ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň 2015 Jan RENDL

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ REYNOLDSOVY ROVNICE PRO KLUZNÁ LOŽISKA

Jan RENDL

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto bakalářskou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a využil jsem jen uvedených pramenů a literatury.

V Pzni dne 24. května 2015 Jan Rendl

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D., za příkladné vedení bakalářské práce, četné připomínky, konzultace, ochotu a trpělivost. Dále bych rád poděkoval Ing. Luboši Smolíkovi za odborné rady a pomoc při zpracování této práce.

Jan Rendl

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá popsáním tlakového rozložení v kluzném ložisku pomocí Reynoldsovy rovnice. V první části této práce je rovnice detailně odvozena. Rovnici je možné dále zjednodušit do speciálních tvarů pro krátká a dlouhá ložiska. Dalším cílem bakalářské práce je odvození analytických a numerických řešení Reynoldsových rovnic. Numerické řešení je prováděno metodou konečných diferencí. Z tlakového rozložení jsou odvozeny analytické a numerické vztahy pro výpočet hydraulické síly a koeficientů tuhosti olejového filmu. Na závěr práce je ukázáno srovnání mezi jednotlivými způsoby řešení tlakových rozložení, hydraulických sil a koeficientů tuhosti pro každý typ kluzného ložiska. Tato část práce obsahuje i výsledky z komerčního programu ARMD. Všechny výpočty na základě odvozených vztahů byly prováděny v programu MATLAB.

Klíčová slova: kluzné ložisko, Reynoldsova rovnice, analytické řešení, numerické řešení, hydraulická síla, tuhost olejového filmu

Abstract

This bachelor thesis is concerned to the description of the pressure distribution in the journal bearing by Reynolds equation. The equation is derivated in detail in the first part of the thesis. It is possible to write the Reynolds equation in the special forms for short and long bearings. The next target of the thesis is the derivation of the analytical and numerical solutions of Reynolds equations. The numerical solution is provided by the finite difference method. The analytical and numerical equations of hydraulic force and coefficients of the oil-film stiffness are derivated from the pressure distribution. In the end of the thesis, the comparision of the pressure distribution, hydraulic force and oil-film stiffness results from each method of solution is shown for every type of journal bearing. This part includes the results from the commercial programme ARMD too. All calculations, which are based on derivation of equations, were provided in the programme MATLAB.

Key words: journal bearing, Reynolds equation, analytical solution, numerical solution, hydraulic force, oil-film stiffness

Obsah

Seznam použitých symbolů **6**

1 Úvod **8**

2 Odvození Reynoldsovy rovnice **10**
2.1 Reynoldsova rovnice pro stlačitelné mazivo 11
2.2 Reynoldsova rovnice pro krátké radiální ložisko 15
2.3 Reynoldsova rovnice pro dlouhé radiální ložisko 16

3 Reynoldsova rovnice s Vogelpohlovým parametrem **17**
3.1 Převod Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru 17
3.2 Vogelpohlův parametr 19

4 Řešení Reynoldsovy rovnice **21**
4.1 Analytické řešení 21
4.1.1 Analytické řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko kruhového průřezu 21
4.1.2 Analytické řešení Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko kruhového průřezu 22
4.2 Numerické řešení 23
4.2.1 Numerické derivování 23
4.2.2 Řešení Reynoldsovy rovnice metodou konečných diferencí 24
4.2.3 Numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice pro ložisko kruhového průřezu 27
4.2.4 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko kruhového průřezu 28
4.2.5 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko kruhového průřezu 29
4.2.6 Numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro ložisko kruhového průřezu 31
4.2.7 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro krátké ložisko kruhového průřezu 33
4.2.8 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro dlouhé ložisko kruhového průřezu 34

5 Hydraulická síla v kluzném ložisku **36**
5.1 Složky hydraulické síly 36
5.2 Analytické vyjádření hydraulické síly pro speciální případy kluzných ložisek 41

6 Koeficienty tuhosti **43**
6.1 Výpočet koeficientů tuhosti 43

7 Srovnání výsledků **44**
7.1 Parametry ložiska 44
7.2 Tlakové rozložení v krátkém ložisku 45
7.3 Tlakové rozložení v obecném ložisku 50
7.4 Tlakové rozložení v dlouhém ložisku 52
7.5 Výsledky výpočtu hydraulické síly 59
7.6 Výsledky výpočtu koeficientů tuhosti 61

8 Závěr **63**
8.1 Rozšíření bakalářské práce 64

Literatura **65**

Seznam obrázků **67**

Seznam tabulek **68**

Seznam použitých symbolů

$c\,(X)\,, c$	[m]	tloušťka vrstvy olejového filmu při centrické poloze čepu hřídele
D	[m]	průměr ložiskové pánve
e_H	[m]	excentricita čepu hřídele
F_{By}	[N]	složka hydraulické síly působící na ložiskovou pánev ve směru y
F_{Bz}	[N]	složka hydraulické síly působící na ložiskovou pánev ve směru z
F_{Hr}	[N]	radiální složka hydraulické síly působící na čep hřídele
F_{Ht}	[N]	tečná složka hydraulické síly působící na čep hřídele
F_{Hy}	[N]	složka hydraulické síly působící na čep hřídele ve směru y
F_{Hz}	[N]	složka hydraulické síly působící na čep hřídele ve směru z
$h\,(X)\,, h$	[m]	tloušťka vrstvy olejového filmu
$\overline{h}\,(X)\,, \overline{h}$	[−]	bezrozměrná tloušťka vrstvy olejového filmu
$k_{i,j}$	$[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}]$	koeficienty tuhosti olejového filmu
L	[m]	délka ložiska
p	[Pa]	tlak vzniklý ve vrstvě olejového filmu
$\overline{p}$	[−]	bezrozměrný tlak vzniklý ve vrstvě olejového filmu
p_{CAV}	[Pa]	tlak v kavitované oblasti
p_L	[Pa]	tlak na levé straně ložiska
p_P	[Pa]	tlak na pravé straně ložiska
p_S	[Pa]	tlak na stranách ložiska
p_{VST}	[Pa]	tlak přiváděného oleje
p_0	[Pa]	tlak oleje v nejširším místě ložiskové mezery
R	[m]	poloměr čepu hřídele
R_B	[m]	poloměr ložiskové pánve
t	[s]	čas
$\overline{t}$	[−]	bezrozměrný čas
u	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	obvodová složka rychlosti proudění v olejovém filmu
u_1	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	obvodová složka rychlosti bodu na vnitřním povrchu ložiska
u_2	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	obvodová složka rychlosti bodu na povrchu čepu hřídele
v	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	radiální složka rychlosti proudění v olejovém filmu
v_1	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	radiální složka rychlosti bodu na vnitřním povrchu ložiska
v_2	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	radiální složka rychlosti bodu na povrchu čepu hřídele
w	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	axiální složka rychlosti proudění v olejovém filmu
w_1	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	axiální složka rychlosti bodu na vnitřním povrchu ložiska
w_2	$[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	axiální složka rychlosti bodu na povrchu čepu hřídele
X	[m]	obvodová souřadnice
$\overline{X}$	[rad]	obvodová souřadnice

y_B	[m]	y-ová souřadnice středu ložiskové pánve
y_H	[m]	y-ová souřadnice středu čepu hřídele
$\dot{y}_B$	$[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	rychlost středu ložiskové pánve ve směru osy y
$\dot{y}_H$	$[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	rychlost středu čepu hřídele ve směru osy y
Y	[m]	radiální souřadnice
z_B	[m]	z-ová souřadnice středu ložiskové pánve
z_H	[m]	z-ová souřadnice středu čepu hřídele
$\dot{z}_B$	$[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	rychlost středu ložiskové pánve ve směru osy z
$\dot{z}_H$	$[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	rychlost středu čepu hřídele ve směru osy z
Z	[m]	axiální souřadnice
$\overline{Z}$	[−]	bezrozměrná axiální souřadnice
β	[rad]	obvodová souřadnice spolurotujícího souřadnicového systému
γ	[rad]	polohový úhel spojnice středů
Δ		označení přírůstku a kroku
ε_H	[−]	poměrná excentricita čepu hřídele
η	$[\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}]$	dynamická viskozita oleje
η_C	$[\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}]$	dynamická viskozita oleje v kavitované oblasti
ϱ	$[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	hustota maziva
$\tau_{i,j}$	$[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$	smyková složka napětí
φ	[rad]	obvodová souřadnice
Φ	[−]	Vogelpohlův parametr
ω	$[\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	úhlová rychlost otáčení čepu hřídele

1 Úvod

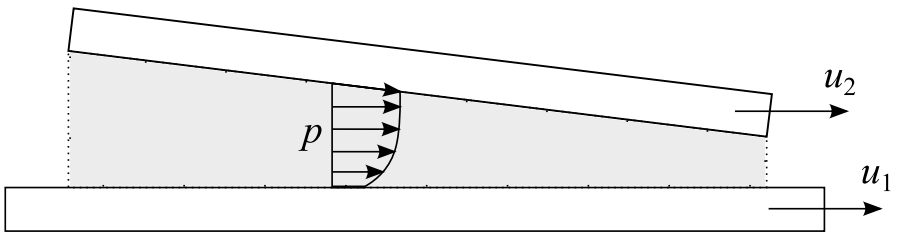
Kluzná ložiska patří ve strojírenství k nejrozšířenějším typům používaných ložisek díky své velké únosnosti, konstrukční jednoduchosti a dynamickým vlastnostem olejového filmu, zejména tuhosti a tlumení. Tento typ ložisek se používá hlavně jako uložení rychloběžných rotorů. Aby kluzné ložisko fungovalo správně a vznikla tak nosná vrstva olejového filmu, musí být přítomen efekt hydrodynamického mazání [2]. Pro vznik tohoto efektu musí být splněny následující podmínky:

- velká rychlost pohybu povrchů, mezi nimiž se olejový film nachází,
- povrchy nejsou rovnoběžné a vytvářejí tzv. klínovou mezeru (obr. 1.1).

Kluzná ložiska je možné rozdělit na krátká, dlouhá a obecná ložiska. Poměr geometrických parametrů délky a průměru ložiskové pánve rozhoduje o tom, o jaký konkrétní typ kluzného ložiska se jedná.

Vzniklé tlakové rozložení v olejovém filmu popsal parciální diferenciální rovnicí irský fyzik Osborne Reynolds poprvé v roce 1886. Tato Reynoldsova rovnice je odvozena v kapitole 2 a je možné s ní popsat tlakové rozložení ve všech typech kluzných ložisek. Pro krátká a dlouhá ložiska můžeme uvažovat určité zjednodušující předpoklady, a proto můžeme z obecné rovnice vynechat některé členy a dostat tak idealizované Reynoldsovy rovnice, které slouží pro popis tlakového rozložení pouze v krátkých nebo dlouhých ložiscích (kap. 2). Reynoldsova rovnice je v odborné literatuře často uváděna v bezrozměrném tvaru s Vogelpohlovým parametrem, který je popsán v kapitole 3. Takto upravená rovnice přináší lepší stabilitu numerického řešení.

Podrobný rozbor řešení těchto rovnic je proveden v kapitole 4. Po vyřešení získáme tlakové rozložení v ložiskové mezeře a následně můžeme vypočítat hydraulickou sílu (viz kap. 5), tj. sílu, kterou působí olejový film na čep hřídele. Z hydraulické síly je možné bezprostředně vyjádřit jednotlivé koeficienty tuhosti olejového filmu (kap. 6). Všechny výpočty byly provedeny v programu MATLAB.



Obr. 1.1: Klínová mezera

Na závěr této bakalářské práce je provedeno srovnání výsledků řešení všech typů Reynoldsových rovnic spolu s výsledky hydraulické síly a koeficientů tuhosti pro daný typ ložiska. Výsledky jsou srovnány i s výstupy, které byly získány komerčním programem ARMD V5.7 G1 JUNBR obsahující modul pro radiální kluzná ložiska s pevnou geometrií. Výpočty v tomto programu provedl Ing. Luboš Smolík.

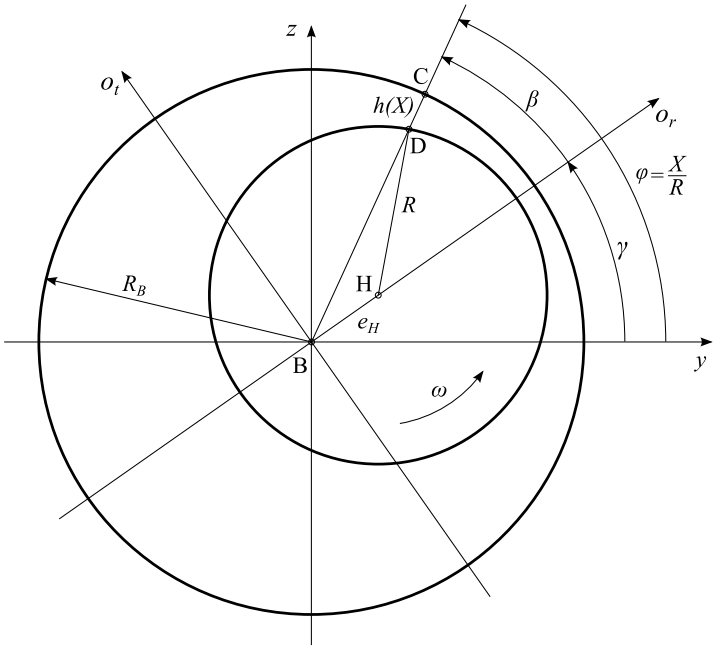
Cíle této bakalářské práce jsou stručně shrnuty do těchto bodů:

- odvození Reynoldsovy rovnice,
- analytické a numerické řešení Reynoldsovy rovnice,
- odvození výpočtu složek hydraulické síly,
- odvození výpočtu koeficientů tuhosti,
- výpočet tlakového rozložení, složek hydraulické síly a koeficientů tuhosti pomocí jednotlivých metod a srovnání výsledků pro daný typ ložiska.

2 Odvození Reynoldsovy rovnice

Pro stanovení tlakového rozložení v olejovém filmu v ložiskové mezeře je nezbytné znát její geometrický popis [8], konkrétně tloušťku h, která obecně závisí na tvaru ložiskové pánve, excentricitě čepu e_H a je funkcí obvodové souřadnice X. Uvažujme kruhový průřez čepu hřídele o poloměru R a ložiskové pánve o poloměru R_B, tj. tloušťka vrstvy olejového filmu $c\,(X) = konst.$ při centrické poloze čepu. Protože tloušťka vrstvy olejového filmu je proti rozměrům ložiskové pánve a čepu hřídele velmi malá, můžeme předpokládat $R \approx R_B$. V obecné poloze čepu (obr. 2.1) dané nenulovou excentricitou lze tloušťku olejového filmu v obecném místě určeném obvodovou souřadnicí X popsat jako

$$h\,(X) = R + c - \overline{\mathrm{BD}}. \tag{2.1}$$



Obr. 2.1: Průřez ložiskem

Vzdálenost $\overline{\mathrm{BD}}$ vyjádříme pomocí vztahu

$$\overline{\mathrm{BD}} = e_H \cos\beta + R\sqrt{1 - \left(\frac{e_H}{R}\right)^2 \sin\beta}, \tag{2.2}$$

kde β je obvodová souřadnice spolurotujícího souřadného systému $o_r o_t$. Výraz pod odmocninou je díky platnosti $e_H \ll R$ přibližně roven 1. Po dosazení (2.2) do (2.1) a respektování vzájemného vztahu mezi obvodovými souřadnicemi

$$\beta = \frac{X}{R} - \gamma, \tag{2.3}$$

dostáváme

$$h\left(X\right) = c - e_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right). \tag{2.4}$$

Zavedeme-li poměrnou excentricitu

$$\varepsilon_H = \frac{e_H}{c}, \tag{2.5}$$

přejde rovnice (2.4) do tvaru

$$h\left(X\right) = c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]. \tag{2.6}$$

Rychlost bodu C na vnitřním povrchu ložiskové pánve lze vyjádřit ze složek rychlostí bodu B ve směru y a z

$$u_1 = \; -\dot{y}_B \sin\frac{X}{R} + \dot{z}_B \cos\frac{X}{R}, \tag{2.7}$$

$$v_1 = \; \dot{y}_B \cos\frac{X}{R} + \dot{z}_B \sin\frac{X}{R}, \tag{2.8}$$

kde u_1 je rychlost v obvodovém směru a v_1 je rychlost v radiálním směru. Analogicky rychlost bodu D na povrchu čepu hřídele v obvodovém a radiálním směru zapíšeme s využitím rychlostí bodu H jako

$$u_2 = \; -\dot{y}_H \sin\frac{X}{R} + \dot{z}_H \cos\frac{X}{R} + R\,\omega, \tag{2.9}$$

$$v_2 = \; \dot{y}_H \cos\frac{X}{R} + \dot{z}_H \sin\frac{X}{R}, \tag{2.10}$$

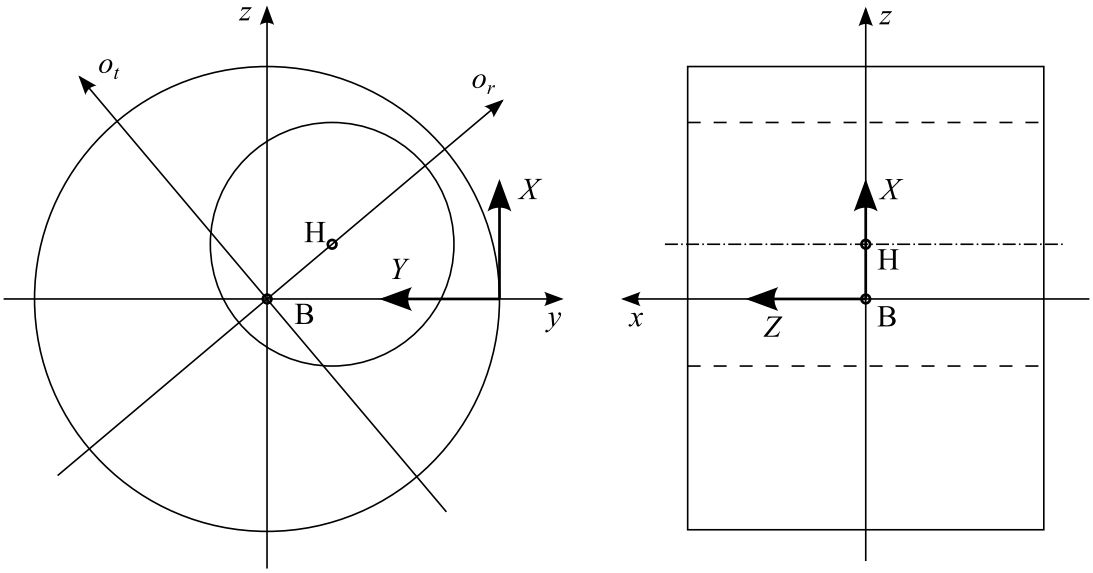
kde u_2 je rychlost v obvodovém směru a v_2 je rychlost v radiálním směru. Ve speciálním případě při uvažování stacionární polohy, kdy jedinou nenulovou rychlostí je relativní rotační pohyb čepu hřídele, přejdou rychlosti vyjádřené v rovnicích (2.7) až (2.10) do tvaru

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad u_2 = R\,\omega, \qquad v_2 = 0. \tag{2.11}$$

2.1 Reynoldsova rovnice pro stlačitelné mazivo

Proudění olejové vrstvy v kluzném radiálním ložisku lze popsat Reynoldsovou rovnicí. Při odvození Reynoldsovy rovnice pro stlačitelné mazivo uvažujeme [8] předpoklady klasické teorie hydrodynamického mazání. Užitím těchto předpokladů dojde ke zjednodušení při stanovení popisu rozložení tlaku a rychlostí v ložiskové mezeře. Uvažujeme tedy, že

- čep hřídele a ložisková pánev jsou absolutně tuhé,
- jejich povrchy jsou dokonale hladké,
- čep hřídele je válcový,
- příčný průřez ložiskové pánve má obecný tvar,
- tvar ložiskové pánve se v axiálním směru nemění,
- šířka ložiskové mezery je velmi malá vzhledem k poloměru čepu hřídele,
- mazivo je Newtonovská tekutina,
- proudění v ložiskové mezeře je laminární a izotermické,
- tlak maziva se v radiálním směru nemění, protože mazivo v tomto směru neproudí,
- zanedbáváme setrvačné účinky maziva kvůli jejich malým hodnotám,
- vliv zakřivení olejového filmu je zanedbatelný.



