ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

MOCNINNÉ ŘADY - ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Bábíčková

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 13. dubna 2015

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavovi Horovi, CSc. za cenné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce a v neposlední řadě za trpělivost, kterou mi věnoval.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

Značka a její význam:

$R,\ N$	obor reálných, resp. přirozených čísel
$<\ ;\ \leq$	je menší, resp. je menší nebo rovno
$>\ ;\ \geq$	je větší, resp. je větší nebo rovno
$\ll\ ;\ \gg$	je mnohem menší, resp. je mnohem větší
$\doteq$	je po zaokrouhlení rovno
•	krát (při násobení); často se vynechává, např. místo $a \cdot b$ píšeme ab
$:, -$	děleno; v textu píšeme $\frac{a}{b}$ místo $a:b$
$(\ ), \langle\ \rangle; \{\ \}$	kulatá, resp. hranatá, resp. složená závorka
$(\ \rangle, \langle\ )$	polootevřená zleva, resp. polootevřená zprava závorka
$\sqrt[n]{a}$	n-tá odmocnina z čísla a (značka $\sqrt{\ }$ se nazývá odmocnítko)
$\lvert a \rvert$	absolutní (prostá) hodnota čísla a
a^n	n-tá mocnina
a^{-n}	$\frac{1}{a^n}$
$n!$	n-faktoriál ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)
$\in$	je prvkem, patří do; např. $x \in \langle a;\ b\rangle$ znamená: x patří do intervalu $\langle a;\ b\rangle$
$\cup$	sjednocení; např. $N \cup \{0\}$ znamená: nula patří do oboru přirozených čísel
$\subset$	inkluze, „je podmnožinou“; např. $\langle a;\ b\rangle \subset R$ znamená: interval $\langle a;\ b\rangle$ je podmnožinou v oboru reálných čísel
$x_0 \neq x_1$	x_0 se nerovná x_1
$\min(a;\ b)$	minimum v intervalu $(a;\ b)$, nejmenší z čísel a a b
$\max(a;\ b)$	maximum v intervalu $(a;\ b)$, největší z čísel a a b

$\{a_n\}$	posloupnost
$\sum$	součet, suma; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada utvořená z členů posloupnosti $\{a_n\}$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu ∞
$\lim_{n\to\infty} \sup a_n$	limes superior posloupnosti $\{a_n\}$, její omezení seshora „v nekonečnu“
$\lim_{n\to 0^+} a_n$	posloupnost $\{a_n\}$ má v bodě 0 limitu zprava
$\lim_{n\to 0^-} a_n$	posloupnost $\{a_n\}$ má v bodě 0 limitu zleva
$f'(x)$	první derivace funkce $f(x)$ podle x
$f''(x)$	druhá derivace funkce $f(x)$ podle x
$\int$	neurčitý integrál
$\int_a^b$	určitý integrál od a do b
π	matematická konstanta s hodnotou $\pi \doteq 3{,}1415$ zvaná jako Ludolfovo číslo
e	matematická konstanta s hodnotou $e \doteq 2{,}7182$ zvaná jako Eulerovo číslo
$\ln a$	přirozený logaritmus čísla a (při základu e)

ÚVOD

Obsahovou náplní předmětu Matematická analýza 1 (KMA/MA1) vyučovaný na Západočeské univerzitě v Plzni jsou posloupnosti (a její divergence, konvergence, kritéria), limity, derivace a integrály, číselné řady a posloupnosti částečných součtů. Popisuje, co to řady jsou, kdy jsou konvergentní, jaká mají kritéria (srovnávací, limitní, podílové, odmocninové, Leibnizovo). Studenti zde získají základy k tomuto tématu. Navazující předmět Matematická analýza 2 (KMA/MA2) pojednává více o těchto řadách, zejména funkčních a dále mocninných.

