

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

**Katedra elektroenergetiky a ekologie**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Možnosti použití indukčního ohřevu při ohřevu  
nanočástic v roztocích**

*Originál (kopie) zadání BP/DP*

## **Abstrakt**

Předkládaná diplomová práce porovnává indukční ohřev nanočástic v podélném elektromagnetickém poli a příčném elektromagnetickém poli. Porovnání probíhá na základě vypočtených Joulových ztrát ve vsázce v závislosti na použité frekvenci a relativní permeabilitě materiálu pomocí simulačního programu ANSYS, verze 14.5

## **Klíčová slova**

Indukční ohřev, Joulovo ztráty, Poyntingův vektor, Podélné elektromagnetické pole, Příčné elektromagnetické pole, Hloubka vniku, ANSYS

## **Abstract**

The presented master thesis compares induction heating of nanoparticles in the longitudinal magnetic flux and transverse magnetic flux. The comparison is based on the calculated Joule losses in the charge depending on the frequency and relative permeability of the material by means of a simulation program ANSYS Version 14.5

## **Key words**

Induction heating, Joule losses, Poynting vector, longitudinal magnetic flux, transverse magnetic flux, depth of penetration, Ansys

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

.....  
podpis

V Plzni dne 5.5.2015

Bc. Michal Netušil

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Ing. Davidu Rotovi, Ph.D. za cenné profesionální rady, připomínky a čas, který mi věnoval během konzultací mé diplomové práce.

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>OBSAH</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>ÚVOD</b> .....  | <b>9</b>  |
| <b>SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK</b> .....                                    | <b>10</b> |
| <b>1 TEORIE INDUKČNÍHO OHŘEVU</b> .....                                  | <b>11</b> |
| 1.1 MAXWELLOVY ROVNICE A OBECNÉ ROVNICE ELEKTROMAGNETICKÉHO VLNĚNÍ ..... | 12        |
| 1.2 POYNTINGŮV ZÁŘIVÝ VEKTOR.....  | 15        |
| 1.3 POVRCHOVÝ JEV .....  | 16        |
| <b>2 SDÍLENÍ TEPLA</b> .....   | <b>18</b> |
| 2.1 SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM .....  | 19        |
| 2.1.1 <i>Součinitel měrné tepelné vodivosti</i> .....                    | 19        |
| 2.1.2 <i>Tepelný tok</i> .....   | 20        |
| 2.1.3 <i>Gradient teploty</i> .....                                      | 20        |
| 2.1.4 <i>Fourier – Kirchhoffova rovnice</i> .....                        | 20        |
| 2.1.5 <i>Tepelní součinitel</i> .....                                    | 22        |
| 2.2 SDÍLENÍ TEPLA PROUDĚNÍM .....  | 22        |
| 2.2.1 <i>Druhy proudění</i> .....  | 23        |
| 2.2.2 <i>Newtonova rovnice</i> .....                                     | 23        |
| 2.2.3 <i>Fourier-Kirchhoffova rovnice</i> .....                          | 24        |
| 2.2.4 <i>Součinitel přestupu tepla konvekcí</i> .....                    | 24        |
| 2.3 SDÍLENÍ TEPLA SÁLÁNÍM .....  | 25        |
| 2.3.1 <i>Stefan-Boltzmannův zákon</i> .....                              | 26        |
| 2.3.2 <i>Planckův zákon</i> .....  | 26        |
| 2.3.3 <i>Wienův zákon</i> .....  | 27        |
| 2.4 TEPLOTNÍ POLE .....  | 27        |
| 2.4.1 <i>Základní úvahy</i> .....  | 27        |
| 2.4.2 <i>Rovnice pro přestup tepla</i> .....                             | 28        |
| <b>3 MAGNETICKÉ KAPALINY A INKOUSTOVÉ BARVY</b> .....                    | <b>30</b> |
| 3.1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI NANOČÁSTIC .....                                 | 30        |
| 3.2 VÝROBA NANOČÁSTIC .....  | 32        |
| 3.3 INKOUSTOVÁ SLOŽENÍ .....   | 33        |
| 3.4 SLOŽENÍ INKOUSTŮ DO TISKÁREN NA VODNÍ BÁZI .....                     | 33        |
| 3.4.1 <i>Voda</i> .....  | 33        |
| 3.4.2 <i>Barvicí prostředky</i> .....                                    | 34        |
| 3.4.3 <i>Pomocná rozpouštědla a smáčedla</i> .....                       | 34        |
| 3.4.4 <i>Fixační a penetrační materiály</i> .....                        | 34        |
| 3.4.5 <i>Povrchově aktivní látka (Surfactant)</i> .....                  | 35        |
| 3.4.6 <i>Pryskyřice</i> .....  | 35        |
| 3.4.7 <i>Biocidy / Fungicidy</i> .....                                   | 35        |
| 3.4.8 <i>Buffering agent a další přísady</i> .....                       | 35        |
| <b>4 MODEL Y INDUKČNÍHO OHŘEVU</b> .....                                 | <b>37</b> |
| 4.1 PODÉLNÉ POLE A PEVNÁ VODIVÁ VSÁZKA .....                             | 37        |
| 4.1.1 <i>Vznik Joulových ztrát ve vsázce</i> .....                       | 37        |
| 4.1.2 <i>Výsledky simulace</i> .....                                     | 38        |
| 4.2 PŘÍČNÉ POLE A PEVNÁ VSÁZKA .....                                     | 40        |
| 4.2.1 <i>Vznik Joulových ztrát ve vsázce</i> .....                       | 41        |
| 4.2.2 <i>Výsledky simulace</i> .....                                     | 41        |
| 4.3 POROVNÁNÍ MODELŮ S PEVNOU ELEKTRICKY VODIVOU VSÁZKOU .....           | 43        |

|  |   |           |
|--|---|-----------|
| 4.4  | PODÉLNÉ POLE A ELEKTRICKY VODIVÁ VSÁZKA IZOLOVANÁ KAPALINOU .....       | 44        |
| 4.5  | PŘÍČNÉ POLE A ELEKTRICKY VODIVÁ VSÁZKA IZOLOVANÁ KAPALINOU .....        | 46        |
| 4.6  | POROVNÁNÍ MODELŮ S ELEKTRICKY VODIVOU VSÁZKOU IZOLOVANOU KAPALINOU..... | 48        |
| <b>ZÁVĚR.....</b>                                    |   | <b>51</b> |
| <b>SEZNAM LITERATURY A INFORMAČNÍCH ZDROJŮ .....</b> |   | <b>52</b> |



## **Úvod**

Předkládaná diplomová práce se zabývá indukčním ohřevem nanočástic v podélném elektromagnetickém poli a v příčném elektromagnetickém poli a vzájemným porovnání těchto dvou polí z hlediska vzniku Joulových ztrát ve vsázce.

Hlavním cílem celé práce bylo zjistit, na základě simulací v programu ANSYS, zda-li dojde či nedojde k ohřevu nanočástic. Při simulaci byli zvoleny dva různé modely a kromě frekvence se také měnila relativní permeabilita nanočástice.

Samotný text je rozdělen na dvě části; první část se zabývá obecnou teorií indukčního ohřevu, Maxwellovými rovnicemi a sdílením tepla ve vsázce. Druhá část je zaměřena na modely jednotlivých polí vytvořených v simulačním programu ANSYS, verze 14.5 a simulacemi vzniku Joulových ztrát ve vsázce pro různé frekvence a různou relativní permeabilitu.

## Seznam symbolů a zkratek

| Název                     | Značka                | Rozměr                           |
|---------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| permeabilita              | $\mu$                 | $\text{H.m}^{-1}$                |
| relativní permeabilita    | $\mu_r$               | -                                |
| rezistivita               | $\rho_e$              | $\Omega.\text{m}$                |
| elektrická vodivost       | $\gamma$              | $\text{S.m}^{-1}$                |
| hustota                   | $\rho$                | $\text{kg.m}^{-3}$               |
| tepelná kapacita          | $c_p$                 | $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ |
| tepelná vodivost          | $\lambda$             | $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  |
| délka vzduchové mezery    | $\delta$              | m                                |
| součinitel přestupu tepla | $\alpha$              | $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  |
| permitivita               | $\epsilon$            | $\text{F.m}^{-1}$                |
| relativní permitivita     | $\epsilon_r$          | -                                |
| mag. indukční tok         | $\varphi$             | Wb                               |
| teplotní součinitel       | $a$                   | $\text{m}^2.\text{s}$            |
| rychlost světla           | $c$                   | m.s                              |
| termodynamická teplota    | $\vartheta$           | K                                |
| intenzita mag. pole       | <b><math>H</math></b> | $\text{A.m}^{-1}$                |
| intenzita el. pole        | <b><math>E</math></b> | $\text{V.m}^{-1}$                |
| elektrická indukce        | <b><math>D</math></b> | $\text{C.m}^{-2}$                |
| magnetická indukce        | <b><math>B</math></b> | T                                |
| proudová hustota          | <b><math>J</math></b> | $\text{A.m}^{-2}$                |
| frekvence                 | $f$                   | Hz                               |
| proud                     | $I$                   | A                                |
| délka                     | $l$                   | m                                |
| plocha                    | $S$                   | $\text{m}^2$                     |
| objem                     | $V$                   | $\text{m}^3$                     |
| poloměr                   | $r$                   | M                                |
| Počet závitů              | $N$                   | -                                |
| hloubka vniku             | $a$                   | M                                |
| tepelný tok               | <b><math>q</math></b> | $\text{W.m}^{-2}$                |
| úhlová frekvence          | $\omega$              | $\text{rad.s}^{-1}$              |
| Teplo                     | $Q$                   | J                                |
| energie                   | $W$                   | J                                |
| ztráty                    | $P_z$                 | W                                |
| poyntingův vektor         | <b><math>N</math></b> | $\text{W.m}^{-2}$                |
| laplaceův operátor        | $\Delta$              | $\text{m}^{-2}$                  |

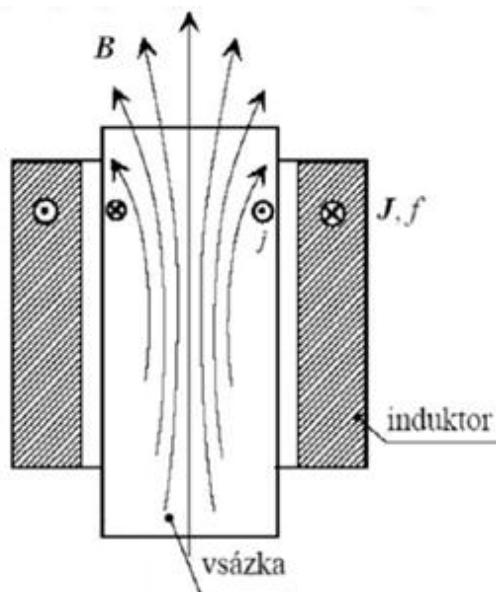
fázory vektorových veličin  
vektorové veličiny

**tučné a podtržené**  
***tučně a kurzívou***

## 1 Teorie indukčního ohřevu

Indukční ohřev umožňuje velice šetrný a precizní ohřev vsázky ve srovnání s jinými ohřevy, jako je například přímý a nepřímý odporový ohřev či ohřev plamenem. Indukční teplo vzniká tehdy, jestliže elektromagnetické vlnění dopadá na elektricky vodivou stěnu. Přitom se část vlnění odrazí od stěny a zbylá část do stěny vstoupí a vyvolá naindukovaný proud, jehož průchodem se stěna zahřívá. Největší výhodou indukčního ohřevu je, že teplo vzniká přímo ve vsázce způsobené Joulovými ztrátami, které vyvolaly naindukované vířivé proudy. Teplo tedy do vsázky nevstupuje jejím povrchem, a proto dochází k velmi rychlému ohřívání. Další výhodou je, že volbou kmitočtu ovlivňujeme tloušťku vrstvy u povrchu vsázky, ve které teplo vzniká. Budeme-li znát rozložení naindukovaných proudů, pak lze určit rozložení Joulových ztrát, kterým bude úměrné vznikající teplo. Největší vývin tepla bude v místech s největšími ztrátami, odkud se teplo bude šířit tepelným vedením do celé vsázky.

Indukční ohřev je možné použít pouze u materiálů, které jsou elektricky vodivé. Zjednodušeně je možné indukční ohřev přirovnat k transformátoru, kde primárním vinutím bude induktor a sekundární vinutí zapojené nakrátko bude představovat vsázka. Energie se do vsázky přenáší střídavým elektromagnetickým polem a teplo následně vzniká přímo ve vsázce. To znamená, že vsázka je nejteplejším objektem celé soustavy a vše ostatní může být studené. Princip indukčního ohřevu je schematicky znázorněn na Obr. 1.1. Vsázka, jež musí být dostatečně elektricky vodivá, je vložena do induktoru protékaného střídavým proudem o



hustotě  $J$  a kmitočtu  $f$ . Proud vyvolá magnetické pole  $B$  procházející vsázkou, ve které se následně indukují vířivé proudy o hustotě  $J$ . Vířivé proudy se na povrchu vsázky uzavírají a vytvářejí zde ztráty, které způsobují oteplení vsázky. Hloubku prohřátí vsázky je možné dobře regulovat kmitočtem.

[1,4]

Obr. 1.1 Princip indukčního ohřevu

## 1.1 Maxwellovy rovnice a obecné rovnice elektromagnetického vlnění

Maxwellovy rovnice jsou základem teorie indukčního ohřevu založeného na elektrodynamice z nich vyplívající. Určují vlnový charakter elektromagnetického pole. Pro podstatu vlnových jevů je důležitá jejich konečná rychlost šíření. V opačném případě by daný jev, pokud by se šířil nekonečně velkou rychlostí, obsadil celý prostor a šíření by nebylo postupné, a tudíž by neexistovalo ani vlnění.

Elektromagnetické pole je popsáno čtyřmi Maxwellovými rovnicemi. Maxwellovy rovnice je možné zapsat, buďto v integrálním nebo diferenciálním tvaru. V integrálním tvaru nám popisují elektromagnetické pole v jisté oblasti, zatímco v diferenciálním tvaru v určitém bodu této oblasti.

- **První Maxwellova rovnice**

Integrální tvar:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I + \frac{d\psi}{dt} \quad (1.1)$$

Diferenciální tvar:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

- **Druhá Maxwellova rovnice**

Integrální tvar:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.3)$$

Diferenciální tvar:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

- **Třetí Maxwellova rovnice**

Integrální tvar:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum Q \quad (1.5)$$

Diferenciální tvar:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.6)$$

- **Čtvrtá Maxwellova rovnice**

Integrální tvar:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (1.7)$$

Diferenciální tvar:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

Po provedení rotace 1. Maxwellovy rovnice získáme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{rot} \gamma \mathbf{E} + \operatorname{rot} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{E})}{\partial t} \quad (1.9)$$

Za rot  $\mathbf{E}$  dosadíme vztah z druhé Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

Použitím pravidla  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$  dostaneme

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Po dosazení 4. Maxwellovy rovnice dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

Stejně je možné postupovat při odvozování elektrické složky. V tomto případě začínáme provedením rotace 2. Maxwellovy rovnice, kde dostaneme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{H})}{\partial t} \quad (1.13)$$

Nyní dosadíme za  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  z rovnice ((1.2) a upravíme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.15)$$

Následnou úpravou získáme

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Rovnice (1.12) a (1.16) jsou obecné rovnice šíření elektromagnetického vlnění v prostředí s konstantními  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\gamma$ . Ve skutečnosti se setkáme hlavně s prostředím elektricky vodivým či prostředím elektricky nevodivým. Pro nevodivé prostředí platí  $\gamma=0$  a pak dostaneme obecné rovnice šíření elektromagnetického pole pro nevodivé prostředí ve tvaru

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

Budeme-li uvažovat vodivé prostředí, pak platí, že  $\gamma > 0$  a po úpravě dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.19)$$

Kde výraz  $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{J}$  značí proud vodivý, kdežto druhý výraz značí posuvný proud. Budeme-li uvažovat dobrý vodič, pak je možné posuvný proud zanedbat a dostaneme.[3]

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.21)$$

## 1.2 Poyntingův zářivý vektor

Poyntingův zářivý vektor  $N$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] nám udává směr a hustotu toku elektromagnetické energie v prostoru za jednotku času. Poyntingův zářivý vektor lze odvodit v závislosti na intenzitě elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetického pole  $\mathbf{H}$ . Při jeho odvození lze vycházet z platné rovnice pro energii elektromagnetického pole v daném objemu.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}\mathbf{E}dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \mathbf{E}^2 dV \quad (1.22)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}\mathbf{H}dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}^2 dV \quad (1.23)$$

Množství energie, které ubude za 1 sekundu, bude rovno derivaci podle času. Rychlost ubývání množství energie v uvažovaném objemu  $V$  za jednotku času bude rovno záporné derivaci.

