pro  $x \in (0, \pi)$  kladná. Uvědomíme-li si nyní, že funkce  $(\sin z)^p$  jsou pro  $p \in \mathbb{R}$  na intervalu  $[0, \pi]$  symetrické podle přímky  $z = \frac{\pi}{2}$ , lze psát

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} (\sin z)^p dz = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^p dz.$$

Protože platí

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^p dz = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^{2\frac{p+1}{2}-1} (\cos z)^{2\frac{1}{2}-1} dz,$$

lze pro  $p > -1$  s využitím definice 1.1 a lemmatu 1.5 psát

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(\frac{p}{2} + 1)}.$$

Dokažme ještě na závěr, že  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Přímým dosazením do definice funkce Gamma dostaneme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Pokud integrand na pravé straně upravíme substitucí  $u = \sqrt{t}$ , dostaneme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

což je tzv. Gaussův integrál, jehož hodnota  $\sqrt{\pi}$  je známá, a důkaz je hotov.  $\square$

Ukazuje se, že integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} |\sin z|^p dz,$$

kde na pravé straně jsme zavedli substituci  $z = \sqrt{\lambda}x$ , se pro některé hodnoty  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  chová problematicky. Uvedeme nyní dvě lemmata, která objasní, jaké parametry způsobují potíže.

**Lemma 4.4** (O divergenci integrálu)

*Nechť  $p \leq -1$  a  $\xi \in (0, \pi]$ . Potom*

$$\int_0^{\xi} |\sin z|^p dz = +\infty. \quad (4.6)$$

**DŮKAZ.** Integrand ve (4.6) lze pro  $p \leq -1$  upravit s využitím identity

$$|\sin z|^p = \frac{1}{|\sin z|^{|p|}} = |\csc z|^{|p|}. \quad (4.7)$$

Pro  $|p| \geq 1$  platí

$$\csc z \leq (\csc z)^{|p|},$$

kde jsme vynechali absolutní hodnotu, neboť funkce  $\csc z$  je na intervalu  $(0, \pi)$  kladná. Po integraci této nerovnosti dostaneme

$$\int_0^{\xi} \csc z dz \leq \int_0^{\xi} (\csc z)^{|p|} dz. \quad (4.8)$$

Ukažme nyní přímým výpočtem, že levá strana nerovnosti (4.8) není konvergentní. Pokud provedeme substituci  $t = \cos z$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \csc z \, dz &= \int_0^\xi \frac{\sin z}{1 - \cos^2 z} \, dz = - \int_1^{\cos \xi} \frac{dt}{1 - t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln |1 - t| - \ln |1 + t| \right]_1^{\cos \xi} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln |1 - \cos \xi| - \ln |1 + \cos \xi| - \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln a + \ln 2 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pokud  $\xi \neq \pi$  dostaneme v (4.9)

$$\frac{1}{2} \left( C - \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln a \right) = +\infty, \quad (4.10)$$

kde  $C$  je konečné číslo. V případě  $\xi = \pi$  dostáváme

$$\int_0^\pi \csc z \, dz = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc z \, dz = +\infty. \quad (4.11)$$

S využitím (4.8) a srovnávacího kritéria tedy rozhodneme o divergenci integrálu v (4.6).  $\square$

**Lemma 4.5** (O konvergenci integrálu)

Nechť  $p \in (-1, 0)$  a  $\xi \in (0, \pi]$ . Potom integrál

$$\int_0^\xi |\sin z|^p \, dz \quad (4.12)$$

konverguje.

DŮKAZ. Integrál je možné aproximovat výrazem

$$\int_0^\xi (\sin z)^p \, dz \approx \left( \int_0^\epsilon z^p \, dz + \int_\epsilon^\xi (\sin z)^p \, dz \right), \quad (4.13)$$

kde  $\epsilon > 0$  je voleno tak, aby chyba linearizace integrandu na okolí nuly byla minimální.

Je dále

$$\int_0^\epsilon z^p \, dz = \left[ \frac{z^{p+1}}{p+1} \right]_0^\epsilon,$$

což je pro  $p \in (-1, 0)$  konečné.

Je-li  $\xi \neq \pi$ , potom

$$\int_\epsilon^\xi (\sin z)^p \, dz = \int_\epsilon^\xi (\csc z)^{|p|} \, dz,$$

je také konečný, neboť integrační meze neobsahují singulární bod. Je-li  $\xi = \pi$ , potom z vlastností funkce sinus plyne rovnost

$$\int_0^{\pi} (\sin z)^p dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^p dz$$

a vzhledem k předchozímu i tento integrál konverguje. □



## 4.1 První vlastní čísla

Vzhledem ke komplikovanosti integrální podmínky v úloze (4.3) není možné při konstrukci bodového spektra postupovat vždy zcela obecně, tj. bude nutné specifikovat hodnoty parametrů  $p, q$ , kterými se zabýváme. Ukazuje se ovšem, že ani toto zjednodušení nemusí být vždy dostačující. Budeme se tedy nejprve zabývat hledáním prvních vlastních čísel úlohy (4.3).

Vzhledem k tomu, že tato úloha není klasickou Sturm-Liouvilleovou úlohou, není předem jisté, zda vlastní čísla vůbec existují. Předpokládejme tedy, že vlastní čísla existují.

Proveďme ještě jistou změnu v očíslování těchto vlastních čísel. Vlastním číslem  $\lambda_i$  s indexem  $i$  budeme rozumět to, že vlastní funkce  $u_i$ , která přísluší tomuto vlastnímu číslu, má na intervalu  $(0, \pi]$  právě  $i$  nulových bodů.

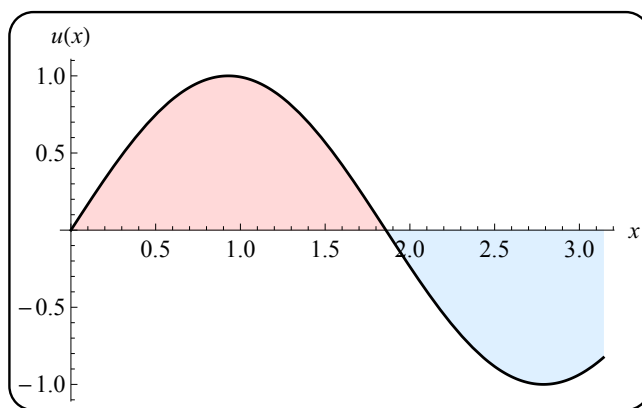
Tedy, hledáme-li první vlastní číslo a uvážíme-li, že vlastní funkce úlohy (4.3) mají, jak již bylo zmíněno výše, tvar  $u(x) = c \sin \sqrt{\lambda}x$ , potom tuto úlohu musíme řešit pro  $\lambda$  z intervalu  $[1, 4)$ , neboť jen pro tyto hodnoty má funkce  $u$  právě jeden nulový bod pro  $x \in (0, \pi]$ . Hodnotu  $\lambda = 1$  musíme dodatečně vyloučit, protože v tomto případě by v první vlastní funkci chyběla záporná část.

Podmínka pro první vlastní číslo v úloze (4.3) tedy nabude tvaru

$$\left( \int_0^{x_1} (\sin \sqrt{\lambda}x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{x_1}^{\pi} (\sin \sqrt{\lambda}x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.14)$$

kde  $x_1 = \pi/\sqrt{\lambda}$  je první nulový bod vlastní funkce.

Vlastní funkci, příslušnou prvnímu vlastnímu číslu, pro pevné parametry  $p = 10, q = 1$  uvádíme pro ilustraci na následujícím obrázku.



Obrázek 4.1: Vlastní funkce příslušná prvnímu vlastnímu číslu pro hodnoty  $p = 10, q = 1$ .

### Poznámka 4.6 (O symetrii)

V dalším textu budeme provádět konstrukci bodového spektra pro případ, kdy

má vlastní funkce kladnou derivaci v počátku, tj. platí  $c > 0$ . Pro případ záporné derivace by se postupovalo analogicky. Získané výsledky by byly symetricky „převrácené“.

#### 4.1.1 Fixní parametr $q = 1$

Jak jsme již naznačili, zvolíme konkrétní hodnoty parametrů, kterými se budeme zabývat. Uvažujme tedy nejprve fixní parametr  $q = 1$  a převedme úlohu na vlastní čísla na problém řešení transcendentních rovnic.

**Lemma 4.7** (O ekvivalentní úloze pro  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $q = 1$ )

Nechť  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  a  $q = 1$ . Potom existence prvního vlastního čísla (4.3) je ekvivalentní existenci řešení rovnice

$$f(y, p) = g(y) \quad \text{pro } y \in (1, 2), \quad (4.15)$$

kde jsme označili

$$f(y, p) := \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{p-1}{p}},$$

$$g(y) := \cos \pi y + 1.$$

Pokud je  $p > -1$ , lze funkci  $f(y, p)$  přepsat na

$$f(y, p) = C_p \cdot y^{\frac{p-1}{p}}, \quad (4.16)$$

kde

$$C_p := \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.17)$$

**DŮKAZ.** Rovnice (4.15) plyne triviálně po dosazení  $q = 1$  do integrální podmínky (4.14), zavedení substituce  $z = \sqrt{\lambda}x$  a integraci pravé strany. Následně jsme ještě přeznačili  $y = \sqrt{\lambda}$ . Rovnici (4.16) dostaneme na základě lemmatu 4.3.  $\square$

Vlastnosti funkce  $f(y, p)$  se budou v závislosti na parametru  $p$  měnit. Průběh funkce  $g(y)$  ale pro pozdější použití vyšetřeme již nyní.

Pro  $y \in (1, 2)$  máme

$$g'(y) = -\pi \sin \pi y > 0,$$

$$g''(y) = -\pi^2 \cos \pi y,$$

z čehož plyne, že funkce  $g(y)$  je ostře rostoucí, neboť její první derivace je kladná pro všechna  $y \in (1, 2)$ . Je ostře konvexní pro  $y \in (1, 3/2)$ , protože druhá derivace je zde kladná a ostře konkávní pro  $y \in (3/2, 2)$  – druhá derivace je zde záporná. Hodnota  $3/2$  je tedy inflexním bodem funkce  $g(y)$ .

Dále se již věnujme konkrétním hodnotám parametru  $p$ . Ukazuje se totiž další zajímavá vlastnost úlohy (4.3) – pro  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = 1$  není možné vyjádřit spojitou závislost změny prvního vlastního čísla na změně parametru  $p$ . Pro některé hodnoty  $p$  ztrácíme řešitelnost úlohy na první vlastní číslo a pro jiné se vlastní čísla objeví nespojitým „skokem“.

**Věta 4.8** (O neřešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p \leq -1, q = 1$ )  
*Nechť  $p \leq -1$ , potom neexistuje řešení rovnice (4.15).*

DŮKAZ. Využijeme-li lemma 4.4 dostaneme v (4.15)

$$\left( \frac{1}{+\infty} \right)^{\frac{1}{|p|}} = 0 = \cos \pi y + 1, \quad (4.18)$$

což zřejmě nemá pro  $y \in (1, 2)$  řešení. Z ekvivalence obou úloh tedy neexistuje první vlastní číslo.  $\square$

Řešitelnost se objeví počínaje hodnotou  $p > -1$ . Pro  $p \in (-1, 0)$  je integrál ve funkci  $f(y, p)$  konvergentní, jak lze nahlédnout z lemmatu 4.5. Nemůže tedy nastat situace podobná té předchozí.