Téma Mocninné řady – řešené příklady obsahuje pro mě dvě důležitá slova, proč jsem si toto téma vybrala: **řady** a **příklady**. O řadách jsem se dozvěděla hodně z předmětu KMA/MA1 a staly se mým oblíbeným tématem. Já jsem toho názoru, že libovolný obor matematiky je lepší ukázat i na příkladech než pouze na teoriích a definicích. Bez většího množství příkladů se studenti v teorii neorientují zcela správně a ztratí pojem kde, co a jak dostali, vyvodili. Použitím příkladů mohou ledacos pochopit, například jak byla nějaká věta či definice myšlena.

Mým cílem je vysvětlit, co mocninné řady jsou a vymyslet k nim několik řešených příkladů seřazených od nejlehčí po těžší obtížnost. Chtěla bych, aby tato bakalářská práce pomohla pochopit lépe učivo, případně pomohla k zápočtovým a zkouškovým testům.

1 MOCNINNÉ ŘADY

1.1 DEFINICE

Definice: Mocninná řada

Mějme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right)^1 + a_2\left(x-x_0\right)^2 + a_3\left(x-x_0\right)^3 + ...$,

kde $x_0, a_0, a_1, a_2, a_3, ... \in R$. Uvedený výraz se nazývá mocninná řada se středem x_0.

Čísla a_n se nazývají koeficienty mocninné řady.

Máme-li mocninnou řadu se středem v počátku $x_0 = 0$, pak je ve tvaru

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$

1.1.1 URČETE STŘED A KOEFICIENTY MOCNINNÉ ŘADY.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+1\right)^2 \left(x-5\right)^n$

Řešení.

Pro lepší přehled si řadu nejprve rozepíšeme. Vždy začínáme od prvního členu, tudíž od nuly.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+1\right)^2 \left(x-5\right)^n = 1^2 + 2^2\left(x-5\right)^2 + 3^2\left(x-5\right)^3 + ...$$

Daná mocninná řada má střed $x_0 = 5$ a koeficienty $a_n = (n+1)^2$ pro všechna $n \in N \cup \{0\}$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(x+1\right)^n}{n!}$

Řešení.

Tuto řadu rozepíšeme od prvního členu, který je roven dvěma.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(x+1\right)^n}{n!} = \frac{\left(x+1\right)^2}{2!} + \frac{\left(x+1\right)^3}{3!} + \frac{\left(x+1\right)^4}{4!} + ...$$

Mocninná řada má střed $x_0 = -1$ a koeficienty a_0, $a_1 = 0$ a $a_n = \frac{1}{n!}$ pro $n \geq 2$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ x^{2n}$

Řešení.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ x^{2n} = 1x^2 + 0x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} x^4 + 0x^5 + \frac{1}{\sqrt{3}} x^6 + \ldots.$$

Když řadu rozepíšeme, zjistíme, že zde chybí členy s lichou mocninou. Pro takové případy použijeme substituci $u = x^2$, jinak se koeficienty dělí na $a_n = 0$ pro n liché a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pro n sudé. Střed mocninné řady je $x_0 = 0$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\ x^{2n+1}$

Řešení.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\ x^{2n+1} = 2x^1 + 0x^2 + 3x^3 + 0x^4 + 4x^5 + 0x^6 + 5x^7 + \ldots.$$

Po rozepsání řady na členy hned zjistíme, že chybí členy se sudou mocninou. Proto ji upravíme, aby sudé mocniny obsahovala: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\ x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\ x^{2n}$.

Obdobně jako v příkladě předcházejícím, můžeme použít substituci $u = x^2$, tak aby daná mocninná řada obsahovala všechny členy. Jinak se koeficienty dělí pro n sudé, kde $a_n = 0$ a pro n liché je $a_n = (n+2)$. Jde o mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (2x+4)^n$

Řešení.

Nejprve si řadu upravíme na tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ vytknutím 2^n. Tím získáme samostatné x v $(x + x_0)^n$ a pak řadu můžeme rozepsat na jednotlivé členy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\ (2x+4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}\ (x+2)^n = 2\ (x+2) + 1\ (x+2)^2 + \frac{8}{27}\ (x+2)^3 + \ldots.$$

Mocninná řada má střed $x_0 = -2$ a koeficienty $a_n = \frac{2^n}{n^n}$ pro všechna $n \in N$.

