

Posudek oponenta bakalářské práce

Autor: Martin Kaisler
Název práce: Zobecněné úlohy na vlastní čísla s nelineárními okrajovými podmínkami
Studijní obor: Matematika pro přírodní vědy
Oponent práce: Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

Splnění cílů práce:	velmi dobře
Odborný přínos práce:	nové výsledky
Matematická (odborná) úroveň:	velmi dobrá
Věcné chyby:	vzhledem k rozsahu přiměřený počet
Grafická, jazyková a formální úroveň:	velmi dobrá
Použitý matematický aparát:	MA1, MA2, ODR

Autor v práci studuje řešitelnost okrajové úlohy ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, & (\int_0^\pi (u^+(x))^p dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_0^\pi (u^-(x))^q dx)^{\frac{1}{q}}, \end{cases} \quad (1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hlavní výsledky práce jsou soustředěny do kapitoly čtvrté, která obsahuje

1. důkazy existence a neexistence prvního vlastního čísla pro vybrané hodnoty parametrů p a q ,
2. pozorování o existenci a neexistenci vyšších vlastních čísel na základě provedených numerických experimentů,
3. studium limitního chování vlastních čísel pro $p \rightarrow +\infty$ a $q = 1$ a popis vlastních čísel v případě $p = q$.

Připomínky:

1. Lemma 1.6 o vyjádření hodnot Gamma funkce v přirozených číslech by mělo být dokázáno matematickou indukcí.
2. V definici 1.8, kde je zaveden pojem vlastního čísla operátoru, není uvedeno z jakého oboru jsou vlastní čísla uvažována.
3. Tvrzení (i) a (ii) na straně 16 nejsou pravdivá.
4. Důkaz lemmatu 4.5 o konvergenci nevlastního integrálu vlivem funkce není proveden korektně. K důkazu lze použít srovnávacího kritéria.

5. Ve větách 4.9, 4.11 a 4.16 jsou formulovány postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost prvního vlastního čísla. Dokázána je však pouze existence prvního vlastního čísla, a to pomocí Cauchyovy věty o nulové hodnotě. Bylo by dobré tuto větu v práci alespoň jednou zmínit a před jejím použitím ověřit splnění všech jejích předpokladů (tj. nezapomenout na spojitost).
6. Náhrady výrazů při výpočtu limit pro $p \rightarrow +\infty$ použité v důkazu vět 4.11 a 4.25 nejsou zcela zdůvodněny. Očekával bych použití věty o sevření.

Doporučení:

1. Zavádění diferenciálního operátoru L ve druhé kapitole je zcela zbytečné a následně vede k používání nekorektních operátorových zápisů.
2. U formulace úlohy (4.3) by mělo být zdůrazněno, jak bude chápáno splnění podmínky

$$\left(\int_0^\pi (u^+(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\pi (u^-(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Očekával bych, že nutnou podmínkou pro splnění této integrální podmínky bude konečnost obou integrálů. Omezil bych se tedy na hodnoty $p, q > -1$.


Otázky:

1. V rámci čtvrté kapitoly označujete prvním vlastním číslem takovou reálnou hodnotu λ , pro kterou má okrajová úloha (1) netriviální řešení s kladnou derivací v počátku a s právě jedním nulovým bodem na intervalu $(0, \pi]$. Pro které dvojice $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ mimo přímky $p = 1$ a $q = 1$ očekáváte existenci či neexistenci takto definovaného prvního vlastního čísla?
2. Označme prvním vlastním číslem takovou reálnou hodnotu λ , pro kterou má okrajová úloha (1) netriviální řešení s právě jedním nulovým bodem na intervalu $(0, \pi)$. Jak bude vypadat znění vět 4.12 a 4.18 v tomto případě?

Doporučuji bakalářskou práci Martina Kaislera uznat jako kvalifikační a navrhuji hodnocení známkou

velmi dobře.

V Plzni, 10. června 2015


Ing. Petr Nečas, Ph.D.
KMA FAV ZČU