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) dV \quad (1.24)$$

Po derivaci pravé strany dostaneme

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = - \int_V \left( \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV \quad (1.25)$$

Dále využijeme 1. a 2. Maxwellovu rovnici, ze které si vyjádříme výrazy  $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  a  $\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ , které poté dosadíme do rovnice (1.25) a dostaneme výraz

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V (\gamma \mathbf{E}^2 + \mathbf{H} * \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} * \text{rot} \mathbf{H}) dV \quad (1.26)$$

Pro druhý a třetí člen pravé strany můžeme použít skalární součin dvou vektorů a získáme rovnici ve tvaru

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V (\gamma \mathbf{E}^2 + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})) dV \quad (1.27)$$

U druhého výrazu pravé strany můžeme nahradit objemový integrál plošným integrálem podle Gaussovy-Ostrogradského věty.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) &= \int_V (\gamma \mathbf{E}^2) dV + \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dA \\
 &= \int_V (\gamma \mathbf{E}^2) dV + \int_A \mathbf{N} \cdot d\mathbf{A}
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

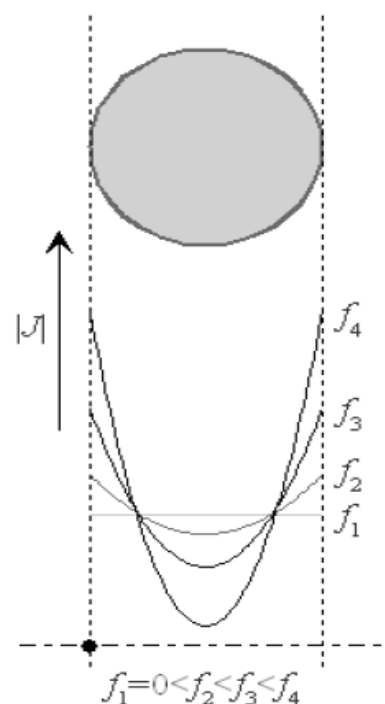
Rovnice (1.28) udává úbytek elektromagnetické energie v uvažovaném objemu  $V$  za jednotku času. První člen pravé strany udává množství elektromagnetické energie, která se za 1 sekundu v objemu  $V$  přemění v teplo, ale za předpokladu, že se nejedná o dokonalý izolant, pro který platí  $\gamma = 0$ . Druhá část pravé strany rovnice (1.28) udává množství elektromagnetické energie, která vystoupí za 1 sekundu z povrchu a nazývá se zářivý Poyntingův vektor, pro který lze psát

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \text{ [W/m}^2\text{]}
 \tag{1.29}$$

Poyntingův zářivý vektor  $\mathbf{N}$  je obecně určen vektorovým součinem fázorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  v uvažovaném místě. Jeho velikost je dána plošným obsahem rovnoběžníka, který je určen vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  v prostoru. [1]

### 1.3 Povrchový jev

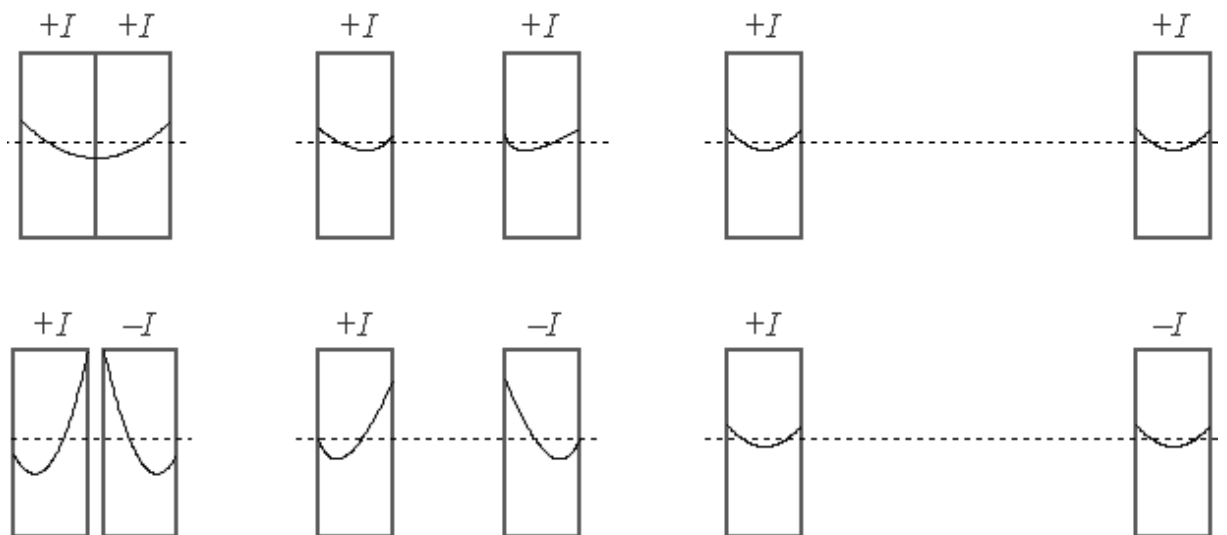
Bude-li procházet elektrickým vodičem harmonický proud o frekvenci  $f$ , tak se po jeho průřezu rozloží proudová hustota takovým způsobem, že její amplituda narůstá od středu vodiče k jeho povrchu, kde dosahuje nejvyšších hodnot. Velikost dané nerovnoměrnosti se zvětšuje s kmitočtem a zároveň také s permeabilitou materiálu vodiče. Rozložení velikosti proudové hustoty pro dlouhý vodič kruhového průřezu je možné vidět na Obr. 1.2. Z Obr. 1.2 je vidět, že při zvyšování frekvence se vodič chová tak, jakoby v něm byla dutina a tím se zmenšoval průřez vodiče. Roste-li tedy kmitočet, pak se zvyšuje i rezistence vodiče a klesá indukčnost. Což znamená, že pro vedení vysokofrekvenčních proudů nejsou třeba plné vodiče, jelikož by byly stejně nevyužity. V takových případech se tedy volí duté vodiče,



Obr. 1.2 Rozložení proudové hustoty [12]



čímž dojde i k úspoře materiálu a nebo se také používají svazkové vodiče. Vezmeme-li v úvahu dva blízké dostatečně dlouhé souběžné vodiče, tak můžeme pozorovat, že dochází k ovlivňování rozložení proudových hustot v jednom vodiči magnetickým polem druhého vodiče. Také je nutné podotknout, že záleží na tom, jestli vodiči protékají proudy stejného či opačného směru. Na *Obr. 1.3* je možné sledovat, jak se mění vliv rozložení proudových hustot u vodičů obdélníkového průřezu, jestliže dochází k jejich postupnému vzdalování se. Budou-li proudy téci stejným směrem, pak proudová hustota bude vytlačována na vnější okraj vodiče s obdélníkovým průřezem. Pokud bude proud téci opačným směrem, pak proudová hustota bude vytlačována na vnější stranu vodiče.



*Obr. 1.3* Rozložení proudové hustoty ve vodičích které se od sebe navzájem vzdalují [12]

## 2 Sdílení tepla

Oproti jiným elektrickým zařízením je v elektrotepelných zařízeních jev přeměny elektrické energie na tepelnou žádoucí. Látky, jako například kovy, které se skládají z jednotlivých atomů uspořádaných do prostorových krystalických mřížek, mohou získáváním tepla měnit svoje skupenství. V pevném skupenství jsou atomy vázány vzájemnými přitažlivými silami v rovnovážné poloze, kolem které kmitají. Při zvyšování teploty dochází i ke zvětšování rozkmitu a při určité teplotě překročí energie atomů přitažlivé síly. Skupenství látky se díky možnosti volného pohybu atomu změní v kapalně. Pokud dojde k dalšímu zvyšování teploty, začnou se atomy z povrchu vypařovat a kapalně skupenství se mění na plynně.

Sdílení tepla je možné popsat samovolným a nevratným přenosem tepla, který nastává v prostorech s nehomogenním teplotním polem. Teplo se tedy bude šířit v prostoru samovolně z míst s vyšší teplotou do míst s nižší teplotou ve smyslu II. termodynamického zákona. Sdílení tepla lze dělit podle toho, v jakém prostředí a na jakých fyzikálních základech daný pohyb probíhal.

Existují tři druhy šíření tepla:

- Vedením (kondukcí)
- Prouděním (konvekci)
- Sáláním (radiace, záření)

Teplo se v běžných situacích přenáší obvykle jako kombinace dvou, nebo všech tří způsobů přenosu tepla. Ve většině případech jeden způsob přenosu převažuje nad ostatními, a proto je možné zbylé dva způsoby přenosu tepla zanedbat, čímž dojde ke zjednodušení následného výpočtu. U každého způsobu sdílení tepla (vedení, proudění, sálání) je možno rozlišit stav stacionární a nestacionární. K ustálenému (stacionárnímu) stavu dojde, pokud je naakumulované teplo a teplota tělesa stalá a nezávislá na čase, avšak na různých místech může být různá. Lze jej určit pomocí vztahu:

$$T = f(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

T...teplota daného bodu

x, y, z...souřadnice daného bodu.

Pro neustálený (nestacionární) stav se jedná o dobu začátku ohřevu, a tím i postupnému ohřívání. Potom je teplota  $T$  v daném bodě funkcí souřadnic  $(x, y, z)$  a také funkcí času  $t$ . [5,6,7,13]

$$T = f(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

## 2.1 Sdílení tepla vedením

K tomuto způsobu přenosu tepla dochází v tuhých látkách nebo za určitých okolností i u kapalných a plynných látek, pokud zabráníme současnému sdílení tepla prouděním. Ke sdílení tepla vedením dochází tehdy, není-li v různých místech dané látky stejná teplota. Poté částice chladnějšího tělesa získávají pohybovou energii při kontaktu s tělesem o vyšší teplotě. Teplejší částice při srážce odevzdají část své energie chladnějším částicím. Tím dojde k ohřátí chladnějších částic, které se začnou pohybovat rychleji a při další srážce předají část energie okolním částicím. Tento proces výměny tepla probíhá tak dlouho, dokud se teploty v obou tělesech nevyrovnají.

V tuhých tělesech je rychlost šíření tepla vedením ve většině případech vyšší, než v prostředí tekutém či plynném, jelikož v těchto prostředích jsou jednotlivé molekuly lehce pohyblivé, málo vzájemně vázané a jsou ve větší vzájemné vzdálenosti. [5]

### 2.1.1 Součinitel měrné tepelné vodivosti

Fyzikálním parametrem látky je součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$ . Zároveň tento součinitel charakterizuje, za předem stanovených podmínek, schopnost vedení tepla. Obecně závisí na teplotě, tlaku a složení látky či vlhkosti. Z těchto důvodů se proto součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  stanoví měřením hustoty tepelného toku a gradientu teploty a poté výpočtem pomocí vztahu:

$$\lambda = - \frac{dQ}{\text{grad } T * dS * dt} \quad (W/m.K) \quad (2.3)$$

Součinitel tepelné vodivosti je tedy množství tepla, které projde jednotkovou plochou povrchu za jednotku času s jednotkovým teplotním spádem.

Součinitel tepelné vodivosti určuje rychlost vedení tepla určitým materiálem, čímž je možné jednotlivé látky porovnat podle jejich tepelné vodivosti. [5,9]

Látky dělíme na:

- Tepelné vodiče – látky s vysokou rychlostí vedení tepla a velkým součinitelem vodivosti kde se součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  pohybuje v rozmezí 2,3 – 420 W/mK.
- Tepelné izolanty – látky s nízkou rychlostí vedení tepla a malým součinitelem vodivosti, kde se součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  pohybuje v rozmezí desetin až setin  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

### 2.1.2 Tepelný tok

Sdílení tepla v tělese je podmíněno rozdílnou teplotou jednotlivých částí tělesa. Tepelný tok je ve skutečnosti množství tepla, které projde přes izotermický povrch za jednotku času a platí pro něj

$$dP = q * dS \quad (W) \quad (2.4)$$

Hustotu tepelného toku  $q$  lze vyjádřit pomocí Fourierova zákona ve tvaru:

$$q = -\lambda * \text{grad } T \quad (W/m^2) \quad (2.5)$$

Rovnice (2.5) popisuje závislost mezi teplotním gradientem a hustotou tepelného toku. Záporné znaménko značí, že teplotní gradient a tepelný tok mají vektorově opačný smysl. To lze také vysvětlit tím, že se teplo šíří z místa o vyšší teplotě do místa s nižší teplotou. [9]

### 2.1.3 Gradient teploty

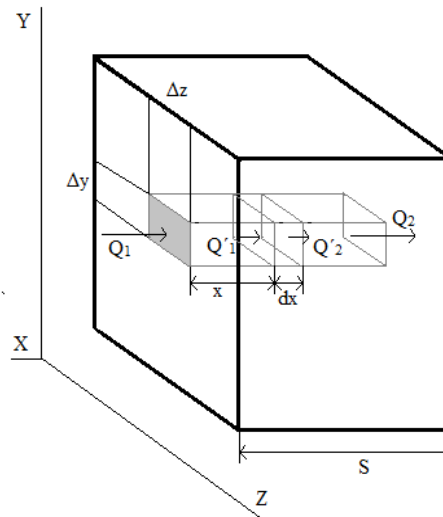
Teplo se šíří v uvažovaném materiálu všemi směry. Gradient je tedy vektor, který je kolmý k izotermě a směřuje ve směru růstu teploty a určuje teplotní spád. Matematicky se dá vyjádřit jako:[5]

$$\text{grad } T = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla T \quad (K/m) \quad (2.6)$$

### 2.1.4 Fourier – Kirchhoffova rovnice

Fourier - Kirchhoffova rovnice vyjadřuje vedení tepla v tuhém tělese. V daném místě se mění teplota i tepelný tok. Tato rovnice se používá pro řešení vedení tepla v různém místě i čase. Do hranolu zobrazeného na Obr. 2.1 vstupuje tepelný tok  $Q_1$  a ve vzdálenosti  $S$  vystupuje z hranolu tepelný tok  $Q_2$ . Od předního rozhraní je ve vzdálenosti  $x$  prostorový

element o rozměrech  $\Delta z \cdot \Delta y \cdot dx$ , do něhož vstupuje tepelný tok  $Q'_1$  a vystupuje tok  $Q'_2$ , rozdíl těchto toků zvýší teplotu elementu o  $dT$ .



