

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

Katedra elektroenergetiky a ekologie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Elektrodynamické síly při ohřevech elektromagnetickou
indukcí**

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta elektrotechnická

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jaroslav VÁVROVSKÝ**
Osobní číslo: **E13N0095P**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Komerční elektrotechnika**
Název tématu: **Elektrodynamické síly při ohřevech elektromagnetickou indukcí**
Zadávací katedra: **Katedra technologií a měření**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uveďte fyzikální princip ohřevů elektromagnetickou indukcí
2. Popište vznik elektrodynamických sil při tavení konstrukční oceli v indukční kelímkové peci 2,5 t /200 Hz
3. Uveďte důsledky působení elektrodynamických sil na vsázku
4. Navrhněte možnosti k omezení vlivu elektrodynamických sil na vsázku
5. Vyslovte závěry pro praxi

Rozsah grafických prací: **podle doporučení vedoucího**
Rozsah pracovní zprávy: **30 - 40 stran**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

1. Literaturu určí všedoucí práce při předběžném kontaktu

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Ing. Jiří Kožený, CSc.**
Katedra elektroenergetiky a ekologie
Konzultant diplomové práce: **Ing. Michal Křesina**
Katedra elektroenergetiky a ekologie
Datum zadání diplomové práce: **15. října 2014**
Termín odevzdání diplomové práce: **11. května 2015**


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Ing. Vlastimil Skočil, CSc.
vedoucí katedry

V Plzni dne 15. října 2014

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce je zaměřena na řešení elektrodynamických sil při tavení elektromagnetickou indukcí v indukční kelímkové peci. V první části obecně rozebrána teorie elektromagnetického pole. Další část se zabývá elektrodynamickými silami při tavení. Závěr této práce je věnován výpočtu vzduť v indukční kelímkové peci a na účinky elektrodynamických sil na vsázku.

Klíčová slova

Indukční ohřev, elektrodynamická síla, tavení, válcové elektromagnetické vlnění, elektrodynamický tlak, vsázka, indukční kelímková pec, teorie indukčního ohřevu.

Abstract

The diploma thesis is focused on solution of elektrodynamic forces during elektromagnetic melting in induction crucible furnace. First part is focused on theory of electrodynamic field. Next part deals with electrodynamic forces during melting. Ending of this thesis is dedicated to calculation of backwater in induction crucible furnace and its effect on charge.

Key words

Induction heating, electrodynamic force, melting, cylindrical elektromagnetic waves, electrodynamic pressure, charge , induction crucible furnace, theory of induction heating.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou/bakalářskou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské/diplomové práce, je legální.

.....

podpis

V Plzni dne 11.5.2015

Jaroslav Vávrovský

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Prof. Ing. Jiřímu Koženému, Ph.D. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

OBSAH	8
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	9
ÚVOD	11
1 FYZIKÁLNÍ PRINCIP OHŘEVU ELEKTROMAGNETICKOU INDUKCÍ	12
1.1 PRINCIP INDUKČNÍHO OHŘEVU.....	12
1.2 ODVOZENÍ Z MAXWELLOVÝCH ROVNIC.....	13
1.3 POYNTINGŮV ZÁŘIVÝ VEKTOR.....	16
1.4 HLoubKA PROSTUPU ELEKTRICKÉ ENERGIE	17
1.5 ELEKTROMAGNETICKÁ PRŮZAŘNOST	18
1.6 VÁLCOVÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNĚNÍ.....	18
1.7 VÁLCOVÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNĚNÍ V PLNÉ ELEKTRICKY VODIVÉ VSÁZCE.....	21
2 ELEKTRODYNAMICKÉ SÍLY	24
2.1 LORENTZOVA SÍLA.....	25
2.2 ELEKTRODYNAMICKÝ TLAK VE VSÁZCE	26
2.3 ELEKTRODYNAMICKÝ TLAK VE VSÁZCE S VELKÝM ARGUMENTEM x_2	29
2.4 ELEKTRODYNAMICKÝ TLAK U VSÁZKY A CÍVKY KONEČNÉ DÉLKY	32
2.5 DALŠÍ MOŽNOSTI VYJÁDRĚNÍ ELEKTRODYNAMICKÉHO TLAKU	33
3 VÝPOČET ZÁKLADNÍCH ROZMĚRŮ	33
3.1 VÝPOČET VZDUTÍ V KELÍMKOVÉ PECI	34
3.2 PŮSOBENÍ ELEKTRODYNAMICKÝCH SIL NA VSÁZKU V KELÍMKOVÉ PECI.....	35
3.3 ELEKTROMAGNETICKÉ MÍCHÁNÍ.....	36
ZÁVĚR	39
SEZNAM LITERATURY	40

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol [jednotka]	Veličina
Φ [V]	Elektrický potenciál
a [m]	Hloubka vniku
\mathbf{B} [T]	Magnetická indukce
\mathbf{E} [V/m]	Intenzita elektrického pole
\mathbf{F} [N]	Síla
f [Hz]	Frekvence
C_1, C_2 [-]	Integrační konstanty cylindrických funkcí
\mathbf{H} [A/m]	Intenzita magnetického pole
h_0 [m]	Výška vzduší hladiny
I_1 [A]	Proud procházející cívkou
\mathbf{D} [C/m ²]	Elektrická indukce
I_{1l} [A/m]	Proud procházející cívkou na jednotku délky
I_{2l} [A/m]	Naindukovaný proud na jednotku délky
q [W/m ²]	Měrný příkon
\mathbf{J} [A/m ²]	Hustota proudu
M [m ²]	Průřez trubky
p_{os} [Pa]	Elektrodynamický tlak
dP_r [N]	Síla působící na plochu dF
dp_r [N/m ²]	Měrný tlak ve vsázce
v [m/s]	Rychlost vlnění
V [m ³]	Objem
r [m]	Poloměr
γ [S/m]	Elektrická vodivost
ε [F/m]	Permitivita
ε_r [-]	Relativní permitivita
η [-]	Účinnost
ρ [C/m ³]	Hustota náboje
μ [H/m]	Permeabilita
μ_r [-]	Relativní permeabilita

Značení veličin

<i>B</i>	Vektorová veličina
B	Fázorová veličina

Konstanty

$g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$	Tíhové zrychlení
$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}$	Permitivita vakua
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}$	Permeabilita vakua
$\pi = 3,14 \text{ [-]}$	Ludolfovo číslo

Úvod

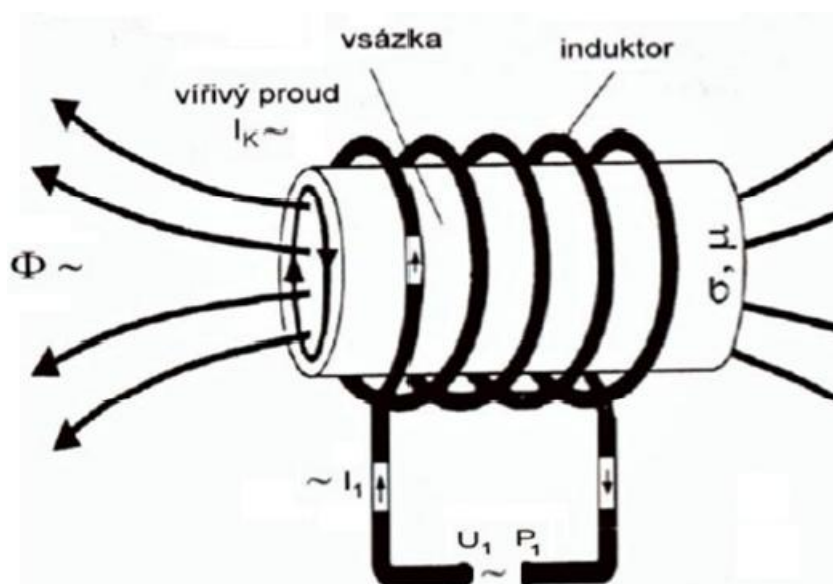
Indukční ohřev je využíván ve strojírenství od 20.let minulého století. V dnešní době patří mezi nejvyužívanější způsoby ohřevu. Indukční ohřev je využíván v různých průmyslových odvětvích a to díky jedinečným vlastnostem a výhodám s ním spojeným.

Protéká-li vodičem střídavý elektrický proud, vzniká v jeho okolí elektromagnetické pole. Pokud se v tomto poli bude vyskytovat předmět z elektricky vodivého materiálu, naindukují se v něm vířivé proudy. Předmět, neboli vsázka, se tedy bude zahřívat. Tento jev se nazývá indukční ohřev. Jednou z jeho mnoha aplikací jsou tavicí indukční kelímkové pece. Největší výhodou oproti jiným způsobům ohřevu je, že teplo vzniká přímo ve vsázce, což umožňuje její efektivnější a také rychlejší ohřev. Vsázka je nejteplejším místem celé soustavy a ostatní části konstrukce mohou zůstat studené.

Dle využití je možné rozdělit indukční ohřev do několika skupin. Využívá se pro prohřívání, tavení, svařování, kalení a pájení. Tato diplomová práce je zaměřena na tavení v indukčních pecích, vznik a důsledky elektrodynamických sil na vsázku.