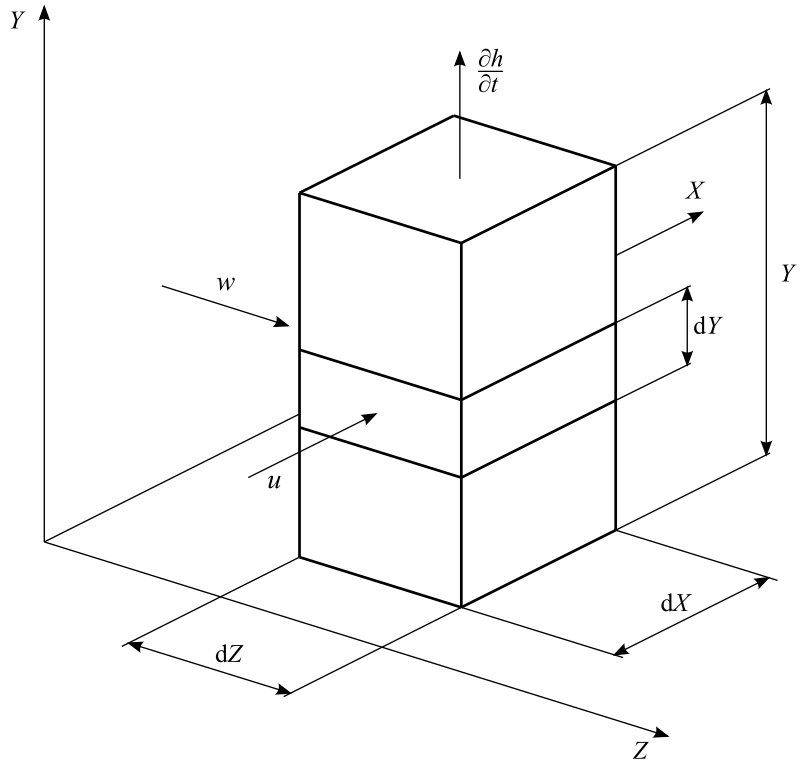
Obr. 2.2: Zavedení souřadnicového systému

Pro odvození Reynoldsovy rovnice za výše uvedených předpokladů zavedeme [8] kartézský souřadnicový systém. Osu X ztotožníme s obvodovým směrem, osu Y se směrem radiálním a osu Z se směrem axiálním. Počátek souřadnicového systému umístíme na povrch ložiskové pánve do středu její délky (obr. 2.2). Z vrstvy maziva vyjmeme třemi na sebe kolmými řezy element (obr. 2.3), pro který zapíšeme podmínky statické rovnováhy pro směr X a Z

$$p\,\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial X}\mathrm{d}X\right)\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z - \tau_{XY}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z + \left(\tau_{XY} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y}\,\mathrm{d}Y\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Z = 0, \tag{2.12}$$

$$p\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial Z}\mathrm{d}Z\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y - \tau_{ZY}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z + \left(\tau_{ZY} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial Y}\mathrm{d}Y\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Z = 0, \tag{2.13}$$

kde τ_{XY}, τ_{ZY} jsou smyková napětí na hranici dvou vrstev maziva.



Obr. 2.3: Vyjmutý element z ložiskové mezery

Po úpravě rovnic (2.12) a (2.13) dostáváme

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial Y}. \tag{2.15}$$

Jelikož je mazivo Newtonovská tekutina, musí pro ní platit Newtonův zákon viskozity popsaný vztahy

$$\tau_{XY} = \eta\,\frac{\partial u}{\partial Y}, \tag{2.16}$$

$$\tau_{ZY} = \eta\,\frac{\partial w}{\partial Y}, \tag{2.17}$$

kde η je dynamická viskozita oleje a u, w jsou jsou složky rychlosti proudění v obvodovém a axiálním směru. Nyní dostaneme po dosazení (2.16), (2.17) do (2.14) a (2.15) rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial X}, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}. \tag{2.19}$$

Po integraci rovnic (2.18) a (2.19) mají složky rychlosti obecný tvar

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial X}Y^2 + C_1 Y + C_2, \tag{2.20}$$

$$w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}Y^2 + C_3 Y + C_4. \tag{2.21}$$

Z okrajových podmínek,

$$Y = 0: \qquad u = u_1, \qquad w = w_1,$$
$$Y = h: \qquad u = u_2, \qquad w = w_2,$$

získáme hodnoty integračních konstant. Po vyjádření integračních konstant C_1 až C_4 přechází [8] rovnice (2.20) a (2.21) do tvaru

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial X}\left(Y^2 - hY\right) + \frac{u_2 - u_1}{h}Y + u_1, \tag{2.22}$$

$$w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}\left(Y^2 - hY\right) + \frac{w_2 - w_1}{h}Y + w_1. \tag{2.23}$$

Hmotnostní průtok stěnami vyjmutého elementu si můžeme představit jako průtok ploškou nekonečně malé šířky. Ten můžeme pro daný směr průtoku celou ložiskovou mezerou zapsat pomocí integrálu jako

$$q_{mX} = \int_0^h \varrho\, u \,\mathrm{d}Y, \tag{2.24}$$

$$q_{mZ} = \int_0^h \varrho\, w \,\mathrm{d}Y, \tag{2.25}$$

kde ϱ je hustota oleje a q_{mX}, q_{mZ} je hmotnostní průtok stěnami elementu v obvodovém a axiálním směru. Po dosazení výše vyjádřených rychlostí (2.22), (2.23) do (2.24) a (2.25) a vypočítáním určitých integrálů získáme vztahy pro jednotlivé hmotnostní průtoky

$$q_{mX} = -\frac{\varrho}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial X}h^3 + \frac{1}{2}h\varrho\left(u_1 + u_2\right), \tag{2.26}$$

$$q_{mZ} = -\frac{\varrho}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}h^3 + \frac{1}{2}h\varrho\left(w_1 + w_2\right). \tag{2.27}$$

Pro vyjmutý element (obr. 2.3) z vrstvy olejového maziva platí [8] podmínka kontinuity proudění. Podmínka kontinuity říká, že musí platit rovnost mezi hmotností kapaliny, která do elementu přiteče, a hmotností kapaliny, která odteče. V podmínce kontinuity musí být také zohledněna hmotnost kapaliny, která vyplní zvětšující se objem, a hmotnost kapaliny spojená se změnou hustoty maziva. Tyto dva členy přidáme na pravou stranu k hmotnosti kapaliny, která element opouští. Matematické vyjádření podmínky kontinuity proudění pro element z obr. 2.3 je

$$\begin{aligned} q_{mX}\mathrm{d}Z\mathrm{d}t + q_{mZ}\mathrm{d}X\mathrm{d}t = \left(q_{mX} + \frac{\partial q_{mX}}{\partial X}\mathrm{d}X\right)\mathrm{d}Z\mathrm{d}t + \left(q_{mZ} + \frac{\partial q_{mZ}}{\partial Z}\mathrm{d}Z\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}t + \\ + \varrho\frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z\mathrm{d}t + h\frac{\partial \varrho}{\partial t}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Rovnice (2.28) přejde jednoduchými matematickými úpravami do tvaru

$$\frac{\partial q_{mX}}{\partial X} + \frac{\partial q_{mZ}}{\partial Z} + \varrho\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{2.29}$$

Dosazením rovnic (2.26) a (2.27) do (2.29) dostaneme základní Reynoldsovu rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = 6\frac{\partial}{\partial X}\left[\varrho h\left(u_1 + u_2\right)\right] + \\ + 6\frac{\partial}{\partial Z}\left[\varrho h\left(w_1 + w_2\right)\right] + 12\frac{\partial}{\partial t}\left(h\varrho\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Obvodovou souřadnici X lze transformovat vztahem

$$X = R\varphi,$$

a tak lze Reynoldsovu rovnici po této transformaci zapsat jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = \frac{6}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\varrho h\left(u_1 + u_2\right)\right] + \\ + 6\frac{\partial}{\partial Z}\left[\varrho h\left(w_1 + w_2\right)\right] + 12\frac{\partial}{\partial t}\left(h\varrho\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.2 Reynoldsova rovnice pro krátké radiální ložisko

Za krátké radiální ložisko se považuje takové ložisko, které není na stranách těsněno (na stranách ložiska nejčastěji uvažujeme atmosférický tlak), nebo je těsněno jen s malou účinností a zároveň splňuje [8] podmínku

$$\frac{L}{D} < 0,25,$$

kde L je délka ložiska a D je průměr ložiskové pánve. Knižní zdroje [4] a [6] uvádějí určující poměr pro krátké ložisko jako

$$\frac{L}{D} < 1.$$

U krátkého radiálního ložiska převládá [8] Couetteovo proudění nad Poiseuilleovým a hmotnostní průtok q_{mX} můžeme zjednodušit [8] na

$$q_{mX} = \frac{1}{2} h\varrho \left(u_1 + u_2\right). \tag{2.32}$$

Po dosazení vyjádřených hmotnostních průtoků (2.27) a (2.32) do (2.28) a následné úpravě vyjde rovnice

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = 6\frac{\partial}{\partial X}\left[\varrho h \left(u_1 + u_2\right)\right] + 6\frac{\partial}{\partial Z}\left[\varrho h \left(w_1 + w_2\right)\right] + 12\frac{\partial}{\partial t}\left(h\varrho\right). \tag{2.33}$$

Dále budeme předpokládat, že

- mazivo je nestlačitelné,
- pohyb čepu a ložiskové pánve v axiálním směru je nulový,
- dynamická viskozita oleje je konstantní,
- průřez ložiskovou mezerou v axiálním směru je konstantní (nulové natočení čepu hřídele vůči ložiskové pánvi).

Reynoldsova rovnice pro krátké kluzné radiální ložisko se při uvažování těchto předpokladů zjednoduší na

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{6\eta}{h^3}\frac{\partial}{\partial X}\left[h\left(u_1 + u_2\right)\right] + \frac{12\eta}{h^3}\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.34}$$

2.3 Reynoldsova rovnice pro dlouhé radiální ložisko

Pokud budeme chtít považovat kluzné radiální ložisko za dlouhé, musí být na svých čelech dobře těsněno a jeho geometrické parametry musí splňovat [8] podmínku

$$\frac{L}{D} > 0,25.$$

Podle zdrojů [4] a [6] lze za dlouhé radiální ložisko považovat ložisko s poměrem

$$\frac{L}{D} > 1.$$

U dlouhého radiálního ložiska značně převládá [8] proudění v obvodovém směru nad prouděním ve směru axiálním. Ložisková pánev se v axiálním směru nepohybuje a hmotnostní průtok tímto směrem je nulový. Reynoldsova rovnice se upraví na

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\varrho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial X}\right) = 6\frac{\partial}{\partial X}\left[\varrho h \left(u_1 + u_2\right)\right] + 12\frac{\partial}{\partial t}\left(h\varrho\right). \tag{2.35}$$

Při uvažování stejných zjednodušujících předpokladů jako v kapitole 2.2 je Reynoldsova rovnice pro dlouhé kluzné radiální ložisko zapsána jako

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial X}\right) = 6\eta\frac{\partial}{\partial X}\left[h\left(u_1 + u_2\right)\right] + 12\eta\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.36}$$

3 Reynoldsova rovnice s Vogelpohlovým parametrem

Z literatury je známo a v bakalářské práci později dokázáno, že u řešení Reynoldsovy rovnice může nastat problém se špatnou podmíněností úlohy kvůli velkému gradientu tlaku v určitých místech ložiskové mezery. Problém s velkým gradientem tlaku je způsoben nerovnoměrným zatížením olejového filmu. V určitých místech dochází při malém prostorovém přírůstku k velké změně tlaku. Špatné podmíněnosti úlohy se dá předejít převodem Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru a následným zavedením Vogelpohlova parametru.

3.1 Převod Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru

Jako výchozí Reynoldsovu rovnici pro převod do bezrozměrného tvaru použijeme rovnici (2.31). Předpokládáme, že

- mazivo v axiálním směru neproudí ($w_1 = 0$, $w_2 = 0$),
- hustota maziva ϱ je konstantní,
- dynamická viskozita η maziva je konstantní,

a proto rovnice (2.31) přechází do tvaru

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial Z}\right)=\frac{6}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[h\left(u_1+u_2\right)\right]+12\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{3.1}$$

Dále zavedeme [7] do rovnice (3.1) bezrozměrné proměnné

$$Z = L\,\overline{Z}, \tag{3.2}$$
$$h = c\,\overline{h}, \tag{3.3}$$

kde $\overline{Z}$ je bezrozměrná axiální souřadnice, L je délka ložiska, $\overline{h}$ je bezrozměrná tloušťka olejového filmu a c je tloušťka olejového filmu při centrické poloze čepu. Součet obvodových rychlostí u_1, u_2 nahradíme vztahem

$$u = u_1 + u_2 \tag{3.4}$$

a obvodovou souřadnici φ přeznačíme na

$$\varphi = \overline{X}. \tag{3.5}$$

Při uvažování c, u, η jako konstant vůči prostorovým parciálním derivacím dostaneme po matematických úpravách tvar

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}} \left(\frac{c^3}{6\,\eta\,u\,R^2}\,\overline{h}^3 \frac{\partial p}{\partial \overline{X}} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \overline{Z}} \left(\frac{c^3}{6\,\eta\,u\,R^2}\,\overline{h}^3 \frac{\partial p}{\partial \overline{Z}} \right) = \frac{c}{R} \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + 2\frac{c}{u} \frac{\partial \overline{h}}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Bezrozměrným tlakem $\overline{p}$ označíme [2] vztah

$$\overline{p} = \frac{c^3}{6\,\eta\,u\,R^2}\,p \tag{3.7}$$

a vztah

$$\overline{t} = \frac{u}{c}\,t \tag{3.8}$$

nazveme bezrozměrným časem $\overline{t}$. Rovnici (3.6) poté můžeme pomocí bezrozměrných veličin (3.7) a (3.8) přepsat jako

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}} \left(\overline{h}^3 \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{X}} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \overline{Z}} \left(\overline{h}^3 \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{Z}} \right) = \frac{c}{R} \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + 2\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{t}}. \tag{3.9}$$

Velmi důležitou částí vztahu (3.9) je poměr $\frac{R^2}{L^2}$. Pro $R^2 \gg L^2$ je první člen mnohem menší něž člen druhý, a proto můžeme rovnici (3.9) považovat za rovnici popisující tlakové rozložení v krátkém ložisku (kap. 2.2). Pro krátké ložisko je obecná Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru zjednodušena na

$$\frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \overline{Z}} \left(\overline{h}^3 \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{Z}} \right) = \frac{c}{R} \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + 2\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{t}}. \tag{3.10}$$

Pokud bude platit $R^2 \ll L^2$, poměr $\frac{R^2}{L^2}$ je velmi blízký nule, a proto se rovnice (3.9) zjednoduší na

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}} \left(\overline{h}^3 \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{X}} \right) = \frac{c}{R} \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + 2\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{t}}. \tag{3.11}$$

Rovnicí v bezrozměrném tvaru (3.11) budeme popisovat tlakové rozložení v dlouhém kluzném ložisku (kap. 2.3).

3.2 Vogelpohlův parametr

Dalším krokem pro vylepšení podmíněnosti úlohy je zavedení [7] Vogelpohlova parametru Φ, který je definován jako

$$\Phi = \overline{p}\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}. \tag{3.12}$$

Po parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial \overline{X}}$ celé rovnice (3.12) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{p}\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}\right) = \overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{X}} + \frac{3}{2}\,\overline{p}\,\overline{h}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}. \tag{3.13}$$

Nyní přenásobíme rovnici (3.13) výrazem $\overline{h}^{\frac{3}{2}}$ a opět provedeme parciální derivaci celé rovnice podle $\overline{X}$. Po matematické úpravě získáme vztah

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{h}^3\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{X}}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\left(\overline{p}\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial \overline{X}}\right) - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{p}\,\overline{h}^2\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right). \tag{3.14}$$

První a druhý člen na pravé straně rovnice (3.14) je možné dále rozepsat a následně provést substituci podle (3.12), kde

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\left(\overline{p}\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial \overline{X}}\right) = \overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \overline{X}^2} + \frac{3}{2}\,\overline{h}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{X}}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{p}\,\overline{h}^2\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right) = \overline{h}^{\frac{1}{2}}\Phi\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial \overline{X}^2} + \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\left(\overline{h}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{X}} + \frac{1}{2}\overline{h}^{-\frac{1}{2}}\Phi\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right). \tag{3.16}$$

Po dosazení vztahů (3.15) a (3.16) do (3.14) lze první člen Reynoldsovy rovnice (3.9) zapsat pomocí Vogelpohlova parametru jako

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}}\left(\overline{h}^3\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{X}}\right) = \overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \overline{X}^2} - \frac{3}{2}\overline{h}^{\frac{1}{2}}\Phi\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial \overline{X}^2} - \frac{3}{4}\overline{h}^{-\frac{1}{2}}\Phi\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right)^2. \tag{3.17}$$

Odvození pro druhý člen Reynoldsovy rovnice (3.9), tj. člen s parciální derivací podle prostorové souřadnice $\overline{Z}$, je analogické k odvození prvního členu. Rovnice (3.17) se pro parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}$ zjednoduší na

$$\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\left(\overline{h}^3\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{Z}}\right) = \overline{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \overline{Z}^2}, \tag{3.18}$$

protože bezrozměrná tloušťka ložiskové mezery $\overline{h}$ je díky zanedbání natočení čepu hřídele vzhledem k ose ložiskové pánve pouze funkcí prostorové souřadnice $\overline{X}$. Po dosazení (3.17) a (3.18) do (3.9) a vydělení celé rovnice výrazem $\overline{h}^{\frac{3}{2}}$ je Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru (3.9) zapsána pomocí Vogelpohlova parametru Φ jako

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial \overline{X}^2} + \frac{R^2}{L^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \overline{Z}^2} - \frac{3}{2}\Phi\left[\overline{h}^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial \overline{X}^2} + \frac{1}{2}\overline{h}^{-2}\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + \frac{2}{\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{t}}. \tag{3.19}$$

Po dosazení parciální derivace (3.18) do (3.10) a vydělení celé rovnice výrazem $\overline{h}^{\frac{3}{2}}$ získáme Reynoldsovu rovnici s Vogelpohlovým parametrem pro krátké ložisko zapsanou jako

$$\frac{R^2}{L^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\overline{Z}^2} = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}} + \frac{2}{\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{t}}. \tag{3.20}$$

Pro dlouhé ložisko je po dosazení parciální derivace (3.17) do (3.11) a vydělení celé rovnice výrazem $\overline{h}^{\frac{3}{2}}$ Reynoldsova rovnice s Vogelpohlovým parametrem ve tvaru

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\overline{X}^2} - \frac{3}{2}\Phi\left[\overline{h}^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2} + \frac{1}{2}\overline{h}^{-2}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}} + \frac{2}{\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{t}}. \tag{3.21}$$

4 Řešení Reynoldsovy rovnice

V kapitole 2 jsme postupným odvozováním dospěli k základní Reynoldsově rovnici (2.30), která je parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. Řešení rovnic tohoto typu se z důvodu obtížného (někdy až nemožného) analytického vyjádření řešení často provádí pomocí numerických metod. V této kapitole je popsán postup analytického řešení a numerického řešení pomocí metody konečných diferencí pro různé typy kluzných radiálních ložisek.

4.1 Analytické řešení

Dvojnásobnou integrací Reynoldsovy rovnice (parciální diferenciální rovnice druhého řádu) pro speciální případy (krátkých, dlouhých) kluzných radiálních ložisek lze získat řešení rozložení tlaku v ložiskové mezeře.

4.1.1 Analytické řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko kruhového průřezu

Krátké radiální ložisko je obecně popsáno rovnicí (2.34) ve tvaru

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{6\eta}{h^3}\frac{\partial}{\partial X}\left[h\left(u_1+u_2\right)\right] + \frac{12\eta}{h^3}\frac{\partial h}{\partial t}.$$

Pokud pro lepší přehlednost zavedeme [8] substituci

$$A = \frac{6\eta}{h^3}\frac{\partial}{\partial X}\left[h\left(u_1+u_2\right)\right] + \frac{12\eta}{h^3}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.1}$$

za pravou stranu rovnice, tak lze po dvojnásobné integraci této parciální diferenciální rovnice druhého řádu zapsat vztah pro průběh tlaku jako

$$p = \frac{1}{2}AZ^2 + C_1 Z + C_2. \tag{4.2}$$

Díky známým okrajovým podmínkám, které popisují [8] hodnotu tlaku na stranách symetrického ložiska jako tlak p_S, získáváme integrační konstanty

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = p_S - \tfrac{1}{8}AL^2.$$

Pokud budeme dále uvažovat, že

- ložisková pánev je kruhového průřezu,
- ložisková pánev se nepohybuje,
- okamžitá úhlová rychlost čepu hřídele je ω (2.11),

tak po zpětné substituci (4.1) a dosazení jednotlivých parciálních derivací

$$\frac{\partial h}{\partial X} = \frac{1}{R}\, c\, \varepsilon_H \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) \tag{4.3}$$

a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c\left[-\dot{\varepsilon}_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) - \varepsilon_H\, \dot{\gamma} \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right] \tag{4.4}$$

dostáváme

$$p = p_S + \frac{3\,\eta\, c}{h^3}\left(\frac{L^2}{4} - Z^2\right)\left[2\,\dot{\varepsilon}_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) + (2\dot{\gamma} - \omega)\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]. \tag{4.5}$$

Vztah (4.5) nám umožňuje v příslušném příčném řezu $Z \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$ popsat rozložení tlaku po obvodu. Pro stacionární řešení přejde rovnice (4.5) do tvaru

$$p = p_S + \frac{3\,\eta\, c}{h^3}\left(\frac{L^2}{4} - Z^2\right)\left[-\omega\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]. \tag{4.6}$$

Pomocí programu MATLAB můžeme postupným dosazováním $Z \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$ do rovnice (4.5) nebo (4.6) vykreslit rozložení tlaku v celé ložiskové mezeře.

