

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

INTERAKCE KONTINUÍ RŮZNÝCH FÁZÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Plzeň 2015

Jan Vocílka

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval sám, za pomoci vedoucího práce a uvedené citované literatury.

.....
Jan Vocílka

V Plzni dne 30.5.2015

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce prof. Ing. Jiřímu Křenovi, CSc. za jeho rady a čas vynaložený při řešení a realizace diplomové práce.

Abstrakt

Interakce kontinuí různých fází

Cílem předložené diplomové práce je uvést čtenáře do řešení problémů interakce kapalina - pružné těleso. Práce je tedy úvodem do této problematiky a jsou zde předloženy základní modely úloh interakce a základní numerické metody, kterými se tato problematika řeší (silně a slabě vázané systémy, sdružená a nesdružená metoda řešení). První úlohou je jednoduchý model interakce, který je v podstatě úplným úvodem do řešení problémů interakce. Jedná se o příkladem nesdružené metody, řešení úlohy deformace pružné překážky vlivem obtékání tekutiny. Další aplikace se již týká složitější problematiky interakce a zabývá se řešením tuhostních a tlumících charakteristik modelu lidského intaktního kolenního kloubu (přímá vazba na bakalářskou práci). Fyzikálním modelem je dotyk náhradního pružného hladkého válce s tuhou podložkou s uvažováním synoviální kapaliny. Výpočet tuhostních a tlumících charakteristik se opírá o znalost silových závislostí $F(\omega)$ a $F(h_0)$, které byly předmětem řešení bakalářské práce. Původní model kolenního kloubu byl rozšířen o zavedení drsnosti povrchu do matematického modelu. Pohyb tekutiny je obecně popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Problematika elastostatiky pružných těles je popsána podmínkou rovnováhy, konstitutivním vztahem a kinematickým vztahem. Jako vstupní modelová úloha sdružené metody je prezentována interakce nevazké kapaliny s tuhým pístem vázaným lineární pružinou k rámu. Druhou modelovou úlohou sdružené metody je hráz ovlivňována kapalinou. Pro popis tlakových vln kapaliny je aplikována Helmholtzova rovnice. Výstupem obou modelových úloh interakce systému kapalina-pružná struktura jsou vlastní frekvence modelů.

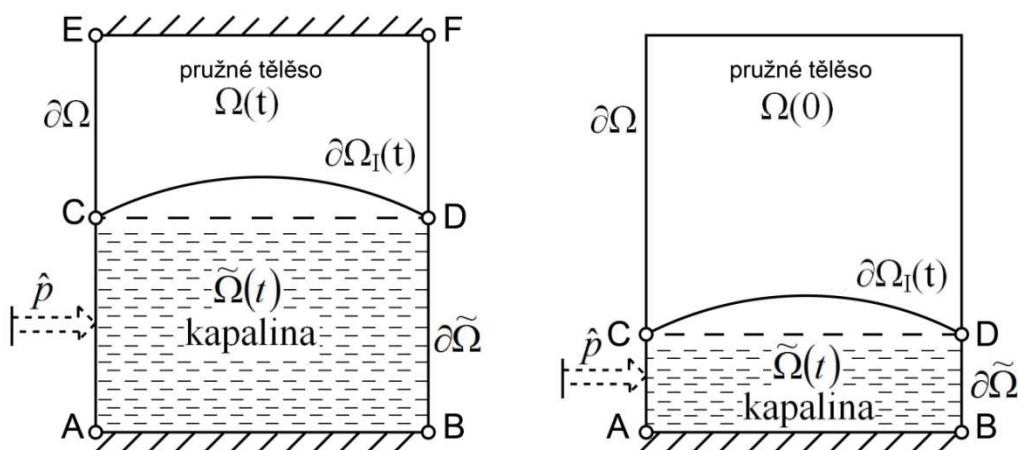
Obsah

1. Úvod	6
2. Formulace problému interakce	10
2.1 Zvolené metody řešení.....	14
3. Modelová úloha nesdružené metody	15
4. Vyhodnocení sil v kontaktu kolenního kloubu	20
4.1 Určení výsledné tuhosti	22
4.2 Určení výsledného tlumení	23
4.3 Numerické výsledky tuhostních a tlumících charakteristik.....	24
5. EHD kontakt s uvažováním drsnosti povrchu	26
5.1 Čisté valení	31
5.2 Záběr VKD s prokluzem.....	32
5.3 Rozložení teploty v mazací vrstvě.....	33
5.4 Numerické výsledky kontaktu s uvažováním drsnosti	34
6. Sdružená metoda	36
6.1 Modelová úloha sdružené metody	37
6.1.1 Numerické řešení modelové úlohy.....	41
6.2 Kmitání pružného tělesa v kapalině.....	43
6.2.1 Numerické řešení.....	50
6.3 Matice přídavných hmotností	51
7. Závěr.....	52
8. Literatura	54

1. Úvod

V technické praxi se často setkáváme s případy konstrukcí, kdy dochází ke vzájemnému dynamickému působení mezi elastickými tělesy a tekutinami. Elastické strojní části, jako jsou např. potrubí a trubkové svazky výměníků, lopatky turbín a kompresorů, vrtule a křídla letadel, trupy lodí, zuby ozubených kol s možnou přítomností maziva atd., jsou pod vlivem účinků okolní tekutiny (kapaliny nebo plynu). Zmiňovaná okolní tekutina může být buď v klidu, nebo může proudit kolem uvažovaných strojních součástí. Z praxe víme, že tekutina má významný vliv například na charakter kmitání těles, které jsou obklopeny tekutinou. Při studiu vzájemného působení (interakce) okolní tekutiny a elastických těles budeme muset aplikovat poznatky mechaniky, pružnosti a pevnosti, mechaniky tekutin a matematiky. Předložená diplomová práce je úvodem do řešení problémů vzájemného dynamického působení kapalin a elastických těles, tedy problémů hydroelasticity, přesněji řečeno řešení elastodynamických úloh interakce kapaliny s pružným okolím.

Z praktického hlediska můžeme považovat za významné dvě úlohy interakce, které jsou schematicky znázorněny na obr. 1.1. Zkoumat tedy budeme takové úlohy interakce, kdy kapalina vyplňuje oblast $\tilde{\Omega}(t)$ a je obklopena zcela nebo jenom z části pružným okolím (skořepinou, obecně pružným kontinuem či tělesem). Současně budeme uvažovat dostatečně velkou deformaci pružného okolí, která může podstatně změnit především tvar oblasti vyplněné kapalinou (kapalina může být v klidu nebo proudit naznačeným kanálem). Příčinou deformace pružného kontinua může být časově proměnná objemová síla nebo vnější zatížení na hranici, nebo předepsaný pohyb části pružného okolí. Cílem řešení je určit rozložení rychlosti a tlaku v kapalině a odpovídající deformace (resp. napětí a pohyb) pružného okolí.



Obr. 1.1. Interakce kontinuí

Ze znázornění na obr. 1.1 je patrné, že obecně uvažujeme dvě oblasti Ω a $\tilde{\Omega}$ s hranicemi $\partial\Omega$ a $\partial\tilde{\Omega}$, které jsou vyplněny různými typy kontinuí. Společná hranice $\partial\Omega_I$ je hranicí interakce těchto kontinuí. Pohyb a vlastnosti obou kontinuí budou popsány příslušným systémem diferenciálních rovnic. Na hranicích $\partial\Omega$ a $\partial\tilde{\Omega}$ předpokládáme obvyklé okrajové podmínky (bude specifikováno v následující kapitole), popřípadě některá část hranice $\partial\tilde{\Omega}$ může představovat volnou hranici (odpovídá např. volné hladině kapaliny). Hranice $\partial\Omega_I$ je neznámá a to buď na obou oblastech Ω a $\tilde{\Omega}$ (ÚLOHA P1) nebo pouze na oblasti $\tilde{\Omega}$, kdy oblast Ω je uvažována jako neměnná (ÚLOHA P2).

Praktickou aplikaci bude mít zřejmě nejčastěji ÚLOHA P2, u které budeme předpokládat jen malé posuvy a malé deformace pružného okolí (oblast Ω). Tyto posuvy na hranici $\partial\Omega_I$ jsou však dostatečně velké ve srovnání s rozměry v oblasti $\tilde{\Omega}$, takže tato je uvažována jako proměnná s neznámou hranicí $\partial\Omega_I$ (úzká vrstva kapaliny - intenzivní vzájemné ovlivňování kontinuí, silně vázané systémy – „strong coupled“).

ÚLOHA P1 obecně odpovídá situaci, kdy posuvy v pružném kontinuu budou natolik velké, že při řešení bude nutno uvažovat proměnnou i oblast. Zvážíme-li předpoklad, že posuvy na hranici $\partial\Omega_I$ jsou dostatečně malé ve srovnání s rozměry oblastí Ω a $\tilde{\Omega}$ („silná vrstva“ kapaliny, slabě vázané systémy – „weak coupled“), můžeme takovou úlohu interakce řešit např. metodou přídavných hmotností. Tato metoda vychází z předpokladu, že kapalina, která obklopuje uvažovaný element, je v klidu (nebo proudí jen malou rychlostí, která nemá zásadní vliv na sledovaný děj) a do pohybu se dostává jen relativně malý objem kapaliny v bezprostřední blízkosti, např. kmitajících stěn. Zkoumáme-li kmitání určitého tělesa v kapalině, tak okolní kapalina bude svými setrvačnými a tlumícími účinky působit na uvažované těleso a vyvolá snížení hodnot vlastních frekvencí kmitání tohoto tělesa. To znamená, že určité množství kapaliny uváděné do pohybu kmitáním tělesa se projeví jako tzv. přídavná hmotnost („added mass“). Pak můžeme pohyb tělesa popsat stejnou diferenciální rovnicí jako pohyb tělesa ve vakuu s tím, že jeho hmotnost zvětšíme o přídavnou hmotnost. Podobně tlumení soustavy je rovněž zvětšeno o tzv. přídavné tlumení.

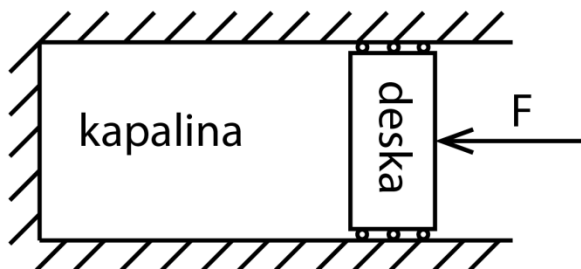
Předmětem řešení této diplomové práce jsou ÚLOHA P1 i ÚLOHA P2 s tím, že každý uvažovaný model má svoje uplatnění i omezení v technické praxi. Např. metoda přídavných hmotností, v případě úzké vrstvy kapaliny, neumožňuje dostatečně postihnout vliv proudění kapaliny na pohyb pružného kontinua (např. [3], nereálně velká přídavná hmotnost).

Z povahy uvedených úloh P1 a P2 vyplývá, že úspěšné řešení úloh interakce kapaliny s pružným okolím předpokládá zvládnout řešení následujících dílčích úloh:

1. Řešení úlohy hydrodynamiky, resp. hydrostatiky vazké kapaliny v primitivních proměnných (tlak p a složky rychlosti v_i)
2. Řešení nestacionárních úloh pružného kontinua (např. nosník, skořepina, atd.). Zde lze ještě rozlišit
 - a) malé posuvy, malé deformace
 - b) velké posuvy, malé deformace
 - c) velké posuvy, velké deformace

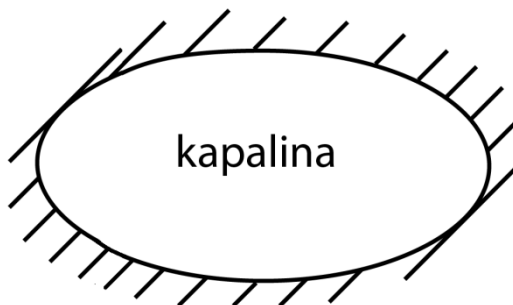
3. Řešení úlohy s volnou hranicí.
4. Vlastní řešení úlohy interakce různých typů kontinua.

Další základní rozdělení úloh interakce lze najít v literatuře [7]. Podle Olsona a Batheho lze problémy interakce kontinuí různých fází obecně rozdělit na čtyři základní modely. První model reprezentuje problematiku statického zatížení tuhé přepážky tlakem vyvolaným tekutinou (obr. 1.2).



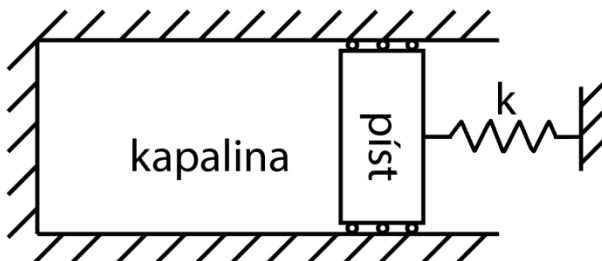
Obr. 1.2. Statické zatížení (dokonale tuhá deska)

Druhý model představuje úlohu řešení vlastní frekvence v kavitě s tuhými stěnami (obr. 1.3).



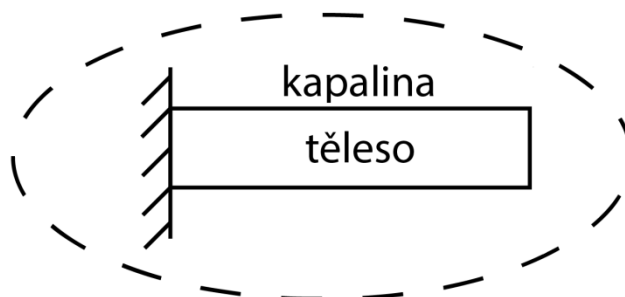
Obr. 1.3. Kavita s tuhými stěnami (vlastní frekvence kapaliny)

Třetí model je řešení kmitání kapaliny s uvažováním pohyblivé hranice (obr. 1.4).



Obr. 1.4. Interakce kapaliny s pohyblivou hranicí

Posledním zmíněným modelem je potom kmitání pružného tělesa (konstrukcí) v kapalině (obr. 1.5).

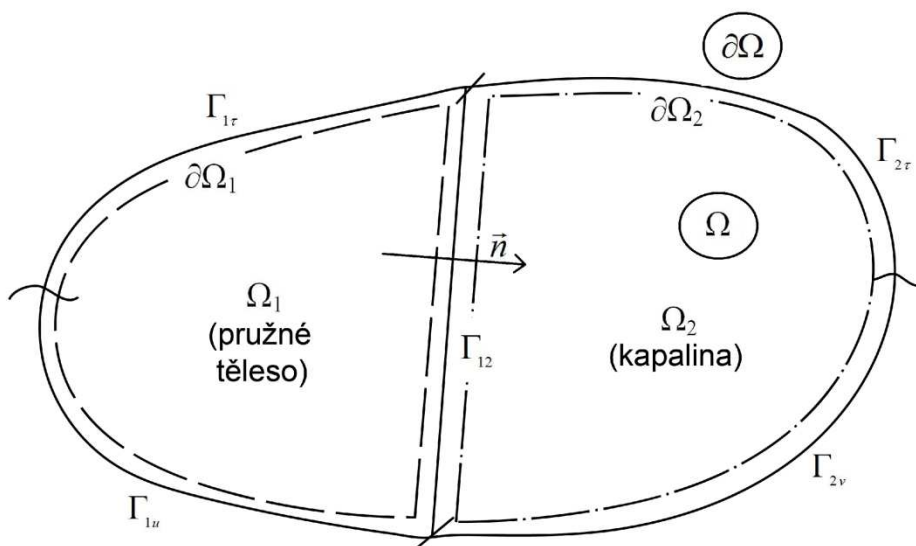


Obr. 1.5. Kmitání konstrukcí v kapalině

Každý z těchto modelů může být samozřejmě řešen s uvažováním různých vlastností kapalin a jejich proudění (vazké, nevazké, nevířivé, laminární, turbulentní, izotermické atd.) a různých vlastností a pohybů pružných těles (lineární, nelineární, materiálové modely, statika, dynamika atd.).

2. Formulace problému interakce

Nyní provedeme obecnou formulaci úlohy interakce kontinuí dvou různých typů. Budeme uvažovat obecný izotermický problém interakce nestlačitelné, vazké Newtonovy kapaliny s pružným okolím (pružným tělesem, obr. 2.1). Budeme vždy předpokládat euklidovský prostor a lineární, homogenní a izotropní kontinua.



Obr. 2.1. Formulace problému interakce

Nechť $\Omega \subset R^s$ je otevřená, omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ (s je dimenze prostoru). Dále nechť je zadán otevřený časový interval $(0, T) \subset R^1$. Uzávěr oblasti Ω v R^s označme $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Dále předpokládejme, že oblast Ω je rozdělena na dvě disjunktní podoblasti Ω_1 a Ω_2 , které jsou opět omezené a mají lipschitzovské hranice. Společnou hranicí (hranice interakce kontinuí) oblastí Ω_1 a Ω_2 označme Γ_{12} , její normálu \vec{n} orientujeme z oblasti Ω_1 do Ω_2 .