1 Fyzikální princip ohřevu elektromagnetickou indukcí

Indukční ohřev je možný jen u materiálu elektricky vodivých. V předmětu z vodivého materiálu, který je vložen do střídavého magnetického pole, se indukují vířivé proudy zahřívající tento předmět. Zjednodušeně můžeme indukční ohřev přirovnat k transformátoru, ve kterém je primární stranou cívka a sekundární vynutí představuje vsázka a je spojeno nakrátko. Přenos tepla do vsázky se na rozdíl od odporových zařízení neděje tepelným spádem, ale teplo se přenáší střídavým magnetickým polem a vzniká přímo ve vsázce. Vsázka je jako jediná v soustavě zahřívána - vše ostatní může být zcela studené. Vznik tepla přímo ve vsázce patří největším výhodám indukčního ohřevu. Indukční ohřev umožňuje vysoké měrné příkony do vsázky. Volbou kmitočtu napájecího proudu induktoru můžeme vhodně ovlivnit rozdělení tepla vznikajícího ve vsázce.



Obr. 1: Princip indukčního ohřevu [1]

1.1 Princip indukčního ohřevu

Dopadem elektromagnetického vlnění na vodivou stěnu vzniká indukční teplo. Dopadající vlnění se při styku s vodivou stěnou rozdělí na dvě části. Část vlnění se odrazí a část prostoupí do stěny vsázky, kde způsobí indukci vířivých proudů. Vlivem energie obsažené v elektromagnetické vlnění se ve stěně materiálu uvedou do pohybu elektrony, které proudí ve směru intenzity elektrického pole a získávají značnou kinetickou energii a rychlost. Elektrony narážejí do atomů vodiče, kde předají svou kinetickou energii, což způsobí jejich

rozkmít a následné zvýšení teploty materiálu. V tento okamžik se energie elektromagnetické vlnění přemění na energii tepelnou a vlnění se utlumí.[2]

Elektromagnetické vlnění vzniká v každém vodiči v důsledku průchodu střídavého proudu. Z důvodu účinného přenosu energie ze zářiče do vsázky, je nutné upravit vodič do příhodného tvaru. Má-li vsázka hranolovitý tvar tj. povrch omezený rovnými plochami, je nutné, aby cívka kopírovala tvar vloženého předmětu. Je-li prohříváný předmět válcového tvaru, je umístěn v sousední cívce, která je také válcová.[2].

Naindukované napětí vzniká podle známého Faradayova indukčního zákona:

$$u_i = - \frac{\delta \Phi}{\delta t} \quad (1.1)$$

1.2 Odvození z Maxwellových rovnic

Pro popis indukčního ohřevu je nutné odvodit vlnové rovnice pro šíření elektromagnetického vlnění vycházející z Maxwellových rovnic:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} \quad (1.3)$$

$$\text{div } \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \rho \quad (1.4)$$

$$\text{div } \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = 0 \quad (1.5)$$

\mathbf{H} ... je vektor intenzity magnetického pole [A/m]

\mathbf{E} ... je vektor intenzity elektrického pole [V/m]

γ ... je konduktivita, měrná elektrická vodivost [S/m]

ρ ... je hustota náboje [C/m³].

Provedeme rotaci první Maxwellovy rovnice (1.2):

$$\text{rot } (\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot } \gamma \mathbf{E} + \text{rot } \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} = \gamma \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta (\text{rot } \mathbf{E})}{\delta t} \quad (1.5)$$

za rot \mathbf{E} dosadíme z druhé Maxwellovy rovnice (1.3):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} \quad (1.7)$$

podle vektorového počtu:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} \quad (1.8)$$

dosadíme:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} = 0 \quad (1.9)$$

potom:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} + \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} \quad (1.10)$$

pomocí rotace druhé Maxwellovi věty se odvodila elektrická složka:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu_0 \mu_r \frac{\delta(\operatorname{rot} \mathbf{H})}{\delta t} \quad (1.11)$$

za \mathbf{H} dosadíme z rovnice (1.1):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (1.13)$$

úpravou této rovnice dostaneme:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} + \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (1.14)$$

rovnice 1.10 a 1.14 popisují obecně elektromagnetické vlnění v prostředí s konstantními parametry ε , μ a γ . V praxi ale můžeme zanedbat pouze γ pro nevodivé prostředí a ε pro prostředí vodivé. Volné náboje také zanedbáváme tedy $\rho = 0$.

Díky tomu pro nevodivé prostředí jsou rovnice 1.10 a 1.14:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} \quad (1.16)$$

Pro vodivé prostředí:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\Delta \mathbf{H}}{\delta t} \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\Delta \mathbf{E}}{\Delta t} \quad (1.18)$$

Upravíme rovnice 1.14 a 1.15:

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} \quad (1.20)$$

Podle obecné rovnice vlnění, můžeme zjistit rychlost šíření vlny.

Obecná rovnice vlnění:

$$v^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\delta^2 \mathbf{u}}{\delta t^2} \quad (1.21)$$

Rychlost šíření v daném prostředí pak pro obě intenzity je:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \quad (1.22)$$

Dále budeme brát, že: $\mu_0 \mu_r = \mu$ a $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$.

Pro proměnné veličiny \mathbf{E} a \mathbf{H} platí:

$$\mathbf{E} = E_m e^{j\omega t}, \quad \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} = j\omega \mathbf{E}, \quad \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} = -\omega^2 \mathbf{E} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{H} = H_m e^{j\omega t}, \quad \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} = j\omega \mathbf{H}, \quad \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} = -\omega^2 \mathbf{H} \quad (1.24)$$

Tyto rovnice upravíme do fázorového tvaru:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma \mu \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} - \varepsilon \mu \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} = 0 \quad (1.25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \gamma \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} (\omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \gamma) \mathbf{E} = 0 \quad (1.26)$$

Výraz v závorce nahradíme pomocí k^2 , a jeho výsledný tvar tedy bude:

$$k^2 = (\omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \gamma) = -j\omega \mu (\gamma + j\omega \varepsilon) \quad (1.27)$$

Stejným způsobem upravíme i \mathbf{H} , tím dostaneme:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.28)$$

Konstantu k^2 nazýváme konstantou šíření a určujeme s ní vlastnosti prostředí pro elektromagnetické šíření vlny, při harmonických průbězích \mathbf{E} a \mathbf{H} . Rovnice (1.26) jsou obecné rovnice pro harmonické elektromagnetické vlnění pro fázory \mathbf{E} , \mathbf{H} . Platí pro prostředí nevodivé, vodivé, pro elektromagnetické vlnění rovinné i válcové.[1].

1.3 Poyntingův zářivý vektor

Poyntingův zářivý vektor se využívá pro výpočet indukčního ohřevu a přídavných ztrát. Také představuje elektromagnetický výkon vystupující z objemu přes jeho povrch do okolí. Vyjadřuje hustotu toku v daném bodu pole. Velikost se rovná elektromagnetické energii, která prochází za 1s jednotkovou plochou jejíž normála má směr vektorového součinu intenzity elektrického a intenzity magnetické pole Směr Poyntingova vektoru je totožný se směrem šíření energie.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.29)$$

$$P = \int_S N ds \quad (1.30)$$

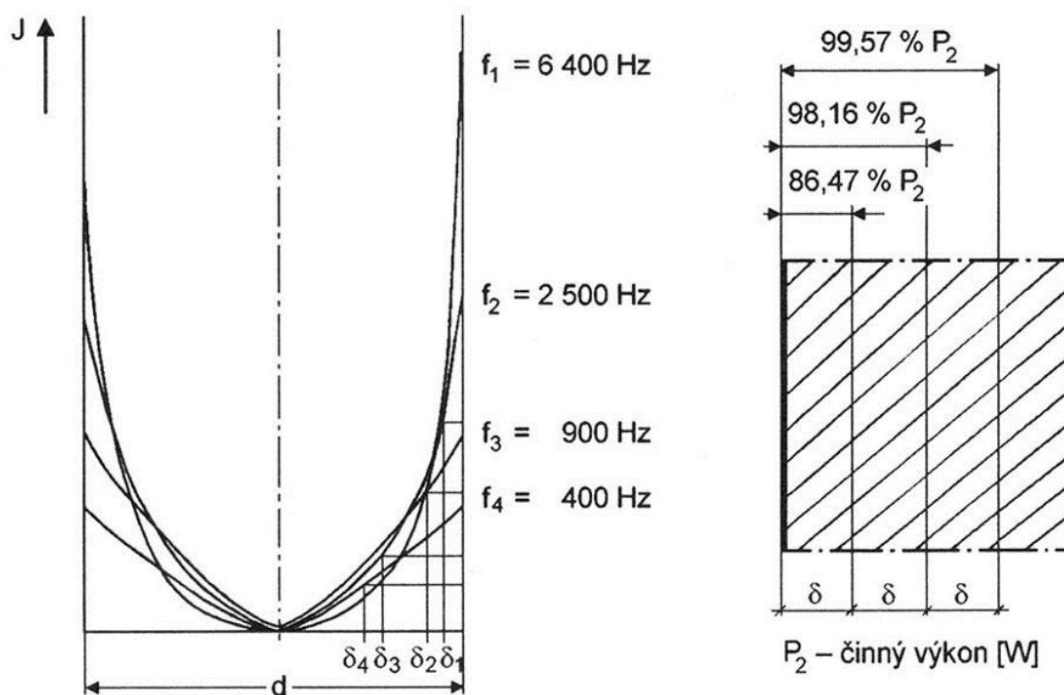
1.4 Hloubka prostupu elektrické energie

Hloubka vniku a je vzdálenost od povrchu materiálu, kam prostoupí elektromagnetická energie a přemění se v teplo. Vhodnou volbou frekvence napájecího proudu, jež se hojně využívá v praxi, můžeme ovlivnit rozdělení tepla vyvíjeného ve vsázce a hloubku vniku záření vypočítanou dle vztahu (1.31):

$$a = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \quad (1.31)$$

kde $\omega = 2\pi f$, f je frekvence, μ je permeabilita a σ je konduktivita.