1.2 POLOMĚR KONVERGENCE MOCNINNÉ ŘADY

Definice: Poloměr konvergence

Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ existuje právě jedno číslo $R \in \left\langle 0;\ \infty\right)$ takové, že platí:

(I) mocninná řada konverguje na celém oboru pro $R = \infty$

(II) mocninná řada konverguje pouze ve svém středu, pak pokládáme $R = 0$

(III) pro $R \neq \infty$ mocninná řada konverguje pro $J \in \left(x_0 - R;\ x_0 + R\right)$

(IV) pro $R \neq \infty$ mocninná řada diverguje pro $J \in \left(-\infty;\ x_0 - R\right) \cup \left(x_0 + R;\ \infty\right)$.

Číslo R se nazývá poloměr konvergence mocninné řady a otevřený interval $J \in \left(x_0 - R;\ x_0 + R\right)$ se nazývá interval konvergence mocninné řady.

Věta: O určení poloměru konvergence

Jestliže pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ existuje některá z limit:

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \text{ resp. } q = \lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}, \text{ resp. } q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|a_n\right|},$$

potom pro poloměr konvergence R a interval konvergence J této mocninné řady platí:

- pro $q = 0$ je $R = \infty$ a $J = (-\infty;\ \infty)$,
- pro $q = \infty$ je $R = 0$ a $J = \left\{x_0\right\}$,
- pro $q \neq 0$ je $R = \dfrac{1}{q}$ a $J = \left(x_0 - R;\ x_0 + R\right)$.

1.2.1 URČETE POLOMĚR A INTERVAL KONVERGENCE MOCNINNÉ ŘADY

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Řešení.

Daná mocninná řada má střed $x_0 = 0$ a koeficienty $a_n = 1$ pro všechna $n \in N$.

Pro určení poloměru použijeme odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

Poloměr konvergence R vyšel 1. Mocninná řada tedy konverguje uvnitř intervalu s krajními body -1 a 1 a nekonverguje vně tohoto intervalu. Proto interval konvergence je $J = (-1;\ 1)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

Řešení.

Střed mocninné řady je $x_0 = 0$ a koeficienty $a_n = n!$ pro všechna $n \in N$. Vzhledem k výskytu *n!* je vhodné použít podílové kritérium

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Jelikož $q = \infty$, pak poloměr konvergence $R = 0$ a interval je roven svému středu $J = \{0\}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$

Řešení.

Tato mocninná řada má střed $x_0 = 1$ a koeficienty $a_n = \frac{1}{2n+1}$ pro všechna $n \in N \cup \{0\}$. Zde se nám hodí použít podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Vyšlo $q = 1$, což znamená, že poloměr konvergence je $R = 1$. Interval konvergence mocninné řady určíme podle vzorce $J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$, tudíž výsledkem je interval $J = (0;\ 2)$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+2)^n$

Řešení.

Střed této mocninné řady je $x_0 = -2$ a koeficienty $a_n = \frac{1}{n}$ pro všechna $n \in N$.

Když použijeme podílové kritérium $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, zjistíme, že zase vychází poloměr konvergence mocninné řady $R = 1$. Interval konvergence ze vzorce $J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$ vychází $J = (-3;\ -1)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2^{n-1} x^{2(n-1)}$

Řešení.

Vypišme si několik prvních členů mocninné řady až například do mocniny x^{10}. Dostáváme $-1 + 2x^2 - 4x^4 + 8x^6 - 16x^8 + 32x^{10}$. Nyní je zřejmé, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2^{n-1} x^{2(n-1)}$ vůbec neobsahuje členy s lichou mocninou proměnné *x*. Pro koeficienty a_{2n-1} této řady tedy platí $a_{2n-1} = 0$. Dále je $a_0 = -1,\ a_2 = 2,\ a_4 = -4,\ a_6 = 8,\ a_8 = -16,\ a_{10} = 32,\ \ldots\ a_{2n} = (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}$.