**Věta 4.9** (O řešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p \in (-1, 0), q = 1$ )  
*Nechť  $p \in (-1, 0)$ . Potom existuje jednoznačné řešení rovnice (4.15).*

DŮKAZ. Vyšetřujeme řešitelnost rovnice (4.15), kterou ale v tomto případě pro usnadnění upravme na tvar

$$h(y, p) = v(y, p), \quad y \in (1, 2), \quad (4.19)$$

kde jsme označili

$$h(y, p) := \int_0^\pi |\sin z|^p dz \cdot y^{p-1},$$

$$v(y, p) := (\cos \pi y + 1)^p.$$

Pro  $p \in (-1, 0)$  je  $(\sin z)^p \geq 1$  a pro krajní body intervalu  $(1, 2)$  platí

$$h(1, p) = \int_0^\pi |\sin z|^p dz < +\infty = \lim_{y \rightarrow 1^+} v(y, p),$$

$$h(2, p) = 2^{p-1} \int_0^\pi |\sin z|^p dz > 2^{p-1} \int_0^\pi z^p dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\pi)^p}{p+1} >$$

$$\min_{p \in (-1, 0)} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\pi)^p}{p+1} > 1 > 2^p = v(2, p),$$

kde první řádek plyne opět z toho, že příslušný integrál konverguje (viz lemma 4.5) a druhý odhad z linearizace funkce sinus jejím argumentem.

Vyšetřeme chování funkce  $v(y, p)$ . Pro její první derivaci platí

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\pi p \sin \pi y (\cos \pi y + 1)^{p-1} < 0,$$

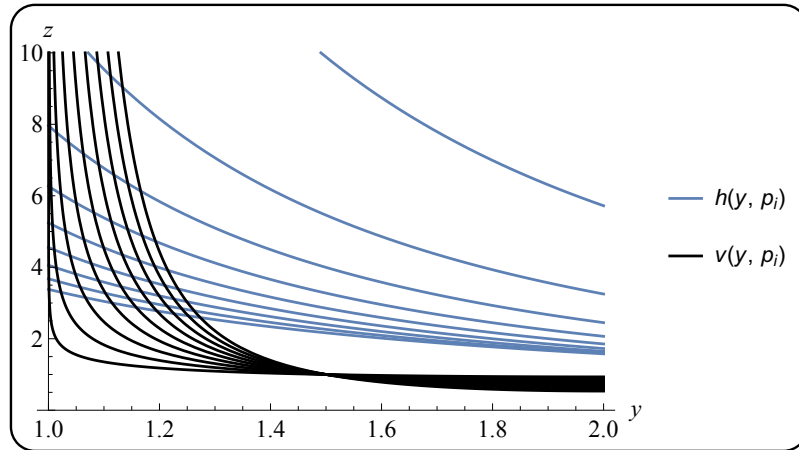
což plyne z toho, že  $\cos \pi y + 1 > 0$  a  $-\pi p \sin \pi y < 0$  pro  $y \in (1, 2)$ . Druhá derivace je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -p \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi y (\cos \pi y + 1)^{p-1} + \\ &\quad (p-1) \cdot p \cdot \pi^2 (\cos \pi y + 1)^{p-2} (\sin \pi y)^2 = \\ &\quad \left( -p \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi y + (p-1) \cdot p \cdot \pi^2 \frac{(\sin \pi y)^2}{\cos \pi y + 1} \right) (\cos \pi y + 1)^{p-1} = \\ &\quad \left( -p \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi y + (p-1) \cdot p \cdot \pi^2 (1 - \cos \pi y) \right) (\cos \pi y + 1)^{p-1} = \\ &\quad \left( p^2 \cdot \pi^2 \cdot \left( 1 - \cos \pi y - \frac{1}{p} \right) \right) (\cos \pi y + 1)^{p-1} > 0, \end{aligned}$$

a tedy funkce  $v(y, p)$  je ostře klesající a konvexní v proměnné  $y$ .

Funkce  $h(y, p)$  je v  $y$  mocninná, její exponent náleží intervalu  $(-2, -1)$ .

Máme tedy dvě funkce, obě ostře klesající a konvexní. Pro pevné  $p$  se  $v(y, p)$  na okolí bodu  $y = 1$  blíží nekonečnu,  $h(y, p)$  je zde konečná. U bodu  $y = 2$  jsou jejich funkční hodnoty opačně uspořádané – funkce  $v(y, p)$  je nad funkcí  $h(y, p)$ . Na intervalu  $(1, 2)$  tedy existuje řešení rovnice (4.19). Z detailního vyšetřování monotonie plyne dokonce jednoznačnost řešení.  $\square$



Obrázek 4.2: Ilustrace důkazu věty 4.9 pro některé hodnoty  $p \in (-1, 0)$ .

Pro hodnoty  $p \in (0, 1]$  ale řešitelnost úlohy na první vlastní číslo opět ztrácíme.

**Věta 4.10** (O neřešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p \in (0, 1), q = 1$ )  
*Nechť  $p \in (0, 1]$ . Potom neexistuje řešení rovnice (4.15).*

DŮKAZ. Vycházíme z (4.15), kde

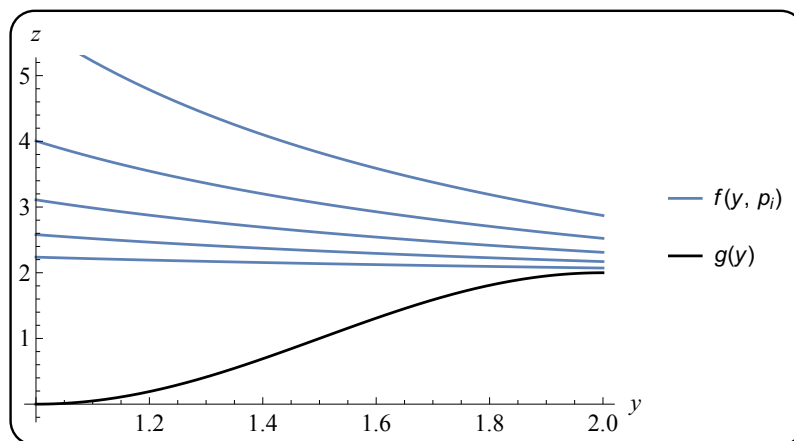
$$f(y, p) = \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} y^{\frac{p-1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{p-1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{p-1}{p}} \geq 2 = 2,$$

$$g(y) = \cos \pi y + 1 < 2.$$

Odhady funkce  $f$  plynou z faktu, že pro  $p \in (0, 1]$  platí nerovnost

$$|\sin z| \leq |\sin z|^p \leq 1, \quad z \in (0, \pi), \quad (4.20)$$

a toho, že funkce  $y^{\frac{p-1}{p}}$  je klesající pro  $p \in (0, 1]$ . Odhad funkce  $g(y)$  vychází z oboru hodnot funkce cosinus. Rovnost (4.15) tedy nemůže nastat.  $\square$



Obrázek 4.3: Ilustrace důkazu věty 4.10 pro některé hodnoty  $p \in (0, 1)$ .

Nyní už zbývají pouze hodnoty  $p > 1$ .

**Věta 4.11** (O řešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p > 1, q = 1$ )  
*Nechť  $p > 1$ . Potom existuje jednoznačné řešení (4.15).*

DŮKAZ. Exponent funkce  $y^{\frac{p-1}{p}}$  je z intervalu  $(0, 1)$ , tedy  $f(y, p)$  je ostře rostoucí a konkávní v proměnné  $y$ , protože násobení kladnou hodnotou integrálu tuto vlastnost zachovává. Vlastnosti funkce  $g(y)$  jsme vyšetřovali

výše. Dále platí následující odhady:

$$f(1, p) = \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} > 1 > 0 = g(1),$$

$$f\left(\frac{3}{2}, p\right) = \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}} > 1 = g\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$f(2, p) = \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{p-1}{p}} < 2^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{p-1}{p}} = 2 = g(2),$$

které plynou z faktu, že pro  $p > 1$  je

$$1 \geq |\sin z| \geq |\sin z|^p, \quad z \in (0, \pi), \quad (4.21)$$

a již zmíněné ostré monotonie.

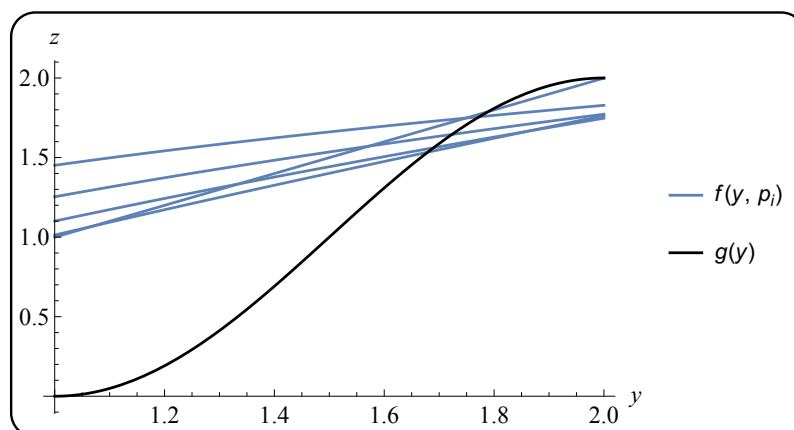
Nerovnost  $f(1, p) > 1$  plyne z toho, že hodnoty integrálu tvoří ostře klesající funkci v proměnné  $p$  (viz. nerovnost (4.21)), kterou jsme složili s ostře rostoucí funkcí ( $p$ -tá odmocnina). Ve výsledku tedy dostaneme ostře klesající funkci, pro kterou platí  $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(1, p) = 1$ , protože

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(1, p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

kde jsme postupně využili výsledky lemmatu 4.3, rovnosti (1.6) a věty 1.4. Musí tedy platit  $f(1, p) > 1$ .

Z výše uvedeného plyne, že řešení rovnice (4.15) existuje a je jednoznačné.  $\square$



Obrázek 4.4: Ilustrace důkazu věty 4.11 pro některé hodnoty  $p \in (1, +\infty)$ .

Shrňme nyní dosažené výsledky pro fixní  $q = 1$  následující větou.

**Věta 4.12** (Řešitelnost úlohy na první vlastní číslo pro  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = 1$ )  
Nechť  $q = 1$ . Potom první vlastní číslo úlohy (4.3) existuje právě tehdy, když  $p \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ .

DŮKAZ. Existence prvního vlastního čísla závisí na hodnotách parametru  $p$ .

1.  $p \leq -1$  :

Dle věty 4.8 nemá úloha na první vlastní číslo řešení.

2.  $p \in (-1, 0)$  :

Jednoznačná existence prvních vlastních čísel je zaručena větou 4.9.

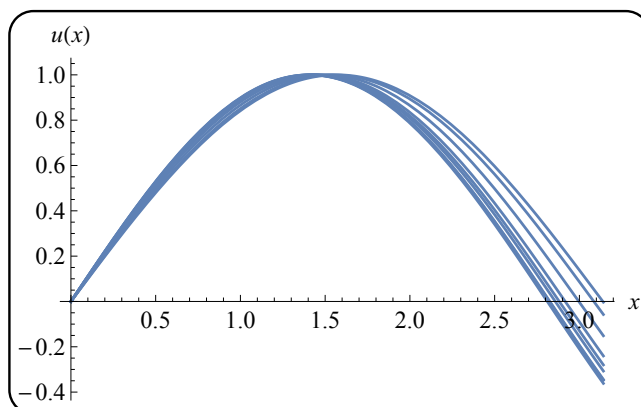
3.  $p \in (0, 1]$  :

Dle věty 4.10 pro tyto hodnoty parametrů neexistuje první vlastní číslo.