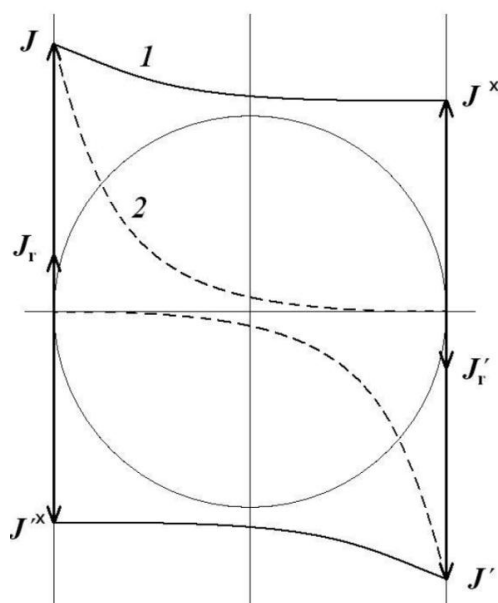
Zvolením vysokého kmitočtu dojde k ohřevu tenké vrstvy na povrchu tělesa, naopak použitím nízkého kmitočtu dojde k prohřátí celé vsázky. Nevhodně zvoleným kmitočtem může dojít buď k přehřívání povrchu vsázky nebo se vsázka neohřeje v důsledku vzniku jevu elektromagnetické pružnosti. K maximálně efektivnímu prohřátí materiálu ve tvaru válce v co nejkratším čase je vhodné, aby průměr byl přibližně 3,5 krát větší než a . Při tavení magnetických materiálů je nutné vzít v úvahu změny relativní permeability na teplotě a respektovat Curieův bod. Pro konstrukční ocel se hodnota Curieova bodu udává v rozmezí 740 - 760 °C.



Obr. 2: Hloubka prostupu elektrické energie v závislosti na frekvenci [3]

1.5 Elektromagnetická průzařnost

Fyzikálně si můžeme elektromagnetickou průzařnost znázornit na obr. 3, kde proudové hustoty \mathbf{J} a \mathbf{J}' působí proti sobě ve vsázce. Křivka č. 2 zobrazuje, jak se \mathbf{J} a \mathbf{J}' průchodem vsázkou utlumí celé. Výsledné \mathbf{J}_r na povrchu pak bude rovno \mathbf{J} , stejně $\mathbf{J}'_r = \mathbf{J}'$ a postupně klesá od středu vsázky až k nule. Tato vsázka je neprůzařná. Oproti tomu křivka č. 1 zobrazuje, že se jedná o vsázku průzařnou, protože \mathbf{J} a \mathbf{J}' se průchodem vsázkou neutlumí a proto výsledné $\mathbf{J}_r = \mathbf{J} - \mathbf{J}'^x$. Průzařnost je u indukčního ohřevu nevýhodná, pro její potlačení se do vsázky buď přidávají větší části materiálu, nebo se zvyšuje kmitočet proudu ve vsázce.



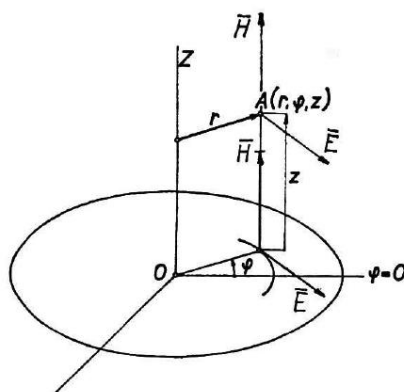
1 - průzařná vsázka
2 - neprůzařná vsázka

Obr. 3: Průzařnost vsázky[3]

1.6 Válcové elektromagnetické vlnění

Šíření elektromagnetického vlnění v prostoru můžeme rozdělit na rovinné a válcové. Rovinné vlnění se v praxi příliš nepoužívá, zatímco válcové vlnění je základem velkého množství indukčních zařízení. Nejvíce se využívá u indukčních tavicích pecí kelímkových, které mají válcový tvar induktoru. Pro odvození a popis elektromagnetického válcového vlnění je nutno zavést cylindrické souřadnice. Ty nahrazují klasický kartézský souřadnicový systém (x, y, z) vlastní soustavou, tvořenou souřadnicemi r, φ, z určenou vztahy:[4]

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z \quad (1.32)$$

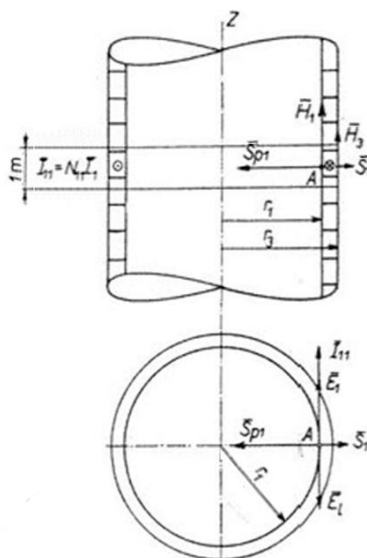


Obr. 4: Soustava válcových souřadnic [1]

Zdrojem válcového vlnění je válcová plocha s vnitřním poloměrem r_1 , kterou protéká střídavý proud. Proudová vlákna mají vždy směr kolmý k ose válce.

To se realizuje cívku s vodičem obdélníkového průřezu. Uvažujeme-li nulovou tloušťku izolace mezi závity a stoupání závitů zanedbatelné oproti poloměru r_1 , pak je splněna podmínka, aby proudová vlákna byla v kolmých rovinách s osou cívky. Dále předpokládáme, že šíření proudových vln v závitech cívky je nekonečně rychlé.

Tato válcová cívka bude vyzařovat do své dutiny válcové elektromagnetické vlnění.

Obr. 5: Řez cívky a orientace vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} [2]

Pokud umístíme vyzařující válec do válcového souřadnicového systému tak aby spolu obě osy splynuly viz obr. 4, pak vektory \mathbf{E} , \mathbf{H} a \mathbf{N} v kterémkoliv místě v dutině válce jsou funkcí pouze poloměru r a nezávisí na úhlu natočení ϕ od zvolení výchozí polohy. Nezávisí ani na vzdálenosti od zvolené výchozí roviny. [2]

Pro odvození rovnic válcového vlnění vycházíme z obecných fázorových rovnic(1.28):

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

Dále budeme potřebovat definovat Laplaceův diferenciální operátor ve válcových souřadnicích:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left(r \frac{\delta}{\delta r} \right) + \frac{1}{r} \left(r \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right) + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \quad (1.33)$$

Předpokládáme, že intenzita \mathbf{H} závisí pouze na poloměru r . Po úpravě pak dostáváme pro Laplaceův operátor pro intenzitu \mathbf{H} výraz:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} + \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta r^2} \quad (1.34)$$

Dosazením do rovnice 1.28:

$$\frac{1}{r} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} + \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta r^2} + \mathbf{H} \cdot k^2 = 0 \quad (1.35)$$

Rovnici vydělíme konstantou šíření k^2 a dostaneme Besselovu diferenciální rovnici nultého řádu pro argument (kr) :

$$\frac{1}{kr} \frac{d\mathbf{H}}{d(kr)} + \frac{d^2 \mathbf{H}}{d(kr)^2} + \mathbf{H} = 0 \quad (1.36)$$

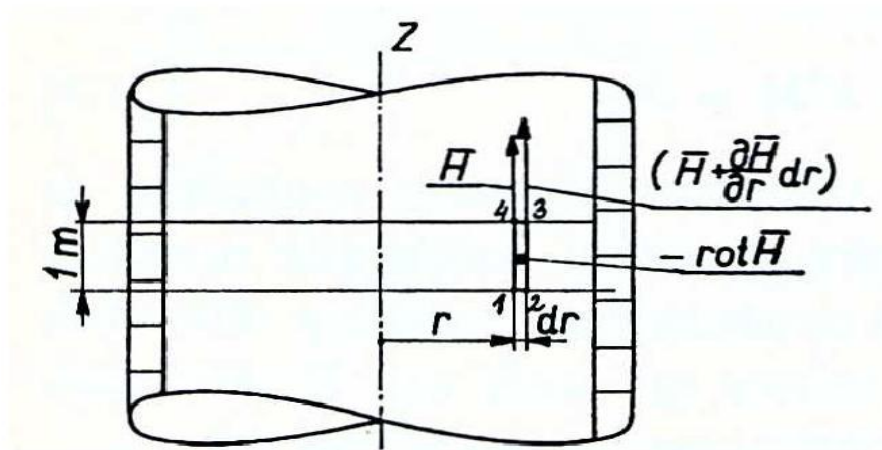
Řešením rovnice je kombinace dvou cylindrických funkcí ve tvaru:

$$\mathbf{H} = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr) \quad (1.37)$$

C_1 a C_2 jsou integrační konstanty určující se z mezních podmínek. $J_0(kr)$ a $N_0(kr)$ jsou cylindrické funkce prvního a druhého druhu nultého řádu (Besselova a Neumannova) argumentu kr . [1][2]

Pro odvození elektrické intenzity využijeme 1. Maxwellovu rovnici:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} = (\gamma + j\omega \varepsilon) \mathbf{E} \quad (1.38)$$


 Obr. 6: Odvození $\text{rot } \mathbf{H}$ v cívice [2]

Dle obrázku je fázor \mathbf{H} vyznačen na poloměru r . Pokud chceme na poloměru $(r+dr)$ je intenzita o diferencíál větší:

$$\mathbf{H} + \left(\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} \right) dr$$