4.1.2 Analytické řešení Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko kruhového průřezu

Pro ložisko kruhového průřezu dostaneme po dosazení parciálních derivací $\frac{\partial h}{\partial X}$ (4.3), $\frac{\partial h}{\partial t}$ (4.4) a rychlostí podle (2.11) rovnici (2.36) obecně popisující dlouhé ložisko ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial X}\right) &= 6\eta\,\omega\, c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) - \\ &\quad - 12\eta\, c\left[\dot{\varepsilon}_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) + \varepsilon_H\, \dot{\gamma} \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right],\end{aligned} \tag{4.7}$$

kde $\dot{\varepsilon}_H$, $\dot{\gamma}$ jsou derivace podle času. Po integraci levé a pravé strany podle X a vydělení celé rovnice výrazem h^3 (2.6) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial X} = &- 6\eta\,\omega\, c\,\varepsilon_H R \frac{\cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)}{\left\{c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^3} - \\ &- 12\eta\, c\, R\left\{\dot{\varepsilon}_H \frac{\sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)}{\left\{c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^3} - \right. \\ &\left. - \varepsilon_H\, \dot{\gamma} \frac{\cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)}{\left\{c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^3}\right\} + \frac{C}{\left\{c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^3},\end{aligned} \tag{4.8}$$

kde C je integrační konstanta. Další integrací obou stran rovnice (4.8) podle X dostáváme [8] funkci tlaku ve tvaru

$$\begin{aligned} p = 6\eta R^2 \Bigg\{ \frac{\dot{\varepsilon}_H}{\varepsilon_H} \left[\frac{1}{\left\{ c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^2} - \frac{1}{c^2\left(1+\varepsilon_H\right)^2} \right] - \\ - c\,\varepsilon_H\left(\omega - 2\dot{\gamma}\right) \frac{\left[2 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right] \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)}{c\left(2+\varepsilon_H^2\right)\left\{ c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^2} \Bigg\} + p_0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde p_0 je tlak v nejširším místě ložiskové mezery. Pro stacionární řešení přechází vztah (4.9) do tvaru

$$p = -6\eta R^2 c\,\varepsilon_H\,\omega \frac{\left[2 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right] \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)}{c\left(2+\varepsilon_H^2\right)\left\{ c\left[1 - \varepsilon_H \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right)\right]\right\}^2} + p_0 \tag{4.10}$$

Protože je ložisko po stranách dobře těsněno (kap. 2.3) a v axiálním směru uvažujeme konstantní průřez ložiskovou mezerou (kap. 2.2), rozložení tlaku je v libovolném příčném řezu ložiskové mezery stejné.

4.2 Numerické řešení

Jednou z numerických metod, kterou je možné řešit Reynoldsovu rovnici, je použití metody konečných diferencí. Základ této metody je ve využití numerického derivování, podrobněji popsaném v kapitole 4.2.1, kde je ukázano odvození numerických vztahů pro derivace.

4.2.1 Numerické derivování

Často bývá z důvodu náročnosti analytického vyjádření derivace využívána metoda numerického derivování [5]. Jedná se o numerickou metodu odhadu derivace funkce díky známým funkčním hodnotám v konečně mnoha bodech. Základ této numerické metody stojí na Taylorově rozvoji. Ten provádíme v uzlových bodech, které jsou od sebe vzájemně vzdáleny o konstantní krok h. Pro hladkou funkci f lze získat hodnotu Taylorova polynomu v bodech $x_0 + h$ a $x_0 - h$

$$f\left(x_0 + h\right) = f\left(x_0\right) + hf'\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2} f''\left(x_0\right) + \frac{h^3}{6} f'''\left(\xi_1\right), \tag{4.11}$$

$$f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right) - hf'\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2} f''\left(x_0\right) - \frac{h^3}{6} f'''\left(\xi_2\right), \tag{4.12}$$

kde $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ a $\xi_2 \in (x_0 - h, x_0)$. Po odečtení rovnice (4.12) od (4.11) dostaneme

$$f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0 - h\right) = 2hf'\left(x_0\right) + \frac{h^3}{6}\left(f'''\left(\xi_1\right) + f'''\left(\xi_2\right)\right). \tag{4.13}$$

První derivaci lze potom pomocí tříbodového vzorce (metoda centrální poměrné diference) vyjádřit vztahem

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \theta\left(h^2\right). \tag{4.14}$$

Pro určení druhé derivace musíme nejprve vyjádřit hodnoty Taylorových polynomů vyššího stupně v bodech $x_0 + h$ a $x_0 - h$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1), \tag{4.15}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2), \tag{4.16}$$

kde $\xi_1 \in (x_0, x_0+h)$ a $\xi_2 \in (x_0-h, x_0)$. Sečtením rovnice (4.15) a (4.16) dostaneme

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right). \tag{4.17}$$

Druhá derivace má po úpravě (4.17) tvar

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \theta\left(h^2\right). \tag{4.18}$$

4.2.2 Řešení Reynoldsovy rovnice metodou konečných diferencí

Princip metody konečných diferencí je v pokrytí [8] ložiskové mezery sítí uzlů a nahrazení parciálních derivací v rovnici (2.30) konečnými diferencemi. Pokud budeme stejně jako v kapitole 2.2 předpokládat, že

- mazivo je nestlačitelné,
- ložisková pánev se v axiálním směru nepohybuje,
- dynamická viskozita je konstatní,

tak lze provést jednotlivé parciální derivace a rovnice (2.30) získá tvar

$$3h^2\frac{\partial h}{\partial X}\frac{\partial p}{\partial X} + h^3\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + 3h^2\frac{\partial h}{\partial Z}\frac{\partial p}{\partial Z} + h^3\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = 6\eta\frac{\partial}{\partial X}\left[h(u_1+u_2)\right] + 12\eta\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{4.19}$$

Dále musíme rozdělit ložiskovou mezeru v obvodovém směru na M a v axiálním směru na $N-1$ stejně velkých úseků. Tím vznikne dvourozměrná síť ekvidistantních uzlů s krokem ΔX a ΔZ v obvodovém a axiálním směru (obr. 4.1). Nyní můžeme

na jednotlivé parciální derivace z rovnice (4.19) aplikovat metodu numerického derivování. Parciální derivace tlaku nahradíme vztahy

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta X}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta X^2}, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta Z}, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta Z^2}, \tag{4.23}$$

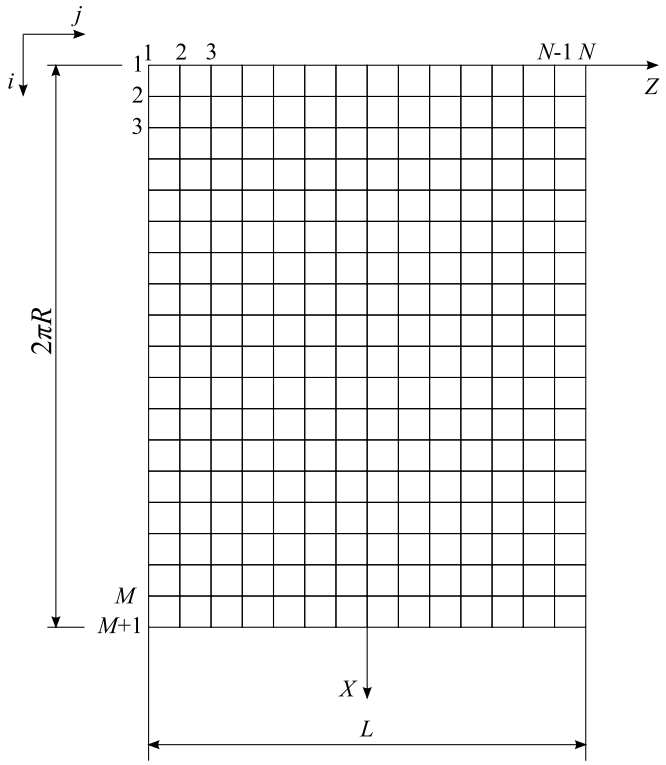
kde $p_{i,j}$ je tlak ve vnitřním uzlu i, j sítě, kde $i = 1, 2, 3, \ldots, M$, $j = 2, 3, \ldots, N-1$. Pokud nyní dosadíme vztahy (4.20) až (4.23) do rovnice (4.19), můžeme tuto rovnici pro příslušný uzel i, j vyjádřit [8] jako lineární kombinaci tlaků v uzlových bodech pomocí pětibodového schématu (obr. 4.2)

$$a_{i,j}\, p_{i+1,j} + b_{i,j}\, p_{i-1,j} + c_{i,j}\, p_{i,j} + d_{i,j}\, p_{i,j+1} + e_{i,j}\, p_{i,j-1} = f_{i,j}, \tag{4.24}$$

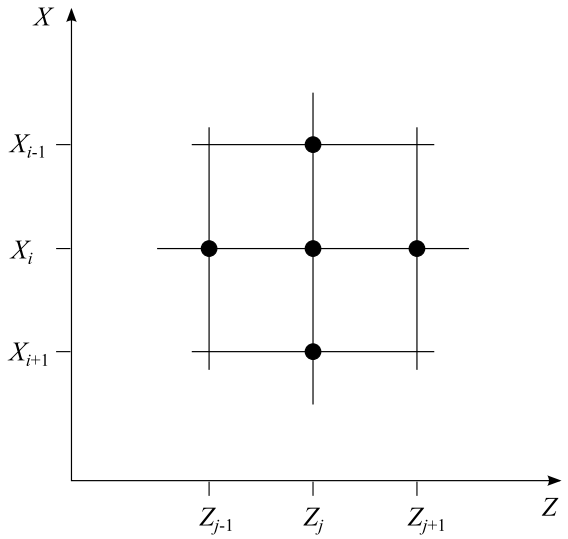
kde $a_{i,j}$ až $f_{i,j}$ jsou lineární koeficienty. Po sestavení rovnice (4.24) pro všechny vnitřní uzly sítě dostáváme soustavu algebraických rovnic, kterou lze maticově zapsat jako

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{f}, \tag{4.25}$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M(N-2),M(N-2)}$ a vektory $\mathbf{p}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{M(N-2)}$.



Obr. 4.1: Diskretizace ložiskové mezery



Obr. 4.2: Pětibodové schéma

Řešení soustavy rovnic (4.25) musí vyhovovat [8] okrajovým podmínkám:

- na stranách nesymetrického ložiska předpokládáme rozdílné tlaky p_L a p_P,

$$p_{i,1} = p_L, \tag{4.26}$$
$$p_{i,N} = p_P, \tag{4.27}$$

- na stranách symetrického ložiska předpokládáme stejný tlak p_S,

$$p_{i,1} = p_S, \tag{4.28}$$
$$p_{i,N} = p_S, \tag{4.29}$$

- v obvodovém směru je tlakové rozložení periodické (pro první hladinu je v pětibodovém schématu potřeba nultá hladina, pro M-tou hladinu je potřeba hladina $M+1$),

$$p_{0,j} = p_{M,j}, \tag{4.30}$$
$$p_{M+1,j} = p_{1,j}, \tag{4.31}$$

- uzlům, které odpovídají přívodům oleje, předepisujeme hodnotu tlaku p_{VST} odpovídající tlaku přiváděného oleje

$$p_{i,j} = p_{VST}. \tag{4.32}$$

Při sestavování soustavy rovnic (4.25) vynecháváme [8] ty rovnice, které odpovídají uzlům se známými hodnotami tlaků získanými z okrajových podmínek (4.26) až (4.32). Hodnoty tlaků v uzlech známé z tlakových okrajových podmínek se přesouvají do vektoru pravé strany soustavy rovnic.

4.2.3 Numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice pro ložisko kruhového průřezu

Při numerickém řešení obecné Reynoldsovy rovnice vycházíme z předpokladů z kapitoly 4.2.2 a rovnice (4.19). Pokud budeme dále uvažovat zjednodušující předpoklady:

- ložisková pánev je kruhového průřezu,
- šířka ložiskové mezery se v axiálním směru nemění (nulové natočení čepu vůči ložiskové pánvi),
- stacionární řešení,
- okamžitá úhlová rychlost čepu hřídele je ω (2.11),

tak se upravená obecná Reynoldsova rovnice (4.19) zjednoduší na

$$3h^2\frac{\partial h}{\partial X}\frac{\partial p}{\partial X}+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}=6\eta R\,\omega\frac{\partial h}{\partial X}. \tag{4.33}$$

Po dosazení vztahů (4.20) až (4.23) za příslušné parciální derivace v rovnici (4.33)

$$\begin{aligned}3h_i^2\frac{\partial h}{\partial X}\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\Delta X}+h_i^3\frac{p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{\Delta X^2}+\\ +h_i^3\frac{p_{i,j+1}-2p_{i,j}+p_{i,j-1}}{\Delta Z^2}=6\eta R\,\omega\frac{\partial h}{\partial X}\left(X_i\right),\end{aligned} \tag{4.34}$$

vyjádříme tuto rovnici pro uzel i,j jako

$$a_i\,p_{i+1,j}+b_i\,p_{i-1,j}+c_i\,p_{i,j}+d_i\,p_{i,j+1}+e_i\,p_{i,j-1}=f_i, \tag{4.35}$$

kde všechny koeficienty jsou závislé pouze na obvodové souřadnici. V axiálním směru jsou z důvodu konstantního průřezu v tomto směru ložiskové mezery koeficienty konstantní. Jednotlivé koeficienty mají tvar

$$\begin{aligned}a_i&=\frac{3h_i^2\frac{\partial h}{\partial X}\left(X_i\right)}{2\Delta X}+\frac{h_i^3}{\Delta X^2},\\ b_i&=-\frac{3h_i^2\frac{\partial h}{\partial X}\left(X_i\right)}{2\Delta X}+\frac{h_i^3}{\Delta X^2},\\ c_i&=-\frac{2h_i^3}{\Delta X^2}-\frac{h_i^3}{\Delta Z^2},\\ d_i&=\frac{h_i^3}{\Delta Z^2},\\ e_i&=\frac{h_i^3}{\Delta Z^2},\\ f_i&=6\eta R\,\omega\frac{\partial h}{\partial X}\left(X_i\right).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Pro síť uzlů pokrývající ložiskovou mezeru M díly v obvodovém směru a $N-1$ díly v axiálním směru zapíšeme výslednou soustavu rovnic ve tvaru (4.25) jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_1 & & & & & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{C}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1} \\ \mathbf{A}_M & & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{C}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{M-1} \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{M-1} \\ \mathbf{f}_M \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

kde submatice mají s ohledem na okrajové podmínky z kapitoly 4.2.2 pro řez i v obvodovém směru ložiskové mezery (obr. 4.1) tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \operatorname{diag}(a_i) \in \mathbb{R}^{N-2,N-2}, \\ \mathbf{B}_i &= \operatorname{diag}(b_i) \in \mathbb{R}^{N-2,N-2}, \\ \mathbf{C}_i &= \begin{bmatrix} c_i & d_i & & & \\ e_i & c_i & d_i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & e_i & c_i & d_i \\ & & & e_i & c_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2,N-2}, \\ \mathbf{p}_i &= \begin{bmatrix} p_{i,2} \\ p_{i,3} \\ \vdots \\ p_{i,j} \\ \vdots \\ p_{i,N-2} \\ p_{i,N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}, \qquad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_i - e_i\, p_L \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ f_i - d_i\, p_P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Pomocí programu MATLAB můžeme vyřešit soustavu rovnic (4.37) a poté vykreslit rozložení tlaku v ložiskové mezeře. O jaký konkrétní typ ložiska se jedná, rozhodují pouze geometrické parametry ložiska, resp. poměr $\frac{L}{D}$. Kromě předpokladů uvedených v této kapitole a kapitole 4.2.2 neprovádíme na rozdíl od speciálních případů ložisek (krátkých – kap. 2.2, dlouhých – kap. 2.3) žádná další zjednodušení Reynoldsovy rovnice.

4.2.4 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko kruhového průřezu

Při numerickém řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko kruhového průřezu vycházíme z rovnice (2.34) a předpokladů uvedených v kapitole 2.2. Tlakové rozložení v krátkém ložisku je tedy popsáno rovnicí

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{6\eta}{h^3} \frac{\partial}{\partial X} \left[h\,(u_1 + u_2) \right] + \frac{12\eta}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Dále aplikujeme metodu konečných diferencí popsanou v kapitole 4.2.2. Nejprve pokryjeme ložiskovou mezeru sítí uzlů, ve kterých budeme hledat řešení Reynoldsovy rovnice. Zkoumané krátké ložisko budeme dále uvažovat se stejnými zjednodušujícími předpoklady jako při řešení obecné Reynoldsovy rovnice (kap. 4.2.3). Po provedení parciální derivace $\frac{\partial h}{\partial X}$ uvedené v (4.3) a uvažování rychlostí podle (2.11) přejde rovnice (2.34) do tvaru

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{6\eta}{h^3}\,\omega\, c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right). \tag{4.39}$$

Nahrazením druhé parciální derivace tlaku p podle axiální souřadnice Z vztahem (4.23) získáme rovnici

$$\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta Z^2} = \frac{6\eta}{h_i^3}\,\omega\, c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X_i}{R} - \gamma\right), \tag{4.40}$$

kterou můžeme přepsat do tvaru

$$a\,p_{i,j+1} + b\,p_{i,j} + c\,p_{i,j-1} = d_i, \tag{4.41}$$

kde

$$a = \frac{1}{\Delta Z^2}, \qquad b = -\frac{2}{\Delta Z^2}, \qquad c = \frac{1}{\Delta Z^2}, \qquad d_i = \frac{6\eta}{h_i^3}\,\omega\, c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X_i}{R} - \gamma\right). \tag{4.42}$$

Při uvažování okrajových podmínek z kapitoly 4.2.2 můžeme rovnici (4.41) zapsat pro každý uzel vytvořené sítě a získat tak pro jednotlivé řezy i v obvodovém směru ložiska soustavu algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b & \\ & & & c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i,2} \\ p_{i,3} \\ \vdots \\ p_{i,N-2} \\ p_{i,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i - c\,p_L \\ d_i \\ \vdots \\ d_i \\ d_i - a\,p_P \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

kde $i = 1, 2, 3, \ldots, M$ a p_L, p_P jsou tlaky na levé a pravé straně ložiska. Vyřešením rovnice (4.43) dostaneme hodnoty tlaků v příslušných uzlech vytvořené sítě.

4.2.5 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko kruhového průřezu

Základní rovnicí pro numerické řešení Reynoldsovy rovnice tohoto typu ložiska je rovnice (2.36)

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial X}\right) = 6\eta \frac{\partial}{\partial X}\left[h\,(u_1 + u_2)\right] + 12\eta \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Při uvažování zjednodušujících předpokladů uvedených v kapitole 4.2.3, znalosti parciální derivace $\frac{\partial h}{\partial X}$ ze vztahu (4.3), uvažování rychlostí podle (2.11) a aplikací metody konečných diferencí (4.20) a (4.21) získáme pro stacionární řešení rovnici

$$\begin{aligned} 3h_i^2 \frac{\partial h}{\partial X}(X_i)\, \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta X} + h_i^3 \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta X^2} = \\ = 6\,\eta\,\omega\,c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X_i}{R} - \gamma\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Protože ložisková mezera je podle uvažovaných předpokladů v každém příčném řezu totožná (nulové natočení čepu hřídele vůči ložiskové pánvi), můžeme rovnici (4.44) přepsat do tvaru

$$a_i\, p_{i+1} + b_i\, p_i + c_i\, p_{i-1} = d_i, \tag{4.45}$$

kde

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{h_i^3}{\Delta X^2} + \frac{3h_i^2}{2\Delta X} \frac{\partial h}{\partial X}(X_i), \\ b_i &= -\frac{2h_i^3}{\Delta X^2}, \\ c_i &= \frac{h_i^3}{\Delta X^2} - \frac{3h_i^2}{2\Delta X} \frac{\partial h}{\partial X}(X_i), \\ d_i &= 6\,\eta\,\omega\,c\,\varepsilon_H \sin\left(\frac{X_i}{R} - \gamma\right). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Výslednou soustavu rovnic, která vznikne po rozepsání rovnice (4.45) pro každý uzel po obvodu rozvinutého pláště rozděleného na M úseků, maticově zapíšeme jako

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & c_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{N-1} & b_{M-1} & a_{M-1} \\ a_M & & & c_M & b_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{M-1} \\ p_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{M-1} \\ d_M \end{bmatrix}. \tag{4.47}$$

U dlouhých ložisek nastává při numerickém řešení problém se špatnou podmíněností úlohy. Při řešení uvažujeme, že dlouhé ložisko je na stranách dobře těsněno a průřez ložiskové mezery je v axiálním směru konstantní, a proto v každém příčném řezu je tlakové rozložení stejné. K řešení nám tak stačí pouze obvodová diskretizace v jednom libovolném příčném řezu. Rozložení tlaku je po využití metody konečných diferencí popsáno rovnicí (4.47). Kvůli nerovnoměrnému zatížení olejového filmu dochází v určitých místech při malém přírůstku obvodové souřadnice k velké změně tlaku. Tento problém s velkým gradientem tlaku, který způsobí nepřesné řešení, můžeme vyřešit přeškálováním matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{f}$, které jsou detailněji popsané v (4.47). K přeškálování matic použijeme sloupcovou normu [3] obecně zapsanou jako

$$\|\mathbf{A}\|_S = \max_j \sum_i |a_{i,j}|, \tag{4.48}$$

kde i je index řádku a j je index sloupce matice $\mathbf{A}$. Sloupcovou normu (4.48) aplikujeme na každý řádek matice $\mathbf{A}$ a vytvoříme tak diagonální matici $\mathbf{D}$ s prvky

$$d_{i,i} = \max_j |a_{i,j}|. \tag{4.49}$$

Maticí $\mathbf{D}$ vynásobíme rovnici (4.47) zleva

$$\mathbf{DAp} = \mathbf{Df}. \tag{4.50}$$

Tak získáme přeškálovanou soustavu rovnic a vylepšíme tím špatnou podmíněnost úlohy.