Obr. 2.1 Model pro odvození F-K rovnice [10]

Tepelný tok  $Q'_1$  bude

$$Q'_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y \Delta z dt \quad (2.7)$$

Gradient v místě  $x + dx$  bude vypadat takto

$$\text{grad} \left( T - \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \text{grad} T - \text{grad} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (2.8)$$

Tepelný tok  $Q'_2$  bude

$$Q'_2 = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) \Delta y \Delta z dt \quad (2.9)$$

Rozdíl toků  $Q'_1$  a  $Q'_2$  způsobující ohřátí elementu o teplotu  $dT$  bude

$$Q'_1 - Q'_2 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \Delta y \Delta z dt = (\Delta y \Delta z dx) \cdot c \cdot \rho \cdot dT \quad (2.10)$$

$c$  [J/kg.K].....měrná tepelná kapacita materiálu

$\rho$  [kg/m<sup>3</sup>].....měrná hustota materiálu

Po úpravě získáme diferenciální rovnici pro vedení tepla ve směru osy x

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

Budeme-li uvažovat obecný případ vedení tepla, pak se rovnice změní takto:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \cdot \nabla^2 T \quad (2.12)$$

Tato diferenciální rovnice umožňuje určit rozložení teploty v každém místě a čase. Písmenko "a" [W/m<sup>2</sup>] představuje součinitel teplotní vodivosti daného materiálu. [5,10]

### 2.1.5 Teplotní součinitel

Tato fyzikální veličina vyjadřuje rychlost změny teplotního pole určitého tělesa při změně povrchové podmínky. Čím větší je hodnota součinitele teplotní vodivosti a, tím rychleji se změní teplota povrchu uvnitř daného tělesa. Největší hodnoty součinitele teplotní vodivosti nabývají kovy, kde např. měď má velikost součinitele teplotní vodivosti  $a=10,28 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s. Naopak nejmenších hodnotu mají plyny. Matematicky je možné teplotní součinitel a vyjádřit jako:[9]

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad (2.13)$$

$\rho$  [kg/m<sup>3</sup>].....hustota materiálu

$c$  [J/kg.K].....měrná tepelná kapacita materiálu

$\lambda$  [W/m.K].....součinitel tepelné vodivosti

## 2.2 Sdílení tepla prouděním

Prouděním se teplo šíří výhradně v plynných a kapalných látkách, kde jsou částice mnohem více pohyblivé a při volném proudění vlivem rozdílných teplot částic dochází k přemísťování tak, že teplejší, lehčí částice stoupají vzhůru a přenášejí si sebou i svoji zásobu tepelné energie. Sdílení tepla prouděním se uplatňuje například při nižších teplotách u elektrických pecí, kde takovýmto způsobem lze počítat ztráty ochlazováním vnějšího povrchu. Během proudění kapaliny kolem pevného tělesa se podél tohoto tělesa vytvoří tenká

mezní vrstva, jenž je způsobena přilnavostí molekuly kapaliny k povrchu. V této tenké vrstvě je tepelná vodivost velmi malá a dochází zde k teplotnímu skoku a přenos tepla se uskutečňuje jen vedením.

Sdílení tepla prouděním lze rozdělit na dva typy, kterými jsou: [1,8,10]

- Nucená konvekce - zde je pohyb částic vyvolán pomocí rozdílu tlaků, jenž jsou uměle vytvořeny, například pomocí ventilátorů či čerpadel. Tento způsob je využíván pro rychlejší vyrovnání teplotních diferencí v kapalině.
- Volná konvekce - důvod vzniku pohybu kapalin a plynů je dán rozdílem v hustotě látky, který je vyvolán její rozdílnou teplotou.

### 2.2.1 Druhy proudění

Z hydromechaniky jsou známé dva druhy proudění, a to turbulentní proudění a laminární proudění. U laminárního proudění se částice jakékoliv látky pohybují rovnoběžně spolu se stěnami kanálu, ale při turbulentním proudění se částice obecné látky pohybují chaoticky. Laminární proudění se může změnit v turbulentní, dosáhne-li střední průtočná rychlost kapaliny kritické, nebo větší hodnoty. S geometrickými podmínkami a druhem kapaliny se mění kritická rychlost. Při turbulentním proudění není pohyb celé kapaliny neuspořádaný. Okolo stěny omezující proud se pokaždé vytvoří tenká vrstva kapaliny s laminárním pohybem částic. Taková vrstva je nazývána mezní vrstva, jejíž tloušťka je závislá na střední průtokové rychlosti. Vzárustem rychlosti se tloušťka mezní vrstvy zmenšuje. [9]

### 2.2.2 Newtonova rovnice

Newtonova rovnice je jedním ze základních vztahů při předávání tepla prouděním, a má tvar:

$$q = \alpha(T_p - T_o) \quad (W/m^2) \quad (2.14)$$

$\alpha$  [W/m<sup>2</sup>.K].....součinitel přestupu tepla

$T_o$  [K].....teplota okolí

$T_p$  [K].....teplota povrchu

### 2.2.3 Fourier-Kirchhoffova rovnice

Fourier – Kirchhoffova rovnice popisuje teplotní pole proudící kapaliny. Tato rovnice předpokládá, že kapalina je homogenní, izotropní, a také má konstantní fyzikální vlastnosti. Vycházet můžeme z Fourierovy rovnice pro vedení tepla, která se týká vedení tepla v tuhém tělese, která má tvar:

$$q = -\lambda \text{ grad } T \quad (2.15)$$

$q$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].....hustota tepelného toku

$\lambda$  [ $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ].....součinitel tepelné vodivosti

$T$  [K].....teplota

U proudění je nutné k tepelnému toku  $q$  přičíst teplo, které přenese kapalina o hustotě  $\rho$ , pak dostaneme Fourier-Kirchhoffovu rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \text{ grad } T + \frac{q_v}{c_p \rho} = a \cdot \text{ grad } T + w_j \quad (2.16)$$

kde druhý člen pravé strany rovnice (2.16) představuje vnitřní zdroj, tedy Joulovy ztráty. [9]

### 2.2.4 Součinitel přestupu tepla konvekcí

Tento součinitel přestupu tepla prouděním je množství tepla, které se předá mezi kapalinou a jednotkou plochy stěny za jednotku času. Přičemž teplotní rozdíl mezi stěnou a kapalinou je 1 K. Součinitel přestupu tepla značíme  $\alpha$  [ $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ ] a nabývat může různých hodnot podle druhu proudění. Součinitel přestupu tepla  $\alpha$  určuje intenzitu výměny tepla mezi rozhraním kapaliny a povrchem stěny. Čím je součinitel vyšší, tím intenzivněji dochází k výměně tepla. Pro správné vyjádření proudění je nezbytné správně určit hodnotu součinitele přestupu tepla  $\alpha$ . Matematicky lze součinitel přestupu tepla stanovit pomocí Newtonova zákona I. a Fourierova zákona jako:[9]

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_{\text{tekutiny}} - T_{\text{povrchu}}} * \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right) \quad (2.17)$$



### 2.3 Sdílení tepla sáláním

Další možností sdílení tepla je sálání, někdy označováno jako radiace. Energie tepelného záření je, stejně jako jiné druhy záření, přenesená elektromagnetickými vlnami, šířící se v průzračném prostředí přímočaře rychlostí světla  $c$  všemi směry. Pomocí vlnové teorie lze určit rychlost záření jako:

$$c = f \cdot \lambda \quad [m/s] \quad (2.18)$$

$\lambda$  [m].....vlnová délka

$f$  [Hz].....kmitočet

$c$  [m/s].....rychlost světla

Těleso, s teplotou vyšší než-li je absolutní nula, vyzařuje do okolí svým povrchem tepelnou energii do okolí, ale současně přijímá vyzařovanou energii od jiných těles. Nakonec je zářivá energie pohlcena neprůzračnými tělesy, kde dojde k přeměně na tepelnou energii. Součtem vyzařené a pohlcené energie je těleso zahříváno, či ochlazováno.

Rozhraní, odrážející všechny paprsky, nazýváme absolutně bílé. Rozhraní, které naopak všechny dopadající paprsky pohlcuje, je absolutně černého. Skutečné povrchy těles nejsou ani absolutně bílé, ani absolutně černé a z fyzikálního hlediska takové povrchy označujeme za povrchy šedé.

Materiál může mít 3 vlastnosti:

- Pohltivost - těleso pohltí tepelné záření a zvýší tím svou teplotu. Vlivem záření se částice v materiálu pohybují rychleji a zahřívají těleso

$$A = \frac{\text{pohlcené záření}}{\text{celkové dopadající záření}} = 0 \div 1 \quad (2.19)$$

- Odrazivost - těleso odrazí veškeré tepelné záření

$$B = \frac{\text{odražené záření}}{\text{celkové dopadající záření}} = 0 \div 1 \quad (2.20)$$

- Propustnost - těleso propustí tepelné záření skrz materiál bez toho, aby došlo k pohlcení záření

$$C = \frac{\text{propuštěné záření}}{\text{celkové dopadající záření}} = 0 \div 1 \quad (2.21)$$

Podle zákona zachování energie musí pro poměrné hodnoty A, B, C platit, že:

$$A + B + C = 1 \quad (2.22)$$

Absolutně bílá tělesa mají poměrnou absorpci A rovnu nule a poměrnou reflexi B rovnu jedné. Naopak je tomu u absolutně černého tělesa. U neprůzračných těles je poměrná propustnost C rovna nule. [9]

### 2.3.1 Stefan-Boltzmannův zákon

Na základě měření bylo zjištěno, že vztah pro úhrnnou zářivost absolutně černého tělesa je daný:

$$E_{\zeta} = \sigma_{\zeta} \cdot \theta^4 \quad [W/m^2] \quad (2.23)$$

$\sigma_{\zeta}$  [ $W/m^2 \cdot K^4$ ]...Stefanova-Boltzmannova konstanta (součinitel sálání černého tělesa), jež má hodnotu  $\sigma_{\zeta} = 5,76 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$ .

$\theta$  [K].....Termodynamická teplota, obvykle má hodnotu  $\theta = T + 273^{\circ}C$

Reálná tělesa, tzv. šedá tělesa, nevyzařují stejné množství energie v porovnání s černým tělesem a proto pro ně platí:

$$E_{\zeta} = \varepsilon \cdot \sigma_{\zeta} \cdot \theta^4 \quad [W/m^2] \quad (2.24)$$

$\varepsilon$  [-].....součinitel sálání, se získá jako poměr součinitele sálání šedého tělesa a součinitele sálání absolutně černého tělesa. [1,3,7]

### 2.3.2 Planckův zákon

Planckův zákon vyjadřuje zákon pro záření absolutně černého tělesa, který je dán hustotou intenzity vyzařování černého tělesa v závislosti na vlnové délce  $\lambda$  a absolutní teplotě  $\theta$ . Planckův zákon lze vyjádřit jako:[1,3,7]

$$E_{\lambda, \zeta} = \frac{c_1}{\lambda^5 [e^{\frac{c_2}{\lambda \cdot \theta}} - 1]} \quad [W/m^3] \quad (2.25)$$

Kde:

$$c_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} [W/m^2]$$

$$c_2 = 1,438 \cdot 10^{-2} [m \cdot K]$$

### 2.3.3 Wienův zákon

Tento zákon říká, že vlnová délka, kterou těleso vyzařuje ve formě elektromagnetického záření, je závislá na teplotě tělesa a platí pro to vztah:

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{\theta} \quad [\mu m] \quad (2.26)$$

Z rovnice (2.26) vyplývá, že vlnová délka je nepřímo úměrná termodynamické teplotě tělesa. Tedy pro vyšší teplotu tělesa  $\theta$ , bude vlnová délka vyzařovaného záření kratší. [1,3,7]

## 2.4 Teplotní pole

Výskyt elektromagnetického pole v různých materiálech a médiích vede ke změnám jejich teplot. Teplo v různých částech zkoumaného systému je obvykle produkováno jako důsledek Joulových ztrát, magnetizačních ztrát a ztrát v dielektriku. Teplo (z různých externích zdrojů) může být také dodáváno do vybraných částí systému prouděním nebo zářením. Na druhé straně, teplo může také být vyváděno mimo systém stejnými mechanismy. Konečné rozdělení teploty v systému, je pak dáno celkovou tepelnou bilancí respektující oba aspekty.

### 2.4.1 Základní úvahy

Teplota  $T$  v systému, který vyšetřujeme, je obecně funkcí polohy a času. Z tohoto důvodu obvykle píšeme  $T = T(\mathbf{r}, t)$ , kde  $\mathbf{r}$  znamená pozici vektoru a  $t$  označuje čas. Samozřejmě jednotlivé složky tohoto vektoru  $\mathbf{r}$  mohou také být funkcí času  $t$ . Základní veličinou charakterizující teplotní pole je tepelný tok  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ . Tento vektor představuje množství tepla procházející jednotkou plochy za jednu sekundu. V daném bodě je definován vztahem

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad } T(\mathbf{r}, t) \quad (2.27)$$

kde  $\lambda$  je tepelná vodivost média v daném místě. To znamená, že vyjadřuje schopnost materiálu nebo prostředí přenášet teplo. Ve zvláštních případech může být považována za konstantní, ale u mnoha materiálů a médií je funkcí teploty  $T$  a může se měnit od jednoho místa k druhému.

Další veličina hraje důležitou roli při teplotních úvahách a jedná se o měrnou tepelnou kapacitu materiálu  $c$ . Ta poskytuje informace o tom, kolik tepla je třeba dodat do jednoho kilogramu materiálu tak, aby se jeho teplota zvýšila o 1 stupeň Celsia (nebo Kelvina).

Rozlišujeme dva druhy měrné tepelné kapacity: tepelná kapacita při konstantním tlaku  $c_p$  a tepelná kapacita při konstantním objemu  $c_v$ .

### 2.4.2 Rovnice pro přestup tepla

Teplo  $Q$  dodávané do tělesa o hmotnosti  $m$  a měrné teplo při konstantním tlaku  $c_p$ , jehož teplota se zvýšila z hodnoty  $T_1$  na hodnotu  $T_2$  je vyjádřena vzorcem:

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) \text{ [J]} \quad (2.28)$$

Bohužel zajistit, rovnoměrné zvýšení teploty tělesa v praktických aplikacích je poměrně nemožné. Více obvyklý případ je, že konečná teplota  $T_2$  se liší od jednoho bodu k druhému. Zde musíme použít pro výpočet tepla jiné vyjádření ve tvaru:

$$Q = \int_V \rho c_p (T_2 - T_1) dV \text{ [J]} \quad (2.29)$$

kde  $\rho$  je hustota a  $V$  značí objem tělesa. Oba parametry  $\rho$  a  $c_p$  jsou obecně funkcí teploty. Nyní je možné odvození rovnice přestupu tepla, který představuje hlavní parciální diferenciální rovnice popisující prostorové a časové rozložení teplotního pole. Budeme vycházet z rovnováhy sil v elementárním objemu  $V_e$  vyšetřovaném definičním oboru, který obsahuje tepelně vodivý materiál.

$$P(t) = \frac{dQ(t)}{dt} + P_i(t) \text{ [W]} \quad (2.30)$$

Kde  $P(t)$  označuje výkon dodávaný od tepelných zdrojů v objemu  $V$ . Tento výkon může být stanovený integrací objemového výkonu  $p(\mathbf{r}, t)$  přes celý objem.

$$P(t) = \int_V p(\mathbf{r}, t) dV \text{ [W]} \quad (2.31)$$

Tento výkon se skládá ze dvou částí, jak vyplývá z pravé strany v rovnici (2.30). První z nich,  $dQ(t)/dt$ , označuje časovou změnu vnitřní energie  $U$  v objemu  $V$ , zatímco druhá,  $P_i(t)$ , představuje teplo, které prochází přes hranice  $S$  o objemu  $V$ , tedy přímo přispívá k oteplení. Za účelem posouzení první části je nutné mírně upravit rovnici (2.29):

$$Q(t) = \int_V \rho c_p (T_{(r,t)} - T_1) dV \quad (2.32)$$

Takže

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \int_V \rho c_p (T_{(r,t)} - T_1(r)) dV \right] = \int_V \frac{d}{dt} [\rho c_p (T_{(r,t)} - T_1(r))] dV \quad (2.33)$$

Za předpokladu, že veličiny  $\rho$ ,  $c_p$  a  $T_1$  nejsou funkcí času, dostaneme

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \rho c_p \frac{dT(\mathbf{r}, t)}{dt} dV \quad (2.34)$$

Celkový tepelný tok  $Q(t)$ , který prochází hranicí  $S$ , může být určen z tepelného toku  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  integrovaným přes tuto hranici.

$$P_i(t) = \oint_S \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.35)$$

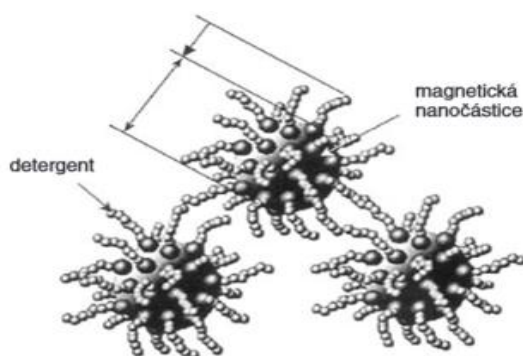
Dosazením (2.31), (2.34) a (2.35) do (2.30) můžeme okamžitě získat

$$\int_V p(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \rho c_p \frac{dT(\mathbf{r}, t)}{dt} dV + \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.36)$$