Bereme v úvahu část cívky o osové délce 1 m. Vykonanou práci po obvodu této plochy vyjádříme a vydělíme jí velikostí plochy. Získáme tím rotaci intenzity \mathbf{H} . Rotace \mathbf{H} má záporný smysl kvůli orientaci vektoru \mathbf{H} k ose z :

$$-\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\left(\mathbf{H} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} dr \right) - \mathbf{H}}{1dr} = \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} \quad (1.39)$$

Dosazením do rovnic 1.38 a 1.39 získáme:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma + j\omega \varepsilon} \cdot \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta r} \quad (1.40)$$

Konečný tvar intenzity \mathbf{E} získáme pomocí cylindrických funkcí:

$$\mathbf{E} = \frac{k}{\gamma + j\omega \varepsilon} \{C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)\} \quad (1.41)$$

1.7 Válcové elektromagnetické vlnění v plně elektricky vodivé vsázce

Když vložíme vodivou vsázku do cívky, bude do ni vstupovat elektromagnetické vlnění. Hustota tohoto vlnění odpovídá Pointingovu zářivému vektoru \mathbf{N} . Pronikající tok se v sázce

utlumuje a přeměňuje na tepelnou energii. Vsázka je vodivá a platí tedy $\gamma \gg \omega \varepsilon$. Konstanty α , β a k se změjí:

$$k^2 = -j\omega \mu(\gamma + j\omega \varepsilon) = -j\omega \gamma \mu \quad (1.42)$$

$$k = (1-j) \sqrt{\frac{(\omega \gamma \mu)}{2}} = \frac{1-j}{a} \quad (1.43)$$

Při odvozování využijeme rovnice z obecného magnetického vlnění (1.36):

$$\mathbf{H} = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr) \quad (1.44)$$

A díky vodivé vsázce můžeme zjednodušit intenzitu \mathbf{E} na:

$$\mathbf{E} = \frac{k}{\gamma} \{C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)\} \quad (1.45)$$

Argument (kr) má tvar:

$$kr = \frac{1-j}{a} r = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{r\sqrt{2}}{a} = \sqrt{-j} x \quad (1.46)$$

Kde:

$$x = \frac{r}{a} \sqrt{2} \quad (1.47)$$

Cylindrické funkce $J_0(kr)$ a $J_1(kr)$ komplexního argumentu ($kr) = (x\sqrt{-j})$ jsou místo reálného argumentu x definovány jako řady ve kterých se střídají reálné a imaginární složky. Součet reálných se označuje jako *ber* x a imaginárních jako *bei* x .

Z mezních podmínek určíme integrační konstanty:

Pro $r = 0$ je intenzita $E_0 = 0$. Dosazením získáme konstantu $C_2 = 0$

V mezeře mezi vsázkou a cívkou je homogenní pole H_1 , dosazením dostaneme C_1 :

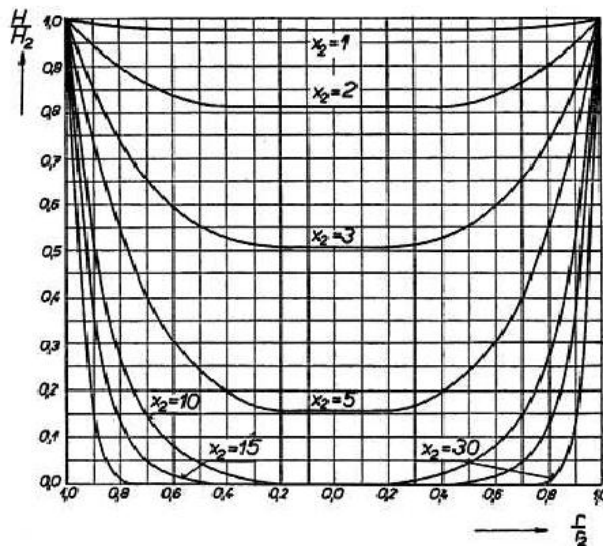
$$C_1 = \frac{\mathbf{H}_2}{J_0(kr_2)} \quad (1.48)$$

Dosazením konstant do rovnic (1.37) a (1.41) dostaneme:

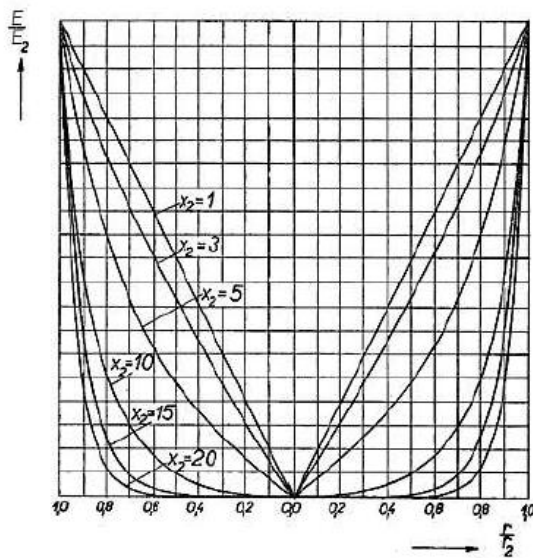
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{J_0(x\sqrt{-j})}{J_0(x_2\sqrt{-j})} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{E} = \frac{k}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{J_1(x\sqrt{-j})}{J_0(x_2\sqrt{-j})} \tag{1.50}$$

Obečně platné průběhy \mathbf{H} a \mathbf{E} jsou znázorněny na následujících obrázcích:



Obr. 7: Rozložení intenzity pro různé argumenty x_2 [4]



Obr. 8: Rozložení proudové hustoty i intenzity pro různé argumenty x_2 [4]

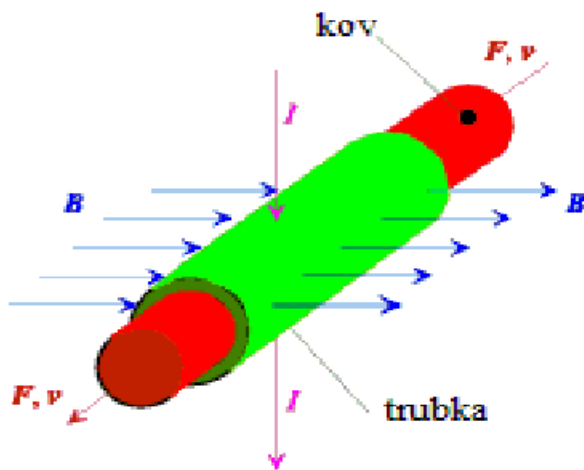
Z diagramu vidíme, že pro malé hodnoty parametru $x_2 = \frac{r_2}{a} \sqrt{2}$ se intenzita téměř nemění. Hustota proudu ubývá také skoro lineárně. Pro malý parametr je poloměr vsázky menší, než hloubka vniku, proto je vsázka průzařná. Díky tomu se jen část energie přemění na

teplo a to je pro nás nevýhodné. Proto u tavicích pecí je hloubka vniku menší, než poloměr vsázky z toho plyne také poměrně velký argument x_2 . [4]

2 Elektrodynamické síly

Možnosti ovlivňování procesů v tekutých kovech elektromagnetickým polem se začaly zkoumat již ve dvacátých letech minulého století. Zpočátku to byly pouze teoretické úvahy. Avšak byly i položeny základy takových technologií, jako je elektromagnetické míchání tekutých kovů, jejich přečerpávání, dávkování a odlévání, levitační tavení a další. Ve všech uvedených případech se ovšem zpracovávalo jen menší množství materiálu, příslušná zařízení byla velmi nákladná a často nepříliš efektivní.

Mezníkem v oboru ovlivňování procesů v tekutých kovech elektromagnetickým polem se stala až osmdesátá léta. Na vědecké konferenci v Cambridgi o teoretické a aplikované mechanice v roce 1982 bylo pro zmíněné procesy (jejichž fyzikální principy jsou téměř shodné) přijato zastřešující označení magnetohydrodynamika kovů a výzkum příslušných fyzikálních dějů a na nich založených technologií se přes všechny dílčí odlišnosti dostal do jednoho rámce. [7]



Obr. 9: Základní princip magnetohydrodynamiky kovu [7]

Magnetohydrodynamika se zabývá silovými účinky zpravidla vnějšího magnetického pole na částice tekutého kovu, jímž protéká elektrický proud. Princip na Obr. 9 [7]

Představme si, že v naznačené trubce je tekutý kov. Trubka s kovem je umístěna v magnetickém poli B (směr osy y) a kolmo k ní trubkou i roztaveným kovem protéká proud

I (směr osy x). Pak na částice kovu v místě průtoku proudu působí síla \mathbf{F} ve směru osy z , která je úměrná součinu proudu I a indukce \mathbf{B} a uděluje jim rychlost v .

Konstrukce skutečných zařízení a probíhající děje jsou ovšem daleko složitější. Proudění protékající tekutým kovem vyvolávají Jouleovy ztráty a následné zvyšování teploty taveniny. Teplotní změny, k nimž dochází i vlivem tepelných ztrát konvekci či radiací do okolí, ovlivňují fyzikální vlastnosti systému. Velmi komplikované jsou i procesy tavení kovů či jejich tuhnutí spojené s krystalizací. Často je třeba vzít v úvahu i další síly působící na systém (gravitace, povrchová napětí, vztlakové síly pocházející z rozdílu teplot v různých vrstvách taveniny), tlaky atd.