4.2.6 Numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro ložisko kruhového průřezu

Při numerickém řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem vycházíme z rovnice (3.19) s předpoklady, které jsou uvedené na začátku kapitoly 3.1. Pokud budeme dále uvažovat stejné zjednodušující předpoklady jako v kapitole 4.2.3, tj.:

- ložisková pánev je kruhového průřezu,
- šířka ložiskové mezery se v axiálním směru nemění (nulové natočení čepu vůči ložiskové pánvi),
- stacionární řešení,
- okamžitá úhlová rychlost čepu hřídele je ω (2.11),

tak rovnice (3.19) přejde do tvaru

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{X}^2} + \frac{R^2}{L^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{Z}^2} - \frac{3}{2}\Phi\left[\overline{h}^{-1}\frac{\partial^2 \overline{h}}{\partial \overline{X}^2} + \frac{1}{2}\overline{h}^{-2}\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}. \tag{4.51}$$

Nyní nahradíme ložiskovou mezeru sítí uzlů, dosadíme za příslušné parciální derivace $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{X}^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{Z}^2}$ vztahy (4.21) a (4.23) a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta \overline{X}^2} + \frac{R^2}{L^2}\frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta \overline{Z}^2} - \\ - \frac{3}{2}\Phi_{i,j}\left[\overline{h}_i^{-1}\frac{\partial^2 \overline{h}}{\partial \overline{X}^2}\left(\overline{X}_i\right) + \frac{1}{2}\overline{h}_i^{-2}\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\left(\overline{X}_i\right)\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\left(\overline{X}_i\right).\end{aligned} \tag{4.52}$$

Rovnici (4.52) můžeme pro uzel i, j přepsat do tvaru

$$a\,\Phi_{i+1,j} + b\,\Phi_{i-1,j} + c_i\,\Phi_{i,j} + d\,\Phi_{i,j+1} + e\,\Phi_{i,j-1} = f_i, \tag{4.53}$$

kde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\Delta\overline{X}^2},\\
b &= \frac{1}{\Delta\overline{X}^2},\\
c_i &= -\frac{2}{\Delta\overline{X}^2} - \frac{2R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2} - \frac{3}{2}\left[\overline{h}_i^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2}\left(\overline{X}_i\right) + \frac{1}{2}\overline{h}_i^{-2}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right)\right)^2\right],\\
d &= \frac{R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2},\\
e &= \frac{R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2},\\
f_i &= \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Na bezrozměrné obvodové souřadnici $\overline{X}$ jsou závislé pouze koeficienty c_i a f_i. V axiálním směru se díky konstantnímu průřezu ložiskové mezery po délce ložiska koeficienty nemění. Podle vztahu (3.3) platí pro ložiskovou mezeru ložiskové pánve kruhového průřezu bezrozměrný vztah

$$\overline{h} = 1 - \varepsilon_H \cos\left(\overline{X} - \gamma\right). \tag{4.55}$$

Jednotlivé parciální derivace $\overline{h}$ jsou tedy

$$\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}} = \varepsilon_H \sin\left(\overline{X} - \gamma\right), \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2} = \varepsilon_H \cos\left(\overline{X} - \gamma\right). \tag{4.57}$$

Pro síť uzlů pokrývající ložiskovou mezeru M díly v obvodovém směru a $N-1$ díly v axiálním směru zapíšeme výslednou soustavu rovnic ve tvaru (4.25) jako

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{C}_1 & \mathbf{A} & & & & & \mathbf{B}\\
\mathbf{B} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{A} & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \mathbf{B} & \mathbf{C}_i & \mathbf{A} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{M-1} & \mathbf{A}\\
\mathbf{A} & & & & & \mathbf{B} & \mathbf{C}_M
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{\Phi}_1\\ \mathbf{\Phi}_2\\ \vdots\\ \mathbf{\Phi}_i\\ \vdots\\ \mathbf{\Phi}_{M-1}\\ \mathbf{\Phi}_M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}_i\\ \vdots\\ \mathbf{f}_{M-1}\\ \mathbf{f}_M
\end{bmatrix}, \tag{4.58}$$

kde submatice mají pro příčný řez i ložiskovou mezerou (obr. 4.1) tvar

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,(a) \in \mathbb{R}^{N-2,N-2},\\
&\mathbf{B} = \mathrm{diag}\,(b) \in \mathbb{R}^{N-2,N-2},\\
&\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_i & d & & & \\ e & c_i & d & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & e & c_i & d \\ & & & e & c_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2,N-2},\\
&\mathbf{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,2} \\ \Phi_{i,3} \\ \vdots \\ \Phi_{i,j} \\ \vdots \\ \Phi_{i,N-2} \\ \Phi_{i,N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}, \qquad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_i - e\,\Phi_{L_i} \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ f_i - d\,\Phi_{P_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

kde Φ_{L_i} a Φ_{P_i} jsou hodnoty Vogelpohlových parametrů na stranách ložiska, známé z okrajových podmínek, které jsou vypočítané podle vztahů

$$\Phi_{L_i} = \overline{p}_L \overline{h}_i^{\frac{3}{2}}, \quad \Phi_{P_i} = \overline{p}_P \overline{h}_i^{\frac{3}{2}}. \tag{4.60}$$

Vyřešením vztahu (4.58) zjistíme hodnoty Vogelpohlova parametru Φ v jednotlivých uzlech příslušné sítě. Pokud chceme vypočítat tlak p, vyjádříme ho zpětně ze vztahů (3.12) a (3.7). O jaký typ kruhového kluzného radiálního ložiska se jedná, rozhoduje poměr $\frac{R^2}{L^2}$ (kap. 3.1).

4.2.7 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro krátké ložisko kruhového průřezu

Výchozí rovnicí pro tento typ radiálního kluzného ložiska je idealizovaná Reynoldsova rovnice s Vogelpohlovým parametrem (3.20)

$$\frac{R^2}{L^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{Z}^2} = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}} + \frac{2}{\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{t}}.$$

Nyní aplikujeme metodu konečných diferencí. V rovnici (3.20) nahradíme $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{Z}^2}$ vztahem (4.23), budeme uvažovat stejné předpoklady jako v kapitole 4.2.6 a dostaneme

$$\frac{R^2}{L^2}\frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta \overline{Z}^2} = \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{X}}\left(\overline{X}_i\right). \tag{4.61}$$

Rovnici (4.61) můžeme přepsat do tvaru

$$a\,\Phi_{i,j+1} + b\,\Phi_{i,j} + c\,\Phi_{i,j-1} = d_i, \tag{4.62}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \frac{R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2}, \\ b &= -\frac{2R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2}, \\ c &= \frac{R^2}{L^2\Delta\overline{Z}^2}, \\ d_i &= \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Bezrozměrná tloušťka olejového filmu a její příslušné derivace jsou pro kruhový průřez ložiskové pánve uvedeny v (4.55) až (4.57). Rovnici (4.53) můžeme při uvažování okrajových podmínek z kapitoly 4.2.2 zapsat pro každý uzel sítě pokrývající ložiskovou mezeru. Pro každý řez i v obvodovém směru dostáváme soustavu algebraických rovnic maticově zapsanou jako

$$\begin{bmatrix} b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b & a \\ & & & c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{i,2} \\ \Phi_{i,3} \\ \vdots \\ \Phi_{i,N-2} \\ \Phi_{i,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i - c\,\Phi_{L_i} \\ d_i \\ \vdots \\ d_i \\ d_i - a\,\Phi_{P_i} \end{bmatrix}, \tag{4.64}$$

kde $i = 1, 2, 3, \ldots, M$ a Φ_{L_i} a Φ_{L_i} jsou hodnoty Vogelpohlových parametrů vypočítané podle vztahů (4.60) a tlaků známých z okrajových podmínek. Tlak p zpětně vyjádříme ze vztahů (3.12) a (3.7).

4.2.8 Numerické řešení Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem pro dlouhé ložisko kruhového průřezu

Při numerickém řešení idealizované Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko (2.36) vzniká problém se špatnou podmíněností úlohy kvůli velkému gradientu tlaku v olejovém filmu (kap. 4.2.5). Tento problém je možné vyřešit převedením Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru a zavedením Vogelpohlova parametru. Pro dlouhé ložisko je idealizovaná Reynoldsova rovnice s Vogelpohlovým parametrem (3.21) zapsána jako

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\overline{X}^2} - \frac{3}{2}\Phi\left[\overline{h}^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2} + \frac{1}{2}\overline{h}^{-2}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}} + \frac{2}{\overline{h}^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{t}}.$$

Pokud budeme uvažovat stejné zjednodušující předpoklady jako v kapitole 4.2.6, tak po aplikaci metody konečných diferencí přejde rovnice (3.21) do tvaru

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta\overline{X}^2} - \frac{3}{2}\Phi_{i,j}\left[\overline{h}_i^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2}\left(\overline{X}_i\right) + \frac{1}{2}\overline{h}_i^{-2}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right)\right)^2\right] = \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right). \tag{4.65}$$

Protože u dlouhého ložiska platí, že tlakové rozložení je v libovolném příčném řezu totožné (ložisková mezera se v axiálním směru nemění), můžeme rovnici (4.65) zapsat pouze pro jeden příčný řez jako

$$a\,\Phi_{i+1} + b_i\,\Phi_i + c\,\Phi_{i-1} = d_i, \tag{4.66}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta\overline{X}^2}, \\ b_i &= -\frac{2}{\Delta\overline{X}^2} - \frac{3}{2}\left[\overline{h}_i^{-1}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{X}^2}\left(\overline{X}_i\right) + \frac{1}{2}\,\overline{h}_i^{-2}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right)\right)^2\right], \\ c &= \frac{1}{\Delta\overline{X}^2}, \\ d_i &= \frac{c}{R\,\overline{h}_i^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{X}}\left(\overline{X}_i\right). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Bezrozměrná tloušťka olejového filmu a její příslušné derivace jsou pro kruhový průřez ložiskové pánve uvedeny v rovnicích (4.55) až (4.57). Po rozepsání rovnice (4.66) pro každý uzel v jednom příčného řezu j můžeme soustavu algebraických rovnic maticově zapsat jako

$$\begin{bmatrix} b_1 & a & & & c \\ c & b_2 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b_{M-1} & a \\ a & & & c & b_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{M-1} \\ \Phi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{M-1} \\ \Phi_M \end{bmatrix}. \tag{4.68}$$

Vyřešením soustavy rovnic (4.68) získáme hodnoty Vogelpohlova parametru v příslušných uzlech v jednom příčném řezu. Hodnoty tlaku získáme zpětně ze vztahů (3.12) a (3.7).

5 Hydraulická síla v kluzném ložisku

V zatíženém kluzném ložisku působí vrstva maziva na čep hřídele a ložiskovou pánev silou, kterou nazýváme silou hydraulickou.

5.1 Složky hydraulické síly

Výsledná hydraulická síla je způsobena normálovým tlakem vzniklým [8] v olejové vrstvě a tečnou složkou napětí vyvolanou přilínáním oleje na povrch čepu a ložiskové pánve (obr. 5.1). Při stanovení smykové složky napětí uvažujeme, že mazivo je newtonovská kapalina, a proto musí na rozhraní vrstvy maziva s čepem hřídele a ložiskovou pánví platit pro smykové napětí v obvodovém a axiálním směru Newtonův zákon viskozity popsaný [8] vztahy

$$\tau_{HX} = -\eta \frac{\partial u}{\partial Y}, \tag{5.1}$$

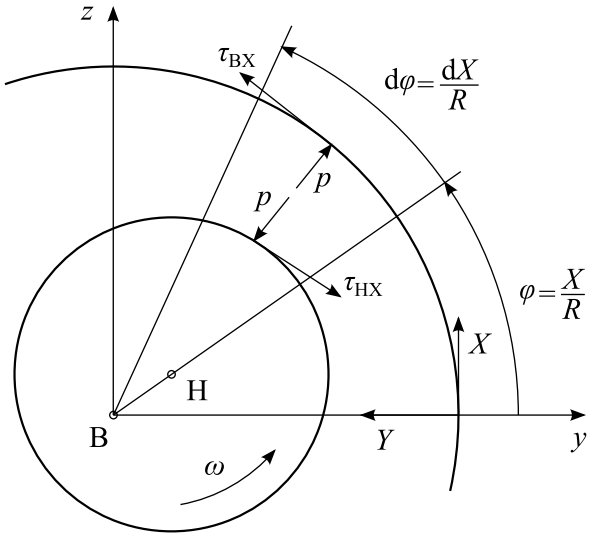
$$\tau_{HZ} = -\eta \frac{\partial w}{\partial Y}, \tag{5.2}$$

$$\tau_{BX} = \eta \frac{\partial u}{\partial Y}, \tag{5.3}$$

$$\tau_{BZ} = \eta \frac{\partial w}{\partial Y}, \tag{5.4}$$

kde η je dynamická viskozita oleje a τ_{HX}, τ_{HZ} jsou složky smykového napětí ve vrstvě maziva na povrchu čepu hřídele v obvodovém a axiálním směru. Složky smykového napětí τ_{BX}, τ_{BZ} jsou složky smykového napětí na povrchu ložiskové pánve. Obvodovou složku rychlosti proudění u a axiální složku rychlosti proudění w nahradíme vztahy (2.22) a (2.23). Po zderivování rovnic (5.1) až (5.4) a uvažování [8] okrajových podmínek,

$$Y = 0 \quad \text{pro povrch ložiskové pánve,}$$
$$Y = h \quad \text{pro povrch čepu hřídele,}$$



Obr. 5.1: Rozložení tlaku a smykových složek napětí v ložiskové mezeře

dostaneme vztahy pro smyková napětí ve tvaru

$$\tau_{HX} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial X} - \eta\frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.5}$$

$$\tau_{HZ} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial Z} - \eta\frac{w_2 - w_1}{h}, \tag{5.6}$$

$$\tau_{BX} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial X} + \eta\frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.7}$$

$$\tau_{BZ} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial Z} + \eta\frac{w_2 - w_1}{h}, \tag{5.8}$$

kde u_1, u_2 jsou obvodové složky rychlosti na vnitřním povrchu ložiskové pánve a čepu hřídele. Rychlosti w_1, w_2 jsou axiální složky rychlosti na vnitřním povrchu ložiskové pánve a čepu hřídele. Uvažujeme, že ložisková pánev a čep hřídele se v axiálním směru nepohybují ($w_1 = 0$, $w_2 = 0$), a proto lze vztahy (5.5) až (5.8) zjednodušit na

$$\tau_{HX} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial X} - \eta\frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.9}$$

$$\tau_{HZ} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial Z}, \tag{5.10}$$

$$\tau_{BX} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial X} + \eta\frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.11}$$

$$\tau_{BZ} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial Z}. \tag{5.12}$$

Při výpočtu hydraulické síly uvažujeme, že v ložisku dojde ke kavitaci [8], [1]. Kavitace je jev, kdy v olejovém filmu vznikají bubliny vzduchu. Tento jev je způsoben poklesem tlaku v prostoru ložiskové mezery. V této oblasti je mazivo tvořeno směsí

kapaliny a plynu, gradient tlaku je nulový a vztahy (5.9) až (5.12) se zjednoduší na

$$\tau_{HXC} = -\eta_C \frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.13}$$

$$\tau_{BXC} = \eta_C \frac{u_2 - u_1}{h}, \tag{5.14}$$

kde η_C je dynamická viskozita v kavitované oblasti, τ_{HXC} a τ_{BXC} jsou složky smykových napětí působící v oblasti kavitace na čep hřídele a ložiskovou pánev v obvodovém směru. Při uvážení kavitace je [8] rozložení složek smykových napětí a tlaku následující

$$\tau_{dHX} = \tau_{HX}, \quad \tau_{dHZ} = \tau_{HZ}, \quad p_d = p \quad \text{pro} \quad p \geq p_{CAV}, \tag{5.15}$$

$$\tau_{dBX} = \tau_{BX}, \quad \tau_{dBZ} = \tau_{BZ}, \quad p_d = p \quad \text{pro} \quad p \geq p_{CAV}, \tag{5.16}$$

$$\tau_{dHX} = \tau_{HXC}, \quad \tau_{dHZ} = 0, \quad p_d = p_{CAV} \quad \text{pro} \quad p < p_{CAV}, \tag{5.17}$$

$$\tau_{dBX} = \tau_{BXC}, \quad \tau_{dHZ} = 0, \quad p_d = p_{CAV} \quad \text{pro} \quad p < p_{CAV}, \tag{5.18}$$

kde p_{CAV} je hodnota tlaku v kavitované oblasti. Při vyjmutí elementární plochy

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.19}$$

lze s ohledem na (5.15) až (5.18) zapsat podle obr. 5.2(a) složky hydraulické síly vyvolané vrstvou maziva působící na čep hřídele v pevném souřadnicovém systému xyz pomocí plošného integrálu jako

$$F_{Hy} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} \left(-p_d \cos\frac{X}{R} + \tau_{dHX} \sin\frac{X}{R} \right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.20}$$

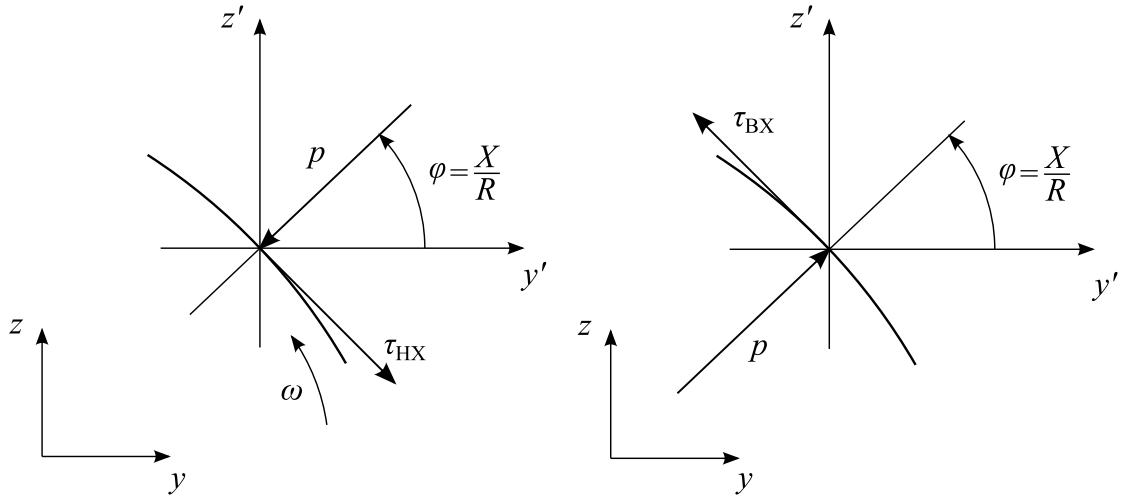
$$F_{Hz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} \left(-p_d \sin\frac{X}{R} - \tau_{dHX} \cos\frac{X}{R} \right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.21}$$

kde F_{Hy}, F_{Hz} jsou složky hydraulické síly působící na čep hřídele ve směru y a směru z. Složky hydraulické síly F_{By}, F_{Bz} působící na ložiskovou pánev ve směru y a z zapíšeme s ohledem na obr. 5.2(b) jako

$$F_{By} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} \left(p_d \cos\frac{X}{R} - \tau_{dBX} \sin\frac{X}{R} \right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.22}$$

$$F_{Bz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} \left(p_d \sin\frac{X}{R} + \tau_{dBX} \cos\frac{X}{R} \right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{5.23}$$