Na oblasti Ω_1 (pružné těleso) nechť je definována okrajová a počáteční úloha elastodynamiky. Lipschitzovská hranice $\partial\Omega_1$ této oblasti je rozdělena na disjunktní podmnožiny $\Gamma_{1r}, \Gamma_{1u}, \Gamma_{12}$ tj. $\partial\Omega_1 = \Gamma_{1r} \cup \Gamma_{1u} \cup \Gamma_{12}$. Uzávěr oblasti Ω_1 označme $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1$. Na části hranice Γ_{1r} nechť je zadán vektor napětí $\hat{\sigma}$ (symbol \wedge označuje danou veličinu), na části hranice Γ_{1u} nechť je pak zadán vektor posuvu \hat{u} (podmínky na hranici interakce Γ_{12} zatím nespecifikujeme).

Nechť posuv libovolného bodu pružného kontinua je u , měrná hmotnost je ρ , složky vnější objemové síly jsou f_i . Cílem řešení je určit časové a prostorové rozložení posuvu bodů kontinua při zadaných počátečních a okrajových podmínkách. Posuv tedy chápeme jako vektorovou funkci $u(x, t)$ proměnných x, t o složkách $u_i(x, t)$.

Při řešení předpokládáme, že oborem materiálové proměnné x je oblast $\Omega_1 \subset R^S$ a oborem časové proměnné t je interval $(0, T)$. Pro dané rozložení sil popsané funkcemi \hat{f}_i , chceme řešit úlohu elastodynamiky pro neznámou funkci $u_i(x, t)$ na časoprostorovém válci $\bar{D} = \bar{\Omega}_1 \times [0, T]$. Úloha je obecně popsána následujícím systémem rovnic a podmínek:

podmínka rovnováhy sil

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i &= 0, \\ F_i &= -\rho \frac{Dv_i}{Dt} + \rho f_i; \quad t \in (0, T), x \in \Omega_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

konstitutivní vztahy

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{ll} + 2\mu e_{ij}; \quad t \in (0, T), x \in \Omega_1, \quad (2.2)$$

kinematická rovnice

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad t \in (0, T), x \in \Omega_1, \quad (2.3)$$

počáteční podmínky

$$\begin{aligned} u_i(0, x) &= {}^0\hat{u}_i(x); \quad t = 0, x \in \Omega_1 \\ \dot{u}_i(0, x) &= {}^0\hat{\dot{u}}_i(x); \quad t = 0, x \in \Omega_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

(tečka vyjadřuje derivaci podle času).

Okrajový režim úlohy je určen okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_i(t, x) &= \hat{u}_i(x); \quad t \in (0, T), x \in \Gamma_{1u}, \\ \sigma_i(t, x) &= \tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(t, x); \quad t \in (0, T), x \in \Gamma_{1\tau}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

V těchto vztazích τ_{ij} je Cauchyův tenzor napjatosti, e_{ij} je Cauchyův tenzor malých deformací, λ a μ jsou Laméovy součinitelé, δ_{ij} je Kroneckerovo delta, n_j jsou složky vektoru vnější normály hranice $\partial\Omega_1$.

V takto formulované úloze elastodynamiky (zatím nehovoříme o podmínkách na hranici interakce Γ_{12}) jsou neznámými tenzor napjatosti τ_{ij} , tenzor deformace e_{ij} a složky vektoru posuvu u_i . Složky tenzorů τ_{ij} a e_{ij} lze z uvedených rovnic vyloučit a získáme tzv. Laméovy rovnice. Jejich řešením s ohledem na počáteční a okrajové podmínky lze potom získat hledané složky vektoru posuvu $u_i(x, t)$.

Na oblast Ω_2 budeme dále definovat izotermickou, okrajovou a počáteční úlohu hydromechaniky. Zde se omezíme na laminární nestacionární proudění vazké, nestlačitelné

Newtonovy kapaliny s konstantní dynamickou viskozitou ($\eta = konst.$). Složky vektoru rychlosti kapaliny jsou v_i , její měrná hmotnost (hustota, $\rho = konst.$) je ρ , tlak v kapalině je p , složky vnější měrné objemové síly jsou f_i .

Lipschitzovská hranice $\partial\Omega_2$ uvažované oblasti je rozdělena na disjunktní podmnožiny $\Gamma_{2\tau}, \Gamma_{2v}, \Gamma_{12}$, t.j. platí $\partial\Omega_2 = \Gamma_{2\tau} \cup \Gamma_{2v} \cup \Gamma_{12}$. Uzávěr oblasti Ω_2 označme $\overline{\Omega_2} = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2$. Na části hranice $\Gamma_{2\tau}$ necht' je zadán vektor napětí $\hat{\sigma}$, na části hranice Γ_{2v} necht' je pak zadán vektor rychlosti \hat{v} (podmínky na hranici Γ_{12} zatím nespécifikujeme). Hledanými veličinami v této úloze jsou složky rychlosti $v_i(x,t)$ a tlak $p(x,t)$ v kapalině při zadaných počátečních a okrajových podmínkách. Prostorové proměnné x jsou z oblasti $\Omega_2 \subset R^S$ a oborem časové proměnné je interval $(0,T) \subset R^1$.

Výsledkem úlohy hydromechaniky jsou neznámé funkce rychlostí $v_i(x,t)$ a tlaku $p(x,t)$ řešené na časoprostorovém válci $\overline{D} = \overline{\Omega_2} \times [0,T]$. Tato úloha je obecně popsána systémem rovnic s počátečními a okrajovými podmínkami:

podmínka rovnováhy sil

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i &= 0, \\ F_i &= -\rho \frac{Dv_i}{Dt} + \rho f_i; \quad t \in (0,T), x \in \Omega_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad t \in (0,T), x \in \Omega_2, \quad (2.7)$$

kinematická rovnice

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad t \in (0,T), x \in \Omega_2, \quad (2.8)$$

konstitutivní vztahy

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p \delta_{ij} + R_{ij}, \\ R_{ij} &= 2\eta V_{ij} + \eta' \delta_{ij} V_{ll}; \quad t \in (0,T), x \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vztah mezi η , η' a μ , μ' jsou:

$$2\mu = \frac{1}{2\eta}, \quad \mu' = \frac{\eta'}{2\eta(2\eta + 3\eta')}. \quad (2.10)$$

Počáteční podmínka

$$v_i(0, x) = {}^0 \hat{v}_i(x); \quad t = 0, x \in \Omega_2. \quad (2.11)$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned} v_i(t, x) &= \hat{v}_i(t, x); & t \in (0, T), x \in \Gamma_{2v}, \\ \sigma_i(t, x) &= \tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(t, x); & t \in (0, T), x \in \Gamma_{2\tau}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zde τ_{ij} je tenzor napjatosti kapaliny, R_{ij} je disipační část tenzoru napjatosti (tenzor tření), V_{ij} je tenzor rychlosti deformace a n_j jsou složky vektoru vnější normály hranice $\partial\Omega_2$. V takto formulované úloze hydromechaniky jsou neznámými tenzor tření R_{ij} , tenzor rychlosti deformace V_{ij} , složky rychlosti v_i a tlak p . Vyloučíme-li tenzory R_{ij} a V_{ij} z uvedeného systému rovnic, dostaneme Navierovu - Stokesovou rovnici. Řešením Navierovy - Stokesovy rovnice společně s rovnicí kontinuity a počáteční, resp. okrajovou podmínkou lze získat složky vektoru rychlosti $v_i(x, t)$ a tlak $p(x, t)$.

Již zmíněnou úlohu interakce je ještě nutno dodefinovat podmínkami na hranici interakce Γ_{12} . Uvažované oblasti Ω_1 a Ω_2 mají společnou, volnou hranici Γ_{12} , na které se obě interagující kontinua stýkají a vzájemně se ovlivňují. Uvedené systémy obecných rovnic proudění kapaliny a pohyb pružného kontinua je tedy ještě nutno doplnit podmínkami přechodu (kontaktní podmínky, resp. podmínky vazby) na hranici Γ_{12} . Na této hranici musí být tedy splněny podmínky dotyku a stejné rychlosti a zrychlení obou kontinuí. Platí tedy

$$\begin{aligned} {}^1u_i(t, x) &= {}^2u_i(t, x), \\ {}^1\dot{u}_i(t, x) &= {}^2v_i(t, x); & t \in (0, T), x \in \Gamma_{12}. \\ {}^1\ddot{u}_i(t, x) &= {}^2\ddot{v}_i(t, x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

Horní indexy 1, resp. 2 symbolicky vyjadřují kontinuum 1, resp. 2. Dále se soustava interagujících kontinuí musí nacházet ve stavu silové rovnováhy. Podmínku rovnováhy na hranici Γ_{12} vyjádříme ve tvaru

$${}^1\tau_{ij} n_j = - {}^2\tau_{ij} n_j, \quad (2.14)$$

resp.

$${}^1\sigma_i(t, x) + {}^2\sigma_i(t, x) = 0; \quad t \in (0, T), x \in \Gamma_{12}. \quad (2.15)$$

Znaménko mínus v první rovnici je důsledkem orientace vektoru normály \vec{n} společné hranice Γ_{12} kontinuí. Nyní již můžeme formulovat řešení uvedeného problému interakce dvou různých kontinuí.

Řešit obecný problém interakce nestlačitelné kapaliny a pružným kontinuem znamená najít na oblasti Ω_1 funkci $u_i(x, t)$ a na oblasti Ω_2 funkce $v_i(x, t)$ a $p(x, t)$ takové, aby byl splněn systém rovnic (2.1) až (2.5) resp. (2.6) až (2.13) a současně, aby tyto hledané funkce vyhovovaly kontaktním podmínkám (2.13) a (2.15).

2.1 Zvolené metody řešení

Na matematické řešení úloh interakce kontinuí lze obecně aplikovat dva základní přístupy:

1. nesdružená metoda řešení (tzv. „uncoupled“ metody, rozdělené řešení),
2. sdružená metoda řešení (tzv. „coupled“ metody, monolitické řešení).

Nesdružená metoda řešení úloh interakce je založena na střídavém, odděleném řešení relativně samostatného pohybu jednotlivých kontinuí (resp. střídavém řešení soustavy příslušných diferenciálních rovnic) s tím, že na společné hranici obou kontinuí dochází k vzájemnému ovlivňování jejich pohybu. Vliv pohybu jednoho kontinua na pohyb kontinua druhého se při řešení konkrétně projeví v aktualizaci okrajové podmínky na hranici interakce právě řešeného kontinua. Vzhledem k tomu, že tento účinek jednoho kontinua na druhé (ani polohu společné hranice kontinuí) dopředu neznáme, využívá se obvykle při aplikaci této metody řešení iterační postup.

Při použití nesdružené metody řešení je tedy nutné v každém kroku iterace např. měnit sít' konečných prvků na interagujících kontinuích a opakovaně sestavovat a řešit příslušnou soustavu rovnic. Na druhé straně tato metoda umožňuje použít algoritmů řešení, resp. programové vybavení, samostatného pohybu jednotlivých kontinuí, které jsou relativně jednoduché a známé.

Sdružená metoda řešení úloh interakce je založena na současném řešení soustavy všech rovnic popisujících vlastnosti obou kontinuí, což značně komplikuje algoritmus řešení. Ani při aplikaci této metody se nevyhneme iteračnímu postupu a navíc tato metoda je podstatně náročnější na formulaci problému, na rychlost a kapacitu počítače. Na druhou stranu je nutno uvést, že podle literatury tato metoda dává přesnější výsledky.

Tyto dvě základní metody interakce lze řešit aplikací různých matematických postupů. V této práci je jako základní metoda slabé formulace úloh interakce použita Galerkinova metoda a následná numerická realizace je provedena pomocí metody konečných prvků (MKP)

3. Modelová úloha nesdružené metody

V kapitole 2.1 byly zmíněny dvě metody řešení interakce kontinuí. Nejdříve se zaměříme na řešení interakce pružného tělesa s kapalinou pomocí nesdružené metody. Budeme řešit jednoduchý modelový příklad, který představuje laminární izotermické pomalé proudění Newtonovy kapaliny ve vodorovném kanálu s pevnými stěnami a s pružnou přepážkou uprostřed kanálu. Výpočet byl proveden v bezrozměrném tvaru se zvolenými charakteristikami: výška hladiny $h_0 = 1$, výška přepážky $h_p = 0,5$, délka kanálu $l = 10$, šířka přepážky $l_p = 0,1$, rychlost na stěně $u_0 = 0$, Reynoldsovo číslo $Re = 0,02$, vstupní tlak $P_{vst} = 1000$, výstupní tlak $P_{vys} = 0$. Numerické řešení proudění uvedené kapaliny bylo již řešeno v rámci bakalářské práce [1] a pro modelování přetvoření pružné překážky byl potom aplikován model rovinné deformace pružného tělesa [1]. Úloha hydromechaniky je popsána následující soustavou rovnic s okrajovými podmínkami:

Navierova-Stokesova rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right); \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

rovnici kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \hat{v}_i(x); & x \in \partial\Omega_1 \\ \tau_{ij} n_j &= \hat{\sigma}_i(x); & x \in \partial\Omega_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pro odvození slabého řešení této úlohy hydromechaniky aplikujeme Galerkinovu metodu. Zavedené testovací funkce δv_i a δp , které jsou definovány na uzávěru oblasti $\bar{\Omega}$ a splňují dané okrajové podmínky. Výchozí integrální identity Galerkinovy metody mají potom tvar

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.5)$$

Aplikací Greenovy věty na členy v hranaté závorce vztahu (3.4) získáme výsledný tvar, který definuje slabé řešení dané úlohy

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega_2} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx, \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.7)$$

Poznamenejme, že při úpravě pravé strany vztahu (3.6) byla použita okrajová podmínka (3.3).

Po odvození slabého řešení uvažované úlohy proudění Newtonovy kapaliny přistoupíme k její numerické realizaci. Vzhledem k tomu, že budeme řešit pouze rovinné proudění kapaliny, tak prostorovou diskretizaci problému provedeme pomocí rovinných kapalinových konečných prvků typu „čtverec“ s využitím izoparametrického konceptu. S ohledem na platnost Babuškovy-Brezziho podmínky, budeme rozložení rychlosti na prvku aproximovat polynomem druhého stupně a rozložení tlaku potom polynomem stupně prvního [2]. Aplikací transformačních vztahů vyjádříme parciální derivace složek vektoru rychlosti a tlaku podle globálních souřadnic, které se vyskytují v integrálních identitách. Můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}, \\ \delta u &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}, & \delta v &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}, & \delta p &= \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Integrální identity rozepíšeme pro $i, j = 1, 2$. Získáme tak tři skalární rovnice, které zapíšeme pomocí transformačních vztahů (3.8) v maticovém tvaru [1]

$$\begin{aligned} \left[\mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} &= \mathbf{f}_u, \\ \left[\mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} &= \mathbf{f}_v, \\ \left[\int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tyto tři skalární rovnice popisují úlohu proudění kapaliny na úrovni jednoho konečného kapalinového prvku. Symboly \mathbf{u}, \mathbf{v} vyjadřují vektory rychlostí, \mathbf{p} je tlak, \mathbf{N} jsou lineární izoparametrické funkce a $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$ jsou derivace kvadratické izoparametrické funkce \mathbf{H} podle prostorových souřadnic.