U takovéto mocninné řady nemůžeme užít žádný z dosud uvedených vzorců pro výpočet čísla *q*. Pokud bychom chtěli psát podíly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, pak jich „polovina“ vůbec neexistuje. Je-li totiž *n* liché, je ve jmenovateli zlomku 0. Neexistuje tudíž $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ a nejsme schopni určit ani poloměr konvergence *R*.

Zcela stejně dopadne i pokus o výpočet limity $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Ani tato limita neexistuje. Vybraná posloupnost lichých členů má totiž limitu 0 a vybraná posloupnost sudých členů 2. Přímý postup tedy nevede k cíli, nejsme schopni určit číslo *q* a tedy ani poloměr konvergence *R* dané řady.

Označme proto $x^2 = u$. Dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{n-1} u^{n-1}$. Tato řada již obsahuje všechny mocniny proměnné u, je $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = -4,\ a_3 = 8,\ a_4 = -16,$ $a_5 = 32,\ \ldots\ a_n = (-1)^{n+1} 2^n$.

Nyní již můžeme spočítat $q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$. Tudíž $R = \frac{1}{2}$ a mocninná řada konverguje pro $u \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} \right)$.

Ovšem nyní je třeba určit poloměr konvergence původní řady. Ta konverguje pro x^2 náležející do intervalu $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} \right)$. Vzhledem k tomu, že $x^2 \geq 0$ pro všechna reálná x, hledáme ta x, pro něž platí $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{2}$. To je ale ekvivalentní s nerovností $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tj. $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = J$, což je interval konvergence a poloměr konvergence je $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

Řešení.

Pro tento příklad je střed oboru konvergence $x_0 = -1$, ale koeficienty $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$ pro všechna $n \in N$ jsou o něco složitější. Proto si je rozdělíme na dvě jednodušší části: $a_{n1} = \frac{3^n}{n}$ a $a_{n2} = \frac{(-2)^n}{n}$ a pokusíme se najít poloměr konvergence zvlášť.

1. Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x+1)^n$. Použijeme zde odmocninové kritérium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$. Poloměr konvergence dané řady je $R_1 = \frac{1}{3}$ a interval konvergence je $J_1 = (x_0 - R_1;\ x_0 + R_1) = \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3} \right)$.

2. Další řada je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} (x+1)^n$. Stejně jako v předchozím příkladě použijeme odmocninové kritérium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$. Zde poloměr konvergence vychází $R_2 = \frac{1}{2}$ a interval $J_2 = (x_0 - R_2;\ x_0 + R_2) = \left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

Jelikož poloměr konvergence součtu dvou řad je dán jako minimum jednotlivých poloměrů konvergence $R = \min(R_1;\ R_2) = \min\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$, pak mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ má poloměr konvergence $R = \frac{1}{3}$ a tudíž interval $J = \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

Nebo můžeme výpočet provést jednodušeji. Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ a podle podílového kritéria zjistíme rovnou poloměr konvergence.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^n + (-2)\cdot(-2)^n}{3^n + (-2)^n} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + (-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \cdot 1 = 3$$

Je tedy $R = \frac{1}{3}$ a vzhledem k tomu, že jde o mocninnou řadu se středem v bodě $x_0 = -1$, je interval konvergence $J = \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6n)!}{n^n(5n)!}\,(x-4)^n$

Řešení.

Střed mocninné řady je $x_0=4$ a koeficient je $a_n=\frac{(6n)!}{n^n(5n)!}$. Jelikož zde převažuje faktoriál nad n^n, bude lepší použít podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(6(n+1)\right)!}{(n+1)^{n+1}\left(5(n+1)\right)!}}{\frac{(6n)!}{n^n(5n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(6n+6)!}{(n+1)^{n+1}(5n+5)!}\cdot\frac{n^n(5n)!}{(6n)!}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(6n+6)(6n+5)(6n+4)(6n+3)(6n+2)(6n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}.$$

Užijme větu o limitě součinu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+6}{5n+5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+5}{5n+4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+4}{5n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{5n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{5n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=$$

$=\frac{6^6}{5^5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ovšem $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ a tedy výsledná limita je $q=\frac{6^6}{5^5}\frac{1}{e}$.