Magnetohydrodynamické jevy v tekutých kovech jsou vyvolány vnějším, zpravidla časově či prostorově proměnným elektromagnetickým polem, jehož rozložení je popsáno Maxwellovými rovnicemi. Tím se v elektricky vodivé tavenině indukují vířivé proudy. Ty následně vyvolávají Jouleovy ztráty a oteplení. Kromě toho jejich interakce s budícím magnetickým polem generuje již zmíněné silové účinky působící na částice taveniny. Tyto účinky jsou příčinou proudění.[7]

2.1 Lorentzova síla

Lorentzova síla působí na bodový náboj Q v magnetickém poli \mathbf{B} , pohybující se rychlostí v :

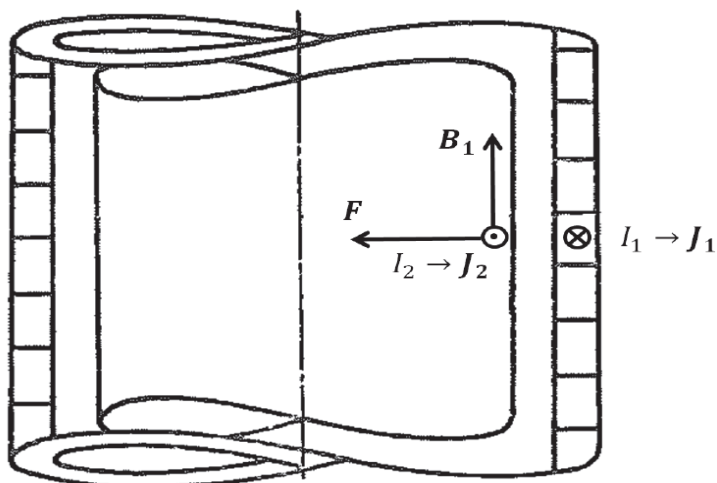
$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

Pro naše využití budeme uvažovat místo náboje Q proud, procházející vodičem v objemovém elementu dV . Náboj dQ tedy bude $dQ = p dV$. Síla tedy bude:

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = p(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})dV \quad (2.2)$$

Platí:

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (2.3)$$



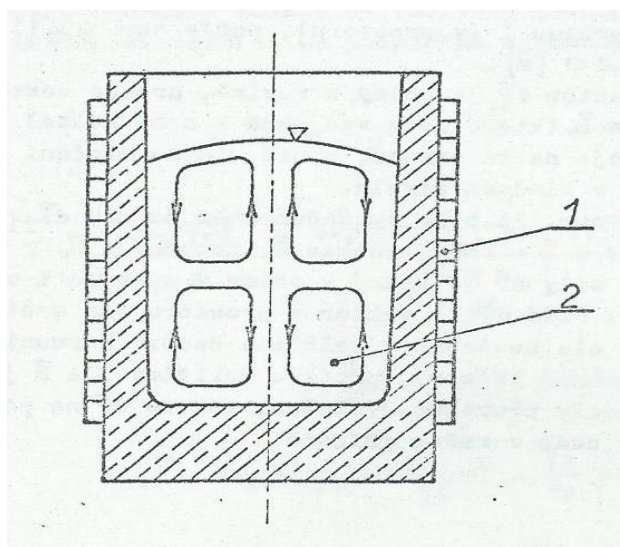
Obr. 10: Vznik síly ve vsázce [8]

Cívkou pece prochází proud I_1 a vzniká magnetická indukce B_1 . Ve vsázce je naindukovaný proud I_2 s proudovou hustotou J_2 , která spolu s magnetickou indukcí z cívky B_1 vytváří sílu F kolmou k ose vsázky (Obr. 10).[6]

$$F = J_2 \times B_1 \quad (2.4)$$

2.2 Elektrodynamický tlak ve vsázce

Pro odvození budeme uvažovat kelímkovou tavicí pec (Obr. 11).



Obr. 11: Kelímková tavicí pec [3]

Dále uvažujeme vodivou vsázku nekonečné délky.

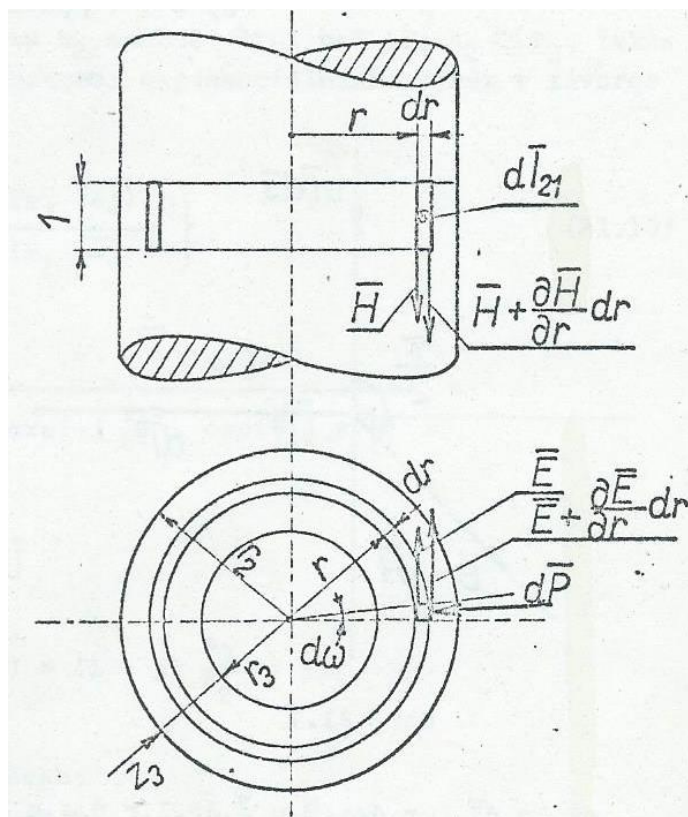
Intenzity magnetického i elektrického pole mají maximální intenzitu na povrchu (poloměr r_2) a jejich hodnoty se zmenšují směrem k ose, podle vztahů daných cylindrickými funkcemi:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{J_0(x\sqrt{-j})}{J_0(x_2\sqrt{-j})} \quad (2.5)$$

$$\gamma \mathbf{E} = \mathbf{J} = \sqrt{-j} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a_2} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \frac{j_1(x\sqrt{-j})}{j_0(x_2\sqrt{-j})} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 = N_{11} \cdot \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{11} \quad (2.7)$$

\mathbf{H}_1 označuje fázor intenzity magnetického pole na vnitřním povrchu vsázky, \mathbf{H}_2 na povrchu vsázky, a_2 hloubku vniku naindukovaných proudů I_2 , N_{11} počet závitů cívky na 1 m její délky, \mathbf{I}_1 fázor proudu v závitě cívky, $(x\sqrt{-j})$ komplexní argument cylindrických funkcí prvního a nultého řádu, $x = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{a_2}$ je reálná složka argumentu. \mathbf{H} je intenzita magnetického pole a \mathbf{J} hustota proudu v závislosti na komplexním argumentu $(x\sqrt{-j})$.



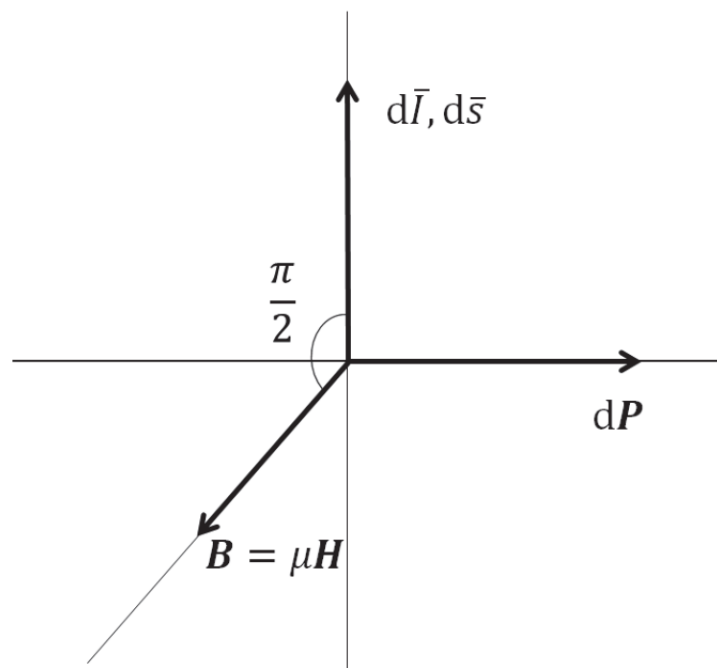
Obr. 12: Válcová vodivá vsázka [3]

Uvažujeme ve vsázce dle Obr. 12 elementární válec s poloměrem r , radiální tloušťce dr a výšce $1m$. Řezem (1.dr) vyznačeným na Obr. 12 protéká proud $dI_{21} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r}$. Počítané válcové proudové vlákno se nachází v místě s magnetickou intenzitou \mathbf{H} a magnetickou indukcí \mathbf{B} , $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \mathbf{H}$. Celkově platí, že mechanická síla $d\mathbf{P}$ působí na proudovodič protékaný proudem a umístěný v magnetickém poli. Tato síla je úměrná proudu \mathbf{I} a magnetické indukci \mathbf{B} :

$$d\mathbf{P} = \mathbf{I} \cdot (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.8)$$

Znak $d\mathbf{s}$ značí element proudovodiče, ve směru proudu \mathbf{I} (v prostoru), dle obr. 13 $d\mathbf{s} = r d\omega$

Vektor $d\mathbf{P}$ je kolmý k rovině určené $d\mathbf{s}$ a \mathbf{B} a směřuje na stranu, ze které vidíme otočení $d\mathbf{s}$ k \mathbf{B} v kladném smyslu.