### 3 Magnetické kapaliny a inkoustové barvy

#### 3.1 Základní vlastnosti nanočástic

Magnetické kapaliny, které je možné nazývat také jako koloidní ferokapaliny, ferrofluida, nebo nanokompozitní magnetika, byly v 60. letech dvacátého století vyvinuty v NASA, kde se využívaly v kosmických raketách pro řízení toku tekutého paliva v beztlížném stavu pomocí magnetického pole. Magnetické kapaliny jsou vlastně suspenze velmi jemných feromagnetických částic obsažené v nosné kapalině. Tvar těchto částic je přibližně kulový a průměr se pohybuje řádově v nanometrech ( $10^{-9}$  m), obvykle se jedná o 3 až 15 nm, a z toho důvodu se tedy nazývají nanočástice. Nanočástice je možné zobrazit pomocí elektronového mikroskopu. Nanočástice jsou obvykle z práškového železa nebo z látky obsahující ionty  $Fe_{2+}$  či  $Fe_{3+}$  jako jsou oxid železa – magnetit  $Fe_3O_4$  nebo maghemit, feritu, niklu aj. Každá nanočástice je tvořena Weissovou doménou se spontánní magnetizací, to znamená, že nanočástice má magnetický moment, čili jedná se o jakýsi miniaturní permanentní magnet. Jsou-li nanočástice obsažené v nosné kapalině jako je např. syntetický nebo minerální olej, tak se pohybují neuspořádaným náhodným tepelným Brownovým pohybem. Není-li kapalina vystavena magnetickému poli, jsou magnetické momenty jednotlivých nanočástic náhodně orientovány a kapalina se jeví jako nemagnetická. Mechanické a chemické vlastnosti magnetické kapaliny určuje nosná kapalina, ovšem její magnetické vlastnosti ovlivňují

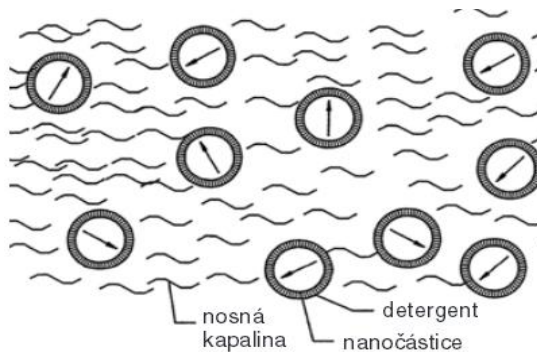


Obr. 3.1 Struktura magnetických nanočástic

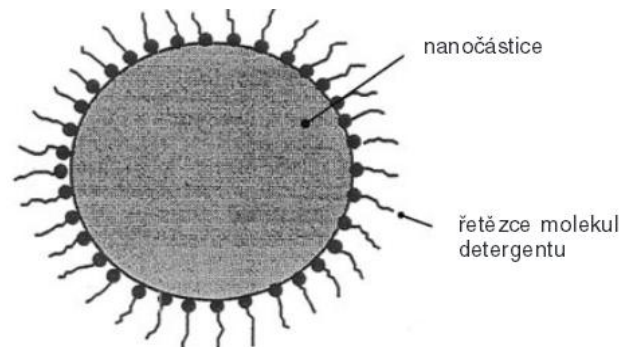
Zabraňuje se tomu tak, že jednotlivé nanočástice jsou potaženy ochranným polymerním obalem, který se nazývá detergent, což je povrchově aktivní látka, která znemožňuje přímý kontakt mezi nanočásticemi. Tato povrchově aktivní látka je tvořena dlouhými řetězci polárních molekul. Každý řetězec je pevně spojen s magnetickou nanočásticí svým jedním koncem a svým druhým koncem, tzv. ocasem, je přitahován molekulami nosného média. Samotná délka řetězce se pohybuje kolem 1 až 2 nm. Vrstva povrchově aktivní látky

samotné nanočástice a jejich koncentrace. Koloidní stabilita magnetických kapalin je největším problémem pro průmyslové využití. Ferokapalina je koloidně stabilní, jestliže nedochází vlivem přitažlivých sil, tedy van derWalsových a magnetických sil mezi nanočásticemi ke vzájemnému shlukování jejich magnetických nanočástic.

(detergentu) vyvolá odpuzovací síly mezi nanočásticemi. Typická struktura magnetických nanočástic je zobrazena na *Obr. 3.1*. Samostatná nanočástice s polymerními řetězci je zobrazena na *Obr. 3.3*. Na *Obr. 3.2* můžeme vidět schematicky vyznačenou strukturu magnetické kapaliny. Bude-li působit na magnetickou kapalinu magnetické pole, tak



*Obr. 3.2 Model ferokapaliny bez působení magnetického pole*



*Obr. 3.3 Magnetická nanočástice s detergentovým filmem*

se její suspendované nanočástice budou polarizovat. To znamená, že se budou natáčet do směru magnetického pole. Magnetická kapalina se bude vtahovat do magnetického pole ve směru intenzity magnetického pole. Běžná magnetická kapalina obsahuje objemově 5 % pevných magnetických látek, 10 % povrchově aktivní látky (detergentu) a 85 % nosné kapaliny. Hodnota saturační magnetizace se může pohybovat asi kolem 1,3T a pracovní teplota zhruba od  $-100$  do  $200$  °C. U magnetických kapalin je magnetické indukce  $B$  na intenzitě magnetického pole  $H$  závislá stejně jako u feromagnetik. To znamená, že s rostoucí intenzitou magnetického pole  $H$  se magnetická indukce  $B$  blíží hodnotě stavu nasycení (saturace). Ferokapaliny mají relativně vysokou magnetickou susceptibilitu. S rostoucí teplotou ferokapaliny hodnota magnetické susceptibilitu  $\chi_m$  klesá. Pro Curieovu teplotu  $T_c$  ztrácí ferokapalina zcela své magnetické vlastnosti a platí:  $\chi_m = 0$ , čili pro relativní permeabilitu platí  $\mu_r = 1$ . Zatímco u feromagnetik je vždy Curieova teplota  $T_c < T_t$ , ( $T_t$  je teplota tavení). Tedy magnetické domény těchto látek ztrácejí vždy svojí spontánní magnetizaci ještě dříve, než se dostanou do kapalného stavu (pro železo platí:  $T_c = 770$  °C,  $T_t = 1535$  °C), ale ferokapaliny jsou neustále ve stavu kapalném. Magnetické pole výrazně ovlivňuje fyzikální vlastnosti ferokapalin. Jednou z vlastností, kterou magnetické pole ovlivňuje ferokapalinu, je zvýšení její viskozity, za předpokladu rostoucí intenzity magnetického pole  $H$ . Tento jev se nazývá magnetoviskózní jev. Ovšem vlivem detergentových řetězců zůstává ferokapalina tekutá i v silném magnetickém poli. Při změně magnetického pole se pohybuje odezva viskozity v řádu milisekund. Pro chování ferokapalin v magnetickém poli je také podstatný časový průběh magnetického pole. Je rozdíl, jestli na magnetickou kapalinu působí stejnosměrné pole, střídavé pole (působení je ovlivněno

frekvencí) a nebo pulzní pole. Ve střídavém magnetickém poli dochází vlivem hysterezních ztrát a ztrát vířivými proudy k jejich ohřevu při přemagnetování nanočástic, a tím také k ohřevu nosné kapaliny. Teplotní změny znehodnocují chemicky detergentové řetězce umístěné na povrchu nanočástic. Magnetické kapaliny se tedy vlivem teplotních změn postupně destabilizují a dochází ke koagulaci magnetických částic. Znamená to tedy, že životnost magnetických kapalin je silně závislá na teplotních změnách. Životnost magnetických kapalin se dá počítat na roky. Magnetické pole ovlivňuje i další vlastnosti magnetických kapalin, jako jsou například optické vlastnosti.

### 3.2 Výroba nanočástic

Koloidní magnetické kapaliny se mohou získat pouze synteticky, jelikož je v přírodě volně nenalezneme. Pro jejich výrobu již bylo vytvořeno několik technologických procesů a postupů, ale ty jsou většinou chráněny patenty. Jeden z nejstarších způsobů výroby ferokapalin je fyzikálně-chemický postup, který vychází z dlouhodobého mechanického drcení feromagnetických feritových částic. Tento proces drcení trvá až 1000 hodin za přítomnosti vhodného detergentového roztoku. Tento proces je označován také jako mokré mletí. Po procesu drcení následuje dále odstředivá separace hrubých částic.

Rychlejší výrobní technologie jsou ty, které vycházejí z různých fyzikálně-chemických postupů, např. na chemickém vylučování magnetických částic z roztoků železitých solí dále na elektrolýze či odpařování apod. Závěrečnou částí procesu chemické výroby magnetických kapalin je zase jejich čištění to znamená odstranění větších nanočástic a to pomocí sedimentace za působení nehomogenního magnetického pole nebo gravitace či odstředování a ředění z důvodu dosažení vhodné koncentrace nanočástic. Pro některé aplikace se používají ferokapaliny, obsahující suspenzi feromagnetických mikročástic, které mají rozměry asi 5  $\mu\text{m}$ . Velikost částic se pohybuje tedy v řádu mikrometrů a jsou tedy o tři řády větší, než nanočástice magnetických kapalin. Mikročástice na rozdíl od nanočástic jsou multidoménné, čili nejsou magneticky polarizovány, tudíž nemají magnetický moment jako nanočástice. Jejich suspenze v nosné kapalině se nazývá magnetoreologická kapalina. Při porovnání s magnetickými kapalinami obsahují mnohem větší podíl pevných látek. Od magnetických kapalin s nanočásticemi se liší hlavně tím, že při působení vnějšího magnetického pole se extrémně zvyšuje jejich viskozita, čímž kapaliny přicházejí o svou tekutost a ztuhnou. Tato vlastnost může být v mnoha aplikacích vítaná. Magnetoreologické



kapaliny ovšem nejsou stabilní. Jejich magnetické částice agregují a sedimentují, což jejich použitelnost v praxi omezuje.

### **3.3 inkoustová složení**

Nejjednodušší popis inkoustu je, že inkoust je kapalina nebo polotekutý materiál použitý pro psaní, kreslení nebo tisk. Lze jej také popsat jako koloidní systém jemných částic pigmentu rozptýleném v rozpouštědle. Pigment může, ale nemusí být barevný, a rozpouštědlo může být anorganická nebo organická. Kromě pigmentu, obsahují inkousty mnoho dalších složek jako jsou modifikátory pH, smáčedla pro zpomalení předčasného schnutí, polymerní pryskyřice, zvlhčující činidla, jako jsou povrchově aktivní látky pro kontrolu vlastností povrchu, biocidy potlačující houby a bakterie, které způsobují znečišťování inkoustu a zahušťovadla.

Více než 90 procent inkoustů jsou tiskařské inkousty, ve kterých se barva předává více pomocí pigmentu, než pomocí barviva používaném spíše v inkoustech na psaní. Pigmenty jsou obecně nerozpustné, zatímco barviva jsou rozpustná.

U tiskařské barvy jde především o přípravu disperze částic pigmentu, které se nesmí usadit do shluků. Anorganické pigmenty můžeme snadno rozptýlit při použití minimální síly, ale většina organických pigmentů vyžaduje speciální mlecí techniky k produkci částic velikosti nižší, než jsou v mm, pro stabilní disperzi. Obecně barva inkoustu vzniká z organických pigmentů, kde velikost částic pigmentu upravuje intenzitu barev. Mletí se provádí ve dvou etapách: primární míchání se provádí v běžném mixéru a výsledná před-směs se podrobí sekundárnímu drcení v kulovém mlýnu nebo válcovém mlýnu. Po primárním míchání se přidávají chemické látky zvané dispergační nebo mlecí pomůcky, aby se zabránilo jemným pigmentovým částicím rozptýlit se během mlecí fáze. Správná volba disperzních činidel, spolu se správnou mlecí technikou, je klíčem k získání stabilní disperze.

### **3.4 Složení inkoustů do tiskáren na vodní bázi**

#### **3.4.1 Voda**

Voda je hlavní složkou inkoustu a také základ, na kterém vše závisí. Takže je nutné nejprve zajistit, aby voda používaná při tisku byla tak čistá, jak je to jen možné. Velmi vysoká kvalita vody se všemi ostatními přísadami slouží k zajištění spolehlivého tisku pro spotřebitele. Prvním krokem k dosažení tzv. "čisté" vody je použití deionizované vody.

Dalším krokem jsou různé uhlíkové filtrace či UV záření sloužící k odstranění nečistot a dosažení "čisté" vody. Pro zajištění vysoké kvality vodní složky inkoustových barev se používá kontrola pomocí měření vodivosti, která odhalí případné nečistoty obsažené ve vodě.

### 3.4.2 Barvicí prostředky

Barvicí prostředek jsou buď barviva nebo pigmenty. Oba typy těchto barvicích prostředků jsou průmyslově a komerčně dostupné v mnoha variantách a jakostí od různé škály dodavatelů. Výběr barviva je založen na výkonových požadavcích inkoustu. Barviva většinou mají vyvážené PH a bývají ošetřeny reverzní osmózou obsahující biocidní prostředky a fungicidy.

### 3.4.3 Pomocná rozpouštědla a smáčedla

Pomocná rozpouštědla a smáčedla (alkoholy a glykoly), jsou obvykle přidány do barvy jako další nosiče pro barvivo. Mohou být rovněž použity pro kontrolu nebo omezení odpařování inkoustu. Většina glykolů jsou hygroskopické, což znamená, že mohou odstranit vlhkost ze vzduchu. Vzhledem k tomu, že kazety a tiskové hlavy používané v kanceláři (stolní tiskárny) jsou navrženy tak, aby "pracovaly na vyžádání", tak inkousty jsou vystaveny otevřenými otvory do atmosféry a může dojít k odpařování vody z inkoustu prostřednictvím těchto otvorů. Vzhledem k tomuto odpařování se mohou vlastnosti inkoustu mírně měnit, včetně jeho viskozity nebo úroveň koncentrace materiálů v inkoustu (méně vody, více barviva, více povrchově aktivních látek, ...). Stabilizátory vlhkosti snižují odpařování vody v otvorech a tím i snížení neprůchodnosti tiskové hlavy vyplývající z odpařování. Smáčedla jsou obvykle testována na viskozitu, povrchové napětí a relativní hustoty.

### 3.4.4 Fixační a penetrační materiály

Jako fixační či penetrační materiál může být použito mnoho materiálů. Důležité však je, aby tato látka usnadnila přenos inkoustu do substrátu a do určité míry, aby tato složka držela inkoust na substrátu a zabraňovala jeho vzlínání. Fixační či penetrační materiály musí být přidávány v přesném množství, aby bylo zajištěno, že inkoust nebude prostupovat do substrátu příliš rychle, což by například u papíru mohlo způsobit prosáknutí barvy papírem.

### 3.4.5 Povrchově aktivní látka (Surfactant)

Povrchově aktivní látky se přidávají k úpravě povrchového napětí výsledného inkoustu. V případě, že povrchové napětí inkoustu je příliš vysoké, pak inkoust není správně vlhký a nedojde ke správnému tisku. Může dojít k sporadickému tisku nebo špatnému pronikání na substrát, či prodloužení doby schnutí inkoustu na substrátu. V případě, že povrchové napětí inkoustu je příliš nízké, může inkoust vytékat ze zásobníku a způsobit zaplavení tiskové hlavy či jiných otvorů v průběhu používání. Nízké povrchové napětí může také způsobit, že při tisku dochází k nadměrnému vzlínání na některých substrátech a výsledný obraz bude rozmazaný. To znamená, že povrchově aktivní látka musí pracovat v kombinaci s penetračními nebo fixačními materiály obsažených v inkoustu. Inkoust musí cestovat z kazety (cartridge) účinně a tisknout rovnoměrně. Jakmile je na podkladu, musí být rychle absorbován do materiálu, ale ne tak, že se prosákne na druhou stranu.

### 3.4.6 Pryskyřice

Pryskyřice se přidávají, aby zvýšily "trvanlivost" tištěného obrazu. Jakmile dojde k oschnutí inkoustu na substrátu, pryskyřice dodává inkoustu odolnost proti otěru. Tento efekt není vždy nutný, ale je možný. Je třeba kontrolovat trysky, protože pryskyřice může způsobit neprůchodnost otvorů, jelikož se v trysce vytváří "film" který poté způsobuje vady v tisku.

### 3.4.7 Biocidy / Fungicidy

Vzhledem k tomu, že inkousty jsou na bázi vody a mohou být skladovány po dlouhou dobu, tak se do inkoustu přidávají biocidy a fungicidy k eliminaci růstu bakterií a plísní. Biocidy a fungicidy neovlivňují ostatní vlastnosti barvy, jako je pH a povrchové napětí a celkový výkon inkoustu zůstává stejný.