Vzhledem k tomu, že tlak v olejové vrstvě je mnohonásobně větší než smyková napětí, lze tyto jednotlivé složky smykového napětí na rozhraní maziva, pánve a čepu zanedbat



(a) Čep hřídele (b) Ložisková pánev

Obr. 5.2: Směry působení tlaku a smykových složek napětí

a vztahy (5.20) až (5.23) zjednodušit na

$$F_{Hy} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} p_d \cos\frac{X}{R}\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.24}$$

$$F_{Hz} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} p_d \sin\frac{X}{R}\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.25}$$

$$F_{By} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} p_d \cos\frac{X}{R}\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.26}$$

$$F_{Bz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi R} p_d \sin\frac{X}{R}\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{5.27}$$

Vztahy (5.24) až (5.27) lze použít pouze v případě, že známe spojité rozložení tlaku p v ložiskové mezeře (např. z analytického řešení). Pokud s využitím metody konečných diferencí numericky vyřešíme Reynoldsovu rovnici, dostaneme diskrétní hodnoty tlaků v konkrétních uzlových bodech sítě. Tlak v uzlu i, j působí pouze na své okolí o velikosti $\Delta X \times \Delta Z$ (obr. 5.3) a výše uvedené integrály můžeme přepsat do tvaru

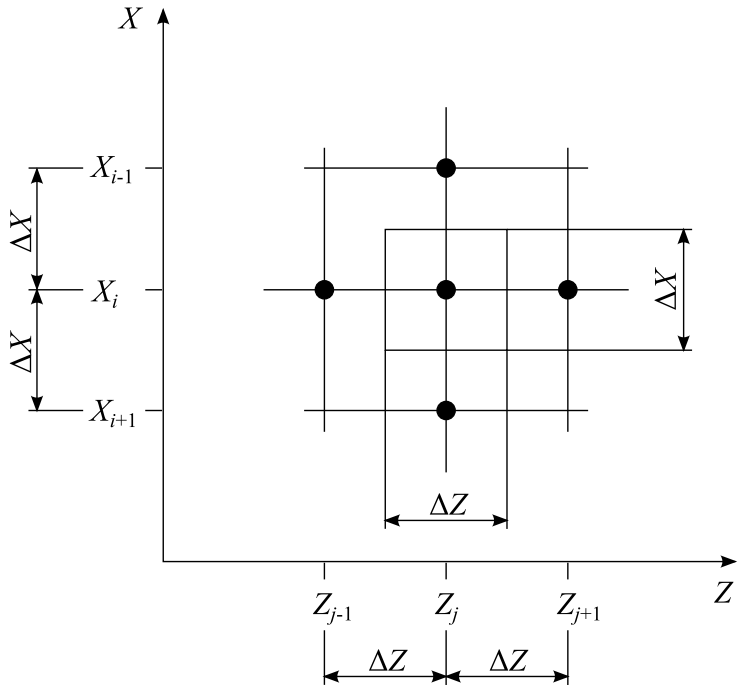
$$F_{Hy} = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} \cos\frac{X_i}{R}\,\Delta X \Delta Z, \tag{5.28}$$

$$F_{Hz} = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} \sin\frac{X_i}{R}\,\Delta X \Delta Z, \tag{5.29}$$

$$F_{By} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} \cos\frac{X_i}{R}\,\Delta X \Delta Z, \tag{5.30}$$

$$F_{Bz} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} \sin\frac{X_i}{R}\,\Delta X \Delta Z. \tag{5.31}$$

Při numerickém výpočtu složek hydraulické síly uvažujeme pouze hodnoty tlaků v uzlech, kde platí $p_{i,j} > 0$.



Obr. 5.3: Oblast působení tlaku $p_{i,j}$

5.2 Analytické vyjádření hydraulické síly pro speciální případy kluzných ložisek

Z hlediska rotorové dynamiky je výhodné se nadále zabývat pouze hydraulickou silou, která působí na čep hřídele. Uvažujeme, že ke kavitaci dojde v polovině ložiska za nejužším místem ložiskové mezery (obr. 5.4 – bílá část). Pro krátké kluzné ložisko (kap. 2.2) zapíšeme [8] hydraulickou sílu do radiálního a tečného směru jako

$$F_{Hr} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{R(\gamma+\pi)}^{R(\gamma+2\pi)} p\cos\left(\frac{X}{R}-\gamma\right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.32}$$

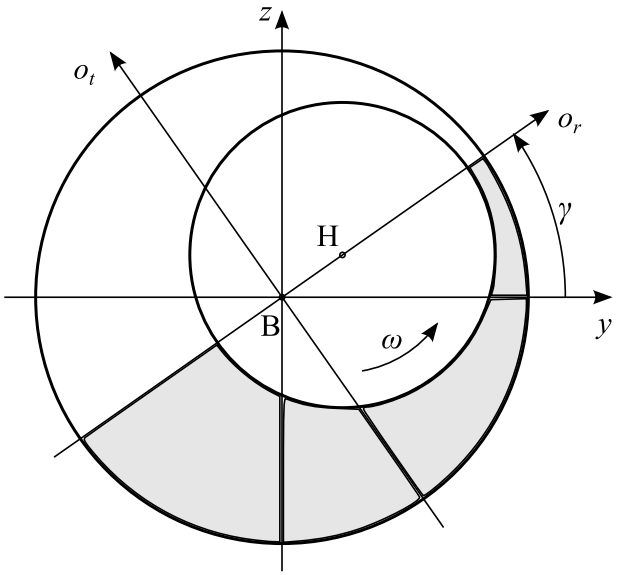
$$F_{Ht} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{R(\gamma+\pi)}^{R(\gamma+2\pi)} p\sin\left(\frac{X}{R}-\gamma\right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{5.33}$$

kde F_{Hr}, F_{Ht} jsou složky hydraulické síly v radiálním a tečném směru. Tlakové rozložení p je řešením (4.5) Reynoldsovy rovnice (2.34) pro krátké ložisko. Po integraci dostáváme [8] jednotlivé složky hydraulické síly pro krátké ložisko ve tvaru

$$F_{Hr} = -\eta RL\left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[(\omega-2\dot{\gamma})\frac{\varepsilon_H^2}{\left(1-\varepsilon_H^2\right)^2} + \frac{\pi\left(1+2\varepsilon_H^2\right)\dot{\varepsilon}_H}{2\left(1-\varepsilon_H^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right], \tag{5.34}$$

$$F_{Ht} = \eta RL\left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[(\omega-2\dot{\gamma})\frac{\pi\varepsilon_H}{4\left(1-\varepsilon_H^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varepsilon_H\dot{\varepsilon}_H}{\left(1-\varepsilon_H^2\right)^2}\right] + 2RLp_S, \tag{5.35}$$

kde $\dot{\varepsilon}_H$, $\dot{\gamma}$ jsou derivace podle času a p_S je hodnota tlaku po stranách ložiska.



Obr. 5.4: Oblast kavitace

Vzhledem k tomu, že u dlouhého ložiska (kap. 2.3) je tlakové rozložení p (2.36) v axiálním směru konstantní, získáme [8] radiální a tečnou složku hydraulické síly pouze integrací po obvodu ložiskové mezery

$$F_{Hr} = -L \int_{R(\gamma+\pi)}^{R(\gamma+2\pi)} p \cos\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) \mathrm{d}X, \tag{5.36}$$

$$F_{Ht} = -L \int_{R(\gamma+\pi)}^{R(\gamma+2\pi)} p \sin\left(\frac{X}{R} - \gamma\right) \mathrm{d}X. \tag{5.37}$$

Po integraci jsou složky hydraulické síly pro dlouhé ložisko vyjádřeny [8] jako

$$F_{Hr} = -6\eta RL \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left[(\omega - 2\dot{\gamma}) \frac{2\varepsilon_H^2}{(2+\varepsilon_H^2)(1-\varepsilon_H^2)} + \frac{\pi \dot{\varepsilon}_H}{(1-\varepsilon_H^2)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{5.38}$$

$$F_{Ht} = 6\eta RL \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left[(\omega - 2\dot{\gamma}) \frac{\pi \varepsilon_H}{(2+\varepsilon_H^2)(1-\varepsilon_H^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\dot{\varepsilon}_H}{(1+\varepsilon_H)(1-\varepsilon_H^2)}\right] + 2RLp_0. \tag{5.39}$$

Pro odvozené složky hydraulické síly platí, že

$$F_{Hy} = F_{Hr}\cos\gamma - F_{Ht}\sin\gamma, \tag{5.40}$$

$$F_{Hz} = F_{Hr}\sin\gamma + F_{Ht}\cos\gamma. \tag{5.41}$$

Tak provedeme transformaci radiální a tečné složky hydraulické síly do pevného souřadnicového systému yz.

6 Koeficienty tuhosti

Díky znalosti hydraulické síly, která působí na čep hřídele, můžeme nyní vypočítat koeficienty tuhosti olejového filmu. Tuhost olejového filmu má velký vliv na vlastní frekvence rotorové soustavy a to je jeden z nejdůležitějších parametrů při výpočtech dynamiky rotorů uložených na kluzných ložiskách.

6.1 Výpočet koeficientů tuhosti

Obecná poloha čepu hřídele, kterou budeme nazývat pracovním bodem, je dána poměrnou excentricitou ε_H a polohovým úhlem γ. V této poloze známe velikost a směr složek hydraulické síly F_{Hy} a F_{Hz}. Po malém vychýlení pracovního bodu ve směru y o velikost Δy, resp. ve směru z o velikost Δz, určíme novou polohu čepu danou ε_{H1} a γ_1 a vypočítáme velikost hydraulické síly v tomto místě. Přestože vazba kluzným ložiskem je vazbou nelineární, můžeme ji v blízkém okolí pracovního bodu nahradit [1] lineární pružnou vazbou a jednotlivé koeficienty tuhosti pak vyjádřit [1] podle vztahů

$$k_{yy} = -\frac{\Delta F^y_{Hy}}{\Delta y}, \tag{6.1}$$

$$k_{yz} = -\frac{\Delta F^z_{Hy}}{\Delta z}, \tag{6.2}$$

$$k_{zy} = -\frac{\Delta F^y_{Hz}}{\Delta y}, \tag{6.3}$$

$$k_{zz} = -\frac{\Delta F^z_{Hz}}{\Delta z}, \tag{6.4}$$

kde ΔF^y_{Hy}, ΔF^z_{Hy}, ΔF^y_{Hz}, ΔF^z_{Hz} jsou změny složek hydraulické síly ΔF_{Hy} a ΔF_{Hz} ve směru y a z. Koeficienty tuhosti můžeme zapsat do matice tuhosti $\mathbf{K}$ jako

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

7 Srovnání výsledků

V kapitole 4 jsou postupně uvedena analytická a numerická řešení Reynoldsovy rovnice pro různé typy kluzných ložisek. V této kapitole je popsáno a ukázáno srovnání jednotlivých metod řešení tlakového rozložení ve vybraných typech ložisek. Jsou zde dále uvedeny výsledky výpočtů hydraulické síly a koeficientů tuhosti.

7.1 Parametry ložiska

Pro srovnání výsledků jednotlivých metod použijeme ložiska kruhového průřezu o geometrických parametrech uvedených v tab. 7.1. O jaký konkrétní typ ložiska se jedná, rozhoduje poměr délky a průměru ložiska, tj. $\frac{L}{D}$. Názory různých autorů na hraniční poměr se liší (kap. 2.2, 2.3). V případě, že poměr je menší než poměr hraniční, považujeme dané ložisko za krátké. Pokud je poměr $\frac{L}{D}$ větší než poměr hraniční, považujeme ložisko za dlouhé. V ostatních případech, kdy poměr $\frac{L}{D}$ je velmi blízký hraničnímu poměru, nazýváme tento typ ložiska ložiskem obecným.

Poloha čepu hřídele byla získána z programu ARMD V5.7 G1 JUNBR. Čep hřídele byl zatížen statickou silou $F = 5000\,\mathrm{N}$ ve směru působení tíhové síly (záporný směr osy z). Tento program poté vypočítal stacionární polohu čepu hřídele, která nastane při daných provozních otáčkách. Olejový film byl vytvořen mazivem ISO VG 32.

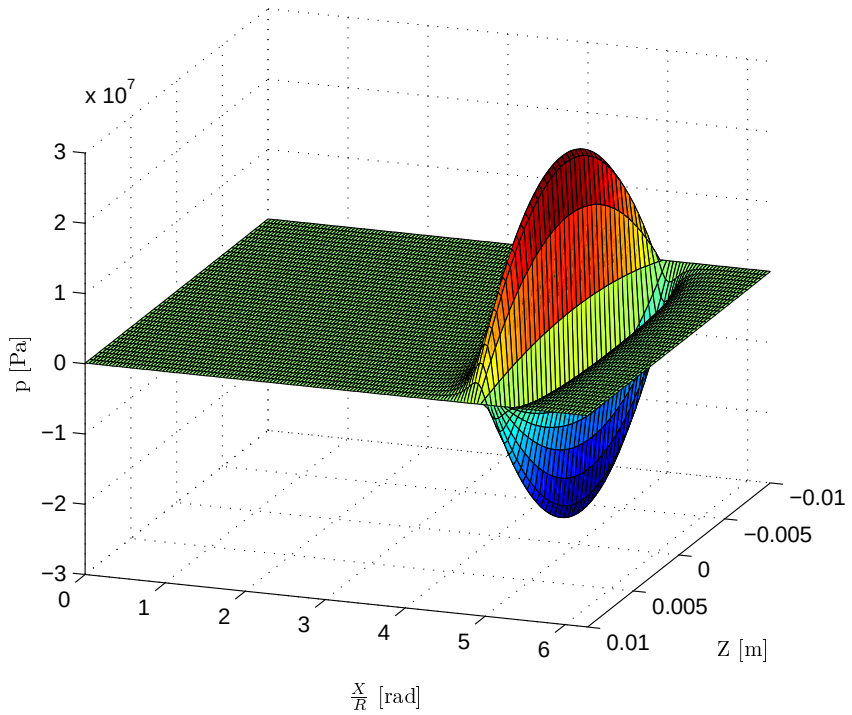
		krátké ložisko	obecné ložisko	dlouhé ložisko
průměr ložiska	D		$160\,\mathrm{mm}$	
délka ložiska	L	$20\,\mathrm{mm}$	$40\,\mathrm{mm}$	$160\,\mathrm{mm}$
poměr	$\frac{L}{D}$	0,125	0,25	0,5
radiální vůle	c		$24 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}$ $(1,5\,‰)$	
poměrná excentricita	ε_H	0,9653	0,9074	0,3965
polohový úhel	γ	$283,7°$	$295,07°$	$332,97°$
otáčky čepu hřídele	ω		$3000\,\mathrm{ot/min}$	
dynamická viskozita oleje	η		$9,623 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$	
hustota oleje	ϱ		$8600\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	

Tab. 7.1: Parametry ložisek

Všechny metody řešení Reynoldsovy rovnice budeme počítat pro stacionární stav, kdy pouze čep hřídele se bude otáčet okamžitou úhlovou rychlostí ω. Numerická řešení provedeme pomocí metody konečných diferencí.

7.2 Tlakové rozložení v krátkém ložisku

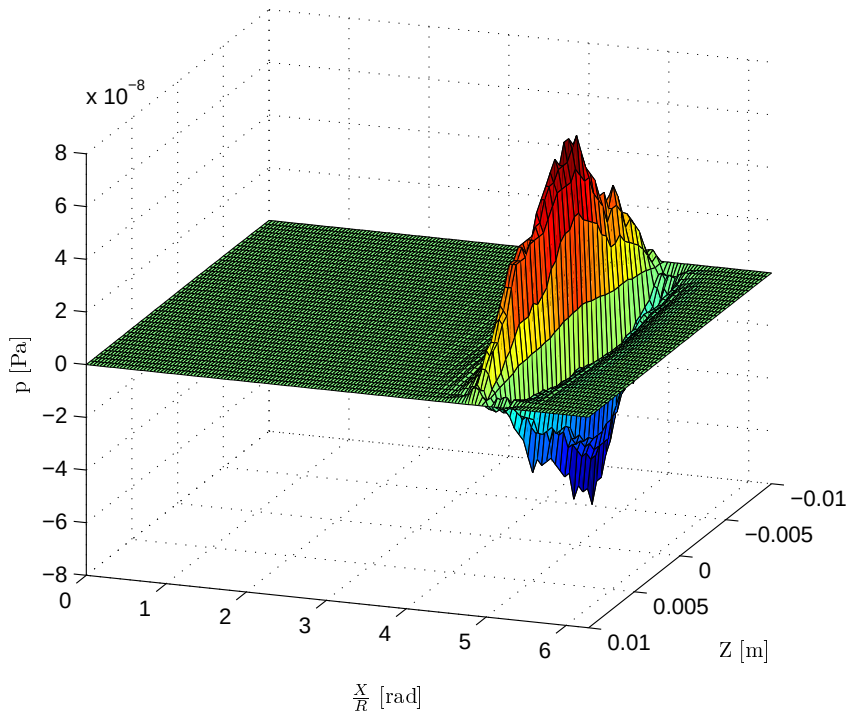
Na obr. 7.1 je znázorněno analytické řešení tlakového rozložení (4.6) získané z idealizované Reynoldsovy rovnice pro krátké kluzné ložisko. Toto ložisko uvažujeme s předpokladem, že není po stranách těsněno a v těchto místech předpokládáme stejnou hodnotu tlaku, která je rovna tlaku atmosférickému $p_S = 1 \cdot 10^5$ Pa.



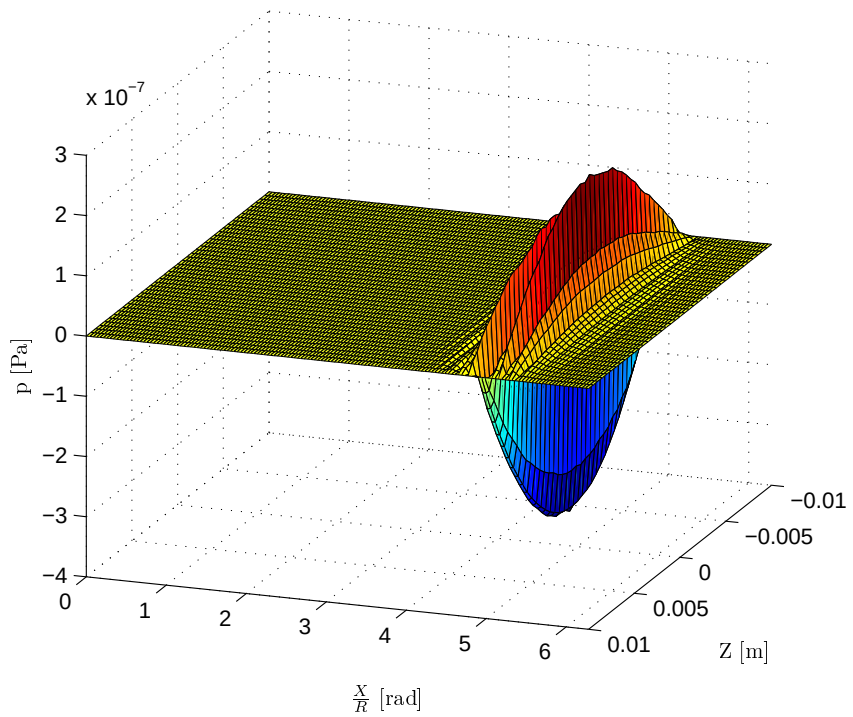
Obr. 7.1: Krátké ložisko – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice

Srovnání numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko (4.43) a analytického řešení je na obr. 7.2. Vzhledem k tomu, že největší rozdíl je řádu 10^{-8} Pa, lze považovat tyto výsledky získané pomocí těchto dvou metod za stejné.

Numericky vyřešené tlakové rozložení pomocí idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.64) pro krátké ložisko porovnané s řešením analytickým je znázorněno na obr. 7.3. V tomto srovnání se maximální rozdíly pohybují v řádu 10^{-7} Pa, což je téměř nulová odchylka.