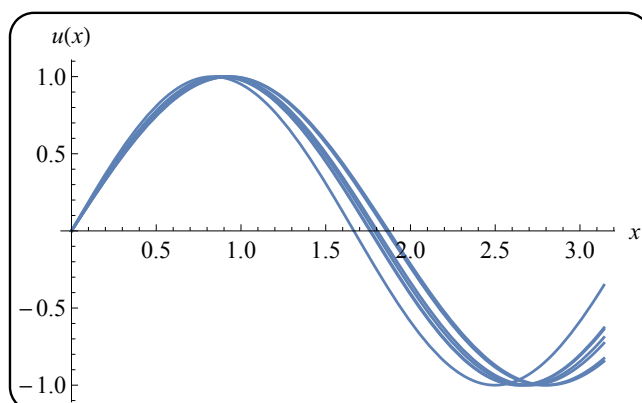
4.  $p \in (1, +\infty)$  :

Jednoznačná vlastní čísla lze nalézt na základě věty 4.11.

□



Obrázek 4.5: Některé vlastní funkce pro parametry  $p \in (-1, 0)$ .



Obrázek 4.6: Některé vlastní funkce pro parametry  $p > 1$ .

#### 4.1.2 Fixní parametr $p = 1$

Dále se budeme zabývat situací, kdy zafixujeme parametr  $p = 1$ . Nejprve opět převedeme úlohu na vlastní čísla na problém řešitelnosti transcendentní rovnice.

**Lemma 4.13** (O ekvivalentní úloze pro  $p = 1$ ,  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )  
*Nechť  $p = 1, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Potom existence prvního vlastního čísla úlohy (4.3) je ekvivalentní existenci řešení rovnice*

$$f(y, q) = g(y, q), \quad y \in (1, 2), \quad (4.22)$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} f(y, q) &:= 2^q \cdot y^{1-q}, \\ g(y, q) &:= \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z|^q dz. \end{aligned} \quad (4.23)$$

**DŮKAZ.** Rovnice (4.22) plyne po dosazení hodnoty  $p = 1$  do podmínky (4.14), integraci levé strany po zavedení substituce  $z = \sqrt{\lambda}x$  a následné úpravě po přeznačení  $y = \sqrt{\lambda}$ .  $\square$

**Věta 4.14** (O neřešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p = 1, q \leq -1$ )  
*Nechť  $q \leq -1$ . Potom neexistuje řešení rovnice (4.22).*

**DŮKAZ.** Funkci  $g(y, q)$  lze s využitím vlastností funkce sinus přepsat na

$$g(y, q) = \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z|^q dz = \int_0^{\pi(y-1)} |\sin z|^q dz. \quad (4.24)$$

Horní mez tohoto integrálu je tedy v intervalu  $(0, \pi)$ . Z lemmatu 4.4 víme, že se jedná o divergentní integrál a rovnice (4.22) nemá smysl.  $\square$



**Věta 4.15** (O řešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p = 1, q \in (-1, 0)$ )  
*Nechť  $q \in (-1, 0)$ . Potom existuje jednoznačné řešení rovnice (4.22).*

DŮKAZ. Posuneme-li opět integrační obor integrálu na pravé straně (4.22), zjistíme na základě lemmatu 4.5, že integrál konverguje a má smysl se zabývat řešitelností rovnice

$$f(y, q) = g(y, q), \quad (4.25)$$

definované předpisy (4.23). Nejprve vyšetřeme, jak se funkce chovají na okraji intervalu  $(1, 2)$ . Protože platí  $(\sin z)^q \geq 1$  pro  $q \in (-1, 0)$ , máme

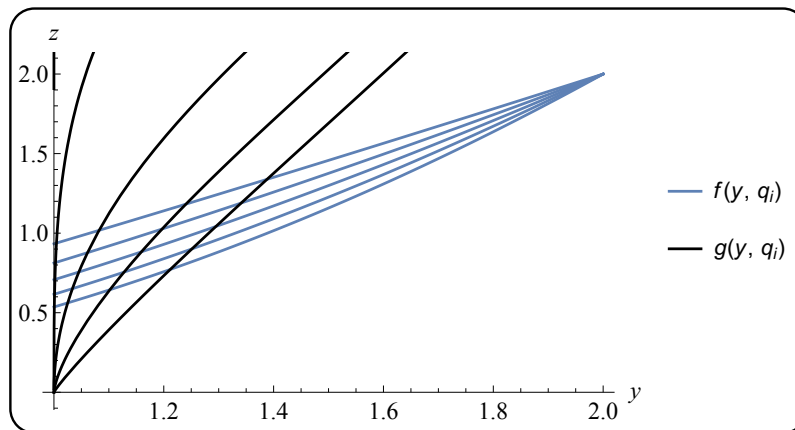
$$f(1, q) = 2^q > \frac{1}{2} > 0 = g(1, q),$$

$$f(2, q) = 2 < \pi < \int_{\pi}^{2\pi} |\sin z|^q dz = \int_0^{\pi} |\sin z|^q dz = g(2, q) < +\infty.$$

Funkce  $g(y, q)$  je pro pevné  $q$  rostoucí, neboť integrand je kladný. Je také konkávní na intervalu  $(1, 3/2)$ , respektive konvexní na  $(3/2, 2)$ , což plyne z faktu, že integrand je rostoucí na  $(\pi, 3\pi/2)$ , respektive klesající na  $(3\pi/2, 2\pi)$ .

Funkce  $f(y, q)$  je v proměnné  $y$  mocninná s exponentem z intervalu  $(1, 2)$ . Je tedy rostoucí a konvexní pro  $y \in (1, 2)$ .

Na okolí bodu  $y = 1$  je tedy funkční hodnota funkce  $g(y, q)$  pro pevné  $q$  menší než funkční hodnota funkce  $f(y, q)$ . Na okolí bodu  $y = 2$  je tomu naopak. Z ostré monotonie a dalších vlastností (konvexita, konkavita), které jsme uvedli výše, plyne jednoznačnost nalezeného řešení.  $\square$



Obrázek 4.7: Ilustrace důkazu věty 4.15 pro některé hodnoty  $q \in (-1, 0)$ .

Ukazuje se, že tato úloha pro  $q > 0$  sdílí s úlohou v předchozí sekci zajímavou vlastnost. Chovají se totiž symetricky. Tam, kde minulá úloha řešitelná byla, nyní řešitelná není a naopak.

**Věta 4.16** (O řešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p = 1, q \in (0, 1)$ )  
 Nechť  $q \in (0, 1)$ . Potom existuje jednoznačné řešení (4.22).

DŮKAZ. Pro  $q \in (0, 1)$  máme ukázat existenci jednoznačného řešení rovnice

$$f(y, q) = g(y, q), \quad y \in (1, 2),$$

kde obě funkce jsou definovány předpisy (4.23).

Funkce  $f(y, q)$  je mocninná v  $y$ , její exponent je z intervalu  $(0, 1)$ , je tedy rostoucí a konkávní v proměnné  $y$ .

Funkce  $g(y, q)$  je rostoucí v první proměnné, neboť  $|\sin z|^q$  je kladná. V této proměnné je také konvexní na intervalu  $(1, 3/2)$ , respektive konkávní na  $(3/2, 2)$ , což plyne z faktu, že integrand je rostoucí na  $(\pi, 3\pi/2)$ , respektive klesající na  $(3\pi/2, 2\pi)$ .

Navíc platí odhad

$$g(y, q) = \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z|^q dz > \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z| dz = \cos \pi y + 1,$$

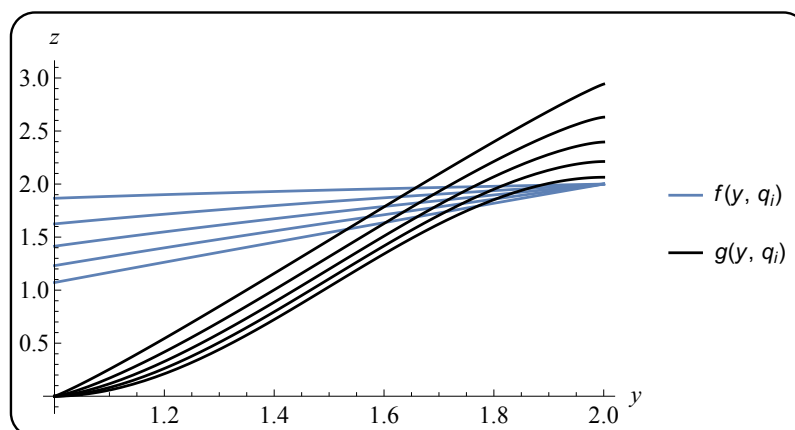
který plyne z toho, že pro  $q \in (0, 1)$  je

$$|\sin z| \leq |\sin z|^q \leq 1, \quad z \in [\pi, 2\pi]. \quad (4.26)$$

Pro krajní hodnoty intervalu  $(1, 2)$  platí

$$\begin{aligned} g(1, q) &= 0 < 2^q = f(1, q), \\ g(2, q) &> \int_{\pi}^{2\pi} |\sin z| dz = 2 = f(2, q), \end{aligned}$$

kde druhá nerovnost plyne opět z (4.26). Rovnice (4.22) má tedy právě jedno řešení pro  $y \in (1, 2)$ . □



Obrázek 4.8: Ilustrace důkazu věty 4.16 pro některé hodnoty  $q \in (0, 1)$ .

**Věta 4.17** (O neřešitelnosti úlohy na první vlastní číslo pro  $p = 1, q \geq 1$ )  
*Nechť  $q \geq 1$ . Potom neexistuje řešení rovnice (4.22).*

DŮKAZ. Pro  $q \geq 1$  opět řešíme rovnici

$$f(y, q) = g(y, q), \quad y \in (1, 2),$$

kde

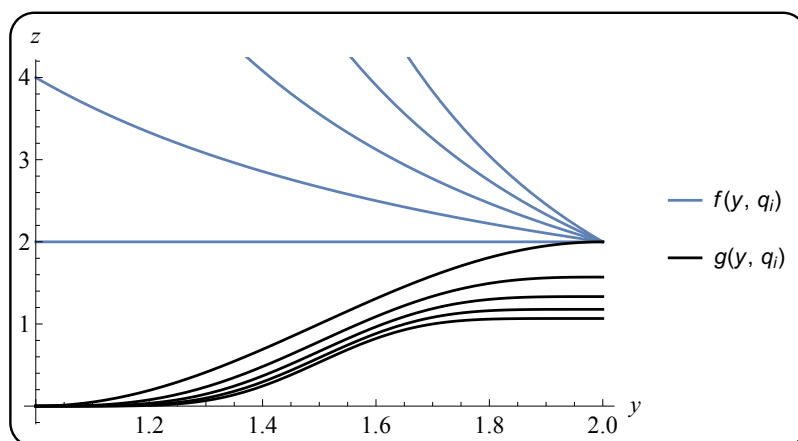
$$f(y, q) = 2^q \cdot y^{1-q} \geq 2^q \cdot 2^{1-q} = 2,$$

$$g(y, q) = \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z|^q dz \leq \int_{\pi}^{\pi y} |\sin z| dz = \cos \pi y + 1 < 2,$$

kde odhad  $f(y, q) \geq 2$  plyne z faktu, že  $f$  je klesající v proměnné  $y$ . Odhad funkce  $g(y, q)$  z toho, že pro  $q \geq 1$  platí

$$1 \geq |\sin z| \geq |\sin z|^q, \quad z \in [\pi, 2\pi]. \quad (4.27)$$

Z toho plyne, že rovnost (4.22) nemůže nastat a věta je dokázána.  $\square$



Obrázek 4.9: Ilustrace důkazu věty 4.17 pro některé hodnoty  $q \geq 1$ .