### 3.4.8 Buffering agent a další přísady

Tyto materiály se používají pro řízení konkrétní vlastnosti inkoustové barvy. Například některé barvy vyžadují kontrolu pH z důvodu dlouhodobého skladování, takže je potřeba "Buffering agent" pro udržení požadovaného rozsahu. Mezi další vlastnosti patří například odolnost proti korozi.

Běžné zastoupení (v procentech) jednotlivých složek či komponentů obsažených v inkoustových barvách je znázorněno v Tabulka 1.

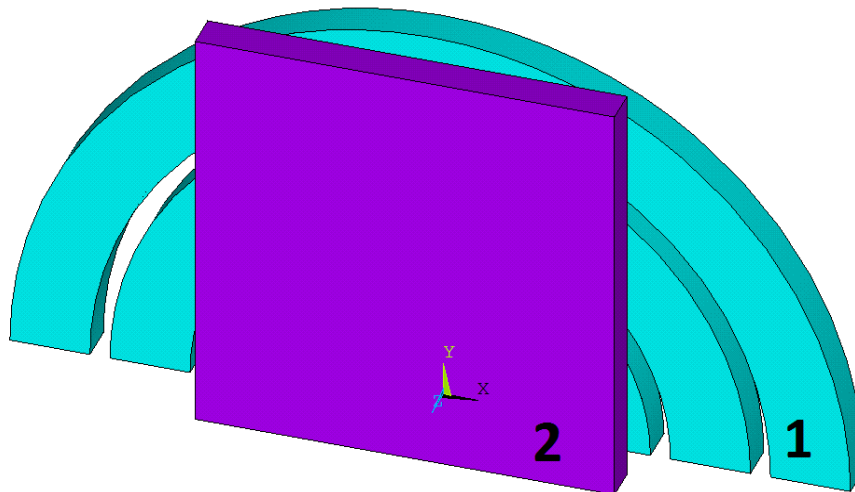
Tabulka 1 - Zastoupení jednotlivých složek v inkoustových barvách

| <b>Pří sada (komponent)</b>          | <b>Objemové zastoupení v %</b> | <b>funkce</b>   |
|--------------------------------------|--------------------------------|---|
| Voda                                 | 50 - 90                        | Rozpouštědlo  |
| Barvivo                              | 1 - 15                         | Barva inkoustu  |
| Pomocná rozpouštědla a smáčedla      | 2 - 20                         | Zabraňuje odpařování                                    |
| Fixační a penetrační materiály       | 0 - 10                         | Zadržují inkoust na substrátu a zabraňují vztlínání     |
| Povrchově aktivní látka (Surfactant) | 0,1 - 6                        | Ovlivňují povrchové napětí a smáčecí schopnost inkoustu |
| Pryskyřice                           | 0 - 10                         | Přilnavost, ochrana proti otěru                         |
| Biocidy                              | 0,02 - 0,4                     | Zabránění množení bakterií                              |
| Fungicidy                            | 0,05 - 1                       | Zabránit růstu hub                                      |
| Buffer                               | 0,05 - 1                       | Kontrola pH   |
| Další přísady                        | 0,01 - 1                       | Koroze, kontaminace, atd.                               |

## 4 Modely indukčního ohřevu

### 4.1 Podélné pole a pevná vodivá vsázka

První model indukčního ohřevu je reprezentován pomocí podélného magnetického pole. Tvar samotného induktoru je na *Obr. 4.1*. Samotný induktor je složen z vodiče obdélníkového průřezu a stočený do ploché spirály (označený jako **1**). Pro zjednodušení byla spirála nahrazena soustředěnými kružnicemi. Ohříváný materiál či vsázka je umístěna nad induktor (označena jako **2**). Princip ohřevu vsázky je naprosto shodný s indukčním ohřevem pomocí klasického induktoru tvaru dutého válce a vsázkou umístěnou uvnitř. Tzn., že induktorem protéká střídavý elektrický proud. Díky tomuto střídavému elektrickému proudu vznikne v okolí induktoru proměnné magnetické pole. Toto proměnné magnetické pole způsobí indukované proudy ve vsázce a ty působí proti změně magnetického pole, jenž proudy vyvolaly. Díky naindukovaným proudům ve vsázce se vsázka začne ohřívat vlivem působení Joulových ztrát, které se mění v teplo.



*Obr. 4.1 Model Induktoru a vsázky pro podélné elektromagnetické pole*

#### 4.1.1 Vznik Joulových ztrát ve vsázce

Pro zjednodušení budeme uvažovat tvar induktoru nikoliv jako spirálu, ale jako soustředěné kružnice. Samotnou vsázku, která by se měla skládat z nosného materiálu (inkoustu) a elektricky vodivých nanočástic, budeme pro začátek uvažovat jako jednu plnou elektricky vodivou destičku o rozměrech  $44/22/2 \mu\text{m}$ , která respektuje velikost nanočástice. Volba tloušťky materiálu je dána možnostmi technologie tisku nanočástic. Pro momentálně danou technologii tisku je maximální velikost tisknutelné nanočástice  $2 \mu\text{m}$  a proto byly i ostatní modely stavěny na tento rozměr.

Vycházet budeme z první Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru, kterou je možné napsat jako:

$$H * l = N * I \quad (4.1)$$

Kde H je velikost intenzity magnetického pole vybuzená efektivní hodnotou proudu I. N je počet závitů, kterými prochází efektivní hodnota proudu I a l je délka siločáry intenzity magnetického pole H. Z rovnice (4.1) lze tedy vyjádřit velikost intenzity magnetického pole a dosadit jí do rovnice pro výpočet Joulových ztrát pro které platí:

$$P_j = \frac{l}{2a\gamma} H^2 * S \quad [W] \quad (4.2)$$

Budeme-li uvažovat konstantní rozměry induktoru a vsázky a také materiálové vlastnosti, pak celkové ztráty lze ovlivnit velikostí efektivní hodnoty proudu, která je úměrná velikosti intenzity magnetického pole. Další možností, jak ovlivnit výsledné Joulovy ztráty je hloubka vniku a, pro kterou platí:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}} \quad [m] \quad (4.3)$$

Čili je patrné, že hloubku vniku a tím i celkové Joulovy ztráty je možné ovlivnit i použitou frekvencí proudu. Nicméně je nutné uvažovat, že část těchto Joulových ztrát se vlivem konvekce odvede okolním vzduchem, který obklopuje naši vsázku. Tyto ztráty konvekcí je možné určit jako:

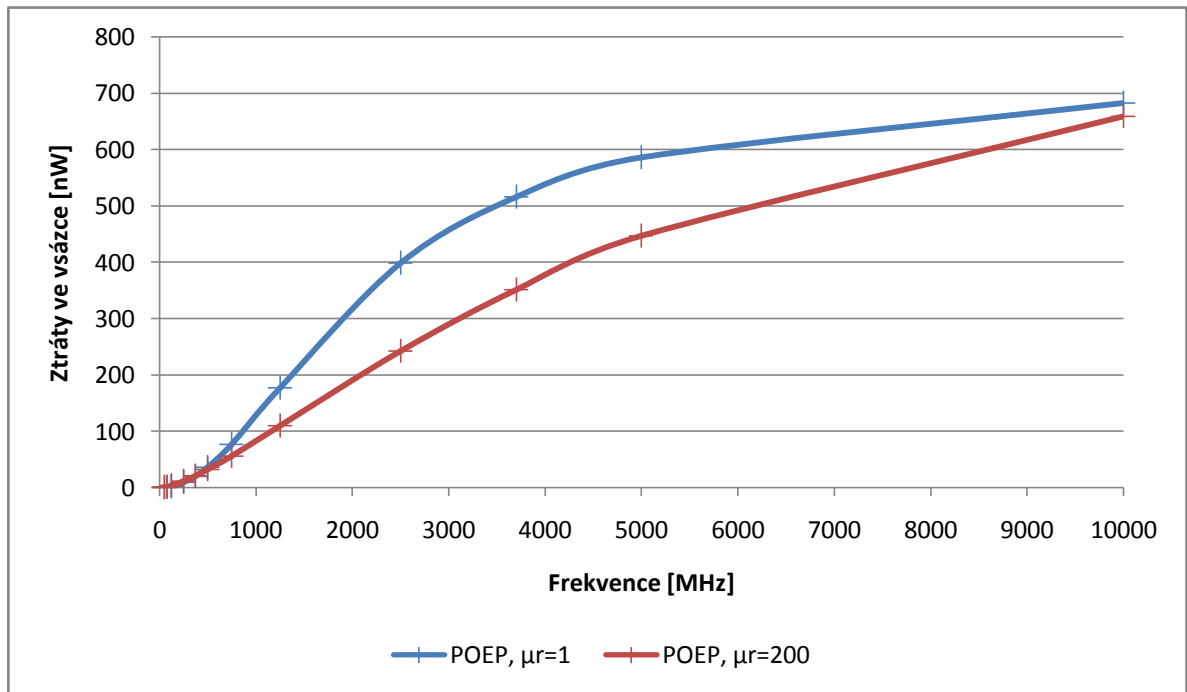
$$P_z = \alpha(T_p - T_o) * S \quad [W] \quad (4.4)$$

Ze zbylých ztrát je poté možné spočítat celkové teplo ve vsázce jako:

$$Q = P * t = m * c * \Delta T \quad [J] \quad (4.5)$$

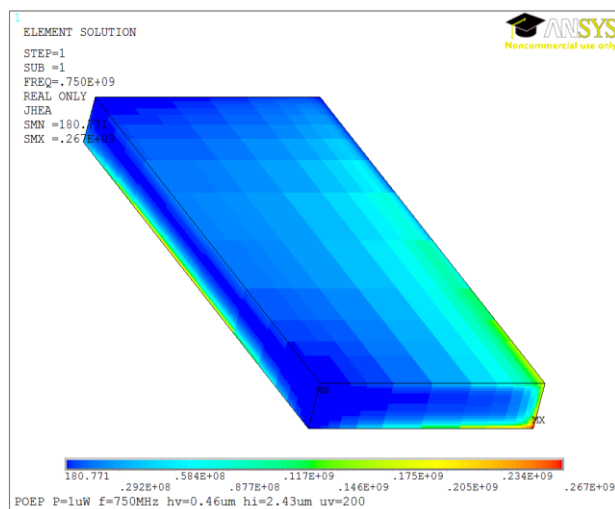
#### 4.1.2 Výsledky simulace

Níže zobrazený graf vyjadřuje závislost velikosti Joulových ztrát vzniklých v pevně elektricky vodivé vsázce v závislosti na použité frekvenci a při dvou různých relativních permeabilitách vsázky. Simulace byla provedena v programu ANSYS verze 14.5 a během všech simulací byl dodržen konstantní výkon zdroje  $P = 1 \mu W$ .

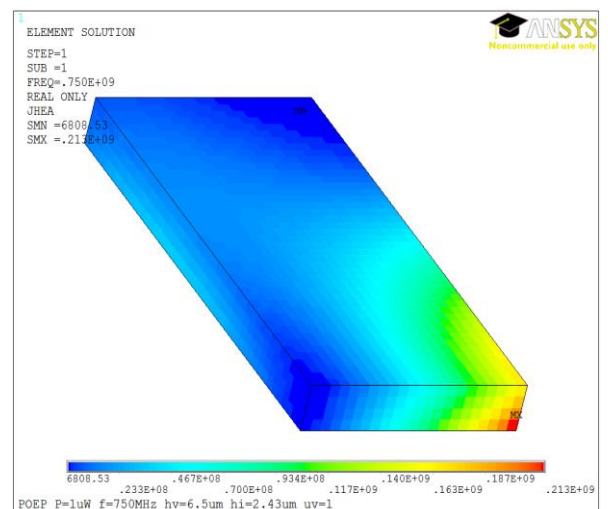


Obr. 4.2 Závislost Joulových ztrát ve vsázce na frekvenci při konstantním příkonu  $P = 1 \mu\text{W}$

Z grafu je patrné, že při použití podélného elektromagnetického pole, dochází k většímu vývinu Joulových ztrát při použití materiálů s relativní permeabilitou  $\mu_r = 1$ . K tomuto faktu dochází ovšem pouze při “nižších” frekvencích, řádově do 12 GHz. Poté dochází k většímu vývinu Joulových ztrát ve vsázce s vyšší relativní permeabilitou. Tento fakt je způsoben velikostí vsázky a působením skin efektu. Rozdíl ve vzniku Joulových ztrát je patrný z následujících obrázků.



Obr. 4.3 Rozložení Joulových ztrát při  $\mu_r = 200$

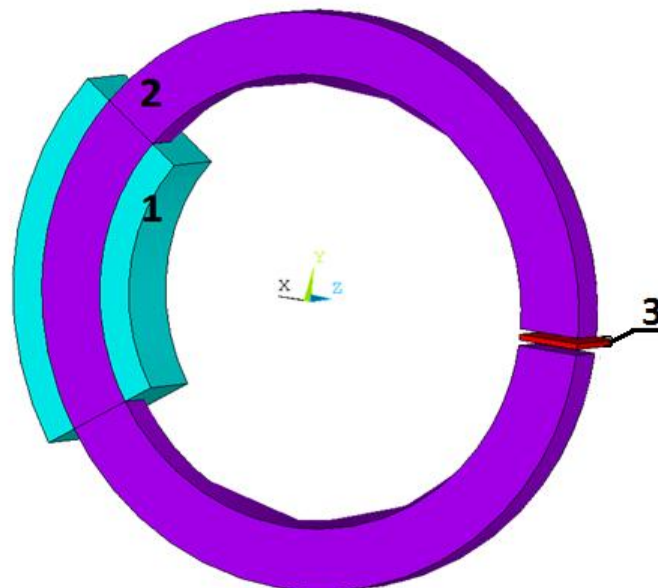


Obr. 4.4 Rozložení Joulových ztrát při  $\mu_r = 1$

*Obr. 4.3* a *Obr. 4.4* znázorňují Joulovy ztráty pro vsázku při  $\mu_r = 200$  a  $\mu_r = 1$  a frekvenci 750 MHz. Je zde krásně vidět vliv skin efektu, kdy pro  $\mu_r = 200$  je největší vývin tepla na povrchu vsázky v tenké šlupičce. Ovšem tyto celkové ztráty jsou menší jak ztráty ve vsázce pro  $\mu_r = 1$ . Zde se tolik neprojevuje vliv skin efektu a vsázka je sice ohřívána v jednom rohu, ovšem ohřev není povrchový, ale je zde prohříván i střed vsázky, což způsobí ve finále větší Joulovy ztráty. Ovšem mezním bodem je frekvence kolem 12 GHz, kdy se Joulovy ztráty vyrovnají a poté vzniká větší vývin ztrát pro vsázku  $\mu_r = 200$ .

## 4.2 Příčné pole a pevná vsázka

Druhý model pro indukční ohřev, jenž využívá příčné magnetické pole je na *Obr. 4.5*. Skládá se ze tří částí a to induktoru (1), magnetický obvod nebo jádro tvaru toroidu s obdélníkovým průřezem (2) a vsázka uvnitř vzduchové mezery magnetického obvodu (3). Bude-li induktorem protékat střídavý harmonický proud, tak se vytvoří proměnné magnetické pole, jenž se bude uzavírat magnetickým jádrem a i vzduchovou mezerou, ve které je umístěna vsázka, do níž se budou indukovat vířivé proudy, které budou působit proti změně magnetického pole, jenž proudy vyvolalo. Díky naindukovaným proudům ve vsázce se vsázka začne ohřívát vlivem působení Joulových ztrát, které se mění v teplo.



*Obr. 4.5 Model induktoru a vsázky pro příčné elektromagnetické pole*



#### 4.2.1 Vznik Joulových ztrát ve vsázce

Pro zjednodušení budeme opět uvažovat, že vsázka, která by se měla sestávat z nosného materiálu (inkoustu) a elektricky vodivých nanočástic, budeme uvažovat jako jednu plnou elektricky vodivou destičku o průměru jádra 80  $\mu\text{m}$  a rozměrech vsázky stejné jako v předchozím modelu, tedy 44x22x2  $\mu\text{m}$ , které respektují velikost nanočástice.