V kapitole 2 je obecně popsána problematika elastodynamiky. V této úloze se omezíme pouze na problematiku elastostatiky a proto z podmínky rovnováhy (2.1) vynecháme setrvačné účinky a rychlostní počáteční podmínku (2.4). Neznámé v této úloze jsou složky vektoru deformace u_i a složky tenzoru napětí τ_{ij} . Pro odvození slabého řešení této úlohy elastostatiky aplikujeme Galerkinovu metodu. Zavedeme testovací funkce δu_i a $\delta \tau_{ij}$, které jsou definovány na uzávěru oblasti $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial \Omega_1$, kde $\partial \Omega_1 = \Gamma_{1\tau} \cup \Gamma_{1u}$ (obr. 2.1), splňují dané okrajové podmínky a jsou alespoň $1 \times$ derivovatelné. Pro zavedené testovací funkce dále platí

$$\begin{aligned}\delta u_i &= 0; & x \in \Gamma_{lu}, \\ \delta \tau_{ij} &= 0; & x \in \Gamma_{lr}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Výchozí integrální identita Galerkinovy metody má potom tvar

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right] \delta u_i dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - e_{ij} \right) \delta \tau_{ij} dx + \int_{\partial \Omega_2} (\hat{\sigma}_i - \tau_{ij} n_j) \delta u_i dx = 0.\tag{3.11}$$

V rovnici (3.11) dále uvážíme podmínku kompatibility ve tvaru

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - e_{ij} = 0.\tag{3.12}$$

Rovnici (3.11) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right] \delta u_i dx + \int_{\Omega} (\hat{\sigma}_i - \tau_{ij} n_j) \delta u_i dx = 0\tag{3.13}$$

Na první člen v hranaté závorce (3.13) aplikujeme Greenovu větu. Dostaneme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dx = \int_{\partial \Omega = \partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2} \tau_{ij} n_j \delta u_i dx - \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dx\tag{3.14}$$

Dosazením vztahu (3.14) do rovnice (3.13) a s uvážením podmínky (3.10) získáme slabé řešení úlohy elastostatiky ve tvaru

$$- \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i dx + \int_{\partial \Omega_2} \hat{\sigma}_i \delta u_i dx = 0\tag{3.15}$$

Do rovnice (3.15) dále zavedeme Hookův zákon (2.2), Cauchyův tenzor přetvoření (2.3) a zanedbáme objemové síly. Po zavedení těchto úprav můžeme rovnici (3.15) vyjádřit pro rovinný případ. Dostaneme dvě rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\int_{s_e} \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \eta \frac{\partial \delta u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dS &= \int_{\partial \Omega_2} \delta u_s \hat{\sigma}_u ds, \\ \int_{s_e} \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \eta \frac{\partial \delta u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dS &= \int_{\partial \Omega_2} \delta u_s \hat{\sigma}_u ds.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Po odvození slabého řešení uvažované úlohy elastostatiky přistoupíme k její numerické realizaci. Vzhledem k tomu, že budeme řešit pouze rovinnou deformaci, tak prostorovou diskretizaci problému provedeme pomocí rovinných konečných prvků typu „čtverec“ s využitím izoparametrického konceptu. Rozložení posuvů na prvku budeme aproximovat polynomem prvního stupně [2]. Aplikací transformačních vztahů vyjádříme parciální derivace složek vektoru rychlosti a tlaku podle globálních souřadnic, které se vyskytují v integrálních identitách. Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbf{N}_x^T \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \mathbf{N}_y^T \mathbf{u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \mathbf{N}_x^T \mathbf{v}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathbf{N}_y^T \mathbf{v}, \\
\delta u &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}, & \delta v &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}, & \delta u_s &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}_s, & \delta v_s &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}_s, \\
\frac{\partial \delta u}{\partial x} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}_x, & \frac{\partial \delta v}{\partial x} &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}_x, & \frac{\partial \delta u}{\partial y} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}_y, & \frac{\partial \delta v}{\partial y} &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}_y.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

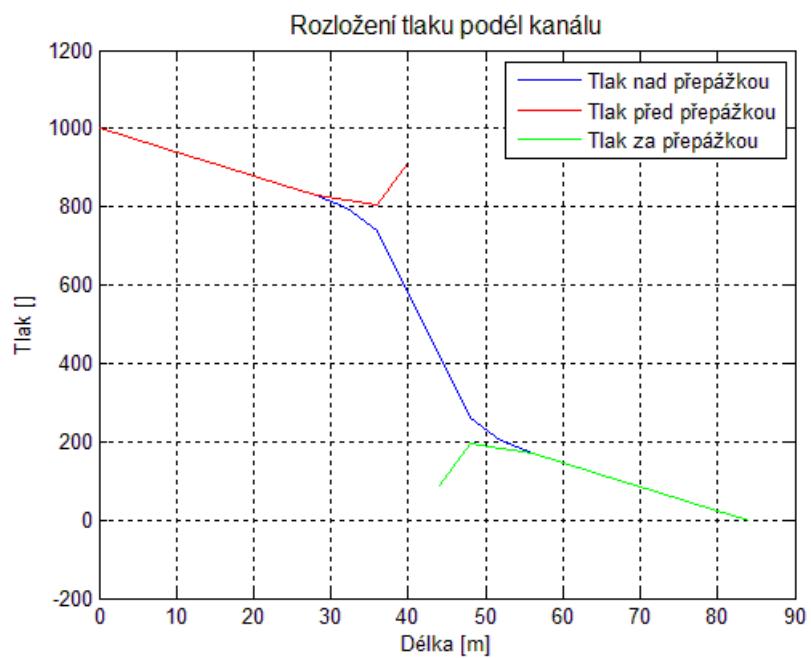
Dosažením transformačních vztahů (3.17) do soustavy (3.16) získáme

$$\begin{aligned}
\left[\int_{S_e} \{ \mathbf{N}_x (\lambda \mathbf{N}_x^T + 2\eta \mathbf{N}_x^T) + \eta \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T \} dS \right] \mathbf{u} + \left[\int_{S_e} \{ \mathbf{N}_x \lambda \mathbf{N}_y^T + \eta \mathbf{N}_y \mathbf{N}_x^T \} dS \right] \mathbf{v} &= \int_{\partial \Omega_2} \mathbf{N}_s \sigma_u ds, \\
\left[\int_{S_e} \{ \mathbf{N}_y \lambda \mathbf{N}_x^T + \eta \mathbf{N}_x \mathbf{N}_y^T \} dS \right] \mathbf{u} + \left[\int_{S_e} \{ \mathbf{N}_y (\lambda \mathbf{N}_y^T + 2\eta \mathbf{N}_y^T) + \eta \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \} dS \right] \mathbf{v} &= \int_{\partial \Omega_2} \mathbf{N}_s \sigma_v ds,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

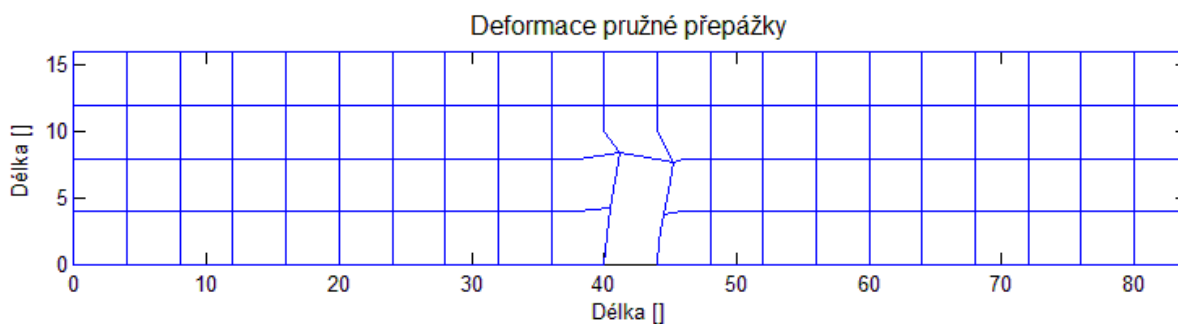
Tyto dvě skalární rovnice popisují úlohu elastostatiky na úrovni jednoho konečného kapalinového prvku. Symboly \mathbf{u}, \mathbf{v} vyjadřují vektory posunutí, \mathbf{N} jsou lineární izoparametrické funkce a $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y$ jsou jejich derivace podle prostorových souřadnic. λ a η jsou Laméovy koeficienty.

Numerické řešení pohybu obou interagujících kontinuí bylo provedeno metodou konečných prvků, vlastní algoritmus řešení byl řešen v prostředí interpretu MATLAB. Vzhledem k pomalým změnám v systému kapalina-těleso byl problém interakce řešen jako statický problém. Nejdříve byl řešen problém proudění kapaliny s „tuhou“ překážkou v kanále. Další krok představuje řešení přetvoření „pružné“ překážky zatížené tlakem, který byl vypočten v předchozím kroku v rámci proudění kapaliny. Deformace překážky vyvolá změnu oblasti, na které bylo řešeno proudění, a tudíž řešení proudění kapaliny je nutno opravit. Takto iterujeme, tj. střídavě řešíme pohyb kapaliny a přetvoření přepážky, tak dlouho až je splněna podmínka na přesnost řešení. Ukazuje se, že rozhodujícím faktorem iterace je rozložení tlaku, a tedy výpočet byl zastaven při splnění přesnosti tlaku (rozdíl tlaků ve dvou po sobě jdoucích krocích je menší než předepsaná hodnota). Výpočet poměrně rychle konvergoval, počet iterací byl 7. Dosažené numerické výsledky jsou zpracovány graficky na následujících obrázcích.

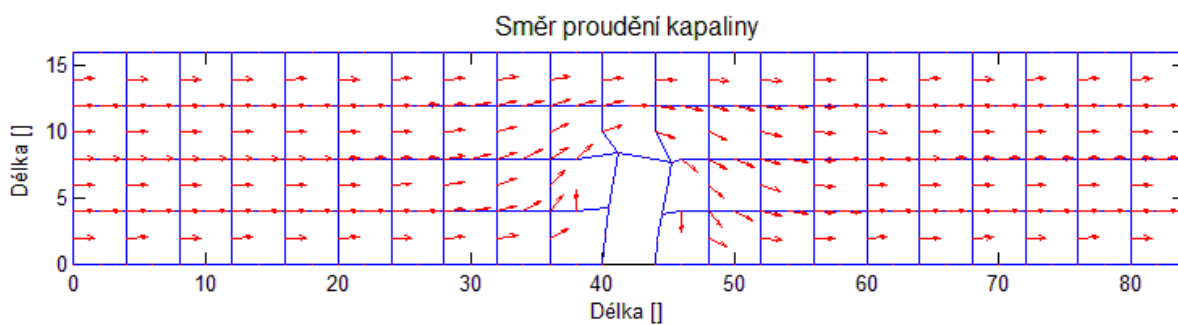
Na obr. 3.1 je znázorněno rozložení tlaku podél kanálu ve třech úrovních (před překážkou, nad překážkou a za překážkou). Na obr. 3.2 je uvedeno grafické znázornění deformace pružné přepážky včetně sítě konečných prvků. Zde je nutno podotknout, že skutečné hodnoty deformací jsou malé a aby vykreslení deformací bylo zřetelné, jsou tyto hodnoty desetkrát zvětšeny. Na obr. 3.3 je potom uvedeno grafické znázornění rychlostního pole proudění kapaliny. Z uvedených grafických znázornění je patrný vliv interakce kapaliny s pružným tělesem na rozložení tlaku a rychlosti v kanále a na přetvoření pružného tělesa. Daleko od překážky je zřejmě podstatná složka vektoru rychlosti ve směru osy x , v blízkém okolí překážky však nabývá velkého významu také složka rychlosti ve směru osy y .



Obr. 3.1. Rozložení tlaku v kanálu



Obr. 3.2. Deformace pružné přepážky



Obr. 3.3. Rychlostní pole kapaliny

4. Vyhodnocení sil v kontaktu kolenního kloubu

V bakalářské práci [1] jsem se zabýval matematickým modelem kolenního kloubu. Cílem řešení tohoto problému bylo určit rozložení složek vektoru rychlosti v_i ($i=1,2$) a tlak p v synoviální kapalině ve fyzikálním modelu, který je tvořen pevnou podložkou a pohyblivým rotujícím válcem (obr. 4.1). Pohyb kapaliny je popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí, rovnicí kontinuity s okrajovými podmínkami. Podrobnější popis proudění tekutiny je popsán v kapitole 3. Pro popis deformace pružného válce lze odvodit vztah, který vychází ze zatížení pružného poloprostoru osamělou silou. Platí

$$w = \frac{F}{4\pi G} \cdot \frac{2(1-\nu)}{l} = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E r}, \quad (4.1)$$

kde w je deformace vyvolaná osamělou silou F v místě l uvnitř pružného poloprostoru, resp. ve vzdálenosti r na povrchu uvažovaného poloprostoru. G je zde modul pružnosti ve smyku, E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonova konstanta materiálu. Výsledný vztah pro výpočet tloušťky $h(x,t)$ mazacího filmu tedy vyjádříme vztahem

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + \frac{4}{\pi E} \cdot \int_{-a}^a p(\xi,t) \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|} d\xi, \quad (4.2)$$

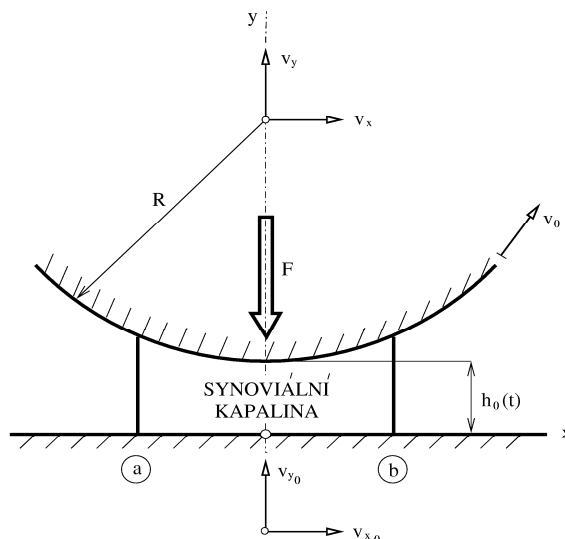
kde E značí náhradní modul pružnosti definovaný vztahem

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2} + \frac{1-\nu_3^2}{E_3} \right) \quad (4.3)$$

a pro náhradní poloměr válce R potom platí

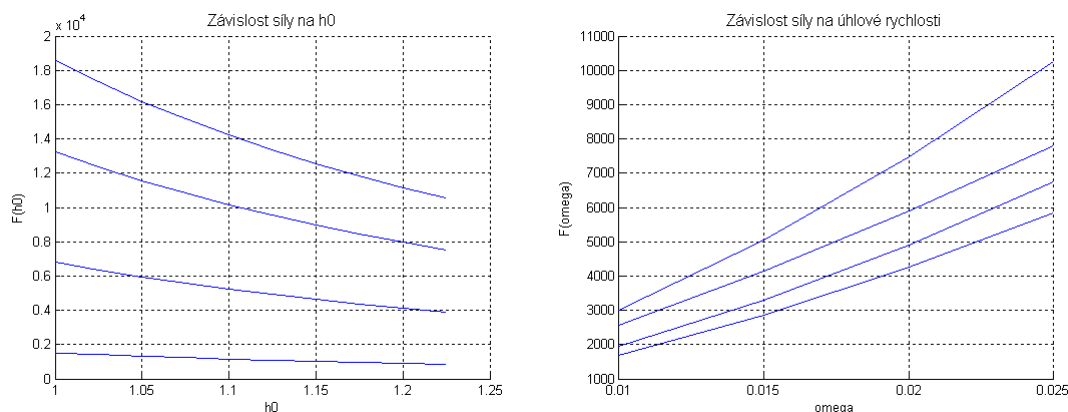
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (4.4)$$

Podrobný postup řešení a dosažené numerické výsledky jsou podrobně zpracovány v bakalářské práci. Vyhodnocením tlakového pole v synoviální kapalině jsme dále získali závislost síly F přenášené kapalinou (zatížení kloubu) na úhlové rychlosti ω a závislost této síly na vzdálenosti h_0 náhradního válce (obr. 4.2).



Obr. 4.1. Rovinný model kolenního kloubu

V závěru bakalářské práce je potom konstatováno, že na základě znalosti těchto závislostí můžeme získat tuhostní a tlumící charakteristiky modelu kolenního kloubu. V této kapitole nyní uvedeme příslušný algoritmus tohoto výpočtu.



Obr. 4.2. Silové poměry v kontaktu modelu kolenního kloubu

Vydeme tedy z výsledků bakalářské práce, které jsou graficky znázorněné na obr. 4.2, kde jsou uvedeny průběhy výsledné síly F v závislosti na úhlové rychlosti při konstantním parametru h_0 (obr. vpravo) a průběhy síly F na parametru h_0 při konstantní úhlové rychlosti (obr. vlevo). Závislosti výsledné síly $F[Nm^{-1}]$ v kontaktu vyšších kinematických dvojic (dále VKD) jsou obecně nelineární a závisí na konkrétních hodnotách h_0 a v . Vzhledem k tomu, že nás zajímají a důležité jsou tuhostní a tlumící charakteristiky VKD v okolí jistého pracovního bodu (síla F pro jisté \tilde{v} a \tilde{h}_0), můžeme sílu F v okolí tohoto pracovního bodu přibližně vyjádřit lineární aproximací ve tvaru (Taylorův rozvoj v okolí pracovního bodu)

$$F(v, h_0) \approx F(\tilde{v}, \tilde{h}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial h_0} \right)_{\tilde{v}} (h - \tilde{h}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_{\tilde{h}_0} (v - \tilde{v}). \quad (4.5)$$

Z fyzikálního rozboru tohoto rozvoje vyplývá, že derivace $\left(\frac{\partial F}{\partial h_0} \right)_{\tilde{v}}$ zřejmě charakterizuje tuhostní parametry VKD a derivace $\left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_{\tilde{h}_0}$ potom charakterizuje tlumící účinky VKD.

4.1 Určení výsledné tuhosti

Určení výsledné tuhosti VKD vychází ze závislosti síly na vzdálenosti h_0 pro zvolenou rychlost $\tilde{v} = konst.$ (obr. 4.2, vlevo). Tuto závislost můžeme dobře vystihnout aproximací hyperbolickou funkcí, tj. volíme regresní křivku obecně ve tvaru polynomu n -tého stupně. Platí

$$F = a_0 + \frac{a_1}{h_0} + \frac{a_2}{h_0^2} + \dots + \frac{a_n}{h_0^n}. \quad (4.1.1)$$

Pro konkrétní výpočet volíme $n = 2$ a metodou nejmenších čtverců určíme koeficienty a_i pro $i = 1, 2$ a jednotlivé závislosti sil z (obr. 4.2) aproximujeme pomocí (4.1.1). Pro jednotlivé síly dostaneme

$$\begin{aligned} F &= a_{0,1} + \frac{a_{1,1}}{h_0} + \frac{a_{2,1}}{h_0^2} \text{ pro } \omega_1, \\ &\vdots \\ F &= a_{0,k} + \frac{a_{1,k}}{h_0} + \frac{a_{2,k}}{h_0^2} \text{ pro } \omega_k, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

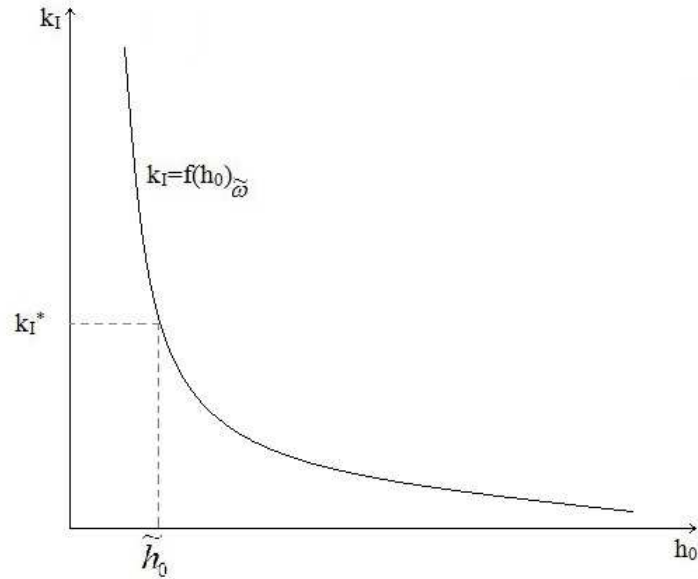
kde index k značí počet závislostí $F(h_0)$ pro $v = konst.$ Vzhledem k tomu, že máme skutečnou sílu F přenášenou modelem, tak můžeme z funkce $F(h_0)$ určit pracovní bod h_0 . Ze vztahů (4.1.2) dále určíme jednotkové tuhosti kontaktu VKD (tuhost vztahovaná na jednotkovou šířku VKD, $k_I [Nm^{-2}]$) jako funkci h_0 . Platí

$$k_I = \left(\frac{\partial F}{\partial h_0} \right)_{\tilde{v}} \approx \left(\frac{\Delta F}{\Delta h_0} \right)_{\tilde{v}}. \quad (4.1.3)$$

Tato závislost je znázorněna na (obr. 4.1.1). Pro známou hodnotu pracovního bodu h_0 můžeme potom z uvedeného grafu určit (či numericky napočítat) odpovídající pracovní tuhost k_I^* . Výslednou tuhost VKD v pracovním bodě potom vypočteme ze vztahu

$$k_{VKD} = k_I^* \cdot b, \quad (4.1.4)$$

kde b je šířka a k_I^* je jednotková tuhost VKD v pracovním bodě (obr. 4.1.1).