Nyní opět pro přehlednost shrneme dosažené výsledky pro pevné  $p = 1$  následující větou.

**Věta 4.18** (Řešitelnost úlohy na první vlastní číslo pro  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, p = 1$ )  
*Nechť  $p = 1$ . Potom první vlastní číslo úlohy (4.3) existuje právě tehdy, když  $q \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .*

DŮKAZ. Existence prvního vlastního čísla závisí na hodnotách parametru  $q$ .

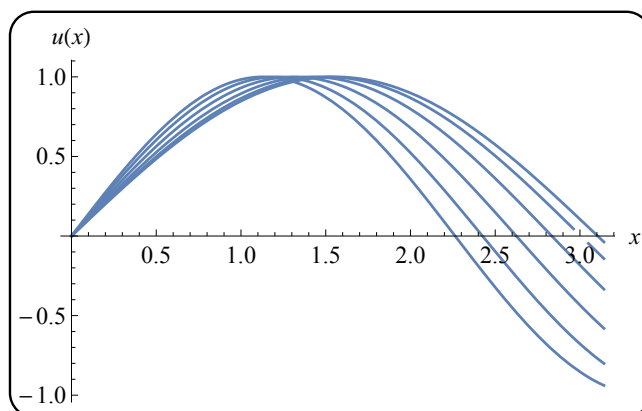
1.  $q \leq -1$  :

Z věty 4.14 plyne neřešitelnost této úlohy.

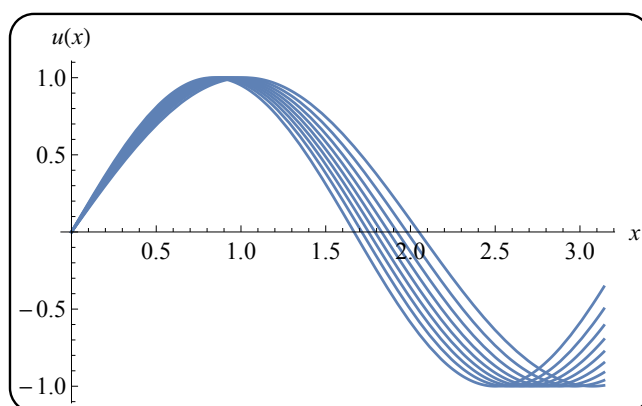
2.  $q \in (-1, 0)$  :  
Existence prvních vlastních čísel je zaručena větou 4.15.
3.  $q \in (0, 1)$  :  
O tomto případě hovoří věta 4.16 – první vlastní čísla existují.
4.  $q \in [1, +\infty)$  :  
První vlastní čísla neexistují – viz. věta 4.17.

□

Na následujících obrázcích uvádíme vlastní funkce pro některé hodnoty  $p = 1$ ,  $q \in (-1, 0)$ , respektive  $q \in (0, 1)$ .



Obrázek 4.10: Některé vlastní funkce pro hodnoty  $q \in (-1, 0)$ .



Obrázek 4.11: Některé vlastní funkce pro hodnoty  $q \in (0, 1)$ .

## 4.2 Bodové spektrum nelokální úlohy s parametry

Pokusíme-li se odvozovat analytické předpisy pro hledání vyšších vlastních čísel, tj. pro ty, jejichž index je roven alespoň číslu dvě, ukazuje se, že tento problém povede opět na otázku existence a jednoznačnosti řešení transcendentních rovnic.

Konstrukci vlastních funkcí a následně i bodového spektra založíme na myšlence, kterou poprvé uvedl Fučík v [3] pro úlohu s dvěma parametry. Fučík ale ve svém článku uvažoval pouze dvoubodovou úlohu s podmínkou Dirichletova typu. Blíže k naší situaci má článek [6], kde se autorka zabývala konstrukcí Fučíkova spektra pro úlohu s integrální podmínkou. Myšlenka je založena na vkládání kladných a záporných částí vlastní funkce do intervalu konečné délky s ohledem na splnění okrajových podmínek a objasníme ji již v této sekci.

Na základě pozorování lze tvrdit, že některé kombinace parametrů  $p$ ,  $q$  neumožňují vznik vyšších vlastních čísel. Lze je učinit na základě chování vlastních funkcí pro tyto parametry. Uvážíme-li pro názornost, že např. kladná vlna má mnohonásobně menší „míru“ než záporná a pokusíme-li se postupovat již zmíněným způsobem při konstrukci vyššího vlastního čísla, tj. vkládáním vln do intervalu  $(0, \pi]$ , potom je zřejmé, že rovnost obou „měr“ nikdy nemůže nastat, protože velikost kladné vlny zkrátka nedokáže vykompenzovat velikost té záporné. Podrobněji tento jev objasníme dále.

Nyní zobecníme postupy, kterými jsme se zabývali v předchozím textu, a popíšeme bodové spektrum úlohy (4.3).

### Poznámka 4.19 (O předpokladu)

*Pro potřeby dalšího odvození předpokládejme, že všechny integrály, které se v další větě, respektive jejím důkazu, objeví, jsou konvergentní.*

### Věta 4.20 (O ekvivalentní úloze pro hledání $n$ -tého vlastního čísla úlohy (4.3))

*Jsou-li  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , potom hledání  $n$ -tého vlastního čísla je ekvivalentní řešení rovnice*

$$\begin{cases} \left( \frac{n+1}{2} \cdot \mu(p) \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{n-1}{2} \cdot \mu(q) + \int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda} x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \left( \frac{n}{2} \cdot \mu(p) + \int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{n}{2} \cdot \mu(q) \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad (4.28)$$

*pro  $\lambda \in [n^2, (n+1)^2)$ ,*

kde jsme označili

$$\begin{aligned}\mu(p) &:= \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx, \\ \mu(q) &:= \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda}x|^q dx,\end{aligned}\tag{4.29}$$

a  $x_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}$  je  $n$ -tý nulový bod funkce  $\sin \sqrt{\lambda}x$ .

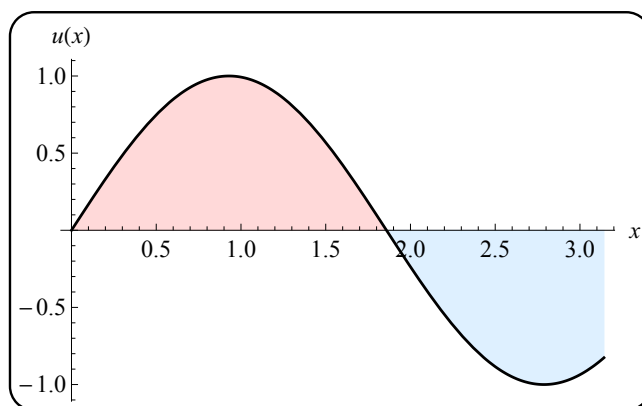
DŮKAZ. Důkaz je založen na vkládání kladných a záporných vln do intervalu  $(0, \pi]$ . Věnujme se tedy nejprve situaci, kdy vlastní funkce má lichý počet nulových bodů.

- $n = 1$  :

Konstruueme první vlastní číslo, požadujeme tedy, aby vlastní funkce příslušná tomuto vlastnímu číslu, měla právě jeden nulový bod. To zajistíme podmínkou  $\lambda \in [1, 4)$  při řešení rovnice

$$\left( \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{x_1}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda}x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.\tag{4.30}$$

Hodnotu  $\lambda = 1$  navíc dodatečně vyloučíme – vlastní funkce by v tomto případě neměla zápornou část.



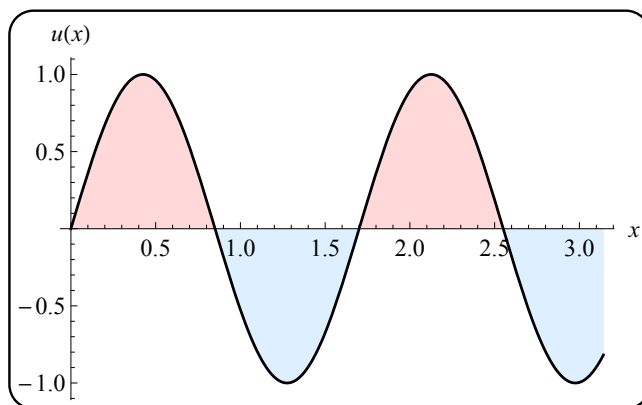
Obrázek 4.12: Vlastní funkce příslušná prvnímu vlastnímu číslu pro hodnoty  $p = 10, q = 1$ .

- $n = 3$  :

Hledáme třetí vlastní číslo, z podmínky úlohy (4.3) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned}\left( \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx + \int_{x_2}^{x_3} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ \left( \int_{x_1}^{x_2} |\sin \sqrt{\lambda}x|^q dx + \int_{x_3}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda}x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Nyní požadujeme, aby  $\lambda \in [9, 16)$ . Integrály chápeme ve smyslu míry sinových vln. Na levé straně rovnice (4.31) jsou tedy míry kladných sinových vln, na pravé těch záporných. Uvědomíme-li si nyní, že všechny „dokončené“ části mají stejnou míru (musíme ovšem rozlišovat kladné a záporné, neboť každou z nich „měříme“ jinou mocninou), rovnici je možné zjednodušit tak, že v úvahu vezmeme pouze integrál, který přísluší první kladné, respektive první záporné vlně. Tento integrál pak vynásobíme počtem příslušných dokončených vln na intervalu  $(0, \pi]$ .



Obrázek 4.13: Vlastní funkce příslušná třetímu vlastnímu číslu pro hodnoty  $p = 50, q = 1$ .

Dostaneme

$$\left( 2 \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{x_1}^{x_2} |\sin \sqrt{\lambda} x|^q dx + \int_{x_3}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda} x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.32)$$

neboť pro  $n = 3$  se vlastní funkce musí skládat z dvou „dokončených“ kladných vln. Poznamenejme, že v dalším kroku, tj. pro  $n = 5$ , lze zjednodušit i pravou stranu - opět by se zde objevily členy, které mají stejnou „míru“.

- Zobecnění pro  $n$  liché:

Nyní předchozí postupy zobecníme. Je-li  $n$  liché, musíme mít  $\lambda \in [n^2, (n+1)^2)$ , což znamená, že vlastní funkce bude mít  $(n+1)/2$

kladných a  $(n - 1)/2$  záporných vln. Celkově tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{n+1}{2} \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda x}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \\ \left( \frac{n-1}{2} \int_{x_1}^{x_2} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx + \int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Navíc si lze uvědomit, že z geometrie úlohy plyne další zjednodušení. Každou dokončenou vlnu funkce sinus lze totiž posunout do intervalu  $(0, x_1)$ . Je tedy

$$\int_{x_1}^{x_2} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx = \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx. \quad (4.34)$$

Po tomto nahrazení dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{n+1}{2} \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda x}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \\ \left( \frac{n-1}{2} \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx + \int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Zavedeme-li nyní označení dle předpisů v (4.29), dostaneme dokazované tvrzení.