Poloměr konvergence mocninné řady vychází $R=\frac{5^5}{6^6}e$ a interval

$$J=(x_0-R;\;x_0+R)=\left(4-\frac{5^5}{6^6}e;\;4+\frac{5^5}{6^6}e\right)=\left(\frac{4\cdot 6^6-5^5e}{6^6};\;\frac{4\cdot 6^6+5^5e}{6^6}\right).$$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\left(2x+4\right)^n$

Řešení.

Nejprve si mocninnou řadu upravíme na tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$. Toho dosáhneme vytknutím 2^n před závorku. Mocninná řada má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}(x+2)^n$ se středem $x_0=-2$ a koeficienty $a_n=\frac{2^n}{n^n}$ pro všechna $n \in N$. Pro tuto řadu mohu použít odmocninové kritérium. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$.

Pro danou mocninnou řadu vychází $q=0$, proto je její poloměr konvergence je roven $R=\infty$ a interval je J = (-∞; ∞).

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$; $a>0$ a $b>0$

Řešení.

V tomto příkladu bude zřejmě poloměr konvergence R dané řady záviset na parametrech *a, b* a naším úkolem bude provést diskuzi. Řada má střed $x_0=0$ a použijeme podílové kritérium $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}}{\frac{1}{a^n+b^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$.

Zkoumáme situace:

1.) Je-li $a \ge b$, vydělíme čitatel i jmenovatel a^n.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$, neboť $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$. Pak $q=\frac{1}{a}$ a poloměr konvergence je R = *a*.

2.) Je-li nyní $a<b$, vyjde zřejmě $q=\frac{1}{b}$ a poloměr konvergence je R = *b*. Poloměr konvergence této mocninné řady je roven maximu z čísel *a, b* jejich poloměrů, tj. $R=\max(a;\ b)$.

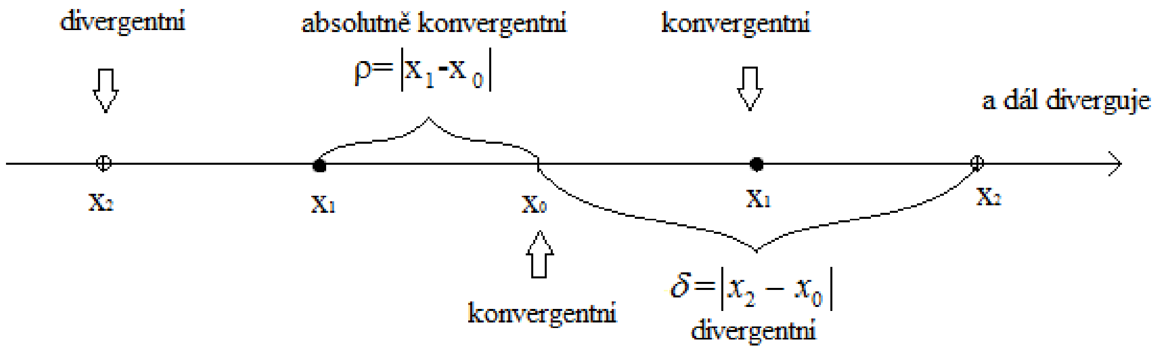
1.3 OBOR KONVERGENCE

Věta: Abelova věta o absolutní konvergenci

Je-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ se středem v bodě x_0 konvergentní v některém bodě $x_1 \neq x_0$, jehož vzdálenost od x_0 je $\rho := |x_1 - x_0| > 0$, pak ve všech bodech $x \in (x_0 - \rho;\ x_0 + \rho)$ konverguje absolutně.

Důsledek Abelovy věty

Diverguje-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ v některém bodě $x_2 \in R$, kde $x_2 \neq x_0$, pak je také divergentní na množině $(-\infty;\ x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta;\ \infty)$ kde $\delta := |x_2 - x_0|$ a platí $|x - x_0| > \delta$, tedy v bodech $\{x \in \delta : |x - x_0| > |x_2 - x_0|\}$.