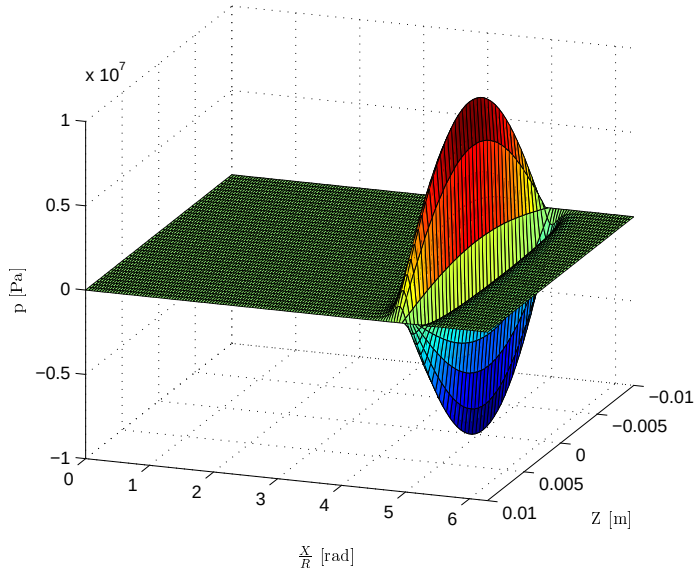
Obr. 7.2: Krátké ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice od analytického řešení



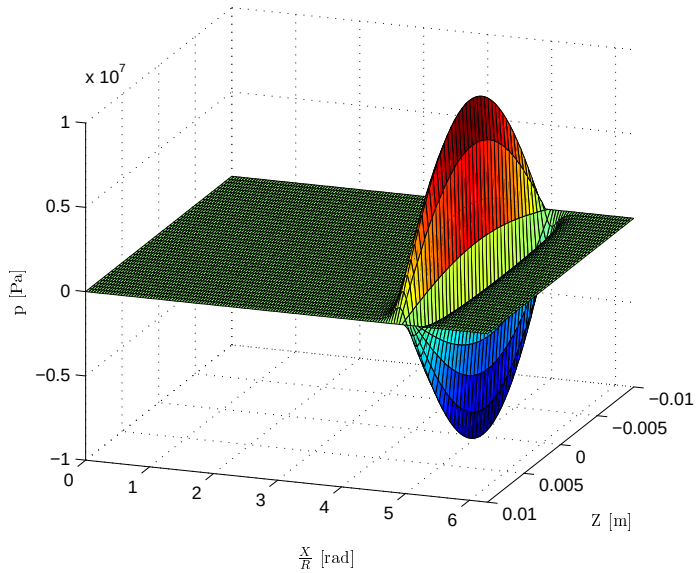
Obr. 7.3: Krátké ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení

Tlakové rozložení v krátkém ložisku je možné numericky vypočítat i z obecné Reynoldsovy rovnice. Soustava rovnic, kterou je potřeba vyřešit, je popsána vztahem (4.37). Rozdíly numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení jsou ukázany na obr. 7.4.

Rozdíly mezi numerickým řešením (4.58) obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem a analytickým řešením jsou vykresleny na obr. 7.5.

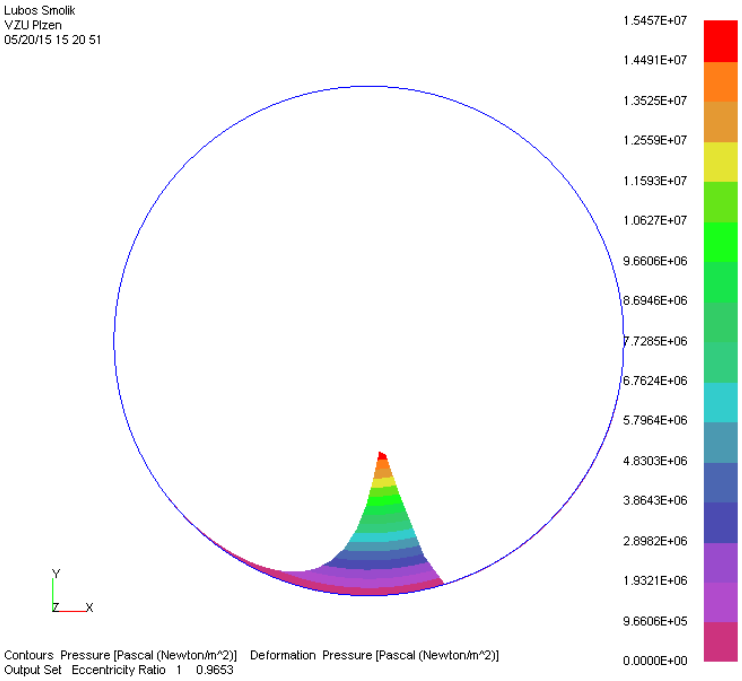


Obr. 7.4: Krátké ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení

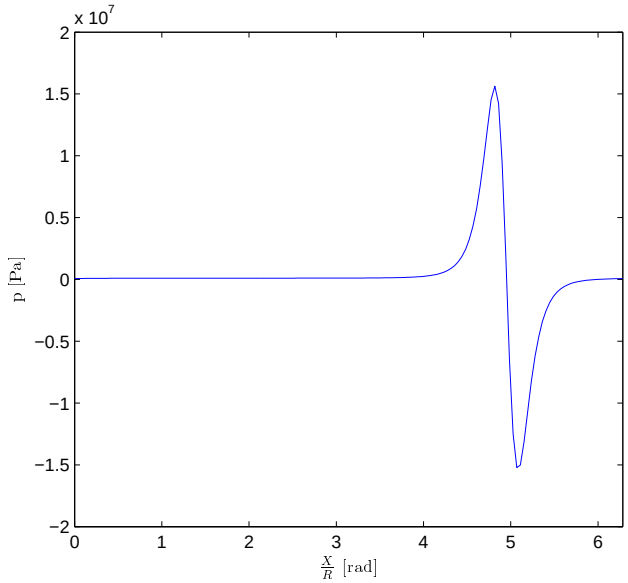


Obr. 7.5: Krátké ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení

Výsledky tlakového rozložení z programu ARMD jsou uvedeny na obr. 7.6. Pro srovnání výsledků je na obr. 7.7 vykresleno tlakové rozložení v řezu v polovině délky ložiska získané z numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem. Výsledky, které poskytl komerční program ARMD a numerické řešení Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem, jsou téměř totožné.

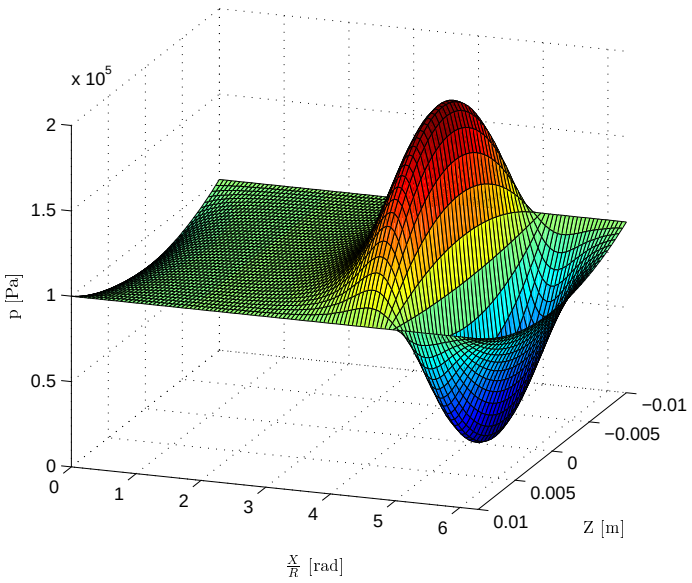


Obr. 7.6: Krátké ložisko – řešení programu ARMD

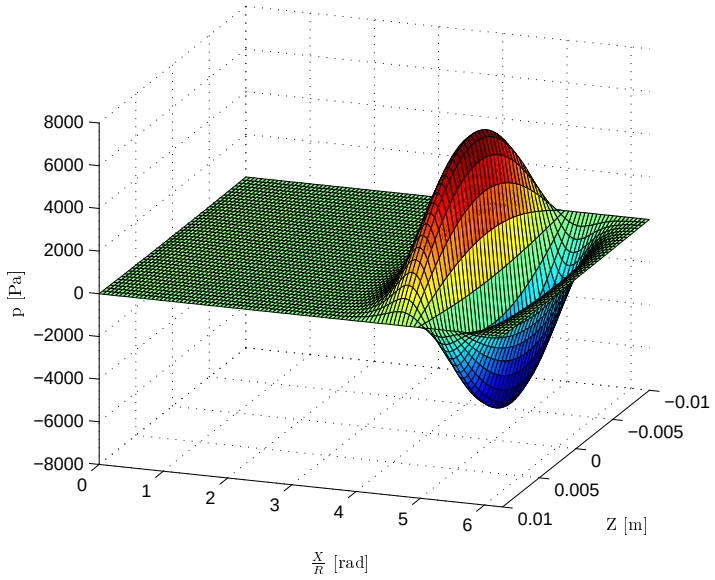


Obr. 7.7: Krátké ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska

Idealizované Reynoldsovy rovnice pro krátké ložisko nejsou vhodné pro řešení, kdy poloha čepu hřídele je určena velkou poměrnou excentricitou. Na obr. 7.8 je vykresleno tlakové rozložení z analytického řešení pro změněnou poměrnou excentricitu na hodnotu $\varepsilon_H = 0,7$. Ostatní parametry ložiska zůstávají stejné. Rozdíly mezi analytickým řešením a numerickým řešením obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem jsou ukázány na obr. 7.9. Tyto rozdíly jsou již výrazně menší než při stejném srovnání v případě větší excentricity.



Obr. 7.8: Krátké ložisko $\varepsilon_H = 0,7$ – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice



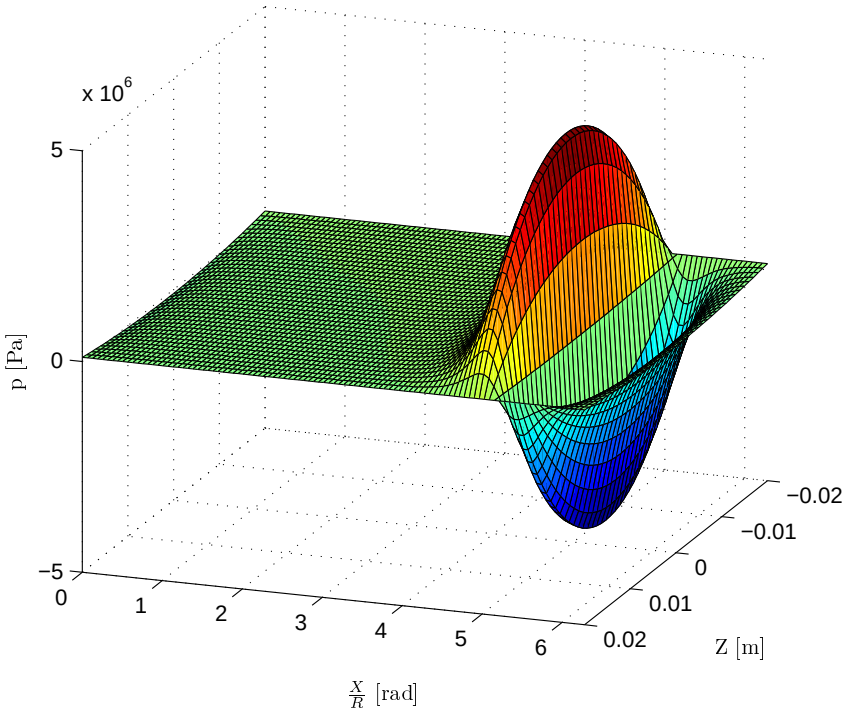
Obr. 7.9: Krátké ložisko $\varepsilon_H = 0,7$ – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení

7.3 Tlakové rozložení v obecném ložisku

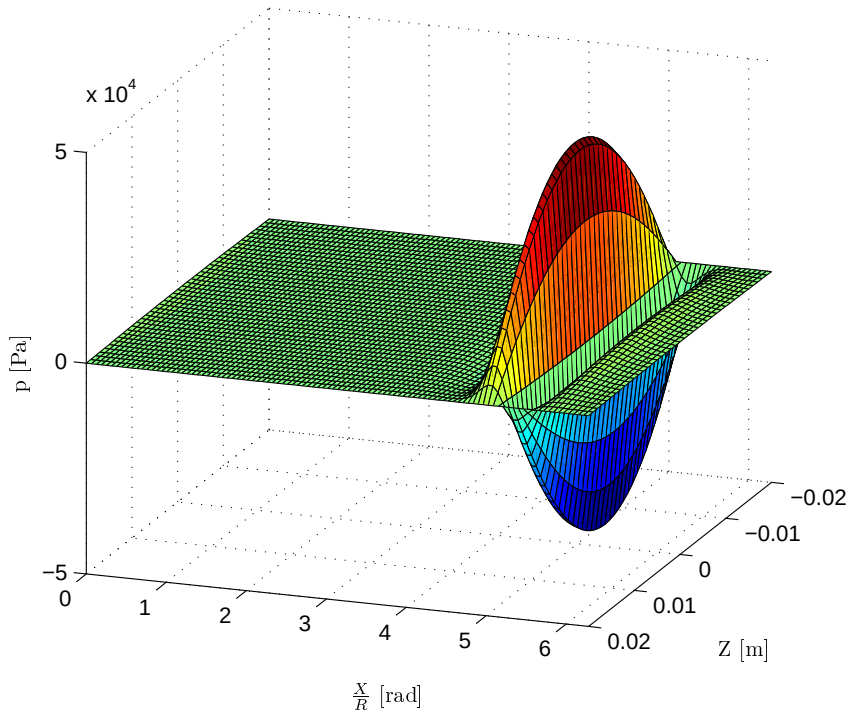
Za obecné kluzné ložisko považujeme takové kluzné ložisko, jehož poměr geometrických parametrů je velmi blízký hraničnímu poměru, a proto k řešení tlakového rozložení není možné použít žádnou idealizovanou Reynoldsovu rovnici. U tohoto ložiska budeme po stranách předpokládat různé tlaky – na levé straně tlak $p_L = 1.5 \cdot 10^5$ Pa a na pravé $p_P = 1 \cdot 10^5$ Pa. Pro výpočet tlakového rozložení použijeme obecnou Reynoldsovu rovnici (4.37). Výsledek tohoto řešení je ukázán na obr. 7.10.

Maximální rozdíl numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.58) od numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice je o dva řády menší (obr. 7.11), než je maximální tlak v ložisku, a proto můžeme tento rozdíl zanedbat.

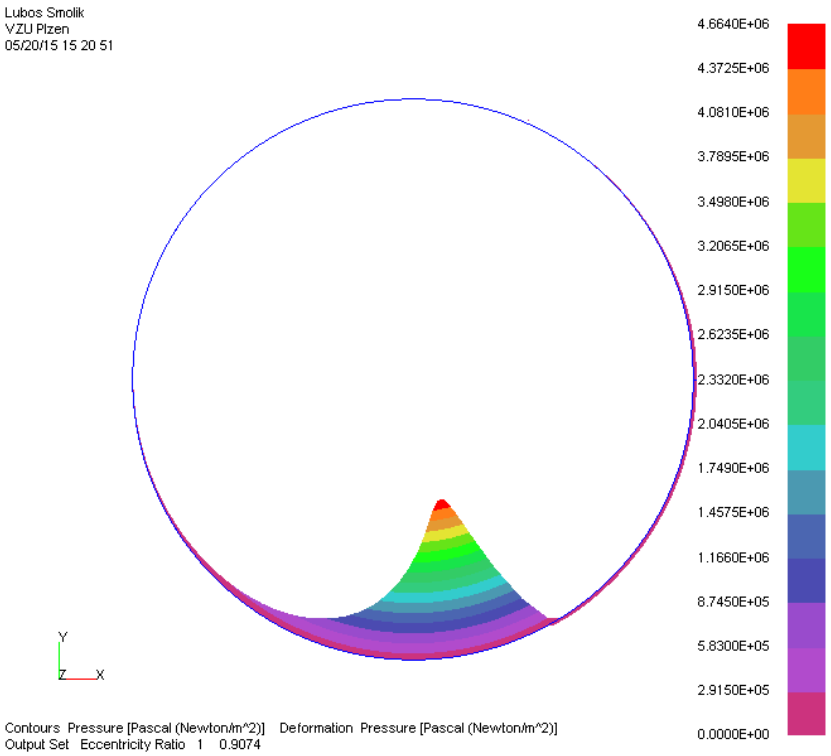
Na obr. 7.12 jsou pro tento typ ložiska o zadaných parametrech (tab. 7.1) vykresleny výsledky z programu ARMD. Výsledky znázorněné v řezu v polovině délky ložiska (obr. 7.13) získané numerickým řešením obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem se téměř shodují se získaným tlakovým rozložením z programu ARMD.



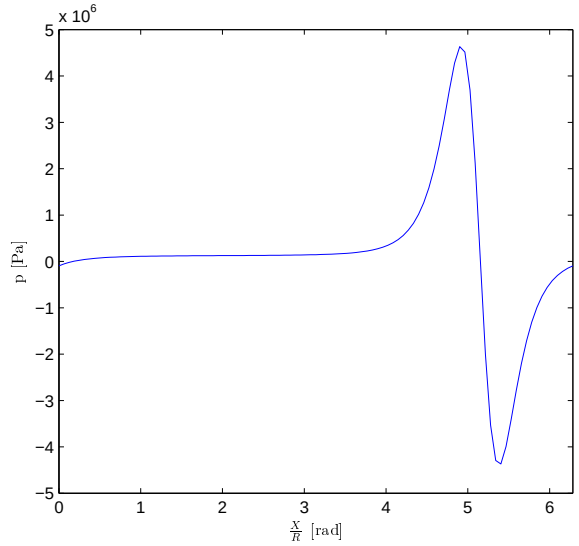
Obr. 7.10: Obecné ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice



Obr. 7.11: Obecné ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice



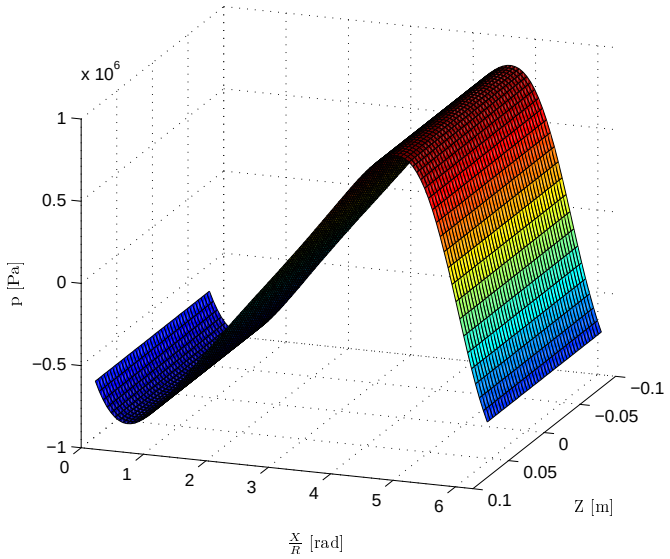
Obr. 7.12: Obecné ložisko – řešení programu ARMD



Obr. 7.13: Obecné ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska

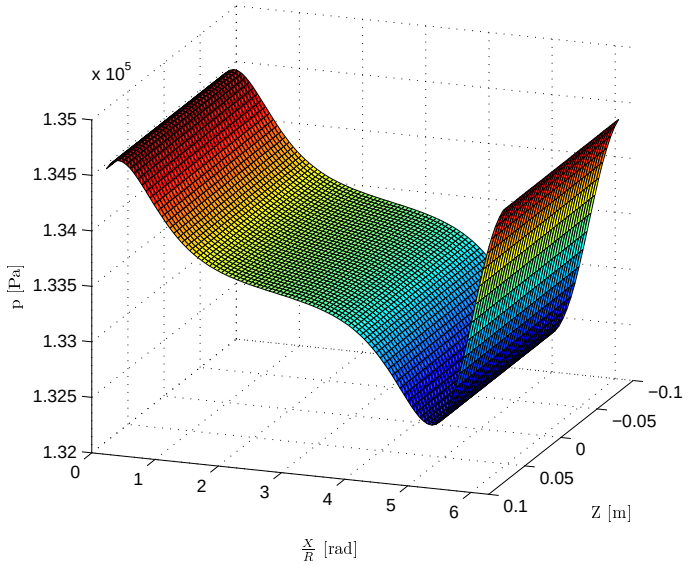
7.4 Tlakové rozložení v dlouhém ložisku

Výsledek analytického řešení (4.10) idealizované Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko je znázorněn na obr. 7.14. Vzhledem k tomu, že po stranách uvažujeme dokonalé těsnění dlouhého ložiska, řešíme tlakové rozložení pouze po obvodu v jednom libovolném příčném řezu. Uvažujeme tlak v nejširším místě ložiskové mezery $p_0 = 0\,\mathrm{Pa}$. Pro lepší názornost a porovnávání výsledků z jiných metod řešení můžeme toto tlakové rozložení, které je v libovolném příčném řezu totožné, vykreslit po celé délce ložiska.