Obr. 4.1.1. Tuhostní charakteristika kontaktu VKD

4.2 Určení výsledného tlumení

Určení výsledného tlumení VKD vychází ze závislosti síly $F(v)$ na rychlosti v (rychlost přibližování válce k podložce) pro zvolenou vzdálenost $\tilde{h}_0 = konst.$ (obr. 4.2, vpravo). Tuto závislost můžeme dobře vystihnout aproximací parabolickou funkcí tj. regresní křivka je polynom n -tého stupně. Obecně platí

$$F = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n. \quad (4.2.1)$$

Konkrétní výpočet je proveden opět pro $n = 2$. Metodou nejmenších čtverců určíme koeficienty a_i pro $i = 1, 2$ a jednotlivé závislosti sil (obr. 4.2, vpravo) aproximujeme pomocí vztahu (4.2.1). Pro jednotlivé síly platí

$$\begin{aligned} F &= a_{0,1} + a_{1,1} v + a_{2,1} v^2 \quad \text{pro } h_{0,1}, \\ &\vdots \\ F &= a_{0,k} + a_{1,k} v + a_{2,k} v^2 \quad \text{pro } h_{0,k}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

kde index k značí počet závislostí $F(v)$ pro $h_0 = konst.$ Z těchto vztahů získáme závislost $b = f(h_0)$ tlumení ve VKD, neboť pro jednotkové tlumení $b_l [Nsm^{-2}]$ (tlumení vztažené na jednotkovou šířku VKD) platí

$$b_l = \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_{\tilde{h}_0} \approx \left(\frac{\Delta F}{\Delta v} \right)_{\tilde{h}_0}. \quad (4.2.3)$$

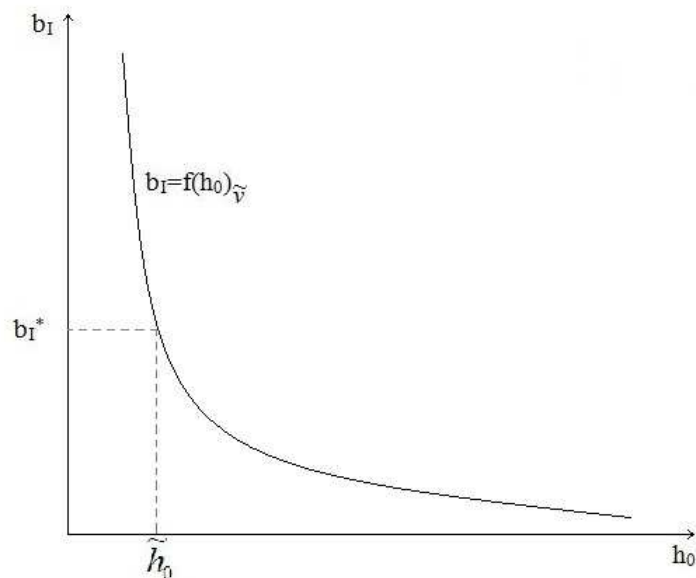
Derivací funkce (4.2.2) podle definice (4.2.3) získáme

$$\begin{aligned}
b_I &= a_{1,1} + 2a_{2,1}v \text{ pro } h_{0,1}, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
b_I &= a_{1,k} + 2a_{2,k}v \text{ pro } h_{0,k}.
\end{aligned}
\tag{4.2.4}$$

Tyto vztahy vyjadřují závislost tlumení b_I na rychlosti v tedy $b_I = f(v)$. Pro získání závislosti tlumení b_I na vzdálenosti h_0 rovnice (4.2.4) vyčíslíme pro danou rychlost \tilde{v} a vyhodnocením těchto závislostí získáme funkci $b_I = f(h_0)$ ve formě diskretních bodů. Tuto závislost opět proložíme regresní křivkou podle (4.1.1) (hyperbolická funkce). Aplikací metody nejmenších čtverců vyčíslíme koeficienty a_i pro $i=1,2$ a získáme závislost $b_I = f(h_0)$ (tlumení vztažené na jednotkovou šířku VKD) pro zvolenou rychlost \tilde{v} (obr. 4.2.1). Pro známou hodnotu pracovního bodu \tilde{h}_0 vyhodnotíme jednotkové tlumení b_I^* a výsledné tlumení VKD vypočteme ze vztahu

$$b_{VKD} = b_I^* \cdot b. \tag{4.2.5}$$

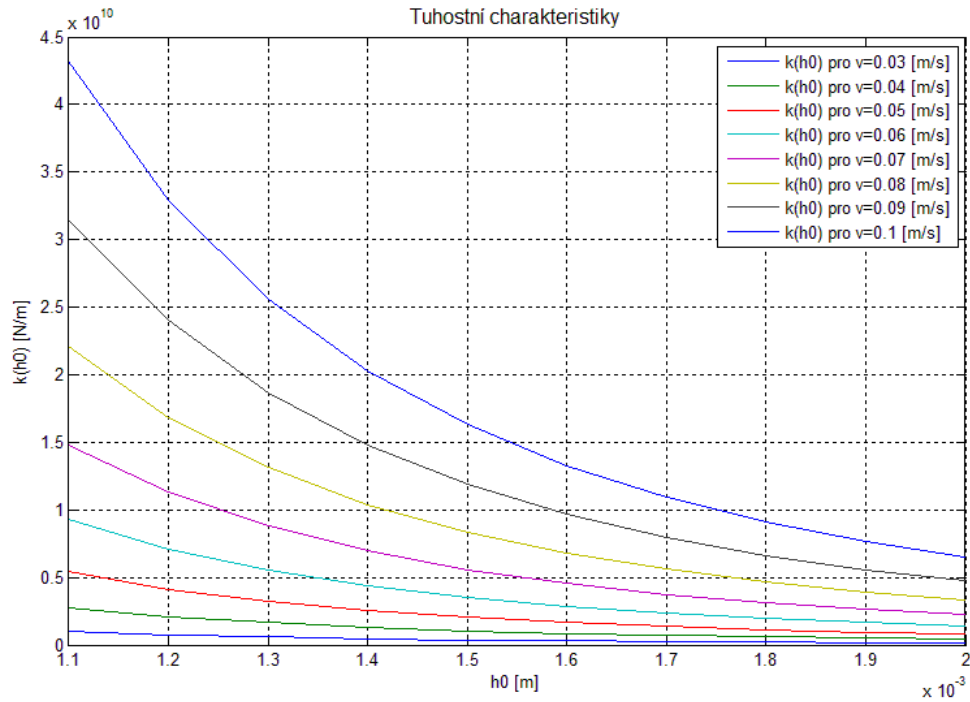
Zde b je šířka a b_I^* je jednotkové tlumení v pracovním bodě VKD (obr. 4.2.1).



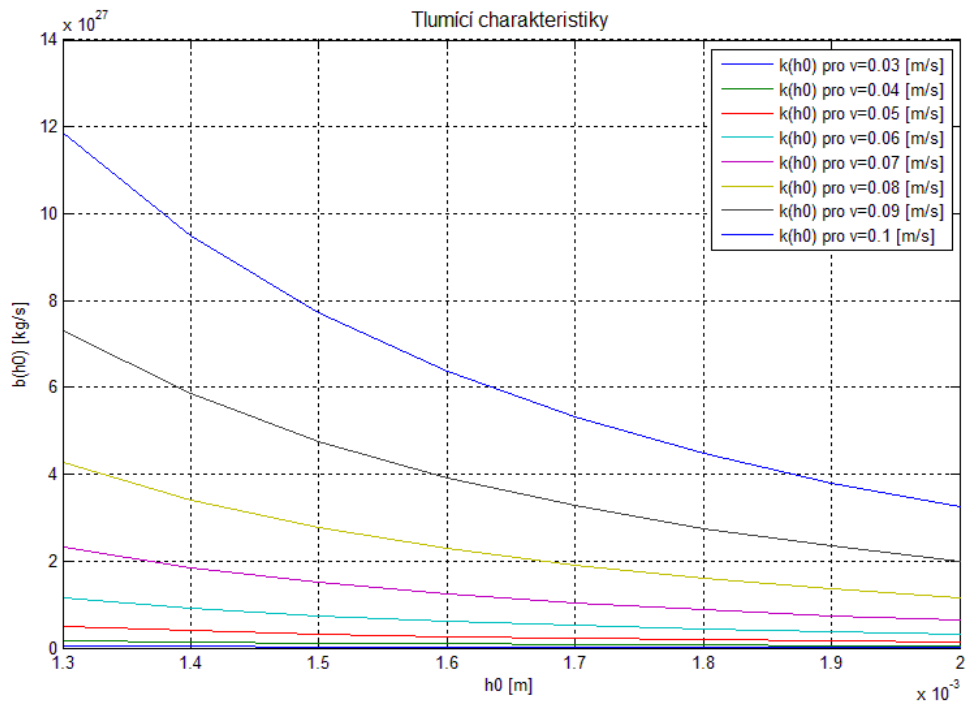
Obr. 4.2.1. Tlumící charakteristika kontaktu VKD

4.3 Numerické výsledky tuhostních a tlumících charakteristik

Uvedme nyní souhrnně numerické výsledky, které charakterizují tuhostní a tlumící charakteristiky modelu kolenního kloubu. Tyto závislosti byly získány pomocí výše uvedeného algoritmu, který se opírá o znalost silové závislosti F na rychlosti přibližování válce k podložce v a na vzdálenosti h_0 , tak jak je znázorněno na obr. 3.1 a obr. 3.2.



Obr. 4.3.1. Tuhostní charakteristiky kontaktu VKD



Obr. 4.3.2. Tlumící charakteristiky kontaktu VKD

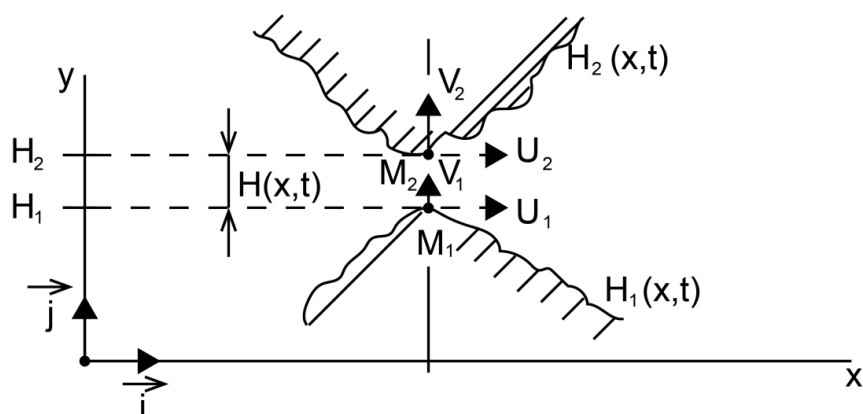
Na (obr. 4.3.1) a (obr. 4.3.2) jsou graficky znázorněny tuhostní a tlumící charakteristiky kontaktu modelu kolenního kloubu (s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny) v závislosti na vzdálenosti h_0 . Charakteristiky jsou pak dále vyjádřeny pro různé rychlosti v (obr. 4.1).

5. EHD kontakt s uvažováním drsnosti povrchu

V bakalářské práci byl řešen problém kontaktu v lidském kolenním kloubu s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny a záběrové plochy kontaktu byly uvažovány jako dokonale hladké (obecně tedy kontakt VKD s uvažováním přítomnosti maziva s hladkými povrchy zabírajících těles). V této kapitole se zaměříme na řešení VKD s uvažováním přítomnosti maziva a navíc budeme respektovat (alespoň přibližně) vliv drsnosti povrchů spoluzabírajících ploch na vlastnosti tlakového pole v mazivu [9], [10]. Základní charakteristiky uvedeného problému jsou graficky znázorněné na obr. 5.1.

Při řešení přijmeme následující předpoklady:

- Reynoldsova teorie proudění kapaliny [4].
- Pomalé (plíživé) proudění kapaliny mezi téměř rovnoběžnými plochami, které se vzájemně pohybují a jejichž vzdálenost $H(x)$ je malá.
- Složka rychlosti ve směru osy y je zanedbatelná vůči rychlosti ve směru osy x
- Kvizistické řešení problému



Obr. 4.1. Model kontaktu VKD s drsností povrchu

V kontaktu ploch VKD budeme obecně uvažovat laminární stacionární a izotermické proudění stlačitelné Newtonovy kapaliny. Vzhledem k pomalému proudění můžeme v Navierově-Stokesově rovnici zanedbat konvektivní člen, časovou derivaci rychlosti a dále zanedbáme měrné objemové síly. Za uvedených předpokladů má Navierova-Stokesova rovnice tvar

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.1)$$

a rovnice kontinuity pro rovinný případ proudění má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

Dále předpokládejme, že obecně platí následující závislosti:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(T, p), \quad p = p(x) \\ \rho &= \rho(T, p), \quad T = T(x, t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Na základě těchto předpokladů tedy také vyplývá, že platí $\eta = \eta(x, t)$ a $\rho = \rho(x, t)$.

Okrajové podmínky proudění kapaliny v kanále VKD mají tvar

$$\begin{aligned} u &= U_1 \text{ a } v = V_1 \text{ pro } H = H_1(x, t) \\ u &= U_2 \text{ a } v = V_2 \text{ pro } H = H_2(x, t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

V těchto vztazích p značí tlak, u rychlost ve směru osy x , v rychlost ve směru osy y , η je dynamická viskozita kapaliny, ρ je měrná hmotnost (hustota) kapaliny, T je teplota kapaliny, t je čas, x a y jsou prostorové souřadnice kontinua, U_i a V_i pro $i = 1, 2$ jsou složky rychlosti bodů zabírajících válců a $H_1(x, t)$ a $H_2(x, t)$ jsou rovnice tvaru zabírajících válců včetně jejich drsnosti.

Rovnici (5.1) dvakrát zintegrujeme a s ohledem na předpokládané závislosti (5.3) dostaneme

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 x + c_2. \quad (5.5)$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek (5.4). Dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{U_1 - U_2}{H_1 - H_2} - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (H_1 + H_2), \\ C_2 &= U_1 - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} H_1^2 - \frac{U_1 - U_2}{H_1 - H_2} H_1 + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (H_1 + H_2) H_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dosazením těchto konstant do rovnice (5.5) dostáváme základní vztah pro rozložení rychlosti $u(y)$ v mazivu. Platí

$$u(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left[y^2 - y(H_1 + H_2) + H_1 H_2 \right] + \frac{U_1 - U_2}{H_1 - H_2} (y - H_1) + U_1. \quad (5.7)$$

Mezerou mezi body M_1 a M_2 ploch VKD proteče ve směru osy x množství kapaliny Q_x .