Obr.1. Abelova věta o absolutní konvergenci a její důsledek

Věta: Abelova věta o stejnoměrné konvergenci

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$ a má poloměr konvergence $R > 0$. Potom tato řada konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $\langle a,\ b\rangle \subset J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Věta: Absolutní a stejnoměrná konvergence mocninné řady

Nechť je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ s konečným a kladným poloměrem konvergence R, potom platí jestliže:

- mocninná řada konverguje, případně absolutně, na $\langle x_0 - R;\ x_0 + R \rangle$, pak $K = K_a = \langle x_0 - R;\ x_0 + R \rangle$
- mocninná řada konverguje, případně absolutně, na každém intervalu $\langle x_0 - R;\ a \rangle$, kde $x_0 - R < a < x_0 + R$, pak $K = \langle x_0 - R;\ x_0 + R)$, ale $K_a = (x_0 - R;\ x_0 + R)$
- mocninná řada konverguje, případně absolutně, na každém intervalu $\langle b;\ x_0 + R \rangle$, kde $x_0 - R < b < x_0 + R$, pak $K = (x_0 - R;\ x_0 + R \rangle$, ale $K_a = (x_0 - R;\ x_0 + R)$
- mocninná řada konverguje i absolutně na každém intervalu $\langle a;\ b \rangle$, kde $x_0 - R < a < b < x_0 + R$, pak $K = K_a = (x_0 - R;\ x_0 + R)$

Číslo K se nazývá obor konvergence mocninné řady a K_a se nazývá obor absolutní konvergence.

Pro poloměr, obor konvergence a obor absolutní konvergence platí vztah: $J \subset K_a \subset K$.

1.3.1 URČETE OBOR KONVERGENCE MOCNINNÉ ŘADY

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Řešení.

V příkladu 1.2.1 a) na straně 8 jsme zjistili, že daná mocninná řada střed $x_0 = 0$, poloměr konvergence $R = 1$ a interval $J = (-1;\ 1)$. Nyní rozhodneme o konvergenci v krajních bodech tohoto intervalu konvergence dosazením do zadané mocninné řady.

Do řady dosadíme hodnotu $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ a pak hodnotu $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}1^n$. Tyto číselné řady nesplňují nutnou podmínku konvergence $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, a proto dostáváme divergentní řady.

Hodnoty -1 a 1 nepatří do oboru konvergence řady ani do oboru absolutní konvergence řady a platí $K=K_a=J=(-1;\ 1)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

Řešení.

Tato mocninná řada má střed $x_0=0$ a koeficienty $a_n=n$ pro všechna $n\in N$. Její poloměr určíme použitím odmocninového kritéria $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Tedy poloměr konvergence je $R=1$ a interval konvergence se rovná $J=(-1;\ 1)$.

Nyní dosadíme hodnotu $x=-1$, čímž dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$. Jelikož není splněna nutná podmínka konvergence, je tato řada divergentní.

Pro hodnotu $x=1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}n$, která je také divergentní.

Protože hodnoty $x=-1$ a $x=1$ nepatří ani do oboru konvergence řady ani do oboru absolutní konvergence řady, zapisujeme $K=K_a=J=(-1;\ 1)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x+1)^n$

Řešení.

Daná mocninná řada má střed $x_0=-1$ a koeficienty $a_n=\frac{1}{n}$ pro všechna $n\in N$.

Použijeme odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$. Tím jsme určili poloměr konvergence $R=1$ a interval konvergence vychází podle vzorce $J=(x_0-R;\ x_0+R)=(-2;\ 0)$.

Nyní rozhodneme o konvergenci krajních bodů tohoto intervalu.

Dosadíme-li $x=-2$, dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$. Jedná se o řadu alternující, která má $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Ta splňuje podmínky Leibnizova kritéria a proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$ konvergentní. Hodnota -2 patří do oboru konvergence mocninné řady.