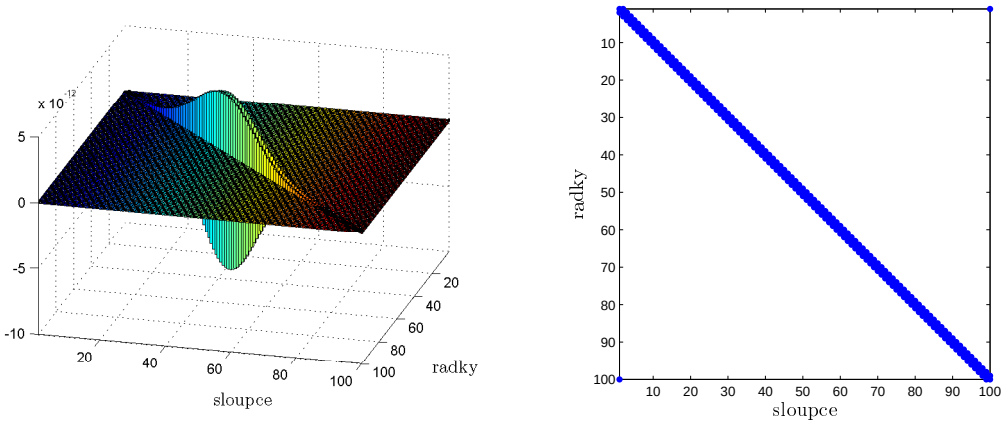


Obr. 7.14: Dlouhé ložisko – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice

Při numerickém řešení idealizované Reynoldsovy rovnice nastává problém se špatnou podmíněností úlohy kvůli velkému gradientu tlaku způsobeným nerovnoměrným zatížením olejového filmu. Tento problém můžeme částečně vyřešit pomocí přeškálování matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{f}$. Po přeškálování matic jsou rozdíly numerického řešení (4.47) od analytického řešení vykresleny na obr. 7.15. Maximální rozdíly jsou řádově 10^5 Pa. Tyto rozdíly není možné kvůli řádu maximálního hydrodynamického tlaku (10^6 Pa) zanedbat. Při těchto parametrech ložiska, maziva a zvoleném dělení sítě se podmíněnost úlohy ani po přeškálování matic nezlepšila. Důvodem jsou přetrvávající velké řádové rozdíly jednotlivých prvků přeškálované matice $\mathbf{A}$. Velikosti jednotlivých prvků matice jsou znázorněny na obr. 7.16(a).



Obr. 7.15: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení po přeškálování idealizované Reynoldsovy rovnice od analytického řešení

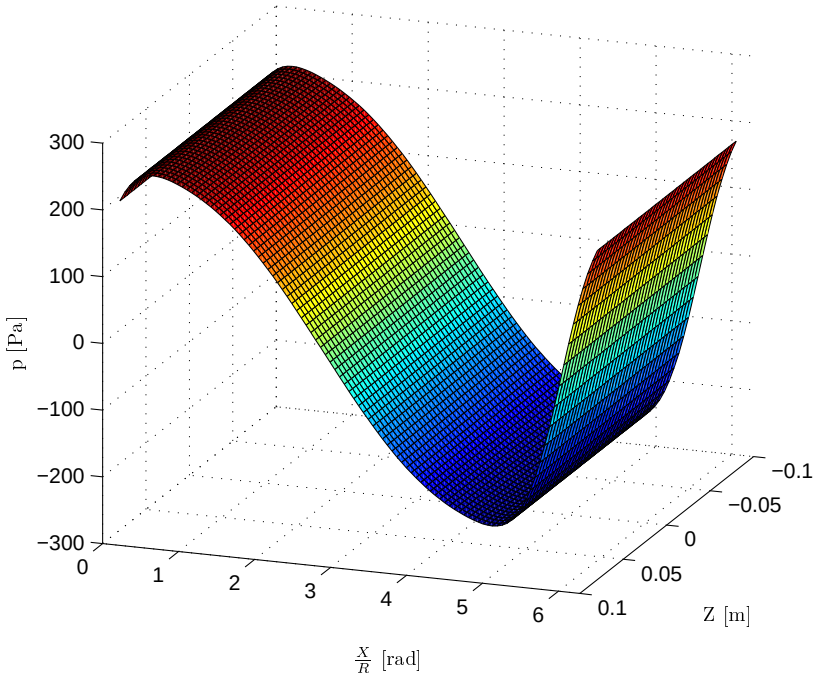


(a) Prvky matice

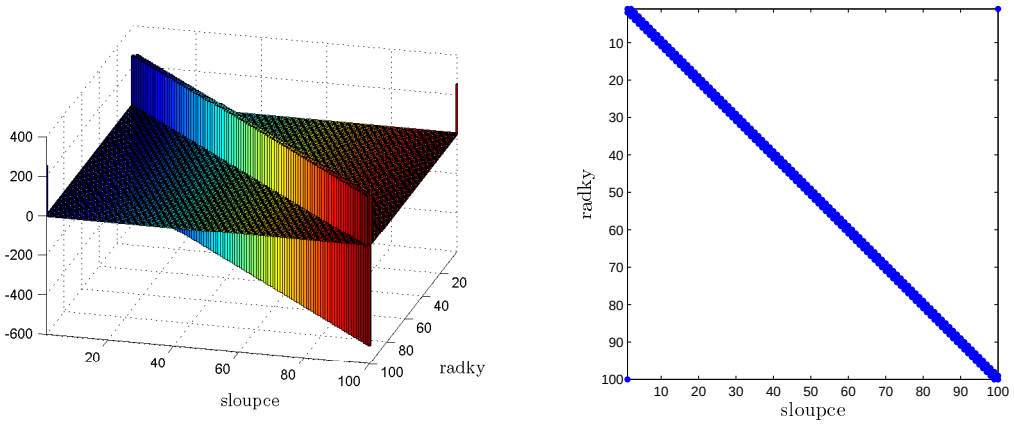
(b) Obsazení matice

Obr. 7.16: Dlouhé ložisko – přeškálovaná matice $\mathbf{A}$

Druhou možností, jak vyřešit špatnou podmíněnost úlohy, je převod Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru a následné zavedení Vogelpohlova parametru. Po provedení numerického řešení (4.64) idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem jsou rozdíly od analytického řešení znázorněné na obr. 7.17. Maximální rozdíly jsou vůči maximální hodnotě hydrodynamického tlaku téměř nulové. Na obr. 7.18(a) jsou jednotlivé prvky matice **A** stejného řádu, a proto už nenastává problém se špatnou podmíněností.



Obr. 7.17: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení



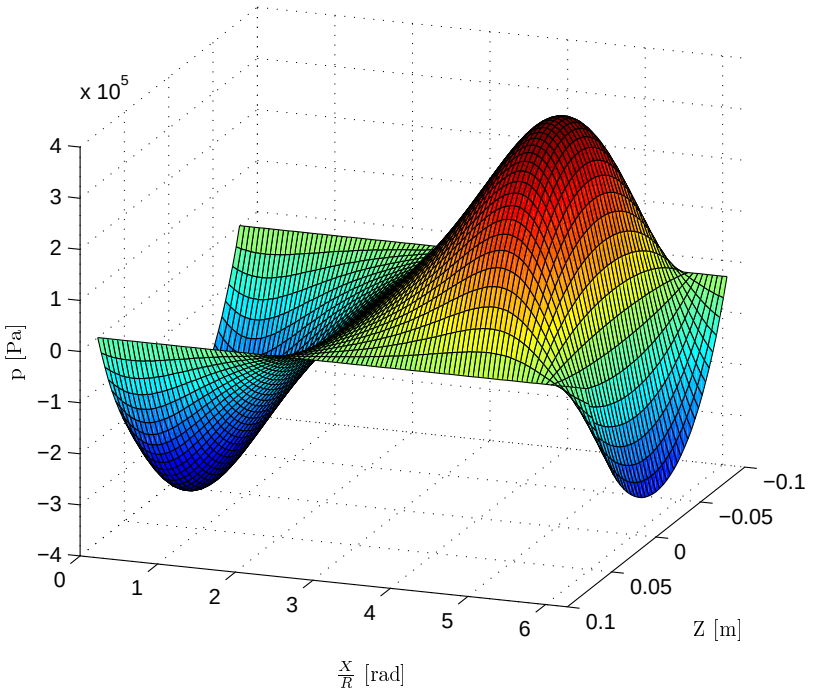
(a) Prvky matice

(b) Obsazení matice

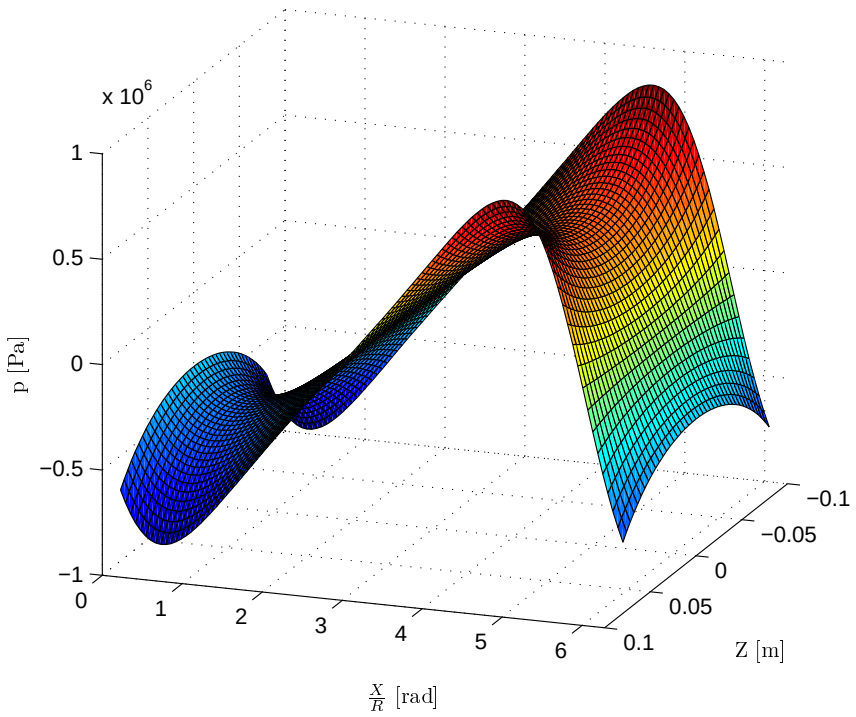
Obr. 7.18: Dlouhé ložisko – matice **A**

Srovnání vypočítaných tlakových rozložení ukazuje, že numerické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko je kvůli vzniku velkého gradientu tlaku v určitých místech ložiskové mezery citlivější na větší odchylky. Po zavedení Vogelpohlova parametru se podmíněnost úlohy zlepší a rozdíly v tlakovém rozložení se sníží na zanedbatelnou hodnotu.

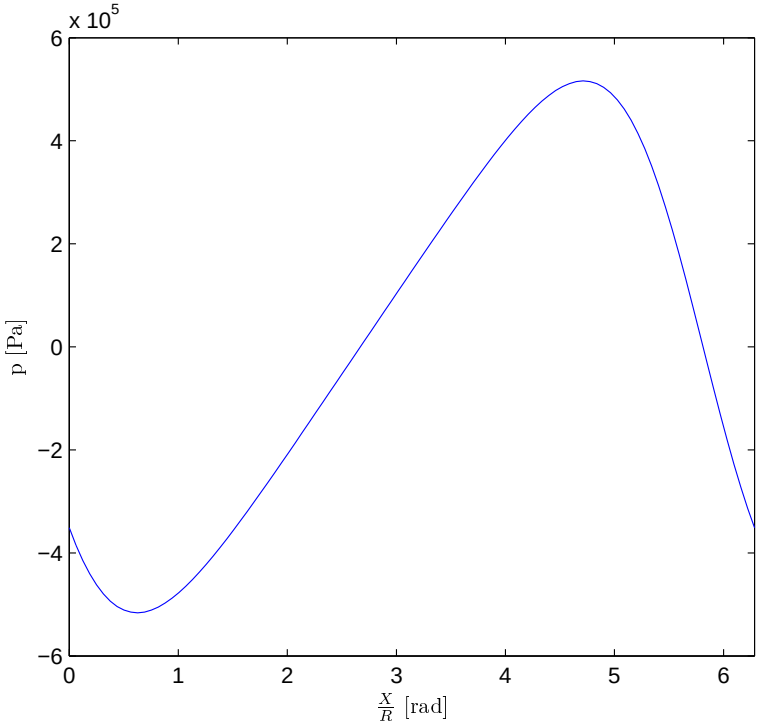
Při numerickém řešení (4.37) obecné Reynoldsovy rovnice nastává problém s okrajovými podmínkami, konkrétně s hodnotami tlaků v uzlech na krajích sítě pokrývající ložiskovou mezeru, protože při numerickém řešení používáme metodu konečných diferencí, kde princip této metody je založen na počítání uzlové hodnoty z hodnot v sousedních uzlech pomocí pětibodového schématu (kap. 4.2.2). U předchozích výpočtů pro dlouhé ložisko ale uvažujeme, že délka ložiska je nekonečně velká, strany ložiska jsou dokonale těsněny a tlak, který se v těchto místech nachází, je roven tlaku uvnitř ložiska v libovolném příčném řezu. Při řešení obecné Reynoldsovy rovnice budeme uvažovat po stranách ložiska tlak $p_S = 0\,\mathrm{Pa}$. Výsledky tohoto numerického řešení jsou znázorněny na obr. 7.19. Rozdíl numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko je vykreslen na obr. 7.20. Pro lepší názornost rozdílů tlakových rozložení je na obr. 7.21 proveden příčný řez v polovině délky ložiska. V této vzdálenosti jsou okrajové podmínky částečně potlačeny. Odchylky v tomto řezu přesto dosahují velkých hodnot. Pokud bychom chtěli dosáhnout přesnějších výsledků, museli bychom při numerickém řešení obecné Reynoldsovy rovnice uvažovat délku ložiska mnohonásobně větší než je jeho skutečná délka – nekonečně dlouhé ložisko. Tím bychom v polovině délky ložiska dostatečně potlačili veškerý vliv okrajových podmínek.



Obr. 7.19: Dlouhé ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice

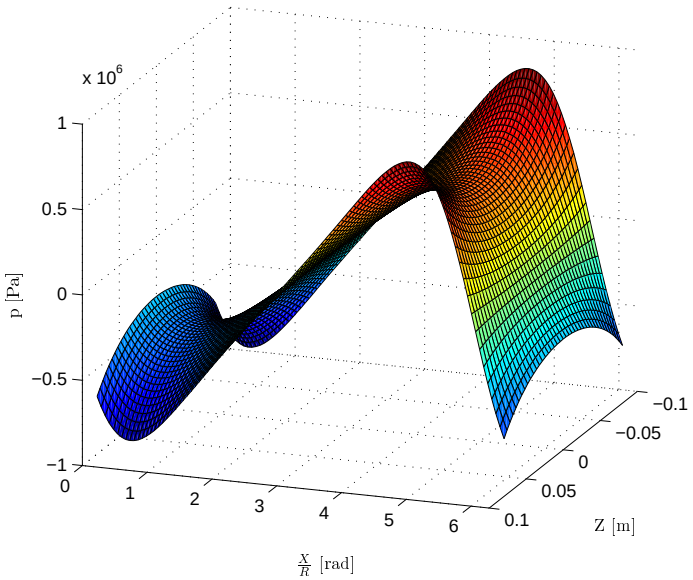


Obr. 7.20: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení

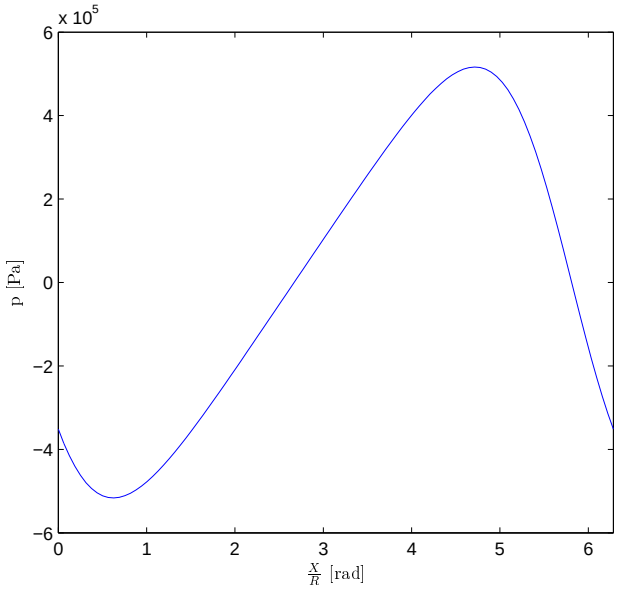


Obr. 7.21: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení – řez v polovině délky ložiska

Problém s okrajovými podmínkami na stranách ložiska nastává i u numerického řešení (4.58) obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem. Na obr. 7.22 jsou vykresleny rozdíly numerického řešení od analytického. Rozdíly tlaků v řezu v polovině délky ložiska jsou na obr. 7.23. Numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem vychází téměř shodně jako numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice.

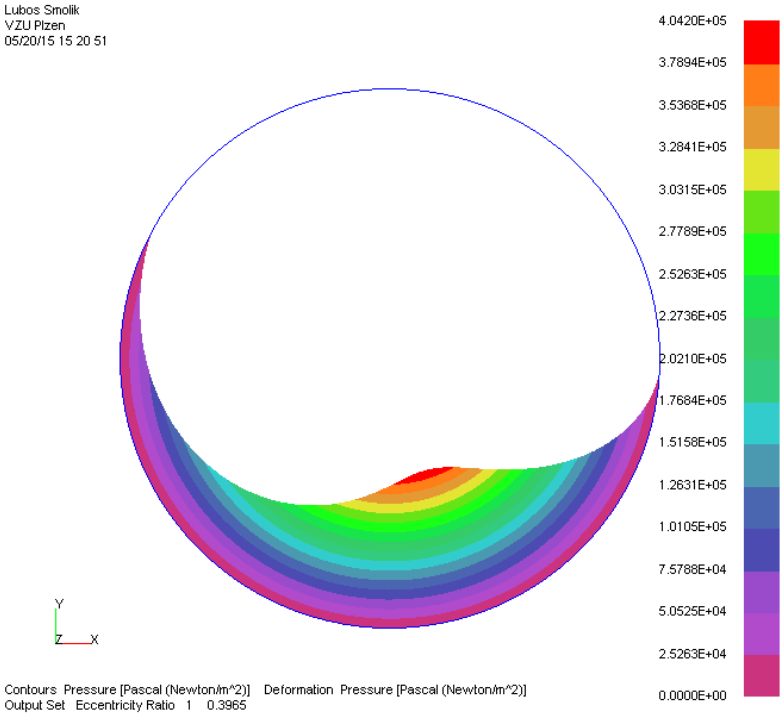


Obr. 7.22: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení

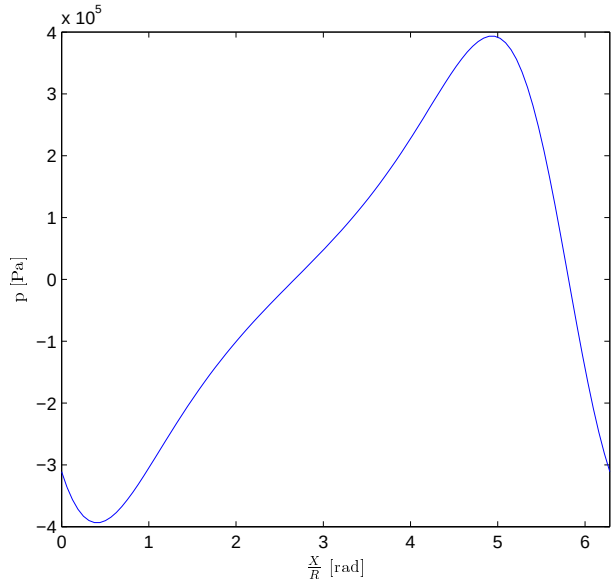


Obr. 7.23: Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení – řez v polovině délky ložiska

Na obr. 7.24 jsou uvedeny výsledky tlakového rozložení v dlouhém ložisku získané z programu ARMD. Rozdíly těchto výsledků a výsledků, které poskytlo numerické řešení (obr. 7.25) obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým prametrem jsou zanedbatelné.



Obr. 7.24: Dlouhé ložisko – řešení programu ARMD



Obr. 7.25: Dlouhé ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska

Idealizované Reynoldsovy rovnice pro dlouhá ložiska jsou vhodné pouze pro výpočet tlakového rozložení v ložisku, jehož geometrický poměr $\frac{L}{D}$ je mnohonásobně větší než poměr hraniční.

7.5 Výsledky výpočtu hydraulické síly

Po vyřešení tlakového rozložení z Reynoldsovy rovnice, resp. Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem, pro zadané parametry kluzného ložiska (tab. 7.1) můžeme vypočítat složky hydraulické síly, která působí na čep hřídele (kap. 5). Výsledky složek hydraulické síly jsou částečně nepřesné kvůli zanedbání smykových složek napětí.