S ohledem na vztah (5.7) platí

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{H_1}^{H_2} \rho \cdot u(y) dy = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left[\frac{H_2^3 - H_1^3}{2} - \frac{1}{2} (H_2^2 - H_1^2) \cdot (H_1 + H_2) + (H_2 - H_1) H_1 H_2 \right] + \\ &+ \frac{U_1 - U_2}{H_1 - H_2} \left[\frac{H_2^2 - H_1^2}{2} - H_1 (H_2 - H_1) \right] + U_1 (H_2 - H_1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Po úpravě obdržíme

$$Q_x = \rho \frac{U_1 + U_2}{2} (H_2 - H_1) - \rho \frac{(H_2 - H_1)^3}{12\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (5.9)$$

Nyní zintegrujeme rovnici kontinuity (5.2) v mezích od H_1 do H_2 . Zřejmě platí

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy = 0. \quad (5.10)$$

Tento vztah upravíme s využitím derivace integrálu s parametrem, pro který obecně platí [8]

$$\int_{H_1(x,t)}^{H_2(x,t)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int F dy - F(x, H_2, t) \frac{\partial H_2}{\partial x} + F(x, H_1, t) \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (5.11)$$

S využitím vztahu (5.11) můžeme nyní jednotlivé integrály rovnice (5.10) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dy - \rho \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho \frac{\partial H_1}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\rho(H_2 - H_1)] - \rho \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho \frac{\partial H_1}{\partial t} = (H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{H_1}^{H_2} \rho u dy - \rho U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + \rho U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \rho U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + \rho U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zápis prvního členu na pravé straně vztahu (5.13) vyplývá z definice průtočného množství (5.8). Poslední integrál vztahu (5.10) má potom tvar

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy = \rho(V_2 - V_1). \quad (5.14)$$

Integrální zápis rovnice kontinuity (5.10) můžeme s ohledem na vztahy (5.12), (5.13), (5.14) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \rho \left(U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} - V_1 \right) - \rho \left(U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} - V_2 \right) + (H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.15)$$

Nyní dosadíme průtočné množství (5.9) do vztahu (5.15) a upravíme. Po úpravách získáme tzv. modifikovanou Reynoldsovu rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(H_2 - H_1)^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right] &= 6 \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_1 + U_2)(H_2 - H_1)] + \\ &+ 12 \left[\rho \left(U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - V_1 \right) - \rho \left(U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} - V_2 \right) \right] + 12(H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Složky rychlosti V_1 a V_2 bodů M_1 a M_2 získáme derivací funkcí $H_1(x, t)$ a $H_2(x, t)$. Platí

$$V_1 = \frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + V_1^*, \quad (5.17)$$

$$V_2 = \frac{dH_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H_2}{\partial t} + V_2^*. \quad (5.18)$$

Zde V_1^* a V_2^* se označují jako virtuální rychlosti ve směru osy y . Dosazením rychlostí (5.17) a (5.18) do vztahu (5.16) dostaneme výslednou Reynoldsovu rovnici, která již respektuje skutečný tvar spoluzabírajících ploch. Tato rovnice má tvar

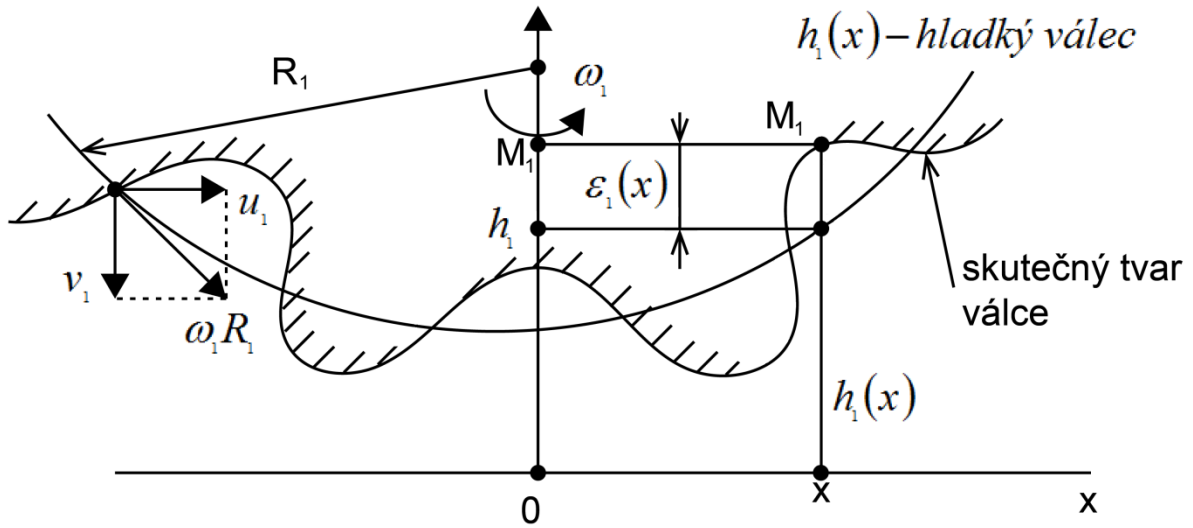
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(H_2 - H_1)^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right] &= 6(U_1 + U_2)(H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ &+ 6\rho(H_2 - H_1) \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial x} + 6\rho(U_1 - U_2) \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) + \\ &+ 12\rho(V_2^* - V_1^*) + 12 \frac{\partial}{\partial t} [\rho(H_2 - H_1)] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Zde je nutno ještě podotknout, že výsledná rychlost $\vec{U}_1 + \vec{V}_1^*$ pro $t = konst.$ musí ležet na tečně ke křivce $H_1(x, t)$ a podobně výsledná rychlost $\vec{U}_2 + \vec{V}_2^*$ leží na tečně ke křivce $H_2(x, t)$. Ze vztahů (5.17) a (5.18) tedy vyplývá

$$\begin{aligned} V_1^* &= U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x}, \\ V_2^* &= U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Při praktické aplikaci EHD teorie na řešení kontaktu VKD s mazivem se předpokládá kvazistatické řešení (řešíme tedy pro $t = konst.$), a proto $H_1(x)$ a $H_2(x)$ bereme pouze jako funkce proměnné x a předpokládáme, že tyto funkce známe. Dále v každém bodě spoluzabírajících povrchů obecně známe rychlosti U_1, V_1, U_2, V_2 , které jsou také časově nezávislé. Obecně můžeme psát, že platí $U_1 = U_1^*, V_1 = V_1^*, U_2 = U_2^*, V_2 = V_2^*$.

Nyní zavedeme dvě nové funkce $h_1(x)$ a $h_2(x)$, které definují geometrické místo bodů a které vykazují střední rychlosti bodů na površích těles 1 a 2 (obálka bodů se střední rychlostí na tělesu 1 a 2). S ohledem na předpokládané malé amplitudy drsnosti povrchů (ε_i uvažujeme malé, obr. 5.2), tyto funkce prakticky označují polohu bodů na tuhých, hladkých válcích (zanedbáme tedy rozdíl rychlostí mezi body těles 1 a 2 na „drsných“ a „hladkých“ válcích).



Obr. 5.2. Drsnost válce

V souladu se vztahem (5.20) zavedeme i na těchto obávkách rychlosti v_1^* a v_2^* , pro které platí (obr. 5.2)

$$v_1 = v_1^* = u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad v_2 = v_2^* = u_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}. \quad (5.21)$$

S ohledem na předchozí závěry zavedeme další praktické předpoklady, které budou uvažovány v následujících výpočtech. Zřejmě můžeme předpokládat

$$\rho = konst., \quad u = u(y), \quad t = konst., \quad T = T(x), \quad p = p(x), \quad \eta = konst. \quad (5.22)$$

Skutečný tvar povrchů válců (s uvažováním drsnosti) můžeme potom vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} H_1(x) &= h_1(x) + \varepsilon_1(x) \\ H_2(x) &= h_2(x) + \varepsilon_2(x). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dále upravíme rovnici (5.19), která s ohledem na předpoklady (5.22) přejde na tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H_2 - H_1)^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right] = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial x} + 12(V_2^* - V_1^*). \quad (5.24)$$

V této rovnici dále zohledníme vztahy (5.21) a (5.23) a označíme $h(x) = h_2(x) - h_1(x)$. Rovnici (5.24) můžeme potom zintegrovat a dostaneme (poloze x_0 odpovídá tloušťka h_0 a obecné poloze x odpovídá tloušťka h):

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta(u_1 + u_2) \frac{h + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - h_0}{(h + \varepsilon_2 - \varepsilon_1)^3} = 6\eta(u_1 + u_2) \left[\frac{h - h_0}{(h + \varepsilon)^3} + \lambda \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{(h + \varepsilon)^3} \right]. \quad (5.25)$$

V této rovnici parametr $\lambda = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}$ je skluzový poměr a $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ je parametr drsnosti povrchu. Přímým řešením rovnice (5.25) můžeme získat rozložení tlaku v mazacím filmu při respektování drsnosti povrchu spoluzabírajících válců, resp. reálné VKD.

Rozložení tlaku v mazacím filmu můžeme ale také získat jiným způsobem, a to tehdy, pokud máme již vyřešen průběh tlaku $p(x)$ pro dokonale hladké válce (jeden z výsledků řešení VKD v bakalářské práci [1]). Rozborem rovnice (5.25) vidíme, že tato rovnice v sobě skrývá dva možné případy EHD kontaktu, a to jednak kontakt válců s uvažováním čistého valení a jednak kontakt válců s prokluzem.

5.1 Čisté valení

Při řešení EHD kontaktu s čistým valením válců je zřejmě skluzový poměr $\lambda = 0$ a rovnice (5.25) má potom tvar

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta(u_1 + u_2) \frac{h - h_0}{(h + \varepsilon)^3} = \left[6\eta(u_1 + u_2) \frac{h - h_0}{h^3} \right] \left[1 + \frac{\varepsilon}{h} \right]^{-3}. \quad (5.1.1)$$

Srovnáním s Reynoldsovou rovnicí vidíme, že první hranatá závorka na pravé straně rovnice (5.1.1) je pravá strana klasické Reynoldsovy rovnice pro dokonale hladké válce. Můžeme tedy tuto závorku označit jako $\frac{dp_{hl}}{dx}$ (odpovídá rovnici (5.25), ve které položíme $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_i = 0$ pro $i = 1, 2$). Druhou závorku na pravé straně (5.1.1) potom rozvineme do Maclaurinovy řady a předpokládáme, že poměr $\frac{\varepsilon}{h}$ je malé číslo ve srovnání s 1 (tedy $\frac{\varepsilon}{h} \ll 1$).

Zřejmě prvních pět členů rozvoje funkce $\left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^{-3}$ má tvar

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^{-3} = 1 - 3\frac{\varepsilon}{h} + 6\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 - 10\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 + 15\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^4. \quad (5.1.2)$$

Vzhledem k platnosti, že $\varepsilon \ll h$ můžeme členy druhého a vyššího řádu rozvoje zanedbat, jakožto veličiny malé druhého řádu, a rovnice (5.1.1) přejde na tvar

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_{hl}}{dx} \left[1 - 3\frac{\varepsilon}{h} \right]. \quad (5.1.3)$$

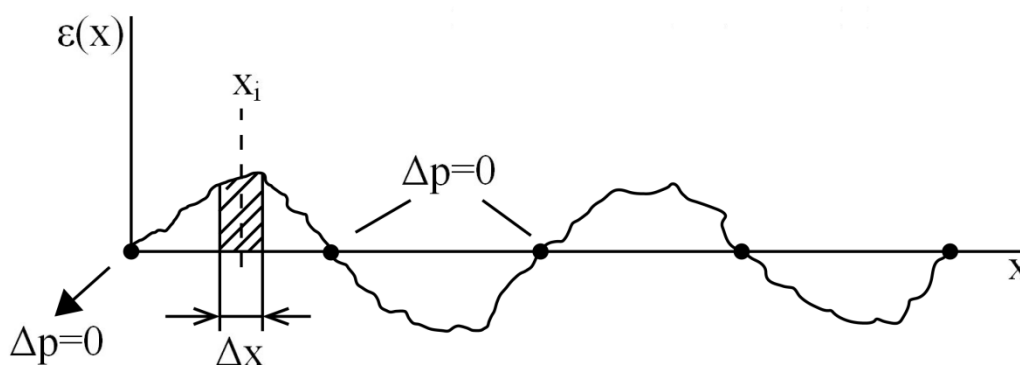
Integrací rovnice (5.1.3) získáme rozložení tlaku při záběru válců s uvažováním drsnosti povrchu. Integrál vyjádříme ve tvaru

$$p(x) = p_{hl}(x) - 3 \int \frac{dp_{hl}}{dx} \cdot \frac{\varepsilon(x)}{h(x)} dx = p_{hl}(x) + \Delta p(x). \quad (5.1.4)$$

Pro známé rozložení tlaku $p_{hl}(x)$ a znalosti tloušťky mazacího filmu $h(x)$ v záběru dokonale hladkých válců a pro známou funkci drsnosti $\varepsilon(x)$ můžeme ze vztahu (5.1.4) určit rozložení

tlaku $p(x)$ v mazivu s uvažováním drsnosti válců VKD. Pro určení výsledného tlaku potřebujeme tedy ještě určit přírůstek tlaku $\Delta p(x)$.

Druhý člen pravé strany rovnice (5.1.4) $\Delta p(x)$, tedy naznačený integrál, můžeme vypočítat numerickou integrací bod po bodu, tj. pro každý jeden bod záběru zvlášť (obr. 5.1.1). Vyjdeme z předpokladu, že pro určité $x = x_i$ známe hodnoty $\left. \frac{dp_{hl}}{dx} \right|_{x=x_i}$, $h(x)|_{x=x_i}$, $\varepsilon(x)|_{x=x_i}$.



Obr. 5.1.1. Parametr drsnosti reálných povrchů válců

Příspěvek $\Delta p(x)$ v rozložení tlaku (5.1.4) pro daný bod $x = x_i$ můžeme potom vyjádřit

$$\Delta p(x)|_{x=x_i} = 3 \int \frac{dp_{hl}}{dx} \cdot \frac{\varepsilon(x)}{h(x)} dx \approx 3 \left. \frac{dp_{hl}}{dx} \right|_{x=x_i} \cdot \varepsilon(x)|_{x=x_i} \cdot h^{-1}(x)|_{x=x_i} \cdot \Delta x. \quad (5.1.5)$$

5.2 Záběr VKD s prokluzem

Při řešení EHD kontaktu válců s prokluzem vyjdeme opět z rovnice (5.25), kde oproti čistému valení, je nyní nutno uvažovat skluzový parametr λ nenulový ($\lambda \neq 0$). S využitím vztahů (5.1.2), (5.1.3) má rovnice (5.25) nyní tvar

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_{hl}}{dx} \left[1 - 3 \frac{\varepsilon}{h} \right] + 6\eta(u_1 - u_2) \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h^3} \left[1 - 3 \frac{\varepsilon}{h} \right]. \quad (5.2.1)$$

Vztah (5.2.1) opět zintegrujeme a s ohledem na vztah (5.1.4) můžeme výsledné řešení zapsat tvaru

$$p(x) = p_{hl}(x) + \Delta p(x) + 6(u_1 - u_2) \int \eta(x) \frac{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)}{h^3(x)} \left[1 - 3 \frac{\varepsilon(x)}{h(x)} \right] dx. \quad (5.2.2)$$

První dva členy na pravé straně tohoto vztahu již známe a příslušný integrál ve vztahu (5.2.2) opět můžeme určit numerickou integrací bod po bodu v záběrové oblasti spoluzabírajících válců VKD.

5.3 Rozložení teploty v mazací vrstvě

Jako vedlejší veličinu, kterou můžeme v mazací vrstvě kontaktu dvou těles snadno získat, je přibližné rozložení teploty T v mazivu. Dosažený výsledek je samozřejmě poplatný dříve uvedeným předpokladům řešení kontaktu VKD s uvažováním maziva. Při řešení vyjdeme z obecné energetické rovnice v proudící tekutině. Platí [9], [10]

$$\rho \cdot c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y_i} \right) + \eta' \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_j} \right)^2 + 2\eta V_{ij} V_{ij}. \quad (5.3.1)$$

Zde D/Dt vyjadřuje materiálovou derivaci příslušné veličiny, c_v je měrné teplo při konstantním objemu, V_{ij} je tenzor rychlosti deformace, η' je druhá viskozita kapaliny a T je hledaná teplota v kapalině.