Po dosazení $x=0$ do řady, vyjde řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}$, tedy harmonická řada a ta je divergentní. Tedy hodnota 0 nepatří do oboru konvergence řady.

Tato řada má obor konvergence $K=\langle -2;\ 0)$, ale obor absolutní konvergence je roven $K_a=(-2;\ 0)$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}(x-10)^n$

Řešení.

Koeficienty mocninné řady jsou $a_n=\frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}$ a střed $x_0=10$. Zde můžeme použít odmocninové kritérium $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}}=2$, odkud poloměr konvergence $R=\frac{1}{2}$. Interval konvergence vyjde podle vzorce

$J=(x_0-R;\ x_0+R)=\left(\frac{19}{2};\ \frac{21}{2}\right)$.

Pro hodnotu $x=\frac{19}{2}$, vyjde číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$.

Tato řada je konvergentní splňující podmínky Leibnizova kritéria.

Dosadíme-li hodnotu $x=\frac{21}{2}$, dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

Danou řadu vyšetříme srovnávacím kritériem:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{\sqrt{n^2+2n}} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Nalezli jsme divergentní minorantu, proto i vyšetřovaná řada diverguje. Obor konvergence je roven $K = \left\langle \frac{19}{2};\ \frac{21}{2} \right)$ a obor absolutní konvergence $K_a = \left(\frac{19}{2};\ \frac{21}{2} \right)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}(x+2)^n$

Řešení.

V této mocninné řadě máme koeficienty $a_n = \frac{4^n}{n!}$ pro všechna $n \in N$ a střed konvergence $x_0 = -2$.

Použijeme zde podílové kritérium $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+1} = 0$, odkud dostáváme poloměr konvergence $R = \infty$. Vychází nám interval $J = (-\infty;\ \infty)$ a to je zároveň obor konvergence řady a obor absolutní konvergence řady $K = K_a = (-\infty;\ \infty)$.

f) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\left(\frac{x}{2}-1\right)^n$

Řešení.

Nejprve si řadu upravíme do základního tvaru $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, tím že vytkneme před závorku $\frac{1}{2^n}$. Dostáváme tím mocninnou řadu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{2^n n}(x-2)^n$, která má střed $x_0 = 2$ a koeficienty $a_n = (-1)^n\frac{\ln n}{2^n n}$ pro všechna $n \in N$. Použijeme-li odmocninové kritérium $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{\ln n}{2^n n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\ln n}}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$, dostáváme poloměr konvergence $R = 2$ a interval $J = (0;\ 4)$.

Obor konvergence určíme dosazením krajních bodů 0 a 4 do řady.

Pro hodnotu $x=0$ dostaneme číselnou řadu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{2^n n}(-2)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$, která je majorantou harmonické řady $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$. Proto tato hodnota nepatří do oboru konvergence.

Když dosadíme hodnotu $x=4$ do řady, dostaneme

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{2^n n}(2)^n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$. Je to číselná řada alternující splňující podmínky Leibnizova kritéria, která konverguje.

Tato hodnota patří do oboru konvergence, proto mohu zapsat $K=(0;\ 4\rangle$. Obor absolutní konvergence se rovná intervalu řady $K_a = J = (0;\ 4)$.

g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n+2}x^n$

Řešení.

Máme mocninnou řadu se středem $x_0=0$ a koeficienty $a_n = \frac{n!}{n+2}$ pro všechna $n \in N$. Poloměr konvergence určíme podílovým kritériem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1+2)}}{\frac{n!}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{n+3} = \infty.$$

Výsledkem je $R=0$, čímž dostáváme degenerovaný interval rovný svému středu $J=\{0\}$. To je zároveň obor konvergence a obor absolutní konvergence řady $K=K_a=J=\{0\}$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}(4+2x)^{2n+1}$

Řešení.