Analytický výpočet hydraulické síly v krátkém ložisku provádíme v radiálním a tečném směru podle vztahů (5.34) a (5.35). Do pevného souřadnicového systému xyz je převedeme pomocí transformačních vztahů (5.40) a (5.41). Po numerickém vyřešení Reynoldsovy rovnice získáme hodnoty tlaků v jednotlivých uzlech sítě pokrývající ložiskovou mezeru. Pro výpočet hydraulické síly použijeme vztahy (5.28) a (5.29). Protože v ložisku uvažujeme vznik kavitace, platí tyto vztahy pouze za podmínky $p_{i,j} > 0$.

V tabulce tab. 7.2 jsou uvedeny výsledky výpočtu složek hydraulické síly F_{Hy} a F_{Hz}, kterou působí olejový film na čep hřídele v krátkém ložisku. Rozdíly mezi jednotlivými složkami jsou způsobeny rozdíly v tlakových rozložení (kap. 7.2), ze kterých se hydraulická síla počítá. Čep hřídele je zatížen pouze tíhovou silou o velikosti 5000 N, a proto je složka síly F_{Hz} dominantní složkou a působí proti tíhové síle. Rozdíl mezi těmito silami je zanedbatelný.

	F_{Hy} [N]	F_{Hz} [N]
analytické řešení	106,2396	$6,9532 \cdot 10^3$
numerické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice (4.43)	-71,6856	$6,7536 \cdot 10^3$
numerické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.64)	-71,6856	$6,7536 \cdot 10^3$
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice (4.37)	90,8167	$4,7764 \cdot 10^3$
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.58)	99,8649	$4,7202 \cdot 10^3$

Tab. 7.2: Krátké ložisko – složky hydraulické síly

Výsledky hydraulické síly v obecném ložisku jsou uvedeny v tab. 7.3. Při výpočtu předpokládáme vznik kavitace. Proto rozšíříme numerické řešení (5.28) a (5.29) o podmínku $p_{i,j} > 0$. Rozdíly mezi jednotlivými složkami sil jsou téměř nulové. Hlavní složkou hydraulické síly je složka F_{Hz} správně jdoucí proti tíhové síle čepu.

	F_{Hy} [N]	F_{Hz} [N]
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice (4.37)	292,839	$4,6275 \cdot 10^3$
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.58)	299,4694	$4,6056 \cdot 10^3$

Tab. 7.3: Obecné ložisko – složky hydraulické síly

Složky hydraulické síly v dlouhém ložisku můžeme získat dvěma způsoby. Prvním z nich je analytický výpočet radiální a tečné složky síly (5.38), (5.39) a jejich následná transformace do souřadnicového systému yz podle vztahů (5.40) a (5.41). Druhým možným způsobem výpočtu je numerické řešení (5.28) a (5.29) s uvažováním vlivu kavitace. Výsledky hydraulických sil jsou uvedeny v tab. 7.4. Rozdíly mezi složkami hydraulických sil jsou ovlivněny rozdílnými tlakovými rozloženími (kap. 7.4). Dalším důvodem rozdílných výsledků je uvažování okrajových podmínek při numerickém řešení obecných Reynoldsových rovnice. V ostatních případech při výpočtu neuvažujeme po stranách ložiska vnější tlak – v libovolném příčném řezu je tlakové rozložení stejné. Výsledky z analytického řešení a numerických řešení idealizovaných rovnic neodpovídají charakteru zatížení čepu hřídele tíhovou silou.

	F_{Hy} [N]	F_{Hz} [N]
analytické řešení	$3,4 \cdot 10^3$	$1,6481 \cdot 10^4$
numerické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice (4.47)	$2,0662 \cdot 10^3$	$1,3729 \cdot 10^4$
numerické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.68)	$3,4839 \cdot 10^3$	$1,6899 \cdot 10^4$
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice (4.37)	513,1312	$4,686 \cdot 10^3$
numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem (4.58)	513,9291	$4,6844 \cdot 10^3$

Tab. 7.4: Dlouhé ložisko – složky hydraulické síly

7.6 Výsledky výpočtu koeficientů tuhosti

Po výpočtu hydraulické síly působící na čep hřídele můžeme výpočítat i tuhost olejového filmu (kap. 6). Velikost složek hydraulické síly určíme z tlakového rozložení získaného z numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem. Po malém vychýlení čepu hřídele z pracovní polohy ve směru y a z určíme přírůstek složek hydraulické síly a podle vztahů (6.1) až (6.4) vypočteme jednotlivé koeficienty tuhosti.

V tab. 7.5 až tab. 7.7 jsou uvedena srovnání jednotlivých koeficientů získaných z numerického výpočtu a koeficientů, které poskytl komerční program ARMD. Vzniklé rozdíly jsou způsobeny nepřesnostmi při předchozím numerickém řešení a propracovanějším přístupem programu ARMD k vyjádření koeficientů tuhosti. Na obr. 7.26 až obr. 7.28 jsou postupně vykresleny závislosti koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele pro všechny typy ložisek o zadaných parametrech (tab. 7.1). Tyto závislosti jsou částečně zkresleny a od skutečných se liší tím, že všechny koeficienty tuhosti jsou počítány pro stejnou polohu čepu. Ve skutečnosti se při změně otáček mění i pracovní poloha čepu hřídele.

	k_{yy} [N/m]	k_{yz} [N/m]	k_{zy} [N/m]	k_{zz} [N/m]
program ARMD	$4,261 \cdot 10^7$	$-8,603 \cdot 10^7$	$-2,632 \cdot 10^8$	$1,107 \cdot 10^9$
numerické řešení	$3,095 \cdot 10^7$	$-6,017 \cdot 10^7$	$-2,2108 \cdot 10^8$	$0,98494 \cdot 10^9$

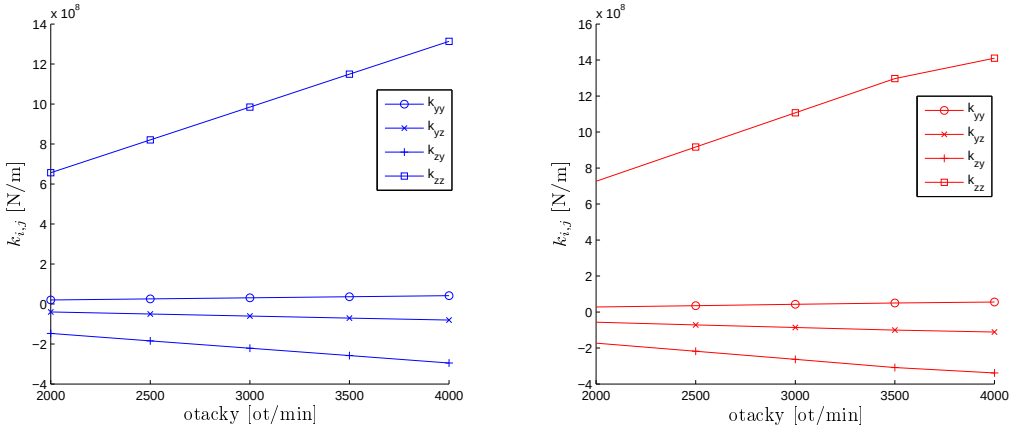
Tab. 7.5: Krátké ložisko – koeficienty tuhosti

	k_{yy} [N/m]	k_{yz} [N/m]	k_{zy} [N/m]	k_{zz} [N/m]
program ARMD	$5,099 \cdot 10^7$	$-5,384 \cdot 10^7$	$-1,71 \cdot 10^8$	$3,645 \cdot 10^8$
numerické řešení	$4,451 \cdot 10^7$	$-3,48 \cdot 10^7$	$-1,6138 \cdot 10^8$	$3,2061 \cdot 10^8$

Tab. 7.6: Obecné ložisko – koeficienty tuhosti

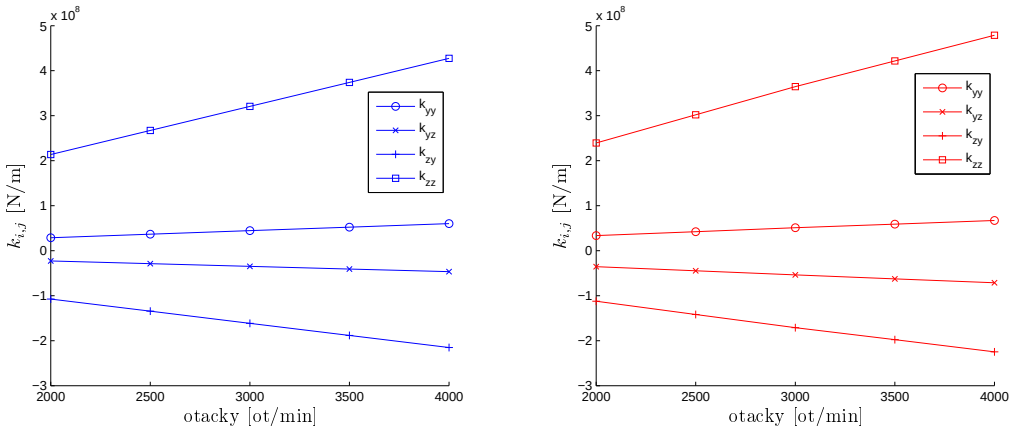
	k_{yy} [N/m]	k_{yz} [N/m]	k_{zy} [N/m]	k_{zz} [N/m]
program ARMD	$4,158 \cdot 10^7$	$3,467 \cdot 10^7$	$-7,044 \cdot 10^7$	$3,781 \cdot 10^7$
numerické řešení	$3,2367 \cdot 10^7$	$3,8771 \cdot 10^7$	$-6,7954 \cdot 10^7$	$2,8569 \cdot 10^7$

Tab. 7.7: Dlouhé ložisko – koeficienty tuhosti



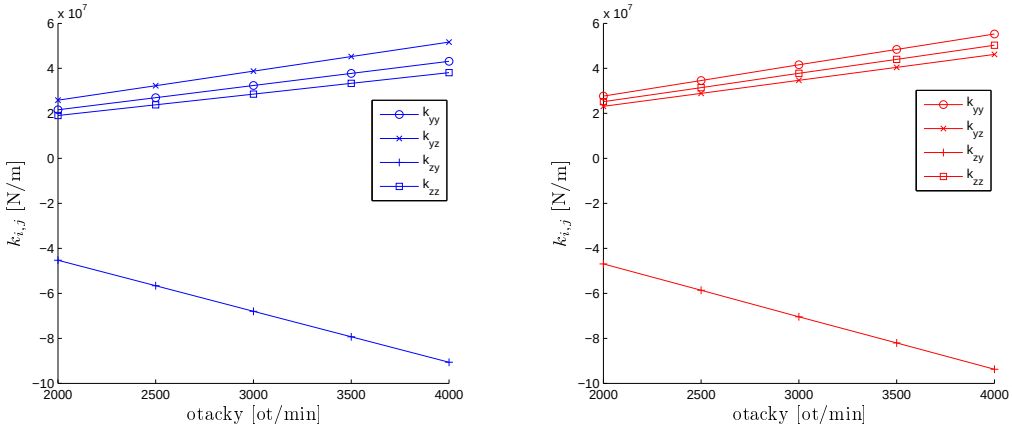
(a) Numerické řešení (b) Program ARMD

Obr. 7.26: Krátké ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele



(a) Numerické řešení (b) Program ARMD

Obr. 7.27: Obecné ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele



(a) Numerické řešení (b) Program ARMD

Obr. 7.28: Dlouhé ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele

8 Závěr

Na začátku této bakalářské práce bylo v kapitole 1 stanoveno několik cílů. V této závěrečné části práce jsou jednotlivé body shrnuty.

Odvození Reynoldsovy rovnice

V kapitole 2 byla postupně odvozena obecná Reynoldsova rovnice. Toto odvození bylo provedeno na základě rovnováhy sil ve vyjmutém elementu z olejového filmu. Obecnou Reynoldsovu rovnici je možné dále zidealizovat pro dva speciální případy kluzných ložisek. Podle poměru délky a průměru ložiskové pánve rozdělujeme kluzná ložiska na krátká a dlouhá. Postup, který vede ke zjednodušení obecné Reynoldsovy rovnice, je ukázán na závěr kapitoly 2.

V literatuře se kvůli možné špatné podmíněnosti úlohy uvádí Reynoldsova rovnice častěji ve tvaru s Vogelpohlovým parametrem. Abychom získali rovnici v tomto tvaru, musíme nejprve převést Reynoldsovu rovnici do bezrozměrného tvaru, do kterého následně zavedeme Vogelpohlův parametr. Tento postup je detailněji popsán v kapitole 3.

Analytické a numerické řešení Reynoldsovy rovnice

Reynoldsova rovnice je parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. V kapitolách 4.1.1 a 4.1.2 jsou uvedeny vztahy pro analytické řešení idealizovaných rovnic pro krátká a dlouhá ložiska. Zbylá část kapitoly 4 se zabývá numerickým řešením obecných a idealizovaných Reynoldsových rovnic ve tvaru bez nebo s Vogelpohlovým parametrem. Pro každý tvar Reynoldsovy rovnice je v této kapitole podrobně popsán postup numerického řešení. Všechna numerická řešení jsou prováděna metodou konečných diferencí. Odvozené vztahy platí pouze za předpokladu stacionárního stavu, kdy se pouze čep hřídele otáčí okamžitou úhlovou rychlostí ω.

Odvození výpočtu složek hydraulické síly

V kapitole 5 je uvedeno odvození výpočtu složek hydraulické síly, kterou působí olejový film na čep hřídele a ložiskovou pánev. Výpočet je prováděn na základě znalosti tlakového rozložení v ložiskové mezeře. Výpočet hydraulické síly je možné provést analyticky nebo numericky podle zvoleného způsobu výpočtu tlakového rozložení. Při odvození je zahrnut vliv kavitace.

Odvození výpočtu koeficientů tuhosti

Za různých provozních podmínek se stejné mazivo vyznačuje různými dynamickými vlastnostmi. Tyto vlastnosti poté ovlivňují chování celé rotorové soustavy. Vzhledem k předpokladu stacionárního stavu čepu hřídele je možné vypočítat pouze koeficienty tuhosti. Vztahy pro výpočet jednotlivých koeficientů tuhosti se zabývá kapitola 6.

Výpočet tlakového rozložení, složek hydraulické síly a koeficientů tuhosti pomocí jednotlivých metod a srovnání výsledků pro daný typ ložiska

V kapitole 7.1 jsou v tab. 7.1 uvedeny pro každý typ ložiska jeho rozměry, fyzikální vlastnosti použitého maziva a provozní otáčky. Pomocí programu ARMD V5.7 G1 JUNBR obsahující modul pro radiální kluzná ložiska s pevnou geometrií byla pro zadané parametry určena stacionární poloha čepu hřídele v ložiskové pánvi kruhového průřezu.

V kapitolách 7.2 až 7.4 jsou uvedeny výsledky tlakového rozložení pro každý typ kluzného ložiska. Každá kapitola je doplněna o výsledky z programu ARMD a jejich srovnání s numerickým řešením obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem. Výsledky potvrdily předpoklad, že zavedení Vogelpohlova parametru vylepšuje špatnou podmíněnost úlohy (kap. 7.4). Výsledky také ukázaly, že pro určité parametry se při použití idealizovaných rovnic můžeme dopustit velkých rozdílů v řešení. Vhodnější a mnohem přesnější je vyřešit tlakové rozložení z obecné Reynoldsovy rovnice s a nebo bez Vogelpohlova parametru. Tyto výsledky se téměř shodují s výsledky z komerčního programu ARMD.

Nepřesnosti různých metod výpočtu tlakových rozložení se přenesly i do výsledků složek hydraulické síly, které jsou uvedeny v kapitole 7.5. Jako nejpřesnější se ukázal výpočet hydraulické síly z numerického řešení obecných Reynoldsových rovnic. Podle provedených výpočtů působí olejový film proti zatížení čepu hřídele přibližně stejně velkou silou opačně orientovanou.

Pro co nejpřesnější srovnání koeficientů tuhosti s hodnotami, které poskytl program ARMD, byla k výpočtu koeficientů použita numericky vyřešená hydraulická síla získaná z tlakového rozložení popsaného obecnou Reynoldsovo rovnicí s Vogelpohlovým parametrem. Výsledky výpočtu jednotlivých koeficientů pro každý typ ložiska jsou uvedeny v kapitole 7.6. Na závěr této kapitoly jsou vykresleny závislosti jednotlivých koeficientů tuhosti na provozních otáčkách čepu hřídele.

8.1 Rozšíření bakalářské práce

Metodiku modelování kluzných ložisek uvedenou v této bakalářské práci lze rozšířit o zavedení squeeze členu $\frac{\partial h}{\partial t}$ do numerického řešení a zpřesnění popisu chování maziva v ložiskové mezeře. Uvedená Reynoldsova rovnice popisuje pouze laminární proudění nestlačitelného maziva s konstantní dynamickou viskozitou. Po zavedení squeeze členu bude možné vypočítat i zbývající dynamické vlastnosti olejového filmu. Jednou z těchto vlastností je tlumení olejového filmu. Dynamické vlastnosti olejového filmu (koeficienty tuhosti a tlumení) nebo přímo hydraulickou sílu bude možné následně použít v matematickém modelu kmitajícího rotoru.

Literatura

[1] ANDRÉS, Luis San, 2006. *Hydrodynamic Fluid Film Bearing and Their Effect on the Stability of Rotating Machinery.* USA: Texas A&M University.

[2] HYRÁT, Jan, Václav ČERNÝ a Luboš SMOLÍK, 2012. *Studium a rešerše provedených výpočtů a experimentů, jejichž cílem je analýza statických a dynamických vlastností kluzných ložisek.* VZÚ Plzeň.

[3] MÍKA, Stanislav a Marek Brandner, 2000. *Numerické metody I.* Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.

[4] NGUYEN-SCHÄFER, Hung, 2012. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers.* Stuttgart.

[5] PŘIKRYL, Petr a Marek Brandner, 2000. *Numerické metody II.* Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.

[6] SFYRIS, Dimitris a Athanasios CHASAKEVRIS, 2012. An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. In: *Tribology International.* 55, 46-58

[7] STACHOWIAK, Gwidon W. a Andrew W. BATCHELOR, 2014. *Engineering Tribology.* 4. vyd. St. Louis: Butterworth-Heinemann.

[8] ZAPOMĚL, J., 2007. *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložiskách a squeeze filmových tlumičích.* Ostrava: VŠB - Technická univerzita.

Seznam obrázků

1.1 Klínová mezera 8

2.1 Průřez ložiskem 10
2.2 Zavedení souřadnicového systému 12
2.3 Vyjmutý element z ložiskové mezery 13

4.1 Diskretizace ložiskové mezery 25
4.2 Pětibodové schéma 26

5.1 Rozložení tlaku a smykových složek napětí v ložiskové mezeře 37
5.2 Směry působení tlaku a smykových složek napětí 39
5.3 Oblast působení tlaku $p_{i,j}$ 40
5.4 Oblast kavitace 41

7.1 Krátké ložisko – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice . . 45
7.2 Krátké ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice od analytického řešení 46
7.3 Krátké ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení 46
7.4 Krátké ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení 47
7.5 Krátké ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení 47
7.6 Krátké ložisko – řešení programu ARMD 48
7.7 Krátké ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska 48
7.8 Krátké ložisko $\varepsilon_H = 0,7$ – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice 49
7.9 Krátké ložisko $\varepsilon_H = 0,7$ – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení . . . 49
7.10 Obecné ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice 50
7.11 Obecné ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice 51
7.12 Obecné ložisko – řešení programu ARMD 51

7.13 Obecné ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska 52
7.14 Dlouhé ložisko – analytické řešení idealizované Reynoldsovy rovnice . . 52
7.15 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení po přeškálování idealizované Reynoldsovy rovnice od analytického řešení 53
7.16 Dlouhé ložisko – přeškálovaná matice **A** 53
7.17 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení idealizované Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení 54
7.18 Dlouhé ložisko – matice **A** 54
7.19 Dlouhé ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice 55
7.20 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení 56
7.21 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice od analytického řešení – řez v polovině délky ložiska 56
7.22 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení 57
7.23 Dlouhé ložisko – odchylky numerického řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem od analytického řešení – řez v polovině délky ložiska 57
7.24 Dlouhé ložisko – řešení programu ARMD 58
7.25 Dlouhé ložisko – numerické řešení obecné Reynoldsovy rovnice s Vogelpohlovým parametrem – řez v polovině délky ložiska 58
7.26 Krátké ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele . 62
7.27 Obecné ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele . 62
7.28 Dlouhé ložisko – závislost koeficientů tuhosti na otáčkách čepu hřídele . 62

Seznam tabulek

7.1 Parametry ložisek 44
7.2 Krátké ložisko – složky hydraulické síly 59
7.3 Obecné ložisko – složky hydraulické síly 60
7.4 Dlouhé ložisko – složky hydraulické síly 60
7.5 Krátké ložisko – koeficienty tuhosti 61
7.6 Obecné ložisko – koeficienty tuhosti 61
7.7 Dlouhé ložisko – koeficienty tuhosti 61