S ohledem na předpoklady (5.22) přejde energetická rovnice (5.3.1) zřejmě na tvar

$$\rho \cdot c_v \cdot u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (5.3.2)$$

Tuto rovnici nyní zderivujeme podle prostorové proměnné y . Dostaneme

$$\rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.3.3)$$

Protože dle předpokladů řešení platí, že derivace $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ je nenulová, tak můžeme rovnici (5.3.3) touto derivací vydělit a získáme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho \cdot c_v}{2\eta} \cdot \frac{dT}{dx}. \quad (5.3.4)$$

Připomeneme-li, že pohybová rovnice (5.1) má pro uvedené předpoklady tvar

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.3.5)$$

tak můžeme vztah (5.3.4) dosadit do rovnice (5.3.5). Následnou integraci získáme vztah pro rozložení teploty v mazací vrstvě kontaktu dvou těles ve tvaru

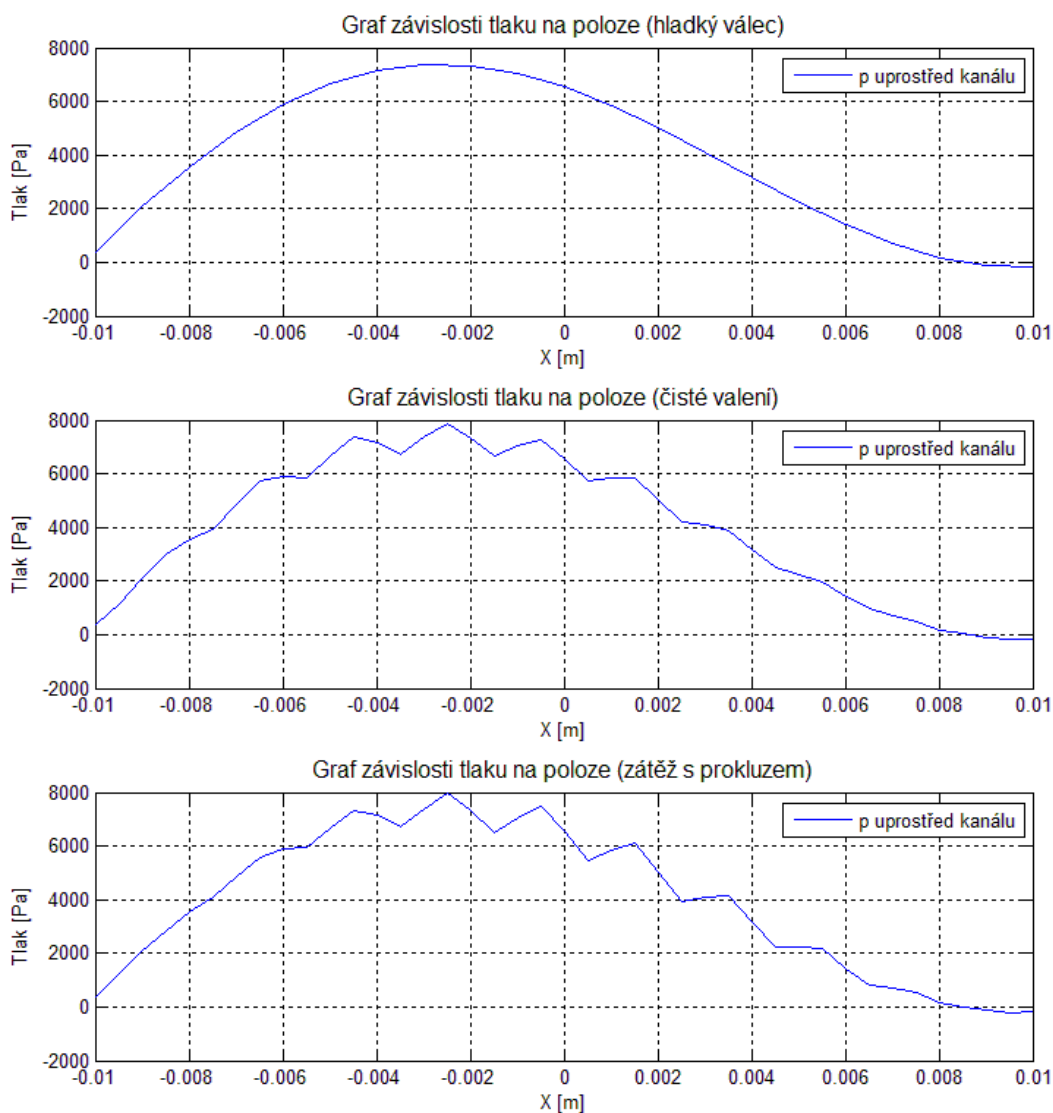
$$T(x) = T_0 + \frac{2}{\rho \cdot c_v} p(x), \quad (5.3.6)$$

kde T_0 je teplota kapaliny na vstupu do kanálu.

Tím máme vyřešeno rozložení teploty v mazacím filmu VKD a je zřejmé, že tato funkce „kopíruje“ rozložení tlaku v kapalině.

5.4 Numerické výsledky kontaktu s uvažováním drsnosti

Nyní uvedeme souhrnně numerické výsledky řešení kontaktu VKD s uvažováním drsnosti povrchu spoluzabírajících ploch. Úloha, kterou jsem řešil, je dotyk tuhého válce a tuhé podložky s uvažováním přítomnosti mazací tekutiny. Tato tekutina může představovat mazací film ozubených kol, nebo také synoviální kapalinu při modelování kolenního kloubu (obr. 4.1). Výpočet byl realizován v interpretu MATLAB, řešení bylo provedeno v základních jednotkách všech veličin. Základní vstupní parametry tedy jsou: rychlost válce $u_2 = 0.3$, rychlost podložky $u_1 = 0$, rozložení tlaku pro hladký válec P_{hl} , poloměr válce $R = 0.1[m]$, délka kanálu $l = 0.02[m]$, dva případy amplitudy zdrsnění $\varepsilon_2 = 0.0008[m]$ a $\varepsilon_2 = 0.05[m]$ a vzdálenost h_0 podložky a válce. Pro zdrsnění byla volena funkce $y = A \cdot \sin(kx)$, kde A je amplituda a k je frekvence. Výstupem této úlohy je určení rozložení tlaku p ve střední části mazacího filmu uvažovaného modelu. Výsledky jsou vyhodnoceny graficky a jsou znázorněny na obr. 5.4.1.



Obr. 5.4.1. Rozložení tlaků

Na obr. 5.4.1 jsou znázorněny průběhy tlaků pro tři případy kontaktu VKD v tomto pořadí (shora dolů): hladký válec, válec s uvažováním drsnosti (čistě valení), válec s uvažováním drsnosti (záběr s prokluzem). Pro názornost byla amplituda zdrsnění pro případ čistého valení válců volena $\varepsilon_2 = 0.05 [m]$ a pro řešení VKD s prokluzem byl parametr drsnosti volen $\varepsilon_2 = 0.0008 [m]$. Z grafického znázornění průběhu tlaků těchto typů kontaktů VKD (obr. 5.4.1) je jasně vidět vliv drsnosti ploch na rozložení tlaku. Zhodnocením tohoto výsledku můžeme zdůraznit podstatný vliv integrálního členu ve vztahu (5.1.2) na rozložení tlaku, který jasně ukazuje rozdíl v řešení EHD kontaktu s prokluzem válců a čistého valení válců.

6. Sdružená metoda

Druhým možným přístupem k řešení interakce kontinuí různých fází je aplikace sdružené metody (monolitická metoda). Tato metoda jak již bylo uvedeno v odstavci 2.1 je založena na současném řešení soustavy všech rovnic popisujících vlastnosti obou interagujících kontinuí. Pro popis dané problematiky zavedeme tyto předpoklady řešení [6]:

- rovinný problém,
- pohyb „tuhé“ struktury vyvolá malé změny pohybu kapaliny a podstatně nezmění oblast proudění kapaliny,
- uvažujeme lineární kontinuum tuhé fáze,
- pohyb tuhého kontinua ovlivňuje kapalina a vyvolané tlakové vlny v kapalině,
- tlakové vlny se šíří pouze ve směru osy x ,
- uvažujeme pomalé proudění ideální kapaliny s téměř konstantní hustotou.

Proudění kapaliny je opět popsáno Navierovou - Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Postupnými úpravami těchto rovnic získáme Helmholtzovu rovnici pro šíření tlakových vln v kapalině, která je základem řešení tlakových vln v kapalině. Nejdříve však uvedeme obecné výchozí rovnice. Platí

Navierova - Stokesova rovnice

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i; \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (6.1)$$

která vzhledem k předpokladům přejde na tvar

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (6.2)$$

Rovnice kontinuity pro $\rho \approx konst.$ můžeme potom zapsat ve tvaru

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6.3)$$

Nyní definujme objemový modul elasticity kapaliny K ve tvaru (koeficient stlačitelnosti)

$$K = -\frac{dp}{dV/V}, \quad (6.4)$$

kde znaménko mínus značí zmenšení objemu vlivem přírůstku tlaku. Využitím zákona zachování hmotnosti $m = \rho \cdot V$ přepíšeme vztah (6.4) do tvaru

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho} \Rightarrow d\rho = \frac{\rho}{K} \cdot dp. \quad (6.5)$$

Tento vztah nyní zderivujeme podle času a dostaneme

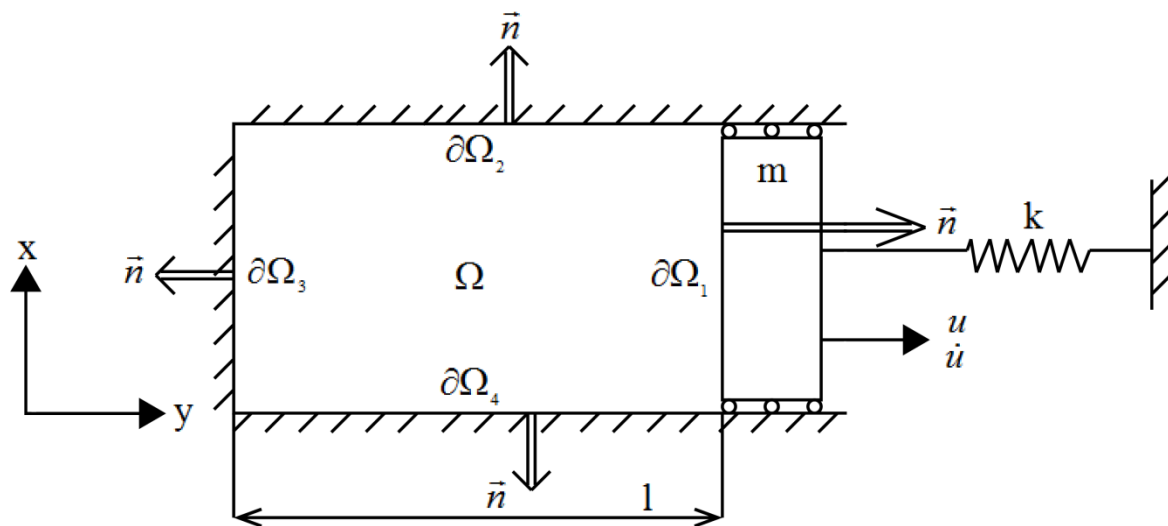
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.6)$$

kde $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ je rychlost tlakových vln v kapalině. Dosazením vztahu (6.6) do rovnice kontinuity (6.3) získáme nakonec vztah, který později využijeme pro určení Helmholtzovy rovnice. Platí

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.7)$$

6.1 Modelová úloha sdružené metody

Ukažme opět základní metody a algoritmus řešení sdružené metody interakce různých kontinuí na jednoduché (relativně) modelové úloze. Uvažujme 1D problém interakce nevazké kapaliny s tuhým pístem vázaným lineární pružinou s rámem (obr. 5.1.1). Zřejmě tato úloha odpovídá problému interakce znázorněnému na obr. 1.4.



Obr. 6.1.1. Modelová úloha interakce kapaliny s pístem

Tato úloha je popsána Navierovou - Stokesovou rovnicí (6.2) a konstitutivním vztahem (6.7). Dále zavedeme klasické okrajové podmínky. Na hranici S_v nechť je předepsána rychlost v_n^S ve směru vnější normály \mathbf{n} (jednotkový vektor)

$$v_i n_i|_{S_v} = v_n^S \quad (6.1.1)$$

a na hranici S_f je potom předepsán tlak p^S tj. platí

$$p|_{S_f} = p^S. \quad (6.1.2)$$

Pro řešení uvedeného modelového problému interakce je vhodné zavést Helmholtzův potenciál rychlosti $\Phi(x, y)$. Pro složky vektoru rychlosti a tlak v kapalině potom platí

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \\ p &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Dosazením (6.1.3) do Navierovy-Stokesovy rovnice (6.2) zjistíme, že je identicky splněna a dosazením vztahů (6.1.3) do konstitutivního vztahu (6.7) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0; \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (6.1.4)$$

Okrajové podmínky (6.1.1) a (6.1.2) s využitím vztahů (6.1.3) potom přejdou na tvar

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right|_{S_v} = v_n^s, \quad (6.1.5)$$

$$-\rho \dot{\Phi} \Big|_{S_f} = p^s. \quad (6.1.6)$$

Okrajovou podmínku (6.1.5) rozepíšeme konkrétně pro uzavřenou modelovou úlohu interakce. Na jednotlivých částech hranice oblasti vyplněné kapalinou platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \dot{u}; \quad x \in \partial\Omega_1, \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0; \quad x \in \partial\Omega_2, \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad x \in \partial\Omega_3, \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0; \quad x \in \partial\Omega_4, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Pro odvození slabého řešení této úlohy aplikujeme Galerkinovu metodu. Zavedeme testovací funkce $\delta\Phi$, která je alespoň $1 \times$ diferencovatelná a splňuje okrajové podmínky. Výchozí integrální identita Galerkinovy metody má potom tvar (princip virtuálních potenciálů)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} \right) \delta\Phi dx = 0. \quad (6.1.8)$$

Na první člen kulaté závorky vztahu (6.1.8) aplikujeme Greenovu větu. Tím získáme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \delta\Phi dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} n_i \delta\Phi dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \delta\Phi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\partial\Omega_1} \delta\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

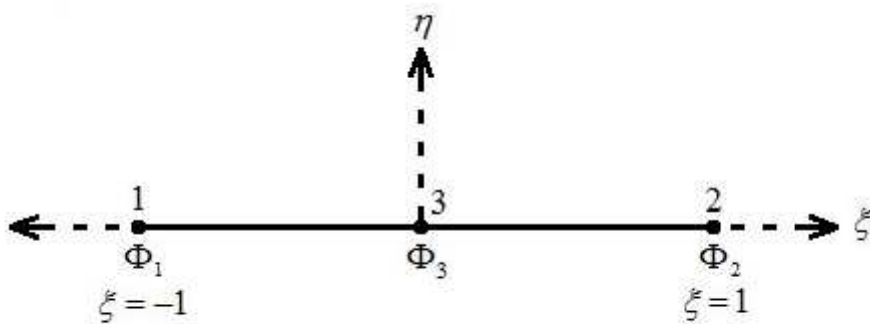
V tomto vztahu jsou již zohledněny okrajové podmínky (6.1.7). Dosazením vztahu (6.1.9) do integrální identity (6.1.8) získáme slabé řešení prezentované úlohy ve tvaru

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta \Phi \ddot{\Phi} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega_i} \delta \Phi \dot{u}_n ds. \quad (6.1.10)$$

Rozepsáním slabého řešení dané úlohy pro směr x získáme vztah pro 1D problém modelové úlohy interakce ve tvaru

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta \Phi \ddot{\Phi} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \int_{\partial \Omega_i} \delta \Phi \dot{u} ds. \quad (6.1.11)$$

Po odvození slabého řešení uvažované úlohy přistoupíme k diskretizaci problému a jeho numerické realizaci. Pro jednoduchost budeme kapalinu diskretizovat pomocí 1D prvku se třemi uzly (izoparametrický koncept, obr. 6.1.2). Neznámou v úloze je tedy rychlostní potenciál Φ , který budeme aproximovat polynomm druhého stupně.



Obr. 5.1.2. Diskretizace kapaliny

Kvadratické izoparametrické funkce $N_i(\xi)$ tohoto prvku mají tvar [2]

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \\ \frac{\xi}{2}(1+\xi) \\ 1-\xi^2 \end{bmatrix}. \quad (6.1.12)$$

Podrobnější popis aplikace metody konečných prvků (MKP) na řešení úloh mechaniky kontinua je popsána v bakalářské práci [1]. Zde jsou uvedeny jen aproximativní vztahy řešení a jejich derivace podle prostorové proměnné x . Platí

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T, & \Phi &= \mathbf{N}^T \mathbf{\Phi}, & \delta \Phi &= \delta \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}, \\ \ddot{\Phi} &= \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{\Phi}}, & \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \mathbf{N}_x^T \mathbf{\Phi}, & \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} &= \delta \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}_x. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Dosazením vztahů (6.1.13) do (6.1.11) a uvážení, že virtuální změna potenciálu je nezávislá, dostaneme diskretizovanou rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \ddot{\Phi} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T dx \Phi = \mathbf{N} \Big|_{\partial\Omega_1} \cdot \dot{u}. \quad (6.1.14)$$

Tento vztah můžeme dále zapsat v komprimovaném maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \mathbf{K}_f \Phi = \mathbf{R}_u, \quad (6.1.15)$$

kde jednotlivé matice mají tvar

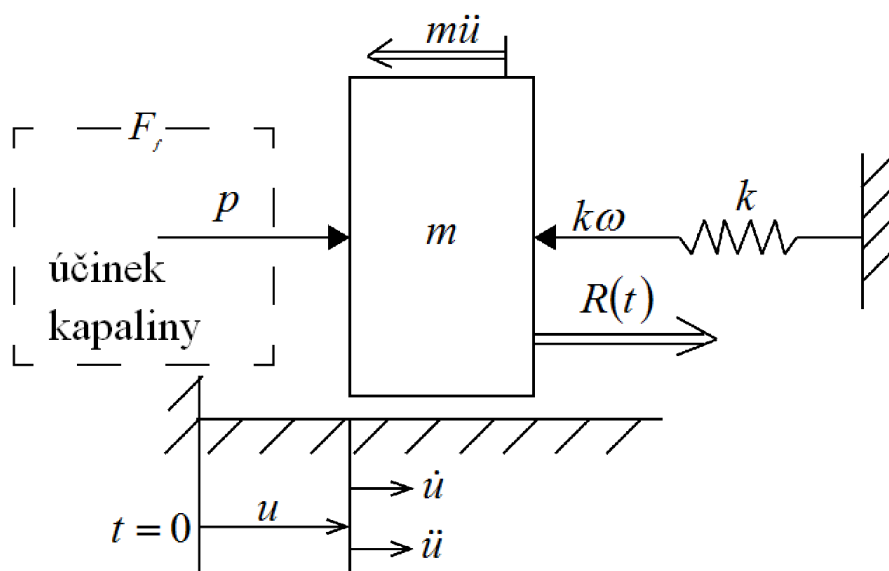
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f &= \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx, \\ \mathbf{K}_f &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T dx, \\ \mathbf{R}_u &= [0 \quad \dot{u} \quad 0]^T. \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Tím máme formálně vyřešen 1D model kapaliny uvažované modelové úlohy.