Obr. 13: Orientace vektorů v prostoru [3]

V Obr. 12 máme vyznačen směr proudu dI_{21} stejný s \mathbf{E} . Směr magnetické intenzity \mathbf{H} je shodný se směrem magnetické indukce \mathbf{B} . K nim kolmý je vektor síly $d\mathbf{P}$, který směřuje k ose vsázky. Síla $d\mathbf{P}$ je vektorem v prostoru, ale zároveň i veličina časově harmonicky proměnná, protože harmonicky proměnné jsou i veličiny \mathbf{I} a \mathbf{B} . V našem případě bude velikost fázoru $d\mathbf{P}$ na poloměru r :

$$dP_r = dI_{21} \cdot r \cdot d\omega \cdot \mathbf{B} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} \cdot 1 \cdot d\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} \quad (2.9)$$

Síla $d\mathbf{P}$ působí na ploše $d\mathbf{F} = (r \cdot d\omega \cdot 1)$. Proudový element o poloměru r působí směrem dovnitř na sousední vrstvu pak měrný tlak $d\mathbf{p}_r$, závislý na poloměru:

$$d\mathbf{p}_r = \frac{d\mathbf{P}_r}{dF} = \mu_0\mu_r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \frac{r \cdot d\omega \cdot dr}{r \cdot d\omega \cdot 1} = \mu_0\mu_r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot dr \quad (2.10)$$

Celkový tlak P_3 na poloměru $r_3 < r_2$ získáme integrací jednotlivých tlaků $d\mathbf{P}_r$ ve vrstvách o tloušťce dr po integrační křivce od povrchu s poloměrem r_2 k poloměru r_3 :

$$\mathbf{p}_3 = \int_{r_2}^{r_3} \mu_0\mu_r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot dr \quad (2.11)$$

Dosadíme za \mathbf{J} a \mathbf{H} ze vztahů (2.5), (2.6):

$$\mathbf{p}_3 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a_2} \mu_r \cdot \int_{r_2}^{r_3} J_0(x\sqrt{-j}) \cdot J_1(x\sqrt{-j}) \cdot dr \quad (2.12)$$

Vyřešením integrálu cylindrických funkcí získáme:

$$\mathbf{p}_3 = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}_1^2 \cdot \left(1 - \frac{J_0^2(x_3\sqrt{-j})}{J_0^2(x_2\sqrt{-j})} \right) \quad (2.13)$$

Tento výraz má složku reálnou i imaginární. Pro odvození elektrodynamického tlaku ale využijeme pouze složku reálnou.

2.3 Elektrodynamický tlak ve vsázce s velkým argumentem x_2

U tavicích pecí je hodnota argumentu x_2 výrazně větší než $10 a_2 \ll r_2$, díky tomu můžeme nahradit funkce cylindrické jednoduššími funkcemi exponenciálními. Z předchozí rovnice (2.13) se pak výraz v závorce zjednoduší:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{J_0^2(x_3\sqrt{-j})}{J_0^2(x_2\sqrt{-j})} \right) = \frac{\exp(-j\frac{\pi}{8}) \cdot \exp(\sqrt{j}x_3)}{\sqrt{(2\pi x_3)}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi x_2}}{\exp(-j\frac{\pi}{8}) \cdot \exp(\sqrt{j}x_2)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)} \cdot \exp[-\sqrt{j}(x_2 - x_3)] \sqrt{j}(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a_2} (r_2 - r_3) = (1+j) \frac{z_3}{a_2} = pz_3$$

Symbol "p" značí $p = \frac{1+j}{a_2}$

$$A = \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \cdot \exp\left(-\frac{1+j}{a_2} \cdot z_3\right) \quad (2.15)$$

Znak $z_3 = r_2 - r_3$ udává vzdálenost od povrchu vsázky, do které provádíme integraci. V případě tavících pecí se vyvíjí indukční teplo zpravidla v povrchové vrstvě z_3 malé tloušťky ve srovnání s poloměrem r_2 :

$$z_3 \ll r_2, \quad x_3 \cong x_2$$

Rovnice (2.15) pak bude rovna:

$$A = \left\{1 - \exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) \cdot \left(-j \frac{2z_3}{a_2}\right)\right\} \quad (2.16)$$

Z předpokladu, že cívka i vsázka mají nekonečnou délku. Pro elektrodynamický tlak \mathbf{p}_3 bude fázor:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}_1^2 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) \cdot \left(\cos \frac{2z_3}{a_2} - j \sin \frac{2z_3}{a_2}\right)\right) = \\ &= 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}_1^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) \cdot \cos \frac{2z_3}{a_2} + j \exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) \cdot \sin \frac{2z_3}{a_2}\right) \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{p}_3) + j \operatorname{Im}(\mathbf{p}_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pro vyvolání elektrodynamického tlaku ve vsázce využijeme jen reálnou část výrazu (2.17)

$$\operatorname{Re}(\mathbf{p}_3) = 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}_1^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2z_3}{a_2}\right)\right) \quad (2.18)$$

Nyní odvodíme fázor elektrodynamického tlaku v ose vsázky. Pro $r_3 = 0$, $z_3 = R_2$,

$a_2 \ll z_3$. Již pro $\frac{z_3}{a_2} = 3,0$ je $\exp\left(-\frac{2z_3}{a_2}\right) = 0,0024788$, $\cos\left(\frac{2z_3}{a_2}\right)$ je roven maximálně 1.

Druhý člen v závorce můžeme tedy oproti prvnímu zanedbat. Pak:

$$Re(\mathbf{p}_3) = 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}_1^2 = 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot \mathbf{I}_1)^2 \quad (2.19)$$

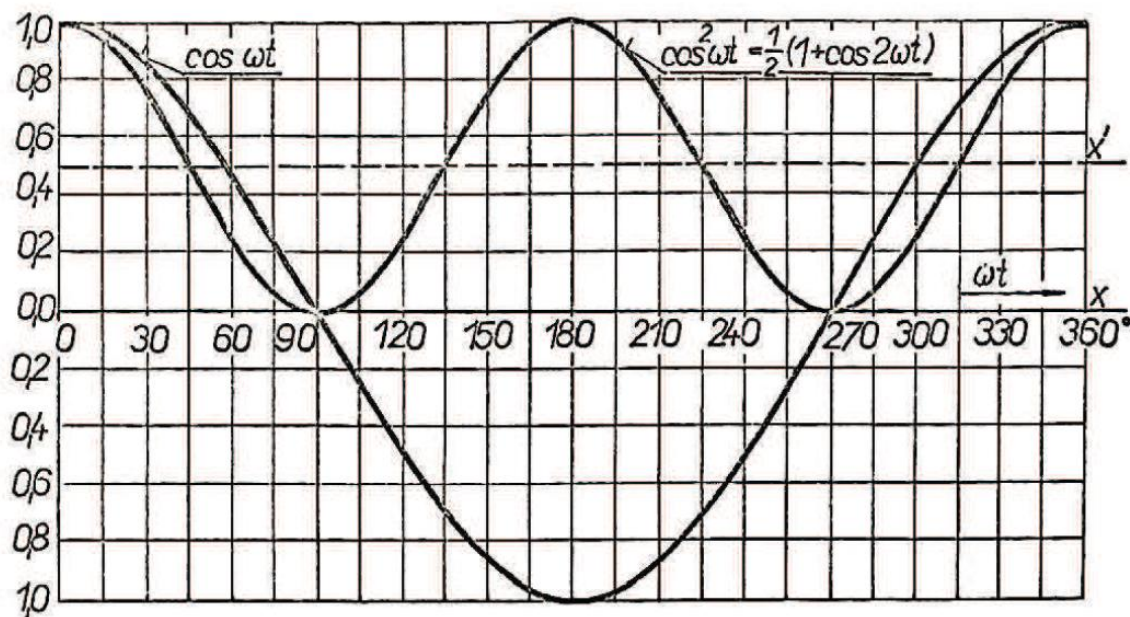
Proud \mathbf{I}_1 protékající cívkou je harmonicky proměnný:

$$\mathbf{I}_1 = I_1 \cdot \exp(j\omega t) = I_1 \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (2.20)$$

Pro časový průběh elektrodynamického tlaku budeme uvažovat jen reálnou složku proudu $\mathbf{I}_1 \cdot \cos \omega t$. Elektrodynamický tlak pak bude:

$$p_0 = 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot \mathbf{I}_1)^2 \cdot \cos^2(\omega t) \quad (2.21)$$

Na obr.13 je zaznamenán časový průběh elektrodynamického tlaku p_0 v ose vsázky. Je dán pořadnicí křivky $\cos^2(\omega t)$.



Obr. 14: Časový průběh elektrodynamického tlaku [3]

Průběh proudu \mathbf{I}_1 ukazuje pořadnicí křivky $\cos \omega t$. Je patrné, že proud \mathbf{I}_1 je střídavě kladný a záporný, kdežto časový průběh $\cos^2(\omega t)$, tedy průběh elektrodynamického tlaku je neustále kladný. To můžeme udělat ještě názornější tím, že vyjádříme $\cos^2(\omega t)$ dvojnásobným argumentem s poloviční amplitudou:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 6.28 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot I_1)^2 \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) = \\
 &= 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot I_1)^2 + 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot I_1)^2 \cdot \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Z rovnice 2.23 a z Obr. 14 vidíme, že součtem stejnosměrné složky rovné polovině amplitudy a střídavé složky podél osy x, s poloviční amplitudou a dvojnásobným kmitočtem dostaneme časový průběh elektrodynamického tlaku p_0 . K základní složce elektrodynamického tlaku se přičítají střídavě záporné a kladné rázy harmonického průběhu a tím se jejich účinek v důsledku setrvačnosti vzájemně ruší. Výsledný tlak je dán pouze stejnosměrnou složkou z výrazu (2.23). Konečná střední hodnota elektrodynamického tlaku p_{os} v ose vsázky nekonečné délky tedy je:

$$p_{os} = 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot (N_{11} \cdot I_1)^2 = 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r I_{11}^2 \tag{2.24}$$

kde I_1 označuje maximální hodnotu proudu v cívce, I_{11} značí proud v části o osová vzdálenosti 1m.