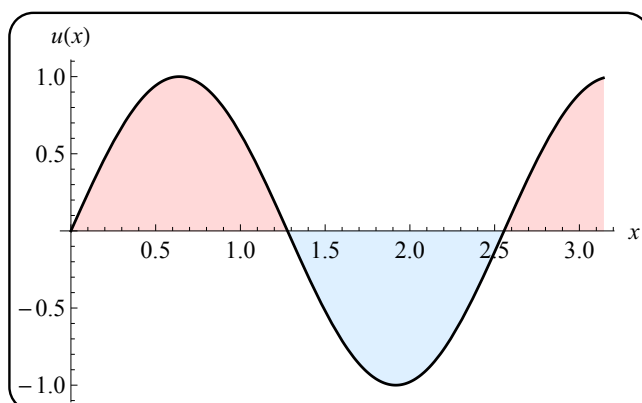
Věnujme se nyní situaci, kdy vlastní funkce má sudý počet nulových bodů. Postupujeme analogicky jako v předchozím případě. Rozdíl bude nyní v tom, že vlna, která bude pokračovat za lichým nulovým bodem bude kladná.

- $n = 2$  :

Pro  $n = 2$  požadujeme, aby  $\lambda \in [4, 9)$ . Druhé vlastní číslo potom dostaneme jako řešení rovnice

$$\begin{aligned} \left( \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda x}|^p dx + \int_{x_2}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda x}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \\ \left( \int_{x_1}^{x_2} |\sin \sqrt{\lambda x}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$





Obrázek 4.14: Vlastní funkce příslušná druhému vlastnímu číslu pro parametry  $p = 500, q = 1$ .

- Zobecnění pro  $n$  sudé:

Pokud zobecníme postup i pro sudý počet nulových bodů, vlastní funkce bude mít stejný počet dokončených kladných i záporných vln, konkrétně  $n/2$ . Dostaneme tedy

$$\left( \frac{n}{2} \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx + \int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \quad (4.37)$$

$$\left( \frac{n}{2} \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda} x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

kde jsme opět využili vztah (4.34). Po přeznačení pomocí funkce  $\mu$  získáme to, co jsme měli dokázat.

□

Předchozí věta tedy udává způsob, jak vlastní čísla najít, ale neříká nic o tom, zda má rovnice (4.28) pro konkrétní hodnoty parametrů nějaké řešení. Opět lze ovšem určit hodnoty parametrů, které neposkytují žádné výsledky.

**Věta 4.21** (O nepřípustných parametrech  $p, q$ )

*Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq -1$  a zároveň  $q \leq -1$ . Potom rovnici (4.28) vyhovují všechny kladné hodnoty  $\lambda$ .*

DŮKAZ. Upravíme-li integrál  $\mu(p)$  v (4.28) substitucí  $z = \sqrt{\lambda}x$ , dostaneme

$$\mu(p) = \int_0^{x_1} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} |\sin z|^p dz. \quad (4.38)$$

Tento integrál je tedy divergentní, na základě lemmatu 4.4. Stejně úpravy lze provést i pro integrál  $\mu(q)$ .

Stejnou substitucí upravme zbývající integrály v (4.28). Dostaneme tedy

$$\int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda} x|^p dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{n\pi}^{\pi\sqrt{\lambda}} |\sin z|^p dz = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi\sqrt{\lambda}-n\pi} |\sin z|^p dz,$$

kde v posledním integrálu jsme využili vlastnosti funkce sinus a posunuli obor integrace do bodu 0. Uvážíme-li, že  $\sqrt{\lambda} \in [n, n+1)$ , potom i horní mez tohoto integrálu náleží intervalu  $(0, \pi]$  (respektive je nulová pro  $\sqrt{\lambda} = n$ ). Tedy i tento integrál je divergentní (respektive nulový). Pro integrál s  $q$ -tou mocninou lze postupovat stejně. Na obou stranách (4.28) tedy dostaneme výraz

$$\frac{1}{+\infty} = 0,$$

což znamená, že rovnici vyhovují všechny kladné hodnoty  $\lambda$ . □

Touto kombinací parametrů se dále nebudeme zabývat. Vlivem volby parametrů totiž nemůžeme hovořit např. o jednoznačnosti vlastního čísla apod.

**Poznámka 4.22** (O přepisu pro  $p, q > -1$ )

*Jsou-li  $p, q > -1$ , lze využít lemma 4.3 k přepisu funkcí  $\mu(p)$ , respektive  $\mu(q)$ . V (4.28) tedy bude*

$$\mu(p) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(\frac{p}{2} + 1)}, \quad (4.39)$$

$$\mu(q) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{q+1}{2})}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(\frac{q}{2} + 1)}. \quad (4.40)$$

#### 4.2.1 Fixní parametr $q = 1$

Analogicky jako v minulé sekci, kde jsme se zabývali prvními vlastními čísly, vybereme specifické parametry, kterými se budeme dále zabývat. Zaměříme se tedy na hodnoty  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = 1$ .

**Lemma 4.23** (O ekvivalentní úloze pro  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = 1$ )

*Jsou-li  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = 1$ , potom existence  $n$ -tého vlastního čísla je ekvivalentní existenci řešení rovnice*

$$\begin{cases} f(y, p) = g(y) & \text{pro } n \text{ liché,} \\ h(y, p) = v(y, p) & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad (4.41)$$

pro  $y \in [n, n+1)$ , kde jednotlivé funkce jsou definovány předpisy

$$f(y, p) = \left( \frac{n+1}{2} \int_0^\pi |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{p-1}{p}}, \quad (4.42)$$

$$g(y) = n + \cos \pi y, \quad (4.43)$$

$$h(y, p) = \left( \frac{n}{2} \int_0^\pi |\sin z|^p dz + \int_{n\pi}^{\pi y} |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.44)$$

$$v(y, p) = n \cdot y^{\frac{1-p}{p}}. \quad (4.45)$$

DŮKAZ. Spočívá v dosazení hodnoty  $q = 1$  do (4.28), úpravě všech integrálů pomocí substituce  $z = \sqrt{\lambda}x$  a přímém výpočtu integrálů na pravé straně. Finální podoba rovnic (4.41) potom vznikne po přeznačení  $y = \sqrt{\lambda}$ .  $\square$

Stejně jako v sekci pro první vlastní čísla bychom se mohli podrobně zabývat řešitelností rovnic (4.41). To zde již dělat nebudeme, odkážeme však na některé numerické výsledky, objasníme, proč vyšší vlastní čísla mohou či nemohou vzniknout a uvedeme obrázky vyšších vlastních funkcí pro ty parametry, pro které je to možné.

Jako v případě prvních vlastních čísel jsou i zde některé „kritické“ hodnoty parametrů  $p$ , kde úloha získá, respektive ztratí řešitelnost. Jedná se opět o hodnoty  $-1, 0$  a  $1$ .

- $p \leq -1$  :  
První vlastní číslo pro tyto hodnoty parametru neexistovalo z důvodu divergentních integrálů v příslušných rovnicích. Naprosto stejná situace nastane i při konstrukci vyšších vlastních čísel. Integrály v rovnicích (4.41) jsou divergentní (viz. lemma 4.4) a rovnice nemají řešení.
- $p \in (-1, 0)$  :  
Pro tyto hodnoty se objevuje zajímavá vlastnost. První vlastní čísla existují, jak víme z věty 4.10. Úloha na vyšší vlastní čísla ale řešitelnost ztrácí. Z existence prvního vlastního čísla totiž plyne, že první nulový bod vlastní funkce musí být „dostatečně“ blízko bodu  $\pi$  (pro ilustraci viz. obrázek 4.5). Pro vyšší vlastní čísla nastává to, o čem jsme hovořili na začátku sekce 4.3. Zkonstruujeme-li první vlastní číslo a pokusíme-li se vložit další kladnou vlnu do intervalu  $(0, \pi)$ , postup selže kvůli tomu, že záporná vlna má moc velkou velikost a kladné části to nedokáže vyrovnat.
- $p \in (0, 1)$  :  
Numerické experimenty ukazují, že vyšší vlastní čísla, stejně jako první (dle věty 4.11), neexistují.
- $p = 1$  :  
Hodnota  $p = 1$  je v jistém smyslu výjimečná. Zprostředkovává totiž

přechod mezi třemi, kvalitativně naprosto odlišnými, situacemi – pro  $p \in (0, 1)$  vlastní čísla neexistují, pro  $p = 1$  existují pouze ta vlastní čísla, která mají sudý index (viz. věta 3.3). Pro hodnoty  $p > 1$  všechna vlastní čísla existují.

Přejděme opět k situaci, kdy zafixujeme parametr  $p = 1$ .

#### 4.2.2 Fixní parametr $p = 1$

**Lemma 4.24** (O ekvivalentní úloze pro  $p = 1, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

*Jsou-li  $p = 1, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , potom existence  $n$ -tého vlastního čísla je ekvivalentní existenci řešení rovnice*

$$\begin{cases} f(y, q) = g(y, q) & \text{pro } n \text{ liché,} \\ h(y) = v(y, q) & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad (4.46)$$

pro  $y \in [n, n + 1)$ , kde jsme označili

$$f(y, q) = (n + 1) \cdot y^{\frac{1-q}{q}}, \quad (4.47)$$

$$g(y, q) = \left( \frac{n-1}{2} \int_0^\pi |\sin z|^q dz + \int_{n\pi}^{\pi y} |\sin z|^q dz \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.48)$$

$$h(y) = n + 1 - \cos \pi y, \quad (4.49)$$

$$v(y, q) = y^{\frac{q-1}{q}} \left( \frac{n}{2} \int_0^\pi |\sin z|^q dz \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.50)$$

**DŮKAZ.** Spočívá v přímém výpočtu příslušných integrálů po dosazení  $p = 1$ , obdobně jako pro minulý případ.  $\square$

Obdobně jako v předchozím případě vysvětlíme, proč rovnice (4.46) mohou, případně nemohou být řešitelné.

Úloha opět zachovává podobnou vlastnost – intervaly řešitelnosti mají stejnou strukturu jako v „symetrickém“ případě, kdy jsme zvolili  $q = 1$ .

- $q \leq -1$

Projeví se stejná vlastnost integrálů v rovnicích (4.46), tj. jejich divergence. Tyto rovnice tedy nejsou řešitelné a bodové spektrum úlohy neobsahuje žádný prvek.

- $q \in (-1, 0)$

Pro tyto hodnoty existuje první vlastní číslo (dle věty 4.15), vyšší vlastní čísla už ale neexistují. První vlastní číslo lze chápat jako mezní řešitelnost úlohy. Pokud vhodně umístíme první nulový bod, mohou vzniknout první vlastní čísla. Pro vyšší vlastní čísla už má ale kladná vlna moc velkou míru a takové vhodné umístění nulových bodů není možné najít.

- $q \in (0, 1)$   
První vlastní čísla existují na základě věty 4.16. Úloha na vyšší vlastní číslo ale od určitého indexu a určitého parametru řešitelnost ztratí. Pro pevné  $p = 1$  má totiž kladná vlna oproti té záporné menší velikost.
- $q = 1$   
Hodnota  $q = 1$  je stejně výjimečná jako její protějšek, tj.  $p = 1$ . Nastává totiž opět zajímavá situace – při přechodu hodnotou  $q = 1$  spektrum získá ta vlastní čísla, která mají lichý index. Pro  $q > 1$  už ale opět bodové spektrum úlohy neobsahuje žádnou hodnotu.
- $q > 1$   
Jak již bylo řečeno, úloha ztrácí svou řešitelnost. Je ji možno chápat jako symetrický případ volby parametrů  $p \in (0, 1), q = 1$ . Nyní má naopak kladná vlna moc velkou velikost, záporná už tuto vlastnost nedokáže vykompenzovat. To je důvod, proč neexistují první vlastní čísla. Postupným vkládáním dalších vln opět jen zvětšujeme rozdíl, mezi velikostmi kladné a záporné vlny. Ty se pak nemohou rovnat.