Vycházet můžeme opět z první Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru, musíme vzít v úvahu magnetický obvod a rovnici (4.1) upravit na tvar:

$$N * i = H_{Fe} * 2\pi * (r - \delta) + H * \delta \quad (4.6)$$

Kde  $r$  je poloměr jádra a  $\delta$  je velikost vzduchové mezery ve které je umístěna vsázka. Vezmeme-li v úvahu, že velikost magnetické indukce  $B$  je stejná jak v magnetickém obvodu, tak i ve vzduchové mezeře, pak můžeme psát:

$$H_{Fe} = \frac{H}{\mu_{rFe}} \quad (4.7)$$

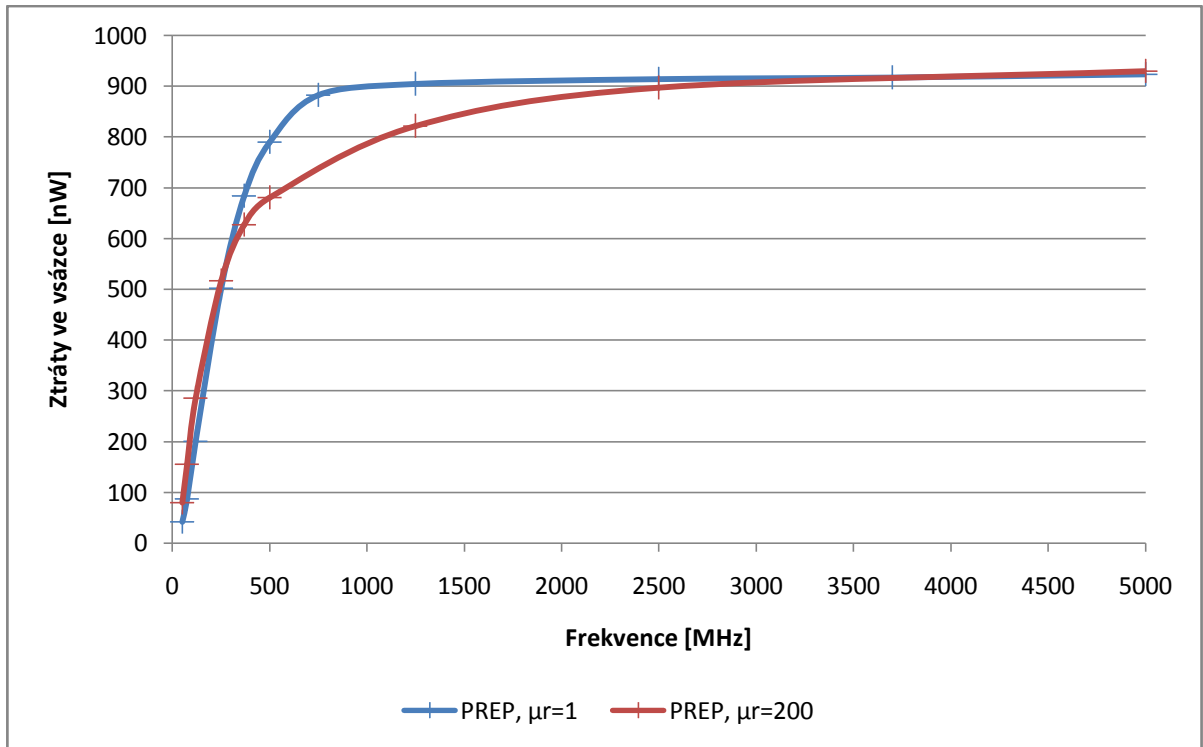
Dosazením do rovnice (4.6) dostaneme vztah pro intenzitu magnetického pole:

$$N * I = H \left( \frac{2\pi(r - \delta)}{\mu_{rFe}} + \delta \right) \quad (4.8)$$

Z rovnice (4.8) je tedy patrné, že velikost intenzity magnetického pole je možné ovlivnit jak počtem závitů a proudem, tak i rozměry magnetického obvodu. Dále by se postupovalo naprosto stejně jako v podélném poli.

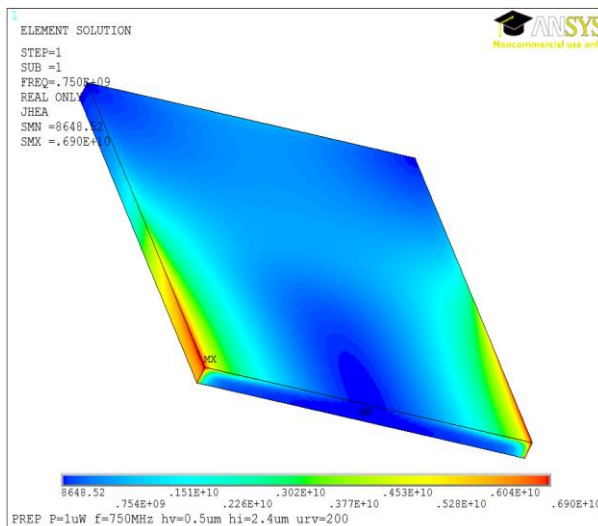
#### 4.2.2 Výsledky simulace

Níže zobrazený graf vyjadřuje závislost velikosti Joulových ztrát vzniklých v pevné elektricky vodivé vsázce v závislosti na použité frekvenci a při dvou různých relativních permeabilitách vsázky. Simulace byla provedena opět v programu ANSYS verze 14.5 a během všech simulací byl dodržen konstantní výkon zdroje  $P = 1 \mu\text{W}$ .

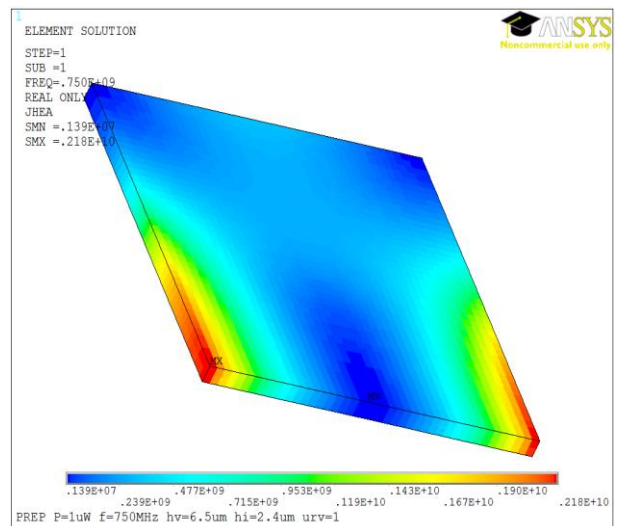


Obr. 4.6 Závislost Joulových ztrát ve vsázce na frekvenci při konstantním výkonu  $P = 1 \mu\text{W}$

Z grafu je patrné, že při použití příčného elektromagnetického pole, dochází zhruba ke stejnému vývinu Joulových ztrát při použití materiálů s rozdílnou relativní permeabilitou  $\mu_r$  pro frekvence do 500 MHz. Poté částečně převažovaly ztráty v materiálu s  $\mu_r = 1$ , ale pouze do frekvence 3,7 GHz. Následně začnou převažovat ztráty v materiálu s  $\mu_r = 200$ . Vzhledem k tomu, že výkon zdroje byl zvolen  $P = 1 \mu\text{W}$ , tak lze tvrdit, že případné odchylky ztrát jsou relativně zanedbatelné a je jedno jaká bude relativní permeabilita materiálu. Rozdíl ve vzniku Joulových ztrát s různou relativní permeabilitou je opět patrný z následujících obrázků.

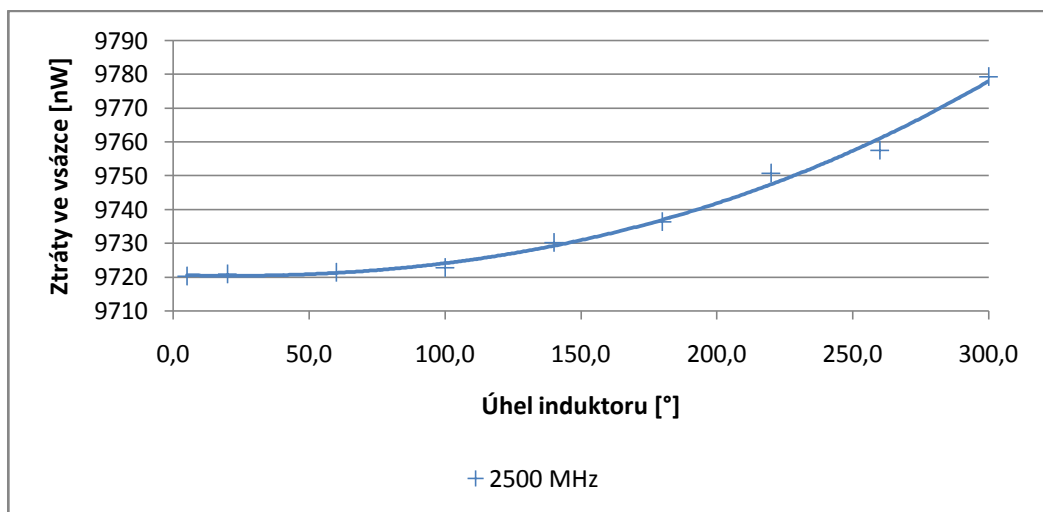


Obr. 4.7 Rozložení Joulových ztrát pro  $\mu_r = 200$



Obr. 4.8 Rozložení Joulových ztrát pro  $\mu_r = 1$

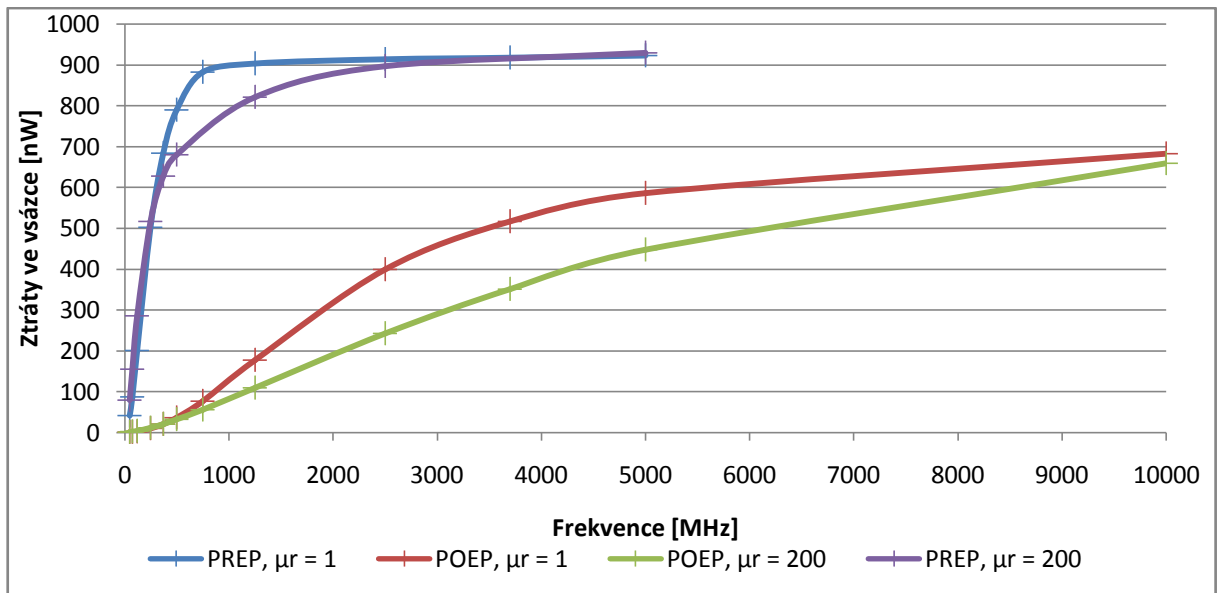
Obr. 4.7 a Obr. 4.8 znázorňují Joulovy ztráty pro vsázku při  $\mu_r = 200$  a  $\mu_r = 1$  a frekvenci 750 MHz. Je zde zřetelně vidět vliv skin efektu, kdy pro  $\mu_r = 200$  je největší vývin tepla na povrchu vsázky v tenké šlupičce. Ovšem tyto celkové ztráty jsou zhruba stejné jako ztráty ve vsázce pro  $\mu_r = 1$ , kde se tolik neprojevuje vliv skin efektu a vsázka je ohřívána od jedné strany směrem do středu vsázky. Ačkoliv z výše uvedených obrázků to není na první pohled patrné, tak vnitřní strana vsázky je ohřívána o něco více, než vnější strana vsázky. Tento fakt ovlivňuje samotná konstrukce induktoru, kdy čím je induktor blíže ke vsázce, tím více je vsázka ohřívána vlivem podélného elektromagnetického pole. Samotný nárůst ztrát není nikterak velký, jak dokazuje následující Obr. 4.9.



Obr. 4.9 Vliv úhlu induktoru na velikosti ztrát ve vsázce

### 4.3 Porovnání modelů s pevnou elektricky vodivou vsázkou

Jak je naznačeno na Obr. 4.9, úhel induktoru ovlivňuje celkové ztráty ve vsázce. Ovšem pro porovnání těchto dvou různých modelů bylo zapotřebí eliminovat jakékoliv nepříznivé vlivy, které by mohly ovlivnit samotné porovnání. Z toho důvodu byl v podélném poli nastaven úhel induktoru na  $4,8^\circ$ , aby se zaprvé omezil vliv podélné složky induktoru a zadruhé, aby ztráty v induktoru v příčném a podélném elektromagnetickém poli byly v ideálním případě stejné, což by zaručil úhel induktoru cca  $3^\circ$ . Ovšem takový úhel induktoru nebylo možné z konstrukčních možností nastavit. Stejně tak byl i dodáván do obou modelů stejný výkon zdroje  $P = 1 \mu\text{W}$ . Všechny tyto podmínky byly samozřejmě nastaveny a splněny i v předchozích kapitolách.

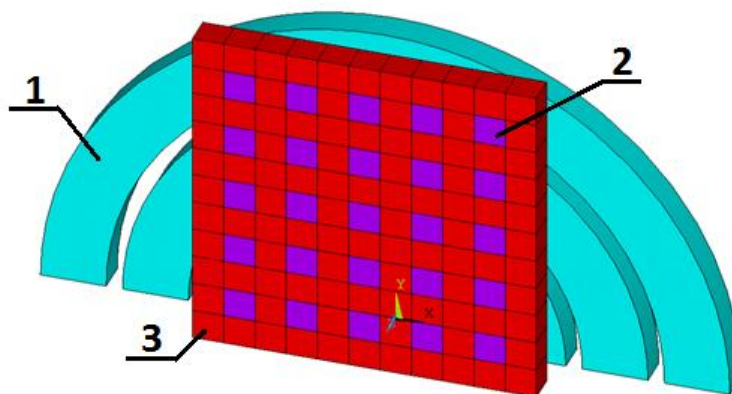


Obr. 4.10 Závislost Joulových ztrát ve vsázce v podélném a příčném elektromagnetickém poli

Z Obr. 4.10 je okamžitě patrné, že v příčném elektromagnetickém poli výrazně převažuje velikost Joulových ztrát ve vsázce v celém frekvenčním rozsahu a to i přesto, že simulace byly provedeny pouze do frekvence 5000 MHz. Vyšší frekvence bohužel nebylo možné simulovat. Je to dáno opět konstrukcí modelu, kdy pro vyšší frekvence bych musel změnit konstrukci induktoru a tím bych ovlivnil celkové rozložení Joulových ztrát.