Pohybovou rovnici pístu sestavíme klasickým způsobem a vyjádříme ve tvaru

$$m\ddot{u} + kx = F_f + R(t), \quad (6.1.17)$$

kde m je hmotnost pístu, \ddot{u} je jeho zrychlení, k je tuhost lineární nehmotné pružiny, u je její deformace, F_f vyjadřuje silový účinek kapaliny na píst (hranice interakce) a $R(t)$ je budící síla pístu (obr. 6.1.3)



Obr. 6.1.3. Silové účinky působící na píst

Silový účinek kapaliny je zřejmě $F_f = p \cdot A$, kde A je jednotková plocha ($A = 1$). S využitím vztahu (6.1.6) a (6.1.13) jej můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F_f = -\rho_f \dot{\Phi} \Big|_{\partial\Omega_1} = -\rho_f \dot{\Phi}_2. \quad (6.1.18)$$

Dosazením této síly do vztahu (6.1.17) získáme pohybovou rovnici pístu s uvažováním vlivu kapaliny na píst ve tvaru

$$m\ddot{u}(t) + \rho_f \dot{\Phi}_2 + ku(t) = R(t). \quad (6.1.19)$$

Zde podotkněme, že člen $\rho_f \dot{\Phi}_2$ není tlumení soustavy, ale vliv interakce kapalina - těleso na pohyb pístu. Tím je formálně vyřešen pohyb pístu.

Maticová rovnice (6.1.15) tedy popisuje problematiku kapaliny a pohybová rovnice (6.1.19) popisuje pohyb pístu. Tyto dva vztahy nyní musíme spojit (sdružit). Za tímto účelem nejdříve vynásobíme maticovou rovnici (6.1.15) měrnou hmotností ($-\rho_f$) a rovnici zapíšeme ve tvaru

$$-\rho_f \mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \rho_f \mathbf{R}_i - \rho_f \mathbf{K}_f \Phi = \mathbf{0}. \quad (6.1.20)$$

K pohybové rovnici (6.1.19) tedy přidáme rovnici kapaliny (6.1.20) a vzniklou soustavu rovnic zapíšeme blokově v maticovém tvaru. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} m & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho}^T \\ \boldsymbol{\rho} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\rho_f \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.1.21)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= [0 \ 0 \ 0]^T, \quad \boldsymbol{\rho} = [0 \ \rho_f \ 0]^T, \\ \bar{\mathbf{0}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

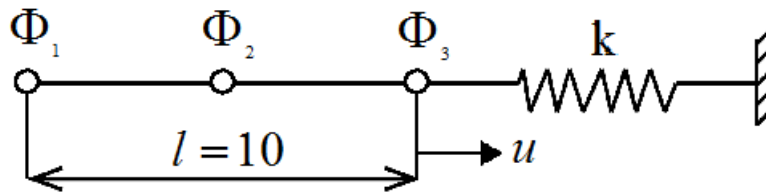
Přepíšeme-li soustavu rovnic (6.1.21) do plně komprimovaného tvaru, tak potom platí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (6.1.23)$$

V této rovnici je klasicky \mathbf{M} matice hmotnosti a \mathbf{K} matice tuhosti. Připomeňme, že člen $\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}$ není tlumením uvažované soustavy, ale naopak vyjadřuje vliv interakce kapalina - těleso na chování celého systému.

6.1.1 Numerické řešení modelové úlohy

V úvodu této práce jsou zmíněny čtyři základní problematiky interakce kontinuí. Nyní uvedeme řešení kmitání kapaliny s pohyblivou hranicí (obr. 6.1.1), která byla definována v předchozím odstavci. Za výsledek řešení této modelové úlohy interakce budeme považovat určení vlastních frekvencí modelu. Model kapaliny byl diskretizován použitím 1D prvku se třemi uzly (kompletní znázornění na obr. 6.1.1.1).



Obr. 5.1.1.1. Diskretizace modelu 1D úlohy

Integrací rovnice (6.1.4) a jejím zápisem ve tvaru maticové rovnice (6.1.15) dostaneme následující soustavu rovnic. Platí

$$\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 16 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \ddot{\Phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 30 & 30 & -30 \\ 1 & 7 & 8 \\ 30 & 30 & -30 \\ -8 & -8 & 16 \\ 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1.1.1)$$

nebo také ve tvaru (5.1.15)

$$\mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \mathbf{K}_f \Phi = \mathbf{R}_u \quad (6.1.1.2)$$

Zapíšeme-li dále pohybovou rovnici pístu (6.1.19) společně s rovnicí (6.1.1.1) v kompaktním maticovém tvaru získáme maticovou rovnici ve tvaru

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \ddot{\Phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -\rho_f \mathbf{K}_f & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1.1.3)$$

Tato soustava rovnic řeší problematiku 1D modelu interakce kapalina-těleso pomocí sdružené metody řešení. Pro výpočet vlastních frekvencí modelu byly voleny tyto parametry: hmotnost pístu $m = 10^3 \text{ [kg]}$, tuhost pružiny $k = 10^7 \text{ [Nm}^{-1}\text{]}$, hustota kapaliny $\rho = 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

$K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}$. Rychlost šíření tlakových vln c v kapalině určíme potom ze vztahu $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$. Dosažené numerické výsledky, tedy vlastní frekvence modelu, jsou uvedena v tab.

6.1.1.1.

Tab. 6.1.1.1. Výsledky numerického MKP výpočtu vlastních frekvencí samotného pístu a sdruženého problému (píst - kapalina).

Vlastní frekvence [Hz]		
	Píst	Kompletní model
Ω_1	100	0
Ω_2		100
Ω_3		502
Ω_4		1122.5

6.2 Kmitání pružného tělesa v kapalině

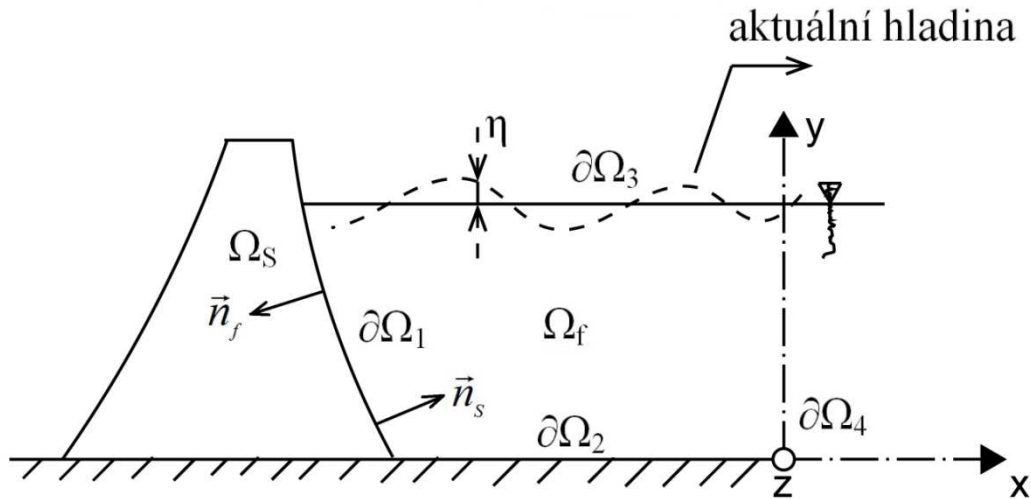
Jako další příklad modelové úlohy interakce kapaliny s tělesem, řešené aplikací sdružené metody, uveďme rovinný problém hráze s uvažováním vlivu kapaliny (obr. 6.2.1). Řídící rovnice tohoto problému vychází z předpokladů uvedených v kapitole 6 s tím, že nadále platí uvedené vztahy (6.1) až (6.7). Dalším krok řešení provedeme tak, že zderivujeme Navierovu-Stokesovu rovnici (6.2) podle prostorové souřadnice x_i a zároveň konstitutivní vztah (6.7) zderivujeme podle času t . Platí

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) &= - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t}. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Srovnáním těchto dvou vztahů získáme Helmholtzovu rovnici pro šíření tlakových vln v kapalině ve tvaru

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{6.2.2}$$

Podotkněme, že tato rovnice je základem řešení všech akustických úloh v mechanice kontinua. Helmholtzovu rovnici (6.2.2) je nutno doplnit okrajovými a počátečními podmínkami, které určíme postupně pro jednotlivé úseky hranice oblasti Ω_f vyplněné kapalinou (obr. 5.2.1).



Obr. 6.2.1. Interakce tuhé fáze a kapaliny

Na hranici interakce s tuhou strukturou ($\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$) jsou obecně předepsány normálové složky rychlosti, resp. jejich derivace. Dále uvažujeme tlakový gradient ve směru vnější normály \vec{n}_f k hranicím $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$. V souladu s rovnicí (6.2) platí

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}_f} = -f\dot{v}_{nf}, \quad (6.2.3)$$

kde \dot{v}_{nf} je předepsáno (index f dále zanedbáváme). V našem případě je na hranici interakce $\partial\Omega_1$ vazba mezi kapalinou a pohybem tuhé struktury popsána složkami vektoru posunutí u_i hráze. Tuto podmínku můžeme vyjádřit vztahem

$$\dot{v}_n = \ddot{u}_n. \quad (6.2.4)$$

Na hranici interakce $\partial\Omega_2$, kde existuje pouze horizontální pohyb kapaliny, máme zřejmě pouze podmínku

$$\dot{v}_n = \dot{v}_y = 0. \quad (6.2.5)$$

Vazba mezi kapalinou a pohybem tuhé struktury se tedy realizuje pouze na hranici interakce $\partial\Omega_1$.

Dalším problémem je modelování volné hladiny kapaliny. Nejjednodušší okrajovou podmínku na volné hladině (hranice $\partial\Omega_3$) můžeme zapsat ve tvaru

$$p = 0. \quad (6.2.6)$$

Tento předpoklad se ovšem nedá použít pro popis skutečné hladinové vlny (gravitační vlny, tlakové vlny - „zvříení“ hladiny). Skutečný tvar aktuální hladiny kapaliny budeme tedy aproximovat zavedením relativní výchylky η vůči střední poloze hladiny. S použitím této relativní výchylky η , měrné hmotnosti kapaliny ρ a tíhového zrychlení g můžeme tlak aproximovat vztahem

$$p = g \cdot \rho \cdot \eta. \quad (6.2.7)$$

V souladu s Navierovou - Stokesovou rovnicí (6.2) platí pro složku rychlosti v_y kapalinové částice na aktuální hladině kapaliny

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (6.2.8)$$

Vyjádřením relativní výchylky η ze vztahu (6.2.7) a následným dosazením do vztahu (6.2.8) získáme aproximovanou podmínku normálového gradientu tlaku na hranici $\partial\Omega_3$ ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{g} \ddot{p}. \quad (6.2.9)$$

Tento vztah se v literatuře označuje jako linearizovaná podmínka hladinové vlny. Hranici $\partial\Omega_4$ fyzikálně zohledňuje „nekonečnou“ oblast Ω_f kapaliny ve směru osy x . Efekt této radiační hranice je nutno do výpočtu zahrnout jistou aproximací. Hlavní dynamický efekt „nekonečné“ oblasti je takový, že řešení Helmholtzovy rovnice (6.2.2) musí obsahovat pouze „odcházející“ vlny. Vstupní vlny do nekonečné oblasti nemohou vstoupit, protože se „nemají“ kde na pravé straně oblasti Ω_f odrazit. Pokud tedy uvažujeme pouze šíření tlakových vln ve směru x , tak obecné řešení rovnice (6.2.2) má tvar

$$p = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (6.2.10)$$

kde c je rychlost vlny, F a G jsou postupné vlny v kladném resp. záporném směru osy x . Absence vstupních vln G znamená, že na hranici $\partial\Omega_4$ máme podmínku pouze v tomto tvaru

$$p = F(x - ct), \quad (6.2.11)$$

a pro tlakový gradient ve směru normály hranice $\partial\Omega_4$ platí

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \approx \frac{\partial p}{\partial x} = F' = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (6.2.12)$$

kde $z = x - ct$. Dále si vyjádříme časovou derivaci vztahu (6.2.11) ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -c \frac{\partial F}{\partial z} = -cF'. \quad (6.2.13)$$

Ze vztahu (6.2.12) a (6.2.13) vyloučíme neznámou funkci $F' = \frac{\partial F}{\partial z}$ a srovnáním dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{c} \dot{p} \quad (6.2.14)$$

Tato podmínka je podstatně jednodušší než podmínka (6.2.9) a má prakticky analogický význam jako tlumící člen u kmitání konstrukcí.

Rozložení tlaku v kapalině je tedy popsáno rovnicí (6.2.2) a okrajovými podmínkami (6.2.3), (6.2.4), (6.2.9) a (6.2.14). Pro odvození slabého řešení této úlohy aplikujeme

Galerkinovu metodu. Zavedeme testovací funkce δp , která je alespoň $1 \times$ diferencovatelná a splňuje okrajové podmínky.

Výchozí integrální identita Galerkinovy metody má s ohledem na rovnici (6.2.2) zřejmě tvar

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \delta p dx - \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \delta p dx = 0. \quad (6.2.15)$$

Na první člen vztahu (6.2.15) aplikujeme Greenovu větu a dostaneme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \delta p dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \delta p dx - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} dx. \quad (6.2.16)$$

Po dosažení vztahu (6.2.16) do integrálních identity (6.2.15) a zohledněním hranice oblasti Ω_f získáme vztah, který vede ke slabému řešení dané úlohy

$$-\int_{\Omega} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} dx + \int_{\partial\Omega_3} \delta p \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dx + \int_{\partial\Omega_4} \delta p \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dx + \int_{\partial\Omega_1} \delta p \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx = 0. \quad (6.2.17)$$

Tento vztah dále upravíme pomocí konkrétních okrajových podmínek, a získáme tak slabé řešení uvažované úlohy interakce ve tvaru

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} dx + \int_{\partial\Omega_3} \delta p \frac{1}{g} \ddot{p} ds + \int_{\partial\Omega_4} \delta p \frac{1}{c} \dot{p} ds + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{\partial\Omega_1} \delta p \ddot{u}_n ds = 0. \quad (6.2.18)$$

Po odvození slabého řešení úlohy šíření tlakových vlny v kapalině přistoupíme k prostorové diskretizaci a numerické realizaci problému. Vzhledem k tomu, že budeme řešit pouze rovinné šíření tlakových vln, tak prostorovou diskretizaci problému provedeme pomocí rovinných kapalinových konečných prvků typu „čtverec“ s využitím izoparametrického konceptu a aproximace polynomem prvního stupně. Neznámými v této úloze jsou diskrétní hodnoty tlaku v uzlových bodech kapaliny a posuvy uzlů tělesa (hráze). Podrobnější popis prostorové diskretizace pomocí konečných prvků je uveden v bakalářské práci [1], [2]. Zde přímo uvedeme jednotlivé integrály ve vztahu (5.2.18). Po diskretizaci úlohy mají integrály tvar

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_3} \delta p \frac{1}{g} \ddot{p} ds &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}_3^s \frac{1}{g} (\mathbf{N}_3^s)^T \sqrt{\left[(\mathbf{N}_{3\zeta}^s)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_{3\zeta}^s)^T \mathbf{y} \right]^2} d\zeta, \\ \int_{\partial\Omega_4} \delta p \frac{1}{c} \dot{p} ds &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}_4^s \frac{1}{c} (\mathbf{N}_4^s)^T \sqrt{\left[(\mathbf{N}_{4\eta}^s)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_{4\eta}^s)^T \mathbf{y} \right]^2} d\eta, \\ \int_{\partial\Omega_1} \rho_k \delta p \ddot{u}_n ds &= \int_{-1}^1 \rho_k \mathbf{N}_1^s \left[(\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n}_u (\mathbf{N}^s)^T, (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n}_v (\mathbf{N}^s)^T \right] \sqrt{\left[(\mathbf{N}_3^s)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_3^s)^T \mathbf{y} \right]^2} d\zeta, \quad (6.2.19) \\ \int_{\Omega} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}^T dx, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T dx. \end{aligned}$$

Zde \mathbf{N} je matice použitých tvarových funkcí. Dosazením těchto vztahů do slabého řešení (6.2.18) získáme maticovou rovnici popisující problém šíření tlakových vln v kapalině v diskretizovaném tvaru. Platí (\mathbf{q} je vektor posuvů uzlů, které leží na hranici interakce)

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{H}\mathbf{p}(t) + \rho_k \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}_k(t), \quad (6.2.20)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}^T dx + \int_{-1}^1 \mathbf{N}_3^S \frac{1}{g} (\mathbf{N}_3^S)^T \sqrt{\left[(\mathbf{N}_{3\xi}^S)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_{3\xi}^S)^T \mathbf{y} \right]^2} d\xi, \\ \mathbf{C} &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}_4^S \frac{1}{c} (\mathbf{N}_4^S)^T \sqrt{\left[(\mathbf{N}_{4\eta}^S)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_{4\eta}^S)^T \mathbf{y} \right]^2} d\eta, \\ \mathbf{Q}^T &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}_1^S \left[(\mathbf{N}^S)^T \mathbf{n}_u (\mathbf{N}^S)^T, (\mathbf{N}^S)^T \mathbf{n}_v (\mathbf{N}^S)^T \right] \sqrt{\left[(\mathbf{N}_3^S)^T \mathbf{x} \right]^2 + \left[(\mathbf{N}_3^S)^T \mathbf{y} \right]^2} d\xi, \\ \mathbf{H} &= \int \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T dx. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Pohybovou rovnici prvků pružné struktury získáme např. principem virtuálních prací a po diskretizaci problému ji můžeme vyjádřit ve tvaru (poslední člen na levé straně rovnice vyjadřuje vliv kapaliny na pohyb tělesa)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_s(t), \quad (6.2.22)$$

kde jednotlivé členy jsou matice hmotnosti

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{A}^T \mathbf{A} dx, \quad (6.2.23)$$

matice tuhosti

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{H}} dx, \quad (6.2.24)$$

matice tlumení (obecně uvažujeme proporcionální tlumení, $\alpha, \beta = konst.$)

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (6.2.25)$$

Pomocné matice obsažené ve vztazích (6.2.24) a (6.2.25) jsou matice elasticity \mathbf{E} , transformační matice \mathbf{A} , která vyjadřuje transformaci mezi uzlovými hodnotami \mathbf{q} , a vektorem posunutí obecného bodu $\bar{\mathbf{u}}$. $\bar{\mathbf{H}}$ je transformační matice která vyjadřuje transformaci mezi \mathbf{q} a $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pro matici elasticity platí [12].