### 4.3 Limitní chování vlastních čísel

V této sekci budeme zkoumat limitní chování vlastních čísel. Při detailnějším studiu bodového spektra situace, kdy ponecháme parametr  $q = 1$  a  $p$  vyšleme nade všechny meze, se totiž ukazují zajímavá propojení s některými prozkoumanými úlohami na vlastní čísla.

**Věta 4.25** (Limitní chování vlastních čísel pro  $q = 1$ )

*Nechť parametr  $p \rightarrow +\infty$ ,  $q = 1$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Potom vlastní čísla  $\lambda_n$  jsou dána řešením rovnice*

$$\sqrt{\lambda} = n + \cos \pi \sqrt{\lambda} \quad \text{je-li } n \text{ liché} \quad (4.51)$$

*pro  $\lambda \in [n^2, (n+1)^2)$ , respektive předpisem*

$$\lambda_n = n^2 \quad \text{je-li } n \text{ sudé.} \quad (4.52)$$

**DŮKAZ.** Vyjdeme z (4.41), kde jsme integrály nahradili podílem funkcí Gamma dle lemmatu 4.3. Příslušné rovnice tedy jsou

$$\begin{cases} f(y, p) = g(y) & \text{pro } n \text{ liché,} \\ h(y, p) = v(y, p) & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad (4.53)$$

pro  $y \in [n, n+1)$  a jednotlivé funkce mají tvar

$$f(y, p) = \left( \frac{n+1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{p-1}{p}}, \quad (4.54)$$

$$g(y) = n + \cos \pi y, \quad (4.55)$$

$$h(y, p) = \left( \frac{n}{2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)} + \int_{n\pi}^{\pi y} |\sin z|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.56)$$

$$v(y, p) = n \cdot y^{\frac{1-p}{p}}. \quad (4.57)$$

Tyto funkce nyní upravme podle vztahu (1.6) a pro limitní přechod použijme větu 1.4. Pro  $p \rightarrow +\infty$  a funkci  $f(y, p)$  tedy platí

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} f(y, p) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{p-1}{p}} = \\ &= y \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} \right)^{\frac{1}{p}} = y \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \pi \frac{n+1}{\sqrt{2p}} \right)^{\frac{1}{p}} = y. \end{aligned}$$

Dosadíme-li zpět, dostaneme (po zohlednění substituce  $y = \sqrt{\lambda}$ ) rovnici (4.51). Pro  $n$  sudé lze analogickými kroky ukázat, že platí  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(y, p) = 1$  a také je  $\lim_{p \rightarrow +\infty} v(y, p) = n \cdot y^{-1}$ . Po úpravě a opětovném zohlednění substituce  $y = \sqrt{\lambda}$  dostaneme dokazované tvrzení.  $\square$

Předchozí věta udává způsob, jak nalézt hodnoty, k nimž konvergují vlastní čísla. Jsou to tedy hromadné body vlastních čísel. Předpis (4.52) ukazuje, že bodové spektrum úlohy pro tyto parametry obsahuje jako svou podmnožinu spektrum Dirichletovy okrajové úlohy.

Ilustraci limitních vlastních funkcí spolu s hodnotami limitních vlastních čísel uvádíme v příloze B na konci této práce.

#### **Poznámka 4.26** (O limitních přechodech)

*Pro případ, kdy  $q = 1, p \rightarrow -\infty$ , respektive  $p = 1$  a  $q \rightarrow \pm\infty$  vlastní čísla neexistují, nemá tedy smysl uvažovat limitní přechod.*

## 4.4 Některé další speciální případy parametrů

Zaměřme se pozorněji na speciální případy ve volbě parametrů. Uvažujme nejprve  $p = q = 2$  a rozepišme podmínku v úloze (4.3). Po dosazení  $p = q = 2$  dostaneme

$$\int_0^{\pi} (u^+)^2 dx = \int_0^{\pi} (u^-)^2 dx. \quad (4.58)$$

Pro kladnou a zápornou část reálné funkce platí vztahy

$$u^+ = \frac{|u| + u}{2}, \quad (4.59)$$

$$u^- = \frac{|u| - u}{2}. \quad (4.60)$$

Dosadíme-li tato vyjádření do (4.58), dostaneme

$$\frac{1}{4} \int_0^\pi 2u^2 + 2|u|u \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi 2u^2 - 2|u|u \, dx,$$

a po úpravě

$$\int_0^\pi |u|u \, dx = 0,$$

což lze s využitím  $u(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$  zapsat ekvivalentně jako

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} (\sin \sqrt{\lambda}x)^2 \, dx - \int_{x_1}^{x_2} (\sin \sqrt{\lambda}x)^2 \, dx + \dots + \\ & \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\sin \sqrt{\lambda}x)^2 \, dx - \int_{x_n}^\pi (\sin \sqrt{\lambda}x)^2 \, dx = 0, \end{aligned}$$

kde  $x_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}$  je  $n$ -tý nulový bod funkce  $u(x)$ . Tato rovnice může být splněna jen tehdy, pokud  $\lambda_{2n} = 4n^2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .

Nyní se nabízí otázka – existují další parametry, které mají stejnou vlastnost? Odpověď dává následující věta.

**Věta 4.27** (O bodovém spektru (4.3) pro  $p = q \in \mathbb{R}^+ \cup (-1, 0)$ )  
*Nechť  $p = q \in \mathbb{R}^+ \cup (-1, 0)$ . Potom bodové spektrum úlohy (4.3) je tvořeno rostoucí posloupností  $\lambda_{2n} = 4n^2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .*

**DŮKAZ.** Protože je  $p = q$ , je také  $\mu(p) = \mu(q)$ . Dosadíme-li do (4.28), dostaneme po úpravě rovnice

$$\begin{cases} \mu(p) = \int_{x_n}^\pi |\sin \sqrt{\lambda}x|^p \, dx & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \int_{x_n}^\pi |\sin \sqrt{\lambda}x|^p \, dx = 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad (4.61)$$

pro  $\lambda \in [n^2, (n+1)^2)$ .

Využijeme-li definici funkce  $\mu(p)$ , pro  $n$  liché má být splněna rovnost

$$\mu(p) = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p \, dx = \int_{x_n}^\pi |\sin \sqrt{\lambda}x|^p \, dx = \int_0^{\pi - \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p \, dx,$$

kde jsme využili vlastnosti integrandu a posunuli integrační obor integrálu na pravé straně do bodu 0. Tato rovnost může nastat jen, když bude platit

$$\pi - \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.62)$$

což bude pouze tehdy, když  $\lambda = (n+1)^2$ . To je ale mimo interval, pro který tuto rovnici řešíme a tedy vlastní čísla s lichými indexy neexistují.

Pro  $n$  sudé máme

$$\int_{x_n}^{\pi} |\sin \sqrt{\lambda}x|^p dx = 0.$$

Na integračním oboru je integrand nezáporný. Integrál tedy může být nulový jen tehdy, bude-li splněna rovnost

$$x_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}} = \pi, \quad (4.63)$$

tedy musí být  $\lambda = n^2$ . Vzhledem k tomu, že uvažujeme  $n$  sudé, lze psát  $\lambda_{2n} = 4n^2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , což je v souladu se zněním věty.  $\square$



## KAPITOLA 5

### FUČÍKOVO SPEKTRUM

V minulých sekcích bylo několikrát zmíněno tzv. Fučíkovo spektrum. Jedná se o strukturu, kterou je možno chápat jako zobecnění bodového spektra. Je pojmenováno po českém matematikovi Svatopluku Fučíkovi, který při jeho studiu dosáhl významných výsledků a stal se tak jeho průkopníkem.

Zobecnění, o kterém jsme hovořili, spočívá v tom, že místo úlohy s jedním parametrem  $\lambda$  zavedeme předpis, ve kterém vystupují dva parametry  $\alpha$  a  $\beta$ . Samotná myšlenka přechodu od úlohy s jedním parametrem k dvouparametrické probíhá následujícím způsobem.

Mějme úlohu na vlastní čísla ve tvaru

$$Lu = \lambda u, \quad u = u(x), \quad (5.1)$$

kde  $L$  je obecný lineární diferenciální operátor,  $x \in (a, b)$  a k rovnici jsou připojeny vhodné okrajové podmínky. Rozdělíme-li funkci  $u$  na její kladnou a zápornou část, dostaneme

$$Lu = \lambda (u^+ - u^-). \quad (5.2)$$

Nyní parametr  $\lambda$  nahradíme dvojicí  $\alpha, \beta$

$$Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, \quad (5.3)$$

což umožní lépe kontrolovat kladnou, respektive zápornou část řešení a umožní vznik nové struktury.

Obdobně jako v případě jednoparametrické úlohy, nyní dvojici  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pro kterou má úloha (5.3) netriviální řešení, nazveme Fučíkovým vlastním číslem. Někdy se lze také setkat s pojmem vlastní dvojice. Množinu všech vlastních dvojic potom nazveme Fučíkovým spektrem úlohy (5.3). Funkci  $u$ , která vyhovuje rovnici (5.3) bodově pro  $x \in (a, b)$  a navíc splňuje dodané okrajové podmínky, nazveme vlastní funkcí úlohy (5.3).

Oproti úloze s jedním parametrem se objevují některé nové vlastnosti. Tato úloha již není lineární – někdy se lze setkat s termínem po částech lineární úloha. Dále Fučíkovo spektrum obsahuje jako svou podmnožinu bodové spektrum jednoparametrické úlohy.

Fučíkovo spektrum je tvořeno systémem křivek, tzv. Fučíkových větví. Lze ukázat, že tyto větve jsou symetrické dle diagonály v rovině  $\alpha\beta$ , což je výhodné např. z hlediska numerického studia tohoto problému – stačí uvažovat a studovat oblast pod diagonálou a získané výsledky poté jen „překlopit“ dle přímky  $\alpha = \beta$ .

Bohužel se ukazuje, že studium Fučíkova spektra je značně náročnější než studium jednoparametrických úloh. Nové výsledky z této oblasti se většinou soustředí na studium jednoho konkrétního operátoru, který je vybaven určitými okrajovými podmínkami (Dirichletovy, Neumannovy, smíšené podmínky, . . .), případně na studium Fučíkových větví – jejich omezenost, asymptotické chování větví apod.

Nyní již představme dva známé výsledky, které souvisí s minulými kapitolami.

## 5.1 Fučíkova úloha s Dirichletovou podmínkou

Výsledky, které uvedeme dále, se poprvé objevily v článku [3].

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, \\ u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

kde  $L$  je definovaný v (2.1). Úlohu (5.4) lze ekvivalentně přepsat na dvojici jednoparametrických úloh ve tvaru

$$\begin{cases} -u'' = \alpha u, & u(x) \geq 0, \\ -u'' = \beta u, & u(x) \leq 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Z tohoto zápisu a věty 3.1 je zřejmé, že úloha může mít netriviální řešení pouze v případě  $\alpha > 0$  a zároveň  $\beta > 0$ . Řešením takové úlohy bude tedy funkce

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin \sqrt{\alpha}x + c_2 \cos \sqrt{\alpha}x, & u(x) \geq 0, \\ c_3 \sin \sqrt{\beta}x + c_4 \cos \sqrt{\beta}x, & u(x) \leq 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

kde  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ .

Nyní je možné aplikovat myšlenku, kterou jsme uvedli již v sekci 4.3 – do intervalu  $(0, \pi)$  budeme vkládat funkce, které řeší tuto dvojici jednoparametrických úloh (s ohledem na okrajové podmínky). Provedeme konstrukci pro případ, kdy vlastní funkce má v intervalu  $(0, \pi)$  jeden nulový bod. V případě

konečného počtu nulových bodů v tomto intervalu získáme další výsledky pouhým opakováním tohoto procesu.

Začínáme kladnou vlnou řešení, okrajová úloha tedy bude mít tvar

$$\begin{cases} -u'' = \alpha u, & u(x) \geq 0, \\ u(0) = u(x_1) = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

kde  $x_1$  je první nulový bod konstruované vlastní funkce.

Po dosazení okrajových podmínek do předpisu řešení pro tuto vlnu dostaneme

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 = 0, \\ u(x_1) &= c_1 \sin \sqrt{\alpha} x_1 = 0. \end{aligned}$$

Z požadavku na netriviální řešení musí být  $x_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ .

Nyní uvažujeme zápornou vlnu řešení – úloha bude tedy ve tvaru

$$\begin{cases} -u'' = \beta u, & u(x) \leq 0, \\ u(x_1) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Dosadíme-li okrajové podmínky opět do obecného řešení výše, dostaneme systém dvou rovnic

$$\begin{pmatrix} \cos \sqrt{\beta} x_1 & \sin \sqrt{\beta} x_1 \\ \cos \sqrt{\beta} \pi & \sin \sqrt{\beta} \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Požadujeme-li netriviální řešení, musí být determinant matice soustavy (5.9) nulový, tedy

$$\cos \sqrt{\beta} x_1 \sin \sqrt{\beta} \pi - \sin \sqrt{\beta} x_1 \cos \sqrt{\beta} \pi = \sin \sqrt{\beta} (\pi - x_1) = 0,$$

a to nastane jen tehdy, bude-li

$$\pi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \quad (5.10)$$

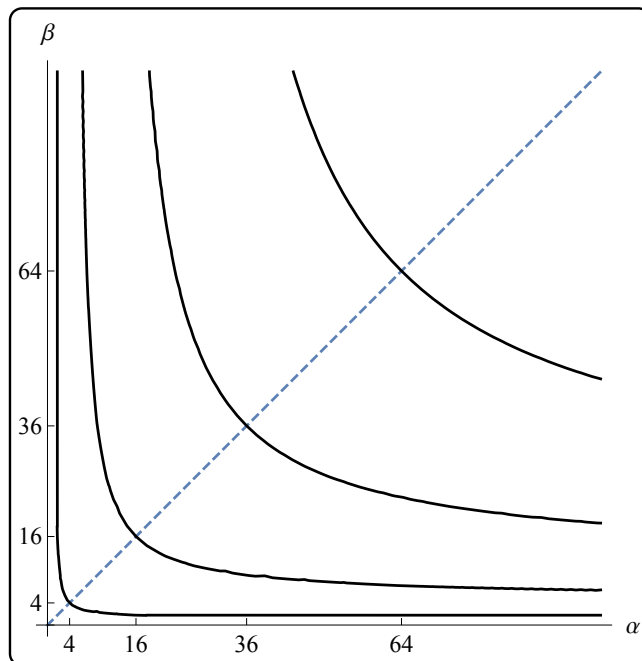
což není nic jiného, než předpis první Fučkové větve.

Dále budeme požadovat hladké napojení kladné a záporné vlny – v bodě napojení se musí shodovat funkční hodnoty první derivace. Z tohoto požadavku potom vyplyne vzájemný vztah mezi příslušnými konstantami  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

Opakováním procesu pro  $n$  nulových bodů v intervalu  $(0, \pi)$  dostaneme implicitní popis Fučkových větví ve tvaru

$$\pi = \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}. \quad (5.11)$$

První čtyři Fučíkovy větve úlohy (5.4) uvádíme na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Fučíkovo spektrum Dirichletovy úlohy (5.4).

## 5.2 Fučíkova nelokální úloha

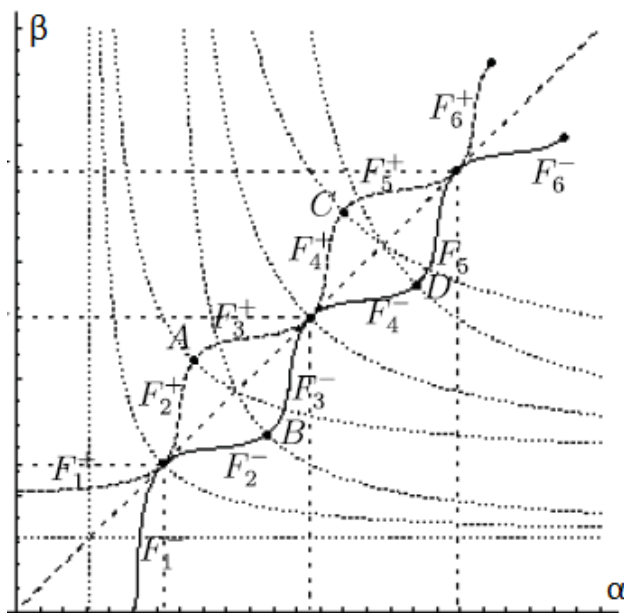
O Fučíkově nelokální úloze pojednává článek [6]. Autorka se zde zabývá úlohou typu

$$\begin{cases} Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, & x \in (0, \pi) \\ \int_0^\pi u \, dx = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

kde  $L$  je opět operátor definovaný v (2.1).

Z tvaru integrální podmínky v (5.12) je vidět, že vlastní funkce musí mít nulové body (jinak není možné splnit nulovost daného integrálu). Její kladná a záporná vlna se tedy bude konstruovat s ohledem na splnění této podmínky. Obecné řešení úlohy bude mít opět stejný tvar jako v (5.6). Po zohlednění podmínky  $u(0) = 0$  dostaneme, že vlastní funkcí této úlohy bude opět funkce sinus s vhodným argumentem. Nulové body vlastní funkce budou stejné jako ty, které jsme odvodili v minulé sekci. Také je nutné zajistit hladké napojení v nulových bodech – musí se zde shodovat funkční hodnoty prvních derivací kladné a záporné vlny. Odvození spolu s předpisy větví Fučíkova spektra v závislosti na počtu nulových bodů vlastní funkce jsou k

nalezení v článku [6]. Zde uvedeme pouze obrázek Fučíkova spektra, který je taktéž k nalezení v již citovaném článku.



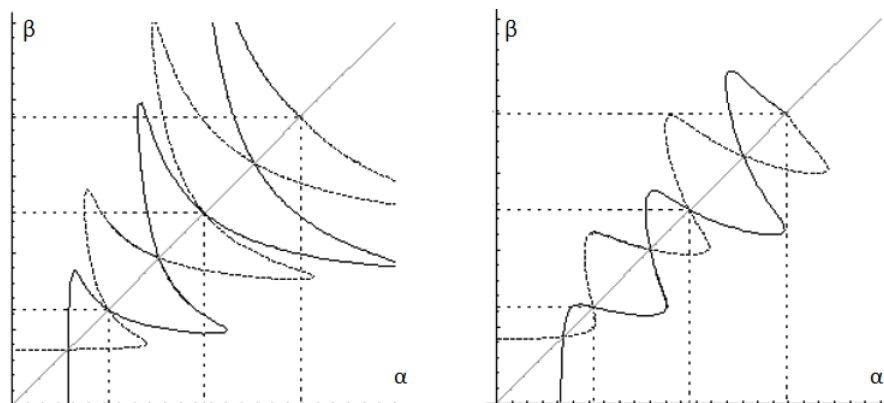
Obrázek 5.2: Fučíkovo spektrum úlohy s integrální podmínkou (převzato z [6]).

### 5.3 Kombinace předchozích úloh

V článku [6] se autorka zabývala také úlohou, která propojuje Dirichletovu podmínku s tou integrální. Je zde studováno Fučíkovo spektrum úlohy, která má tvar

$$\begin{cases} Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, & x \in (0, \pi), \\ (1 - \eta)u(\pi) + \eta \int_0^\pi u \, dx = 0, & \eta \in [0, 1], \end{cases} \quad (5.13)$$

kde  $L$  je opět operátor, která jsme definovali předpisem (2.1). Speciální volbou  $\eta = 0$  dostaneme Dirichletovu úlohu (5.4). Změnou parametru se projeví spojitá deformace Fučíkova spektra. Dosáhneme-li hodnoty  $\eta = 1$ , získáme nelokální úlohu (5.12). Fučíkovo spektrum je konstruováno analogickými kroky jako v předchozích případech. Na závěr ještě uvedeme obrázek Fučíkova spektra úlohy (5.13) pro hodnoty  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $\eta = \frac{3}{4}$ .



Obrázek 5.3: Fučíkovo spektrum kombinované úlohy pro parametry  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  
respektive  $\eta = \frac{3}{4}$  (převzato z [6]).

## 5.4 Fučíkova nelokální úloha s parametry

Dále je možné uvažovat zobecnění úlohy (4.3) do Fučíkova typu. Úloha bude mít tvar

$$\begin{cases} Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, \\ \left( \int_0^\pi (u^+)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^\pi (u^-)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{cases} \quad (5.14)$$

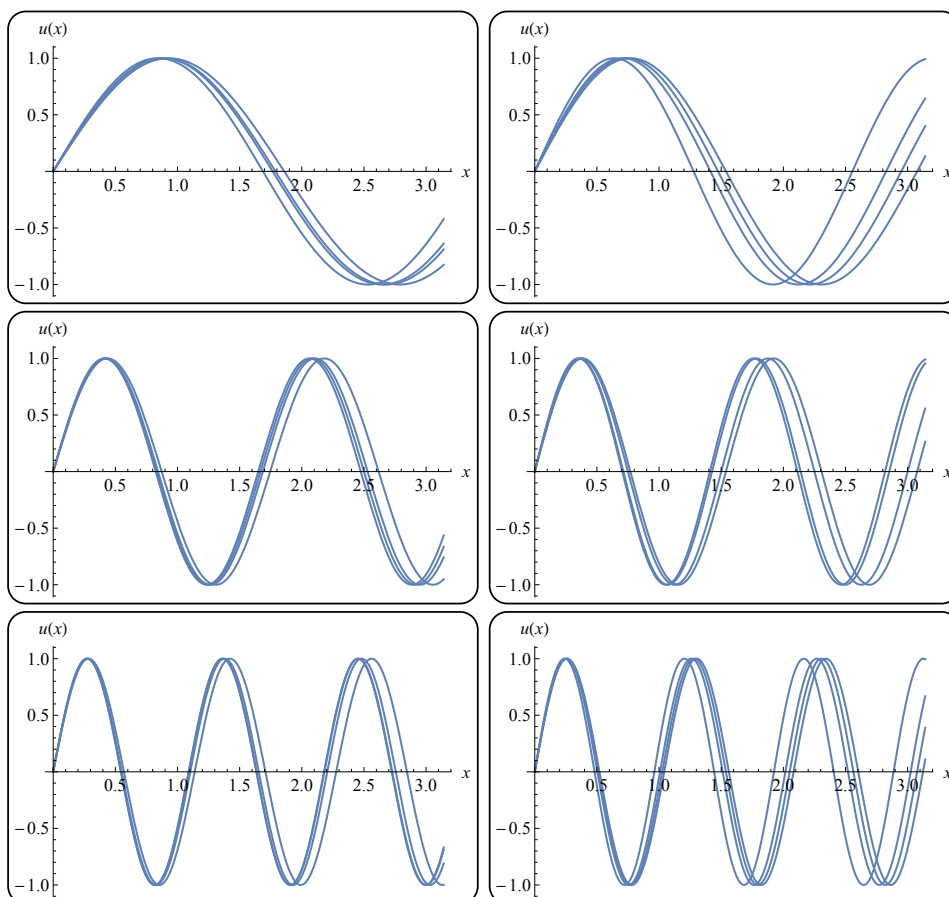
kde  $L$  je operátor definovaný v (2.1) a  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

V této práci bohužel již není prostor pro detailní analýzu tak rozsáhlé úlohy, proto ji ponechme jako vhodný námět pro další výzkum.