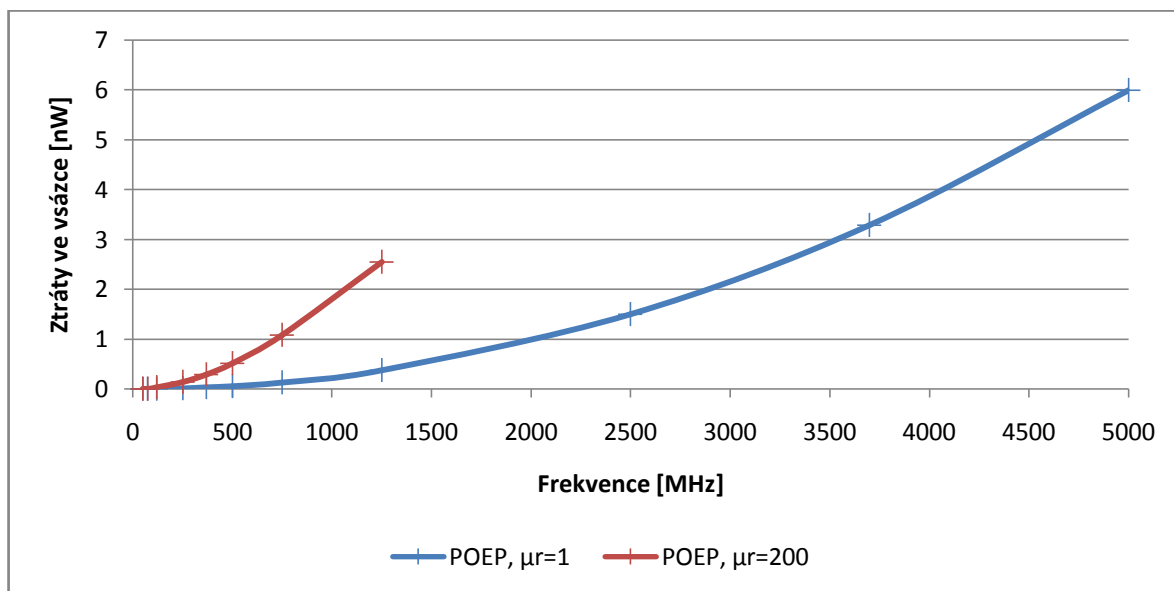
#### 4.4 Podélné pole a elektricky vodivá vsázka izolovaná kapalinou

Tento model vychází z předchozího modelu zobrazeného na Obr. 4.1. Jediný rozdíl je v tom, že vsázka o stejných rozměrech v předchozím případě ( $44 \times 22 \times 2 \mu\text{m}$ ) byla nahrazena jednotlivými elektricky vodivými kostičkami, které od sebe byly izolovány elektricky nevodivou barvou či kapalinou. Model induktoru v polovičním řezu je zobrazen na Obr. 4.11.



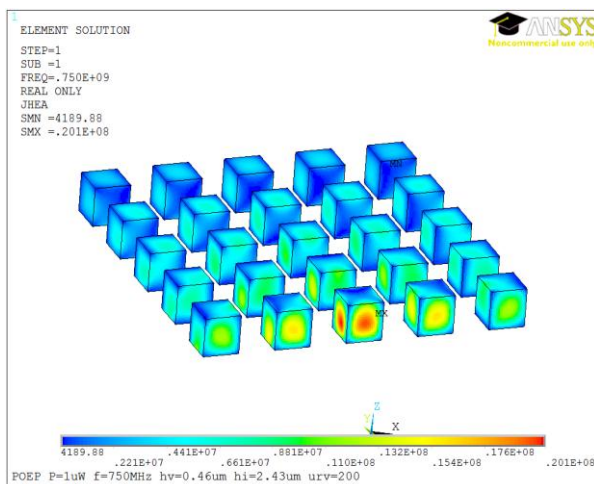
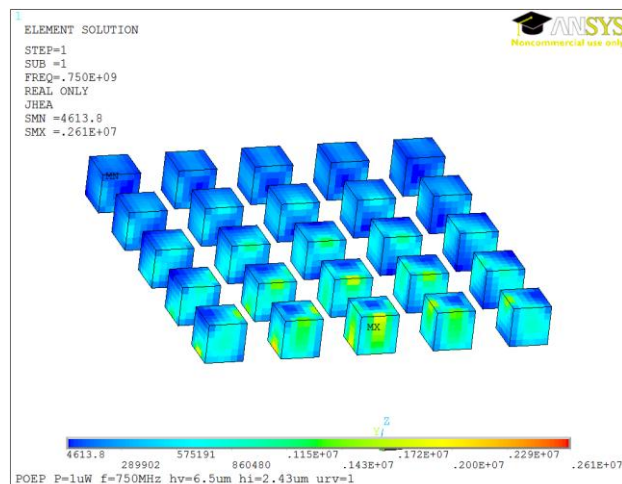
Obr. 4.11 Model induktoru a vsázky s kapalinou obsahující nanočástice v podélném poli

Tento model již lépe respektuje skutečnost indukčního ohřevu barvy nebo kapaliny, která v sobě obsahuje určitý podíl elektricky vodivých nanočástic. Světle modrá barva (1) představuje induktor, červená barva (3) představuje barvu nebo kapalinu a fialová barva (2) představuje elektricky vodivé nanočástice. Rozměr jedné kostičky je  $2 \times 2 \times 2 \mu\text{m}$ . Podíl elektricky vodivých nanočástic k objemu celé vsázky je 20,6 %. Princip vzniku Joulových ztrát je opět totožný, jako v předchozím případě, jen s tím rozdílem, že se očekávají menší ztráty ve vsázce, než v případě celé elektricky vodivé vsázky, což dokazuje následující obrázek.



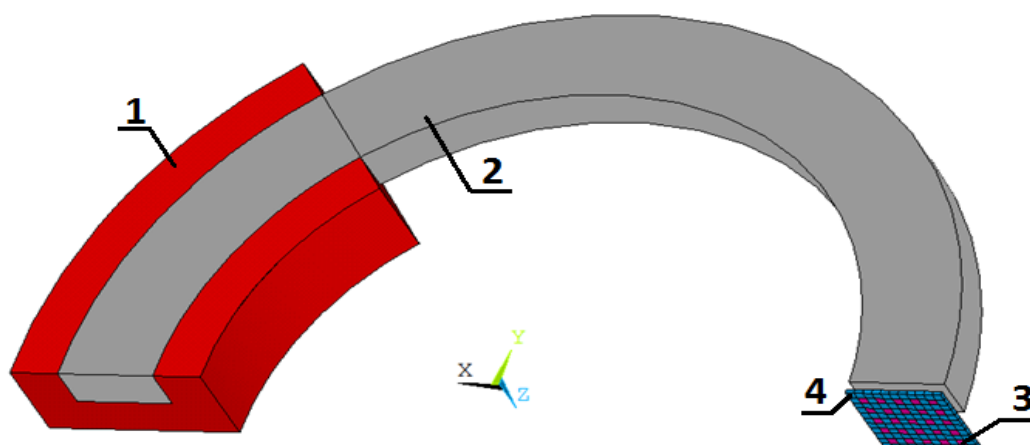
Obr. 4.12 Závislost Joulových ztrát ve vsázce na frekvenci při konstantním výkonu  $P = 1 \mu\text{W}$

Z Obr. 4.12 je zřejmé, že již od začátku frekvenčního spektra je větší vývin Joulových ztrát ve vsázce s vyšší relativní permeabilitou. Co se velikosti ztrát týká, tak jsou samozřejmě menší z důvodu menšího obsahu elektricky vodivé vsázky. Důvod proč jsou nyní větší Joulovy ztráty pro vsázku s  $\mu_r = 200$  je ten, že jednotlivé vodivé elementy jsou mnohem menší v případě jedné vodivé vsázky a tudíž hned od začátku se projevuje vliv skin efektu, kdy proudová hustota je vytlačována na povrch vodivé kostičky. Na obrázku níže je zobrazeno rozložení Joulových ztrát v elektricky vodivé vsázce. Barva není zobrazena, jelikož se do ní nic neindukuje a tudíž v ní žádné ztráty nevznikají. Je zde možné sledovat vliv skin efektu a tudíž větší vývin Joulových ztrát a to hlavně na kostičce v dolní řadě uprostřed, kde je největší koncentrace intenzity magnetického pole. Také je možné sledovat, že každá kostička má ohřívání jiné stěny. Tento fakt je způsoben pronikáním intenzity magnetického pole do jednotlivých kostiček.

Obr. 4.13 Rozložení Joulových ztrát pro  $\mu_r = 200$ Obr. 4.14 Rozložení Joulových ztrát pro  $\mu_r = 1$ 

## 4.5 Příčné pole a elektricky vodivá vsázka izolovaná kapalinou

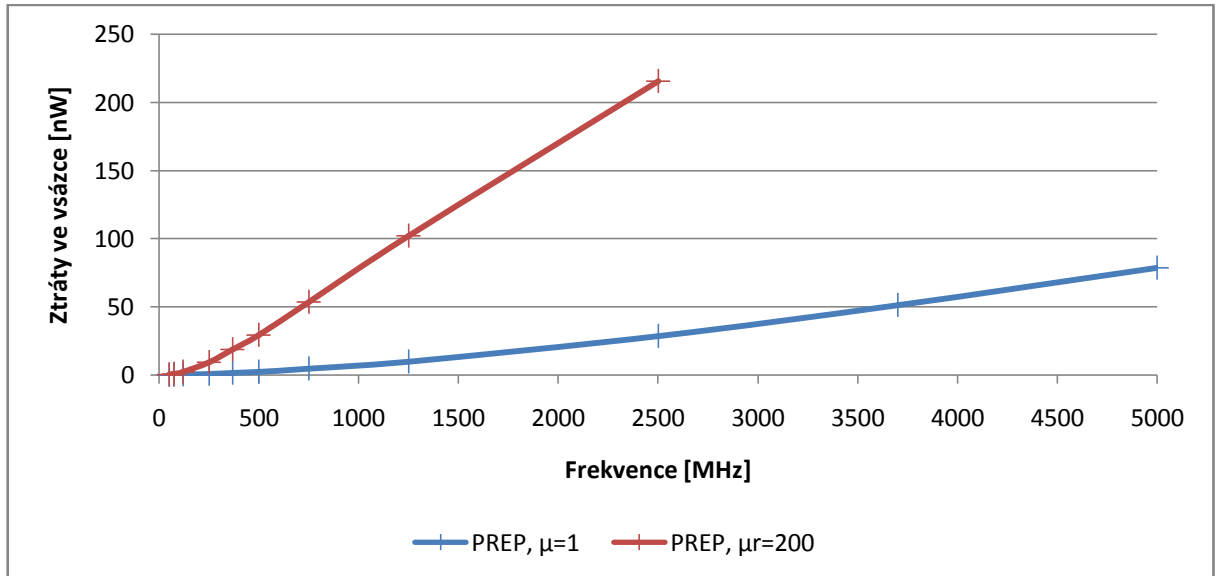
Tento model vychází z předchozího modelu zobrazeného na Obr. 4.5. Jediný rozdíl je v tom, že vsázka o stejných rozměrech v předchozím případě ( $44 \times 22 \times 2 \mu\text{m}$ ) byla nahrazena jednotlivými elektricky vodivými kostičkami, které od sebe byly izolovány elektricky nevodivou barvou či kapalinou. Model induktoru se vsázkou ve čtvrtinovém řezu je zobrazen na Obr. 4.15.



Obr. 4.15 Model induktoru a vsázky s kapalinou obsahující nanočástice

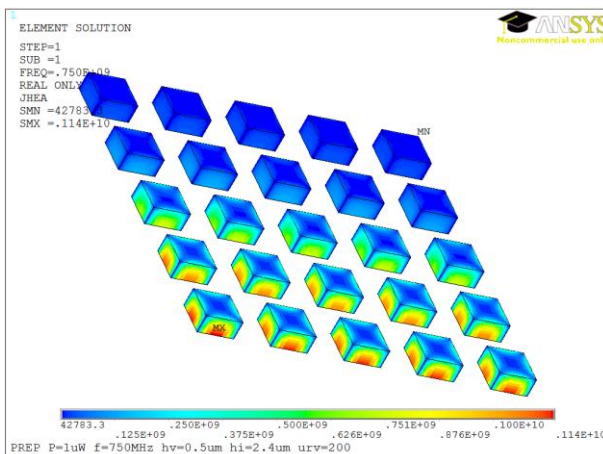
Tento model již lépe respektuje skutečnost indukčního ohřevu barvy nebo kapaliny v příčném elektromagnetickém poli, která v sobě obsahuje určitý podíl elektricky vodivých nanočástic. Červená barva (1) představuje induktor, šedá barva (2) znázorňuje jádro, modrá barva (4) představuje barvu nebo kapalinu a růžová barva (3) představuje elektricky vodivé nanočástice. Rozměr jedné kostičky je opět  $2 \times 2 \times 2 \mu\text{m}$ . Podíl elektricky vodivých nanočástic k

objemu celé vsázky je stejný jako v podélném poli, čili 20,6 %. Princip vzniku Joulových ztrát je opět totožný, jako v předchozím případě, jen s tím rozdílem, že se očekávají menší ztráty ve vsázce, než v případě celé elektricky vodivé vsázky, což dokazuje následující obrázek.

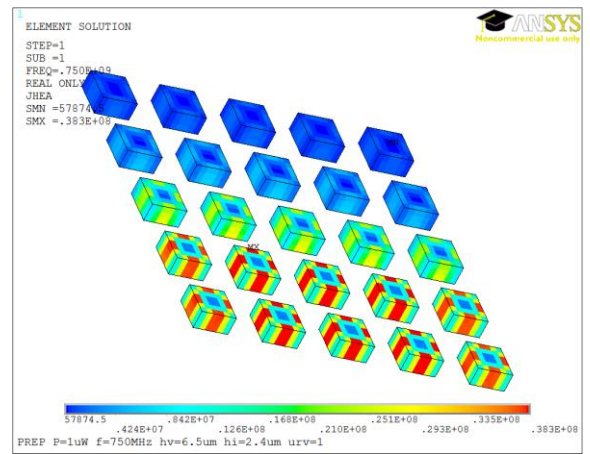


Obr. 4.16 Závislost Joulových ztrát ve vsázce na frekvenci při konstantním výkonu  $P = 1 \mu\text{W}$

Z Obr. 4.16 je zřejmé, že již od začátku frekvenčního spektra je větší vývin Joulových ztrát ve vsázce s vyšší relativní permeabilitou. Co se velikosti ztrát týká, tak jsou samozřejmě menší z důvodu menšího obsahu elektricky vodivé vsázky a také to, že některé elektricky vodivé kostičky jsou mimo vzduchovou mezeru a tedy jimi prochází pouze rozptylová intenzita elektromagnetického pole a tudíž se do nich indukují i menší vířivé proudy. Důvod proč jsou nyní větší Joulovy ztráty pro vsázku s  $\mu_r = 200$  je ten, že jednotlivé vodivé elementy jsou mnohem menší než v případě jedné vodivé vsázky a tudíž ihned od začátku se projevuje vliv skin efektu, kdy proudová hustota je vytláčována na povrch vodivé kostičky.



Obr. 4.17 Rozložení Joulovo ztrát pro  $\mu_r = 200$

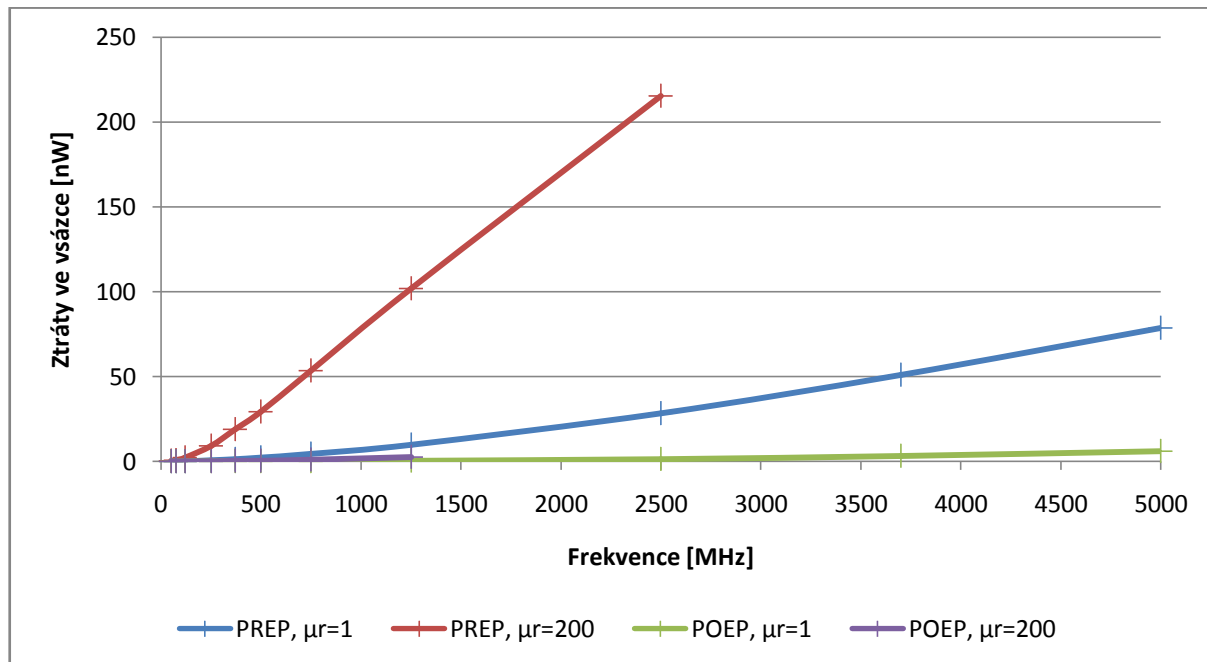


Obr. 4.18 Rozložení Joulovo ztrát pro  $\mu_r = 1$

Na *Obr. 4.17* a *Obr. 4.18* je zobrazeno rozložení Joulových ztrát v elektricky vodivé vsázce pro různou relativní permeabilitu. Barva není zobrazena, jelikož se opět do ní nic neindukuje a tedy v ní žádné ztráty nevznikají. Pro vsázku s vyšší permeabilitou je možné sledovat pouze povrchový ohřev, na rozdíl od vsázky s nižší permeabilitou, kde je prohříván i střed vsázky. Další rozdíl mezi těmito dvěma druhy vsázky je ten, že při vyšší relativní permeabilitě vznikají větší Joulovo ztráty v kostičkách blíže induktoru, což je způsobeno podélnou složkou elektromagnetického pole. Tento efekt nevzniká pro vsázku s permeabilitou  $\mu_r = 1$ , jelikož hloubka vniku je  $6,5 \mu\text{m}$  a tudíž kostička  $2 \times 2 \times 2 \mu\text{m}$  je elektromagneticky průzařná.