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.2.26)$$

kde ν je Poissonovo číslo a E je Youngův modul pružnosti. Transformační matici \mathbf{A} získáme z vyjádření vektoru posunutí obecného bodu tělesa. Platí

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}^T \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.2.27}$$

Transformační matici $\bar{\mathbf{H}}$ získáme z definice Cauchyho tenzoru přetvoření

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).\tag{6.2.28}$$

Po vyjádření složek Cauchyho tenzoru přetvoření dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}_y^T \\ \mathbf{N}_y^T & \mathbf{N}_x^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dots \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{q}, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}_y^T \\ \mathbf{N}_y^T & \mathbf{N}_x^T \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.2.29}$$

V těchto vztazích \mathbf{N} jsou lineární izoparametrické funkce, \mathbf{N}_x a \mathbf{N}_y jsou jejich derivace podle prostorové souřadnice x a y , \mathbf{N}_3^S jsou lineární izoparametrické funkce vyjádřeny pro $\eta=1$, \mathbf{N}_1^S pro $\xi=-1$, \mathbf{N}_4^S pro $\xi=1$ a $\mathbf{N}_{3\xi}^S$, $\mathbf{N}_{4\eta}^S$, $\mathbf{N}_{1\eta}^S$, jsou jejich derivace podle lokálních proměnných ξ a η .

V dalším kroku řešení modelové úlohy se omezíme na řešení vlastních netlumených kmitů interakce systému těleso-kapalin, přesněji řečeno zaměříme se na určení vlastních frekvencí celé soustavy těleso-kapalina. V rovnicích (6.2.20) a (6.2.22) tedy zanedbáme tlumící členy $\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}$ a pravé strany buzení. Poznamenejme, že zanedbáním tlumících účinků v kapalině znamená, že tlakové vlny se v kapalině nešíří. Řešení slabě vázaného modelového problému interakce je tedy popsáno maticovými vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{H}\mathbf{p}(t) + \rho_k \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{6.2.30}$$

Tuto soustavu rovnic zapíšeme v blokovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho_k \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0}\tag{6.2.31}$$

Naznačená integrace ve výše uvedených vztazích se provede numerickou cestou s využitím Gaussových kvadraturních formulí. Výslednou maticovou rovnicí pro celou oblast Ω potom dostaneme „sečtením“ přes všechny elementy oblasti ve smyslu MKP.

Soustava rovnic (6.2.31) není zřejmě symetrickým systémem parciálních diferenciálních rovnic (kompletní matice nejsou pozitivně definitní), a proto nelze použít

standardní metody pro řešení problému vlastních hodnot. Fyzikálně je však zřejmé, že se jedná o reálný problém a tudíž vlastní čísla musí být reálná a musí tedy existovat hlavní tvary kmitu. Rovnici (6.2.31) upravíme na symetrický tvar a potom použijeme standardní metody řešení problému vlastních hodnot. Řešení soustavy rovnic budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}e^{i\Omega t}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\Omega^2\bar{\mathbf{q}}e^{i\Omega t}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = -\Omega^2\bar{\mathbf{p}}e^{i\Omega t}, \quad \ddot{\Phi} = -\Omega^2\bar{\Phi}e^{i\Omega t}, \quad (6.2.32)$$

kde t je čas, Ω je vlastní frekvence, \mathbf{q} je vektor posuvů, \mathbf{p} je tlak a Φ je nově zavedená proměnná potenciál přemístění částice [11], [5]. Zavedením této proměnné do soustavy rovnic (5.2.31) odstraníme nesymetrii soustavy rovnic (6.2.31). Tlak \mathbf{p} můžeme definovat pomocí nové proměnné a platí

$$\mathbf{p} = -\rho_k \ddot{\Phi}. \quad (6.2.33)$$

Úpravou tohoto vztahu (vynásobíme \mathbf{S}^T a $\frac{1}{\rho_k}$) dostaneme

$$\frac{1}{\rho_k} \mathbf{S}^T \mathbf{p} + \mathbf{S}^T \ddot{\Phi} = \mathbf{0}. \quad (6.2.34)$$

Tuto rovnici připojíme k soustavě rovnic (6.2.31) a za tlak \mathbf{p} dosadíme vztah (6.2.33). Po těchto úpravách získáme maticovou soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) - \rho_k \mathbf{Q}\ddot{\Phi} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{S}^T \ddot{\Phi} + \frac{1}{\rho_k} \mathbf{S}^T \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{S}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \rho_k \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{q}}(t) - \rho_k \mathbf{H}\ddot{\Phi} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

kterou zapíšeme v blokovém maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \rho_k \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \\ \rho_k \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} & -\rho_k \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_k} \mathbf{S}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.2.36)$$

Předpokládané řešení (6.2.32) dosadíme do soustavy rovnic (6.2.36) a upravíme. Získáme tak symetrický systém rovnic ve tvaru

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_k} \mathbf{S}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \rho_k \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \\ \rho_k \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} & -\rho_k \mathbf{H} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6.2.37)$$

který již můžeme řešit standardními postupy pro řešení problému vlastních hodnot.

6.2.1 Numerické řešení

Na základě systému rovnic (6.2.36) a (6.2.37) můžeme nyní obecně provést numerické řešení kmitání pružného tělesa s uvažováním vlivu kapaliny (obr. 6.2.1). Za řešení úlohy interakce budeme opět považovat znalost vlastních frekvencí modelové úlohy interakce těleso-kapalina. S využitím sdruženého přístupu k řešení problému interakce vypočítáme vlastní frekvence celého systému a srovnáme je s vlastní frekvencí samotné pružiny struktury. Výpočet byl proveden pro parametry: gravitační zrychlení $g = 9,81 [ms^{-2}]$, rychlost šíření vln v kapalině $c = 5$, Poissonovo číslo $\nu = 0,3$, Youngův modul pružnosti $2,1 \cdot 10^{11} [Pa]$, hustota kapaliny $\rho_k = 1000 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$, hustota struktury $\rho_s = 7800 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$.

Tab. 6.2.1.1. Vlastní frekvence modelové úlohy interakce kapalina-těleso

Vlastní frekvence $f [Hz] \cdot 10^4$		
	Pružná struktura	Kapalina - struktura
Ω_1	2,1230	1,9248
Ω_2	2,1531	1,9409
Ω_3	2,1951	1,9763
Ω_4	2,2347	2,0203
Ω_5	2,2447	2,0734
Ω_6	2,3019	2,0789
Ω_7	2,3479	2,1264
Ω_8	2,3490	2,1684
Ω_9	2,3674	2,1759
Ω_{10}	2,4022	2,1870

Dosažené numerické výsledky výpočtu vlastních frekvencí samotné pružné struktury a sdruženého problému (pružná struktura-kapalina) jsou souhrně uvedeny v tab. 6.2.1.1. Z těchto výsledků je patrný vliv vazby těleso-kapalina na hodnoty vlastních frekvencí soustavy a můžeme konstatovat, že u slabě vázaného systému kapalina-pružná struktura je vzájemné ovlivnění obou kontinuí poměrně malé.

6.3 Matice přídatných hmotností

Na základě výše uvedeného modelového problému interakce kapalina-pružná struktura můžeme dále snadno dojít k metodě tzv. matice přídatných hmotností, která byla již zmíněna v úvodu této diplomové práce. Na rozdíl od předchozí úlohy budeme nyní uvažovat nestlačitelnou a nevazkou kapalinu. Rozložení tlaku v takovéto kapalině je potom popsáno jednoduchou Laplaceovou rovnicí

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (6.3.1)$$

Tato rovnice vyplývá z rovnice (6.2.2), kde pro koeficient stlačitelnosti platí $K \rightarrow \infty$ (nestlačitelná kapalina), a tudíž rychlost šíření tlakových vln c roste také nade všechny meze ($c \rightarrow \infty$), a tedy druhý člen ve vztahu (6.2.2) limituje k nule. Zanedbáme-li dále vliv hladinové vlny a nenulové předepsané tlaky ($\mathbf{f}_k = \mathbf{0}$), tak z diskretizované rovnice kapaliny (6.2.20) vyplývá (nedochází zde k šíření tlakových vln)

$$\mathbf{H}\mathbf{P} = -\rho_k \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{q}}, \quad (6.3.2)$$

resp.

$$\mathbf{P} = -\rho_k \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (6.3.4)$$

Dosazením (6.3.4) do pohybové rovnice (6.2.22) pružného kontinua dostaneme

$$(\mathbf{M} + \rho_k \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_s \quad (6.3.5)$$

Je zřejmé, že tento vztah je standardní pohybová rovnice kmitání pružného kontinua zapsaná v maticové podobě, ve které je původní matice hmotnosti \mathbf{M} zvětšena o jistou matici, kterou nazýváme maticí přídatných hmotností a platí pro ni

$$\mathbf{M}_a = \rho_k \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T \quad (6.3.6)$$

Pohybovou rovnicí (6.3.5) řešíme standardními metodami řešení, takže pro řešení vlastních nebo vynucených kmitů pružného tělesa můžeme aplikovat např. metodu modální transformace. Z tvaru pohybové rovnice (6.3.5) je zřejmé, že uvedenou metodou řešení „uměle“ zvětšíme původní matici hmotnosti pružného tělesa a že tento přírůstek reprezentuje vliv kapaliny na kmitání tohoto tělesa. Podotkněme a zdůrazněme, že tato metoda řešení problému interakce je vhodná pouze pro slabě vázané systémy. Pro řešení vlastních hodnot soustavy můžeme samozřejmě rovnici (6.3.5) zapsat zkráceně ve tvaru

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (6.3.7)$$

Řešením této rovnice získáme vlastní frekvence Ω a vlastní tvary kmitů uvažovaného modelu interakce systému kapalina-těleso.

7. Závěr

Předložená diplomová práce představuje úvod do řešení problematiky interakci interakce kontinuí různých, resp. zkráceně interakce systému kapalina - pružné těleso. V úvodu práce je provedeno základní rozdělení úloh v oblasti interakce kontinuí, a to jednak z hlediska intenzity vzájemného působení kontinuí a jednak z hlediska matematického přístupu k řešení soustavy obecně operátorových rovnic, které popisují jednotlivá kontinua. Rovněž tak jsou v úvodu uvedeny čtyři základní modelové úlohy interakce systému kapalina-těleso. Dále jsou zde předloženy konkrétní modely úloh interakce a základní numerické metody, kterými se tato problematika řeší. První úlohou je jednoduchý model interakce, který je v podstatě úplným úvodem do řešení problémů interakce. Jedná se o příklad nesdružené metody řešení úlohy deformace pružné překážky vlivem obtékání tekutinou. Pohyb kapaliny v této úloze je obecně popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Úloha elastostatiky je potom popsána podmínkou rovnováhy, konstitutivním vztahem a kinematickou rovnicí příslušného kontinua. Konkrétní postup řešení interakce při aplikaci nesdružené metody spočívá ve střídavém řešení pohybu jednotlivých kontinuí s tím, že aktualizujeme okrajové podmínky právě řešeného kontinua. U uvažované úlohy to znamená, že nejdříve vyřešíme problém proudění kapaliny s „tuhou“ překážkou v kanále. Dalším krokem řešení je potom přetvoření „pružné“ překážky zatížené tlakem, který byl vypočten v předchozím kroku v rámci proudění kapaliny. Deformace překážky však vyvolala změnu oblasti, na které bylo řešeno proudění, a tudíž řešení proudění kapaliny je nutno opravit. Takto iterujeme, tj. střídavě řešíme pohyb kapaliny a přetvoření přepážky, tak dlouho až je splněna podmínka na přesnost řešení. Další praktická aplikace se již týká složitější problematiky interakce, a to zabývá se řešením tuhostních a tlumících charakteristik modelu lidského intaktního kolenního kloubu. Tento model představuje obecně kontakt VKD pracující za přítomnosti maziva, tj. jedná se o interakci tuhého válce a tuhé podložky se synoviální kapalinou. Výpočet těchto závislostí se opírá o vyhodnocení závislosti síly, přenášené synoviální kapalinou, na úhlové rychlosti a na vzdálenosti h_0 . Tyto charakteristiky modelu lidského kolena byly předmětem řešení bakalářské práce. Tento fyzikální model intaktního kolenního kloubu je v další úloze interakce rozšířen o zavedení drsnosti povrchu válce do matematického modelu. Jako úvodní modelová úloha sdružené metody je prezentována interakce nevazké kapaliny s tuhým pístem vázaným lineární pružinou k rámu. Pohyb kapaliny je opět popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity, resp. konstitutivním vztahem odvozeným z objemového modulu elasticity kapaliny. Pohybová rovnice pístu je sestavená klasickým způsobem, pro sestavení matematického modelu je aplikována klasická podmínka dynamické rovnováhy. Výsledkem řešení této modelové úlohy interakce je určení vlastních frekvencí prezentovaného modelu. Ze znalosti vlastních frekvencí lze samozřejmě potom určit reálnou odezvu soustavy kapalina-těleso. Druhou modelovou úlohou sdružené metody je „hráz“, jejíž vlastnosti jsou ovlivňovány kapalinou. Zde se jedná o slabě vázaný systém kapalina-těleso, tj. vliv pohybu tělesa na tlakové a rychlostní pole kapaliny je malý. Pro popis tlakových vln v kapalině je aplikována Helmholtzova rovnice. Pro popis pružného tělesa je potom použita klasická pohybová rovnice odvozená např. metodou virtuálních prací. Výstupem tohoto modelu interakce systému kapalina-pružná struktura jsou vlastní frekvence modelu samotné hráze a sdruženého modelu

kapalina-těleso. Z dosažených výsledků je zcela jasně vidět vliv kapaliny na vlastní frekvence modelu těleso-kapalina. V dalším odstavci je potom uvedena metoda matice přídavných hmotností, která je vhodná pro slabě vázané systémy. Příslušné pohybové rovnice jsou odvozeny z obecných rovnice interakce systému kapalina-těleso.

Tyto prezentované přístupy k řešení modelových úloh interakce lze samozřejmě aplikovat v reálné praxi, kde se často setkáváme s případy, kdy dochází ke vzájemnému dynamickému působení mezi elastickými tělesy a tekutinami. Další postup v řešení této problematiky lze rozvíjet směrem k numerické realizace odezvy interakce reálných systémů kapalina-těleso. Dále je důležité hledisko optimalizace algoritmů pro sestavení pohybových rovnic kompletních interagujících systémů (symetrické a nesymetrické systémy). Určitě je nutno dále se zabývat stabilitou a konvergencí numerických výpočtů z hlediska prostorové a časové diskretizace problémů interakce kontinuí různých fází. Samostatným problémem je konstrukce konečných prvků na hranici interakce kontinuí různých fází.

8. Literatura

- [1] Vocílka, Jan. Modelování kolenního kloubu. Plzeň: ZČU 2013. Bakalářská práce. Bakalářská práce, ZČU, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky.
- [2] Chung T. J.: Finite Elemente in der Strömungsmechanik. München, Wien, Carl HanserVerlag 1983.
- [3] Zienkiewicz O. C. – Taylor R. L.: The Finite Element Method (Vol. 2). Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity. London, McGRAW-HILL 1991.
- [4] Munson B. R. – Young D. F. – Okiishi T. H.: Fundamentals of Fluid Mechanics. New York, John Wiley& Sons 1990.
- [5] Morand H. J.-P. – Ohayon R.: Fluid Structure Interaction. Applied Numerical Methods. New York, John Wiley & Sons 1995.
- [6] Olson L.G. – BatheK.J.: Aninfinite element for analysis of transient fluid-structure interactions. Eng. Comput., Vol. 2, pp. 319-329, 1985.
- [7] Olson L.G. – BatheK.J.: Analysisof fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocitypotential. Computers&Structures, Vol. 21, No ½, pp. 21-32, 1985.
- [8] Rektorys K. a kol.: Přehled užití matematiky. Třetí, nezměněné vydání. Praha, SNTL 1973.
- [9] Berthe D. – Godet M.: Elastohydrodynamics lubrication of rough surfaces in pure rolling. TRIBOLOGY international, April 1974, pp. 67-69.
- [10] Dah-chen Sun, Kuo-KuangChen: First Effects of Stokes Roughness on Hydrodynamic Lubrication. Transactions of the ASME, January 1977, pp. 2-9.
- [11] Mašovský O.: Hydromechanika pro strojní inženýry. Praha, SNTTP 1956.
- [12] KŘEN, Jiří. *Mechanika kontinua*. 2. upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002 :, 324 s. ISBN 80-7082-908-7.