Už nyní lze ale říci, že při konstrukci Fučíkova spektra by se v mnoha případech prováděly obdobné kroky, jaké jsme již uvedli. Rovnice, které by popisovaly Fučíkovo spektrum úlohy (5.14) by měly obdobnou strukturu jako ty, které jsme odvodili v sekci 4.3. Opět bychom museli zkoumat jejich řešitelnost v závislosti na hodnotách parametrů. Některé výsledky, které jsou platné pro případ bodového spektra takové úlohy by ale neztratily na platnosti (např. situace, kdy příslušné integrály divergují apod.).

# PŘÍLOHA A

## OBRÁZKY VYŠŠÍCH VLASTNÍCH FUNKCÍ



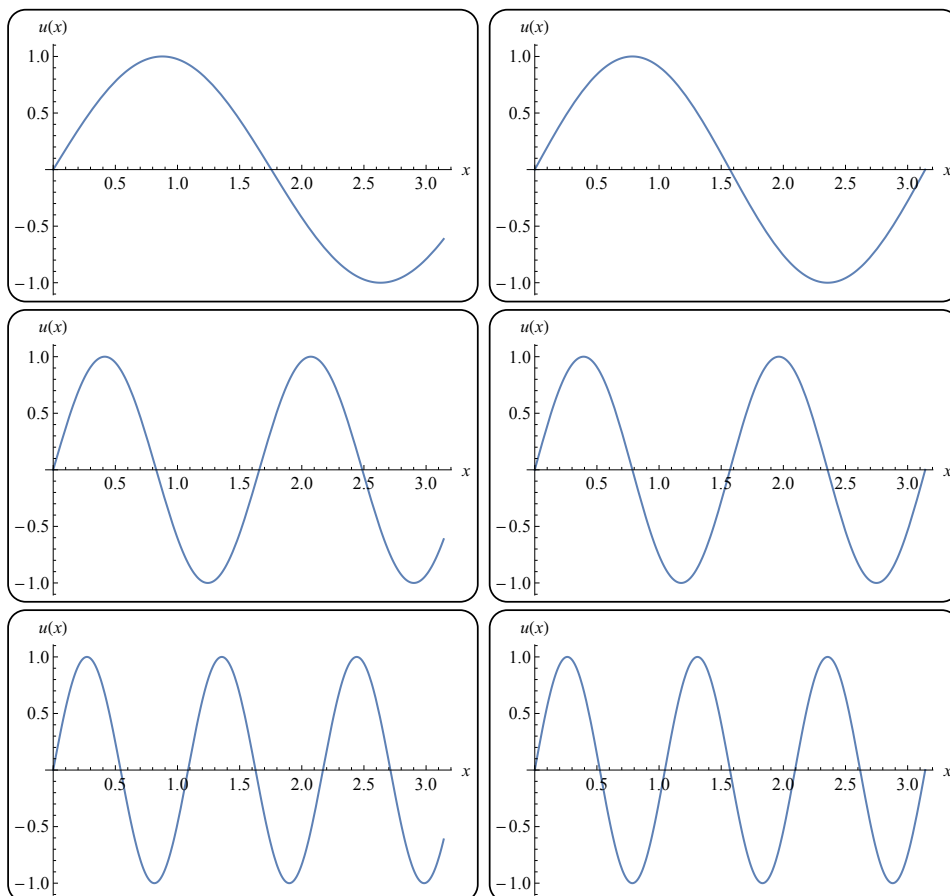
Obrázek A.1: Několik vlastních funkcí pro 1. až 6. vlastní číslo pro  $p > 1$ .





# PŘÍLOHA B

## LIMITNÍ VLASTNÍ ČÍSLA



Obrázek B.1: Prvních šest limitních vlastních funkcí.

Pro ilustraci uvedeme ještě některé hodnoty vlastních čísel pro hodnoty  $p \geq 1, q = 1$ .

<b>p</b>	<b>1. vl.č</b>	<b>2. vlč.</b>	<b>3.vl. č.</b>	<b>4.vl. č</b>	<b>5.vl. č</b>
<b>1</b>	-	4	-	16	-
<b>2</b>	2.96959	5.17983	13.1168	19.3921	30.6255
<b>3</b>	2.85528	5.33927	12.8062	19.909	30.0169
<b>10</b>	2.85761	4.93945	12.9575	19.413	30.4644
<b>20</b>	2.931311	4.57914	13.2643	18.3161	31.1531
<b>50</b>	3.02966	4.29357	13.6513	17.1743	31.9831
<b>100</b>	3.08878	4.1716	13.8835	16.6864	32.474
$+\infty$	$\approx 3.2035$	4	$\approx 14.3628$	16	$\approx 33.5222$

## PŘÍLOHA C

### VZTAHY MEZI FUNKCEMI

Integrální podmínka úlohy (4.3) umožňuje pro diskrétní hodnoty parametrů propojení s další funkcí – dvojným faktoriálem.

**Lemma C.1** (O vztahu funkce Gamma a dvojného faktoriálu)  
*Nechť  $n \in \mathbb{N}$ , potom*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (\text{C.1})$$

DŮKAZ. Větu, která hovoří o tomto vztahu, lze nalézt v [1].  $\square$

Obdobně jako to bylo nutné v celém textu, musíme uvažovat liché a sudé hodnoty zvlášť. Zabývejme se tedy nejprve sudými.

**Lemma C.2** (O přepisu integrálů pro sudé mocniny)  
*Nechť  $p = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , potom*

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^p dx = \frac{\pi(2n-1)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot (2n)!!}. \quad (\text{C.2})$$

DŮKAZ. Využijeme-li (4.5), dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(n+1)},$$

kde jsme dosadili  $p = 2n$ . Z lemmatu 1.6 plyne, že  $\Gamma(n+1) = n!$ , dále z lemmatu C.1 je  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ . Použijeme-li tyto výsledky, potom lze psát

$$\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(n+1)} = \frac{\pi(2n-1)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot 2^n n!} = \frac{\pi(2n-1)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot (2n)!!},$$

neboť

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)\cdots 2 = 2^n n!.$$

□

Obdobně lze nyní postupovat i pro liché hodnoty.

**Lemma C.3** (O přepisu integrálů pro liché mocniny)

Nechť  $p = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Potom

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^p dx = \frac{2 \cdot (2n)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot (2n+1)!!}. \quad (\text{C.3})$$

DŮKAZ. Opět využijeme (4.5) a dosadíme  $p = 2n + 1$ . Máme tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^{2n+1} dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+1)}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(n + \frac{3}{2})}.$$

S využitím vztahu  $\Gamma(n+1) = n!$  a dále pomocí (1.6) upravíme

$$\Gamma(n + \frac{3}{2}) = (n + \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2}).$$

Lze tedy psát

$$\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+1)}{\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(n + \frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot n!}{\sqrt{\lambda} \cdot (n + \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}.$$

Nyní opět využijeme vztah (C.1) a po úpravě dostaneme dokazované tvrzení

$$\frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^n n!}{\sqrt{\lambda} \cdot (n + \frac{1}{2})(2n-1)!!\sqrt{\pi}} = \frac{2 \cdot (2n)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot (2n+1)(2n-1)!!} = \frac{2 \cdot (2n)!!}{\sqrt{\lambda} \cdot (2n+1)!!}$$

□

Je zřejmé, že při studiu vlivu diskretních parametrů na řešitelnost úlohy (4.3) je možné využít tyto výsledky. V předpisech bodového spektra (4.28) lze potom příslušné integrály nahradit těmito vztahy.

**Poznámka C.4** (O jiném odvození vztahů pro diskretní parametry)

Předchozí vztahy lze odvodit také nezávisle na funkci Gamma, využijeme-li vztah pro redukci mocniny v integrálu

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^p dx &= \left[ \frac{-\cos \sqrt{\lambda}x (\sin \sqrt{\lambda}x)^{p-1}}{\sqrt{\lambda}p} \right]_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} + \\ &= \frac{p-1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^{p-2} dx = \\ &= \frac{p-1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} (\sin \sqrt{\lambda}x)^{p-2} dx, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

*který lze snadno získat integrováním levé strany (C.4) pomocí per partes. Postupnou opakovanou redukcí mocniny lze odvodit při dosazení  $p = 2n$ , respektive  $p = 2n + 1$  vztahy, které se vyskytují na pravých stranách rovností (C.2) a (C.3).*



Na závěr, z důvodu přehlednosti, shrneme dosažené výsledky. Pokud jsme zvolili fixně  $q = 1$  dostali jsme výsledky, o kterých hovoří následující tabulka.

Tabulka C.1: Řešitelnost úlohy (4.3) pro  $q = 1$ .

$p$	$p \leq -1$	$p \in (-1, 0)$	$p \in (0, 1)$	$p > 1$
$q = 1$	×	† <sup>1</sup>	×	✓

Pokud jsme naopak zvolili opačně  $p = 1$ , získali jsme výsledky vyjádřené touto tabulkou:

Tabulka C.2: Řešitelnost úlohy (4.3) pro  $p = 1$ .

$q$	$q \leq -1$	$q \in (-1, 0)$	$q \in (0, 1)$	$q > 1$
$p = 1$	×	† <sup>1</sup>	† <sup>2</sup>	×

<sup>1</sup> Existují pouze první vlastní čísla.

<sup>2</sup> Existují i některá vyšší vlastní čísla.

Hodnota  $p = q = 1$  je, jak jsme zjistili, zajímavá z toho pohledu, že existují pouze vlastní čísla se sudým indexem.





## LITERATURA

- [1] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Inc., New York, 1964.
- [2] F. J. DYSON, N. E. FRANKEL, and M. L. GLASSER, *Lehmer's interesting series*, <http://arxiv.org/pdf/1009.4274v4.pdf>, 2011, [Online; Naposledy navštíveno 21.05.2015].
- [3] S. FUČÍK, *Boundary value problems with jumping nonlinearities*, Časopis pro pěstování matematiky **vol. 101, No. 1** (1976), 69–87.
- [4] A. KUFNER, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Západočeská univerzita, Plzeň, 1993.
- [5] N. N. LEBEDEV, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1965.
- [6] N. SERGEJEVA, *Fučík spectrum for the second order BVP with nonlocal boundary condition.*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, **vol. 12, No. 3** (2007), 419–429.