2.4 Elektrodynamický tlak u vsázky a cívky konečné délky

Pokud by měly vsázka i cívka nekonečnou délku, nemohl by se nijak projevit účinek elektrodynamického tlaku. U reálných pecí s konečnou délkou cívky a vsázky způsobí elektrodynamický tlak v okolí osy vsázky zvednutí hladiny, vyvolávající rozlévání vzniklé vyvýšeniny a tím i trvalou cirkulaci roztavené vsázky. Stejně způsobí i vztlak cirkulaci u dna kelímku.

Pokud bychom zabránili rozlévání vzduť taveniny, vzniklé na hladině vsázky například ponořením keramické trubky o průřezu M do osy lázně, stoupla by hladina vsázky v této trubce za působení elektrodynamického tlaku p_{os} o výšku h_0 . Pokud je tíhové zrychlení g a měrná hmotnost s , získáme teoretické vzduť hladiny vsázky h_0 :

$$p_{os} \cdot M = 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r I_{11}^2 \cdot M = g \cdot s \cdot h_0 \cdot M \tag{2.25}$$

$$h_0 = \frac{p_{os}}{g \cdot s} = 3,20 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\mu_r}{s} \cdot I_{11}^2 \tag{2.26}$$

Dle vztahu (2.26) je počítáno teoretické vzduť. V tomto výpočtu je stále rezerva, protože u reálné vsázky je vzduť menší v důsledku rozlévání vsázky. Vzduť by mělo být vždy menší, než tloušťka strusky, aby nedocházelo k odkrývání lázně a její následné oxidaci.

2.5 Další možnosti vyjádření elektrodynamického tlaku

Vycházíme ze závislosti elektrodynamického tlaku P_{os} na měrném výkonu q , přiváděného do vsázky válcového povrchu. Vycházíme ze vztahu pro vsázku konečné délky, kde se dá měrný příkon vyjádřit jako:

$$q = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{f \cdot \rho \cdot \mu_r} \cdot 10^{-3} \cdot I_{11}^2 \quad (2.27)$$

Dosazením za I_{11}^2 z (2.27) do (2.24) získáme:

$$p_{os} = 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \frac{1,00658q}{\sqrt{f \cdot \rho \cdot \mu_r}} 10^{-3} = 3,162 \cdot q \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{f \cdot \rho}} \cdot 10^{-4} \quad (2.28)$$

Z toho teoretická výška vzdutí:

$$h_0 = \frac{p_{os}}{g \cdot s} = \frac{1}{9,81 \cdot s} p_{os} = 0,323 \frac{q}{s} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{f \cdot \rho}} 10^{-4} \quad (2.29)$$

Dle výrazu (2.27) vidíme, že vzdutí hladiny je přímo úměrné měrnému příkonu q a odmocnině z permeability μ_r a nepřímo úměrné měrné hmotnosti a odmocnině z měrného odporu a kmitočtu.[3]

3 Výpočet základních rozměrů

Pro výpočet vzdutí u zadané indukční kelímkové peci na 2500kg konstrukční oceli při frekvenci 200Hz si nejdříve musím vypočítat základní geometrické parametry.

Při výpočtu základních rozměrů vycházím z hmotnosti vsázky, tedy 2500kg oceli. Nejdříve si vypočítám objem vsázky, který je hlavním parametrem pro určení vnitřního objemu kelímku. Měrnou hmotnost oceli je možné nalézt v tabulkách $s = 6,95 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

$$V = \frac{m}{s} = \frac{2500}{6,95 \cdot 10^3} = 0,3597 \text{ m}^3$$

Prostor uvnitř kelímku uvažuji jako válec o středním průměru d_2 . Důležitá je vhodná volba poměru průměru a délky vsázky. Průměr $\frac{d_2}{l_2}$ se volí v rozmezí 0,7 u menších pecí až 0,8 u pecí větších. Já zvolím 0,8.

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \frac{d_2}{0,8} = \frac{\pi d_2^3}{3,2} = 0,98175 \cdot d_2^3 = 0,3597$$

z toho:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{0,98175}} = \sqrt[3]{\frac{0,3597}{0,98175}} = 0,7155m$$

$$l_2 = \frac{d_2}{0,8} = \frac{0,7155}{0,8} = 0,8944m$$

Pro kontrolu si vypočítáme i hloubku vniku naindukovaných proudů do vsázky:

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_2}{\omega \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 200 \cdot 8000 \cdot 4\pi 10^{-7}}} = 3,9788 \cdot 10^{-4}m$$

Pro určení těchto hodnot bylo respektováno jak množství energie, které je vsázka schopná absorbovat, tak i tepelné ztráty unikající povrchem vsázky.

Pro výpočet vnitřního průměru induktoru d_1 využijeme průměr vsázky d_2 , ke kterému přičteme dvojnásobek tloušťky kelímku a tloušťku izolace

$$d_1 = d_2 + 2\delta_3 = 0,7155 + 2 \cdot 0,011936 + 0,2 = 0,9523m$$

$$\delta_3 = 3a = 3 \cdot 0,0039788 = 11,936 \cdot 10^{-3}$$

Délku induktoru volíme větší, než délku vsázky a to většinou :

$$l_1 = 1,1 \cdot l_2 = 1,1 \cdot 0,8944 = 0,98384m$$

3.1 Výpočet vzduť v kelímkové peci

Pro výpočet teoretické hladiny vzduť vsázky uvažují tyto hodnoty. Hmotnost vsázky 2500kg, příkon peci $p_g = 1500$ kW. Pec má stínící měděný plášť, účinnost $\eta = 0,71$ cívka s vnitřním průměrem $d_1 = 0,95$ m a délka cívky $l_1 = 0,98$ m. Vsázka o průměru $d_2 = 0,71$ m délce $l_2 = 0,89$ m, měrný odpor roztavené oceli $\rho = 1 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$, měrná hmotnost $s = 6,95 \cdot 10^3$ kg/m³. Zadaná frekvence je 200 Hz.

Absorbovaný příkon vsázkou:

$$p_2 = \eta \cdot p_g = 0,71 \cdot 1500 = 1065$$
 kW

Měrný příkon q pak bude:

$$q = \frac{P_2}{\pi \cdot d_2 \cdot l_2} = \frac{1,065 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 0,71 \cdot 0,89} = 5,367 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$$

Na výpočet střední hodnoty elektrodynamického tlaku využijí vztah (2.28):

$$p_{os} = 3,162 \cdot q \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{f \cdot \rho}} \cdot 10^{-4} = 3,162 \cdot 5,367 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{\frac{1}{200 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} \cdot 10^{-4} =$$

$$= 12000 \text{ Pa}$$

Na výpočet teoretického vzduť hladiny využijí vztah (2.29):

$$h_0 = \frac{p_{os}}{g \cdot s} = \frac{12000}{9,81 \cdot 6,95 \cdot 10^3} = 0,17 \text{ m}$$

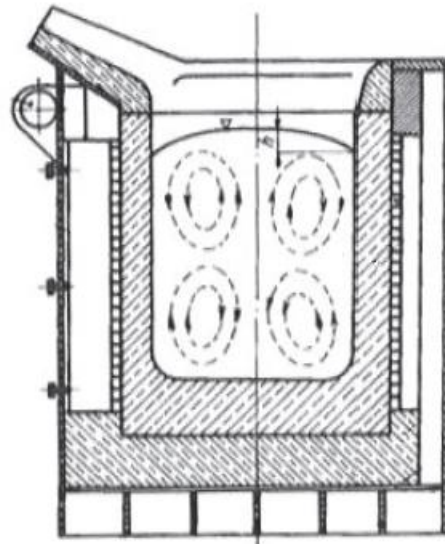
Výsledná výška vzduť hladiny je 17cm ve středu osy lázně. Tato hodnota se zmenší o rozlité vzduť vsázky na průměr vsázky. Toto vzduť můžeme omezit, jednou možností je snížit magnetickou intenzitu, jejím snížením o $\frac{1}{2}$ by mělo za následek pokles vzduť taveniny přibližně o $\frac{1}{4}$.

Další možností, která se používá spíše u indukčních pecí na 50 Hz je výrazně zmenšit délku induktoru l_1 . Jejím zmenšením by se materiál nad úrovní induktoru zatížil ohřivanou vsázkou a tím zmenšil vzduť hladiny vsázky.

3.2 Působení elektrodynamických sil na vsázkou v kelímkové peci

Na vsázkou dopadá elektromagnetické vlnění z cívky, díky kterému se v ní indukují proudy. Následkem indukovaných proudů vznikají uvnitř vsázky elektrodynamické síly způsobující zahřívání a pohyb vsázky. U roztavené vsázky vzniká pohyb taveniny (víření), které zajišťuje dokonalé promíchání taveniny. Díky tomuto víření mají legované oceli a slitiny kovů dokonale homogenní složení v celém objemu kelímku. To nejde dosáhnout v žádné jiné peci. Charakter víření i jeho intenzitu je možné ovlivnit mnoha způsoby, volbou frekvence, množstvím dodané energie, velikostí kelímku a také umístěním induktoru oproti vsázce.