#### 4.6 Porovnání modelů s elektricky vodivou vsázkou izolovanou kapalinou

Porovnání modelů využívají podélné elektromagnetické a příčné elektromagnetické pole proběhne opět porovnáním velikostí Joulových ztrát tak, jak tomu bylo v kapitole 4.3. Opět jsou splněny stejné podmínky jako ve výše zmiňované kapitole tzn., že úhel induktoru byl nastaven na  $4,8^\circ$ , tak aby ztráty v induktorech obou modelů byly stejné. Dále byl také zajištěn konstantní výkon zdroje  $P = 1 \mu\text{W}$ .



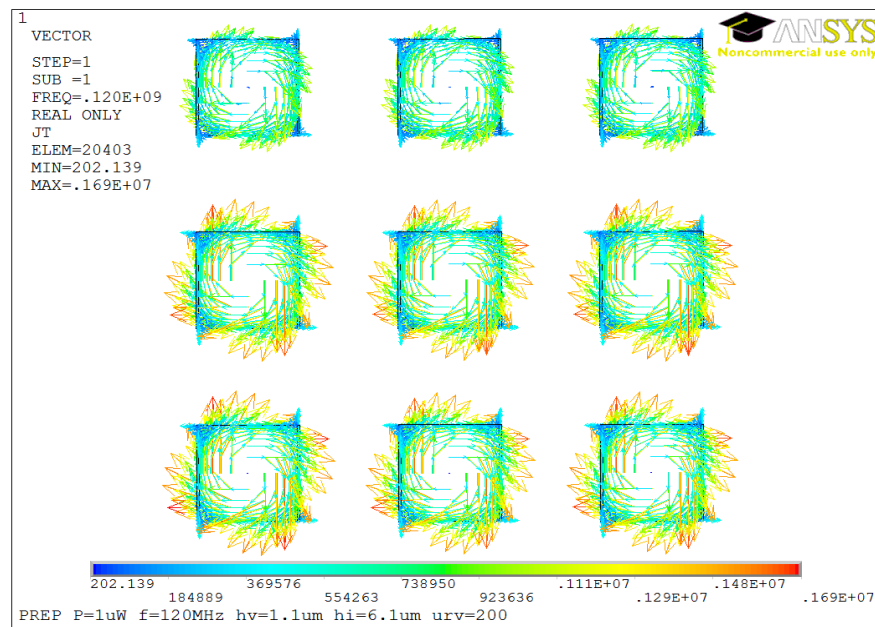
Obr. 4.19 Závislost ztrát ve vsázce v podélném a příčném elektromagnetickém poli

Na *Obr. 4.19* jsou zobrazeny Joulovy ztráty ve vsázce pro různé relativní permeability a různý druh elektromagnetického pole. Na první pohled je jasné, že i tentokrát zcela jednoznačně dominuje příčné elektromagnetické pole s relativní permeabilitou vsázky

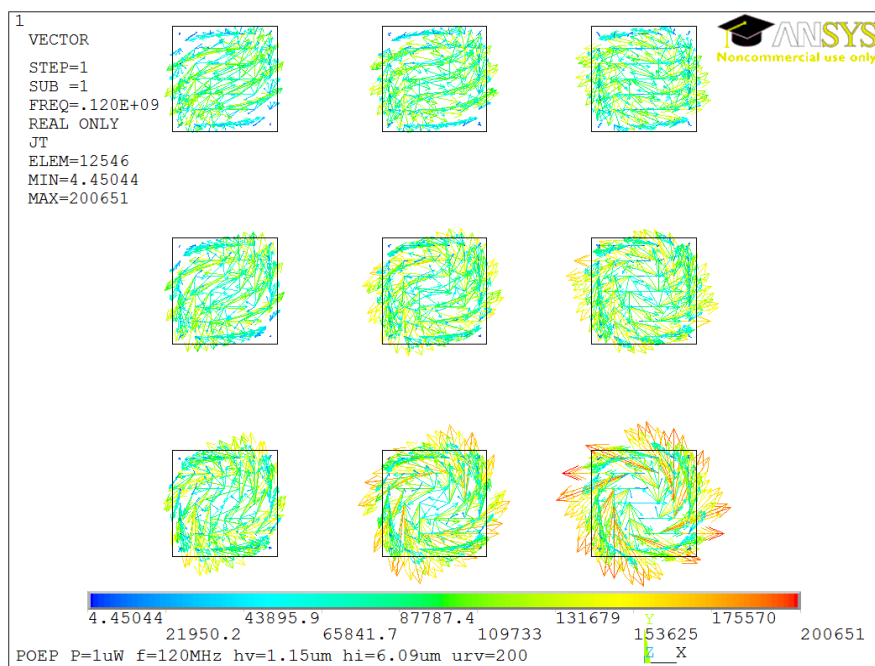


$\mu_r = 200$ . Pro podélné pole s relativní permeabilitou vsázky  $\mu_r = 200$ , se nepodařilo provést simulaci v celém frekvenčním spektru, jako je to u ostatních charakteristik. Důvodem byly velké nároky na výpočetní techniku, která nebyla schopna vypočítat Joulovy ztráty pro vyšší frekvence.

Na následujících obrázcích níže je zobrazena proudová hustota. Zobrazené jsou vždy první tři krychličky z levé strany v prvních třech řadách při stejném pohledu ze shora vsázky. V případě příčného elektromagnetického pole, *Obr. 4.20*, je proudová hustota ve všech krychličkách rozložena stejně, jelikož i intenzita magnetického pole prochází stejným



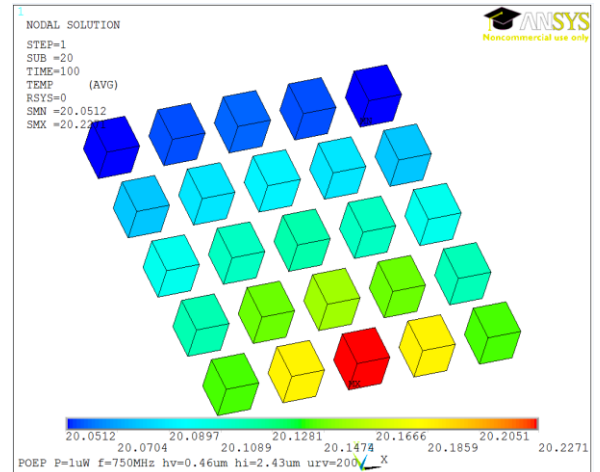
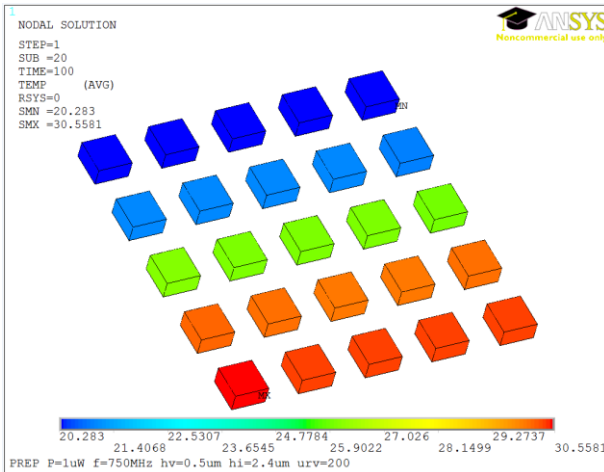
*Obr. 4.20 Rozložení proudové hustoty v příčném elektromagnetickém poli*



*Obr. 4.21 Rozložení proudové hustoty v podélném elektromagnetickém poli*

směrem. V podélném elektromagnetickém poli, *Obr. 4.21*, se uzavírá proudová hustota v každé krychličce jinak, respektive dochází k natočení pomyslné osy symetrie kolem které se proudová hustota uzavírá. Tento fakt je způsoben i konstrukcí induktoru a rozložením intenzity magnetického pole v modelu.

Další možností, jak porovnat výše zmíněné modely, je zobrazení teplotního pole na základě vzniklých Joulových ztrát. Frekvence u obou modelů byla použita 750 MHz při dodávaném výkonu zdroje  $P = 1 \mu\text{W}$ . Doba ohřevu trvala 100 sekund.



*Obr. 4.22 Ohřev nanočástic v příčném el. mag. poli*

*Obr. 4.23 Ohřev nanočástic v podélném el. mag. poli*

Na *Obr. 4.22* je zobrazen ohřev nanočástic v příčném elektromagnetickém poli. Ohřev jednotlivých krychliček odpovídá Joulovým ztrátám zobrazeným na *Obr. 4.17*. Nejvíce se samozřejmě ohřála krychlička vlevo dole, což ve vsázce odpovídá umístění uprostřed na vnitřní straně modelu a následně první a druhá řada, která se nachází také ještě ve vzduchové mezeře toroidního jádra. Během 100 sekund se tedy podařilo ohřát krychličky, které jsou umístěné ve vzduchové mezeře toroidního jádra, skoro o  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nejméně se ohřály krychličky v poslední řadě, které jsou mimo jádro a tudíž se v nich skoro nic neindukuje.

Na *Obr. 4.23* je zobrazen ohřev nanočástic v podélném elektromagnetickém poli, kde opět výsledný ohřev koresponduje s rozložením Joulových ztrát ve vsázce, jenž je zobrazeno na *Obr. 4.13*. Nejvíce se samozřejmě ohřála krychlička uprostřed dole, jelikož v ní také vznikaly největší Joulovo ztráty. Nicméně je možné si všimnout, že během 100 sekund se nanočástice ohřály pouze o  $0,22^\circ\text{C}$ , tedy skoro vůbec v porovnání s příčným elektromagnetickým polem.

## Závěr

Hlavním cílem celé práce bylo zjistit, na základě simulací v programu ANSYS, zda-li dojde či nedojde k ohřevu nanočástic.

Samotný text této práce byl rozdělen na dvě části. První teoretická část popisuje teorii indukčního ohřevu, Maxwellovy rovnice a s nimi spojené rovnice elektromagnetického vlnění a sdílení tepla. V této části také popisují základní vlastnosti nanočástic a složení inkoustových barev.

Ve druhé části jsou popsány matematické modely pro podélné elektromagnetické pole (kapitola 4.1 a kapitola 4.4) a pro příčné elektromagnetické pole (kapitola 4.2 a kapitola 4.4) s různou variantou vsázky. V kapitole 4.3 jsou porovnány jednotlivé modely z hlediska vzniku a hlavně velikosti Joulových ztrát v závislosti na použité frekvenci a také v závislosti na relativní permeabilitě nanočástic. Zde byla vsázka uvažována jako jedna celá elektricky vodivá destička o rozměrech 44x22x2  $\mu\text{m}$ . Při této variantě vsázky je z hlediska velikosti Joulových ztrát ve vsázce vhodnější použít příčné elektromagnetické pole, jelikož vzniklé ztráty v celém frekvenčním spektru, bez ohledu na relativní permeabilitě vsázky, byly jednoznačně vyšší, jak naznačuje graf na *Obr. 4.10*.

Následně v kapitole 4.6 jsou porovnány opět jednotlivé modely z hlediska velikosti Joulových ztrát v závislosti na použité frekvenci a také v závislosti na relativní permeabilitě nanočástic. V této části byla samotná vsázka uvažována jako jednotlivé elektricky vodivé krychličky, o rozměrech hrany 2  $\mu\text{m}$ , které jsou od sebe izolovány barvou nebo roztokem. Při této variantě vsázky je z hlediska velikosti Joulových ztrát ve vsázce vhodnější použít opět příčné elektromagnetické pole, jelikož vzniklé ztráty v celém frekvenčním spektru byly jednoznačně vyšší, než v podélném elektromagnetickém poli, jak naznačuje graf na *Obr. 4.19*. Graf na *Obr. 4.19* také dokazuje, že v případě vsázky složené z jednotlivých elektricky vodivých krychliček izolovaných barvou či roztokem, je výhodnější použít vyšší relativní permeabilitu nanočástice pro dosažení vyšších Joulových ztrát. V této kapitole bylo také porovnáno o kolik  $^{\circ}\text{C}$  se samotné nanočástice ohřejí, jsou-li vystaveny elektromagnetickému poli po dobu 100 sekund. V případě použití příčného elektromagnetického pole se nanočástice dokázali za 100 sekund při 750 MHz a výkonu zdroje  $P = 1 \mu\text{W}$  ohřát o 10  $^{\circ}\text{C}$  (*Obr. 4.22*). V případě podélného elektromagnetického pole, za stejných podmínek, došlo k ohřevu nanočástic o 0,22  $^{\circ}\text{C}$ , což v porovnání s příčným elektromagnetickým polem je takřka zanedbatelné.

## Seznam literatury a informačních zdrojů

- [1] LANGER, Emil. *Teorie indukčního a dielektrického tepla*. Praha: Academia, 1979. 319 s.
- [2] HRADÍLEK, Zdeněk. *Elektrotepelná zařízení*. 1. vyd. Praha: IN-EL, 1997. 174 s. Knižnice Elektro; sv. 35. ISBN 80-902333-2-5.
- [3] RADA, Josef. *Elektrotepelná technika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985. 344 s.
- [4] KOŽENÝ, Jiří: Cvičení z předmětu základy elektrotepelných procesů - rozložení teplotního pole v el. vodivé desce, Plzeň 2013
- [5] LANGER, Emil. *Elektrotepelná technika. část I, II, Společné základy, elektrické pece odporové*. 2. vyd. Plzeň: VŠSE, 1974. 140 s.
- [6] SAZIMA, Miroslav. *Sdílení tepla*. 2. vyd, dotisk. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1980. 214 s.
- [7] ČEJKA, Jakub. *Oteplování a ochlazování vodiče v závislosti na okolním prostředí*. Plzeň, 2011. Diplomová práce (Ing.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická. Vedoucí práce David Rot.
- [8] [http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/prednasky/prenos\\_tepla.pdf](http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/prednasky/prenos_tepla.pdf) (přístupné dne 9. 9. 2014)
- [9] PŘÍHODA, Miroslav a RÉDR, Miroslav. *Sdílení tepla a proudění*. 1. vyd. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 1998. 177 s. ISBN 80-7078-549-7.
- [10] DOLEJŠ, Roman. *Možnosti spuštění procesu tavby ve studeném kelímku*. Plzeň, 2011. Diplomová práce (Ing.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická. Vedoucí práce David Rot.
- [11] RUDNEV, Valery et al. *Handbook of induction heating*. New York: Marcel Dekker, ©2003. xi, 777 s. Manufacturing engineering and materials processing; 61. ISBN 0-8247-0848-2.
- [12] DOLEŽAL, Ivo: Přednášky z předmětu elektrodynamika pro elektroenergetiku, Plzeň 2013