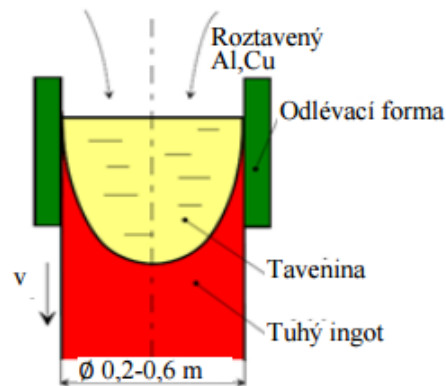
Při tavení může nastat situace, kdy víření ve vsázce je tak velké, že dojde k narušení vstvy strusky na povrchu taveniny a dochází pak k oxidaci taveniny, která snižuje její kvalitu. Vzduť taveniny by tedy nemělo být větší, než je tloušťka strusky, což bývá podle velikosti pece 6 - 8 cm. Vzduť vzniká podtlakem u stěn kelímku a zároveň přetlakem v ose taveniny. Tavenina pak odtéká ke stěně kelímku za pomoci hydrostatických sil a vzdouvá se poblíž osy kelímku. Pokud víření taveniny je velké, způsobuje zároveň i úbytek stěny u dna kelímku.



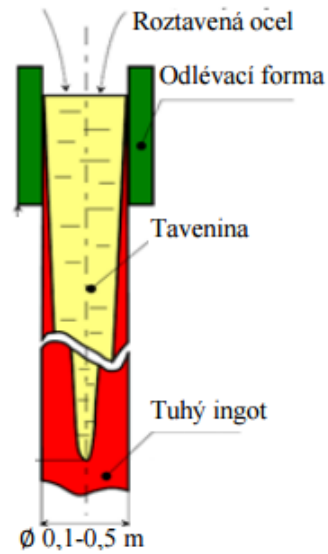
Obr. 15: Pohyb taveniny v kelímku [3]

3.3 Elektromagnetické míchání

V dnešní době se většina kovů odlévá kontinuálním nebo polokontinuálním způsobem, při kterém pohyb taveniny pozitivně působí na metalurgickou strukturu odlitku. Tento způsob spočívá v tažení tuhého ingotu z chladnoucí taveniny. Množství taveniny se přitom udržuje konstantní. Pro kovy, které mají dobrou tepelnou vodivost jako měď nebo hliník vidíme situaci na obr.16. V těchto případech dochází k rychlejšímu tuhnutí taveniny a ta získává tvar podobný polokouli. U kovů s nízkou tepelnou vodivostí je situace vyobrazena na obr.17. Tavenina má pak tvar dlouhého obráceného kužele.[7]



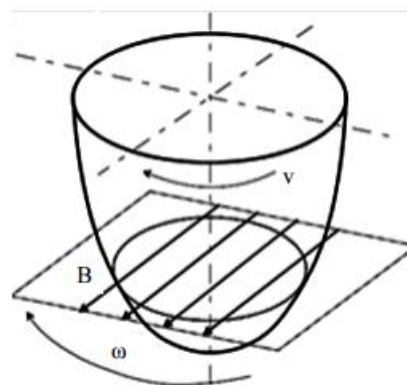
Obr.16 Odlévání mědi a hliníku



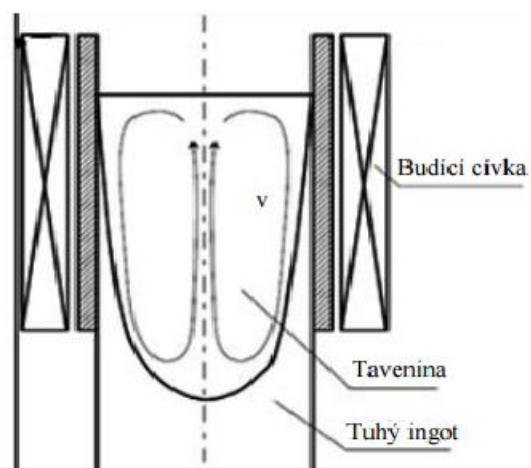
Obr. 17 Odlévání oceli

Při tuhnutí kovů dochází k nepříznivým jevům, kdy přísady na legování mají tendenci vytěšňovat se z železné taveniny. To vede k nehomogenní struktuře odlitku. Dále se mohou v různých místech odlitku vytvářet vady. U povrchových vrstev to jsou většinou dutinky, obsahující oxid uhelnatý, který se uvolňuje během tavicího procesu. Dutinky uvnitř odlitku vznikají v důsledku smršťování materiálu během chladnutí. Oba druhy dutinek jsou nežádoucím efektem potlačovaným neustálým promícháváním taveniny. Promíchávání taveniny pomocí elektromagnetického pole je realizováno několika způsoby. Nejčastějším způsobem je využití principu indukčního motoru, kde tavenina působí jako rotor a horizontální magnetické pole jako stator asynchronního stroje (obr.18). [10]

Dalším řešením je míchání taveniny střídavým polem, generovaným induktorem. Rychlost má složky ve směru r a z . Složka rychlosti je v obvodovém směru nulová.



Obr.18 Míchání taveniny magnetickým rotujícím polem[10]



Obr.19 Míchání taveniny střídavým polem generovaným induktorem[10]

Elektromagnetické míchání je nedílnou součástí výrobního procesu kontinuálního odlévání. Při elektromagnetickém míchání ale dodáváme chladnou tavenině další teplo, je tedy potřeba navrhnout zařízení na takový kmitočet s proudem, aby ztráty v systému se co nejvíce rovnaly Jouleovu teplu, generovanému v tavenině.

Závěr

V první části diplomové práce jsem rozebral problematiku indukčního ohřevu. Z Maxwellových rovnic jsem odvodil vlnové rovnice pro elektricky vodivé i nevodivé prostředí. Dále jsem se zaměřil na elektromagnetické vlnění, které se v technické praxi využívá nejvíce při ohřevech elektromagnetickou indukcí.

V druhé části jsem popsal princip elektrodynamické síly působící na vsázku, odvodil vnik elektrodynamického tlaku a popsal jeho důsledky působení na vsázku indukční kelímkové pece. Na zadaném příkladu jsem vypočetl vzduť hladiny vsázky.

Pro efektivní způsob tavení je zapotřebí správně volit kmitočet v závislosti na poloměru vsázky. Je nutná kontrola vzduť taveniny u kelímku na působení elektrodynamických sil. Omezení vzduť v případě použití proudu s frekvencí 50 Hz vede k nutnosti snížení intenzity magnetického pole H na $\frac{1}{2}$, má za následek snížení vzduť taveniny přibližně o $\frac{1}{4}$.

Při tavení materiálu magnetickou změnu μ_r v závislosti na teplotě. Mimo relativní permeability se projeví také na změně hloubky pronikání a_2 a tudíž i na průběhu naindukovaného tepla ve vlnkové vsázce. Pro efektivní průběh tavby z uvedeného vyplývá, že při vsazování vsázky - šrotu, je nutnost jeho třídění. Problémy nastanou při tavení drobné vsázky, která pro elektromagnetické vlnění se stává elektromagneticky průzařnou. V tomto případě je nutné zvolit vhodné složení vkládané vsázky. Mezi malé části je třeba umístit i větší kusy šrotu, aby se od nich ohřály i elektromagneticky průzařné materiály.

Seznam literatury

- [1] HRADÍLEK Zdeněk, LÁZNÍČKOVÁ Ilona, KRÁL Vladimír. *Elektrotepelná technika*. 1. vyd. Praha: Euroroprint 2011. 264s
- [2] LANGER Emil. *Teorie indukčního a dielektrického tepla* 2. přepr. a dop. vyd. Praha academia 1979, 319s
- [3] LANGER E, Kožený J.: *Elektroteplená zařízení indukční* VŠSE Plzeň, 1982
- [4] RADA Josef. A KOLEKTIV *Elektrotepelná technika* 1.vyd. Praha: Nakladatelství SNTL/ALFA.1985
- [5] KOŽENÝ, J. Přednášky z předmětu ZETP
- [6] MAYER, D.: *Teorie elektromagnetického pole*, ZCU, Plzeň, 2001
- [7] Odborné časopisy elektro, online dostupné z <http://www.odbornecasopisy.cz/elektro/casopis/tema/moderni-prumyslove-technologie-zalozene-na-procesech-v-tekutych-kovech-rizenych-elektromagnetickym-polem--14316>
- [8] An introduction to magnetohydrodynamics, online dostupné z <http://ebooks.cambridge.org/ebook.jsf?bid=CBO9780511626333>
- [9] BAŽAN, J. *studijní opora k předmětu Lití a krystalizace v oceli*, VŠB- TU Ostrava, 2008
- [10] Přednášky z předmětu EDS online dostupné z <http://web.fel.zcu.cz/kte/predmety/jine/EDS/dalsi/COUP7.pdf>
- [11] Kroupa, O.: *Návrh a konstrukce zařízení pro měření parametrů elektromagnetického pole*, diplomová práce, Plzeň 2007
- [12] PLAŠIL, J., *Elektrodynamické síly při tavení v indukčních pecích*, diplomová práce, Plzeň 2013
- [13] GRUNDLAGEN, *Induktives Schmelzen und Warmhalten*, Dortmund 2009,