Pro lepší přehled si řadu rozepíšeme do základního tvaru $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

Vytkneme 2^{n+1} ze závorky a pak dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}(x+2)^{2n+1} =$

$=(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}(x+2)^{2n}$. Vyšetřeme obor konvergence řady jen pro sudé mocniny: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}(x+2)^{2n}$. Označme $(x+2)^2=u$ a dostáváme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}\cdot u^n$. Tato mocninná řada již má u všech mocnin u^n nenulové koeficienty $a_n=\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}$ a proto lze užít vzorec pro výpočet

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+2}}{4(n+1)^2+1}}{\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2^2\cdot\left(4n^2+1\right)}{2^n\cdot 2\cdot\left(4n^2+8n+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2}{4n^2+8n+1}=2.$$

Je tedy $R=\frac{1}{2}$ a řada konverguje pro $u\in J_2=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}(x+2)^{2n}$ pak konverguje pro ta *x*, pro něž platí $-\frac{1}{2}<(x+2)^2<\frac{1}{2}$.

Nerovnost vlevo platí pro všechna $x\in R$. Zjistíme, pro která *x* platí $(x+2)^2<\frac{1}{2}$.

Je $|x+2|<\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ a to platí pro ta *x*, jejichž vzdálenost od -2 je menší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $x\in\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Tím jsme nalezli interval konvergence původní řady a její poloměr konvergence $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tento interval konvergence je zároveň obor konvergence $J=K=\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Nyní rozhodneme o absolutní konvergence dosazením krajních hodnot do řady $(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n^2+1}(x+2)^{2n}$. Pro obě hodnoty $x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ dostaneme $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+1}$. Hledáme, pro které *n* platí $\frac{2}{4n^2+1}<\frac{2}{4n^2}=\frac{1}{2n^2}$.

Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ je konvergentní majorantou řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+1}$, která je tedy konvergentní. Obor absolutní konvergence je $K_a = \left\langle -2-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -2+\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$

Řešení.

Mocninná řada má střed v bodě $x_0 = 0$ a $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ pro všechna $n \in N$.

Vzhledem k výskytu mocniny n^2 bude vhodnější použít odmocninové kritérium. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Poloměr konvergence $R = \frac{1}{e}$ a tím pádem interval konvergence je roven $J = \left(-\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right)$.

Po dosazení $x = -\frac{1}{e}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(-\frac{1}{e}\right)^n$. Abychom zjistili konvergenci, využijeme nutnou podmínku konvergence. Limita n-tého členu neexistuje a proto řada diverguje.

Pro hodnotu $x = \frac{1}{e}$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Použijme opět nutnou podmínku konvergence $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 1$. Jelikož hodnota vyšla jiná než nula, pak podmínka není splněna a řada je divergentní.

Obor konvergence řady a obor absolutní konvergence řady je roven intervalu $K = K_a = J = \left(-\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right)$.

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{2-\pi^n}\right)^n (x+3)^n$

Řešení:

Tato mocninná řada se středem $x_0 = -3$ a koeficientem $a_n = \dfrac{n!}{2-\pi^n}$ pro všechna $n \in N$, obsahuje jak *n!*, tak i *n*-tou mocninu a to celé je v *n*-té mocnině. Proto bude lepší použít odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n!}{2-\pi^n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{2-\pi^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n!}{\pi^n}}{\frac{2}{\pi^n}-1}\right| = \infty .$$

Přičemž hodnota *n!* je mnohem větší než hodnota π^n a proto limita se rovná nekonečnu. Značíme $n! \gg \pi^n$. Poloměr konvergence se tedy rovná $R = 0$ a interval konvergence se nachází ve svém středu $J = \{-3\}$. Tato hodnota platí i pro obor konvergence a pro obor absolutní konvergence $K = K_a = \{-3\}$.

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n$

Řešení.

Střed této mocninné řady je $x_0 = 2$ a koeficienty $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pro všechna $n \in N$.

Můžeme použít podílové kritérium $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$,

přičemž nám vyjde poloměr konvergence $R = 1$. Interval konvergence se rovná $J = (1;\ 3)$.

Pro hodnotu $x = 1$ dostáváme číselnou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Ta konverguje podle Leibnizova kritéria - je alternující, posloupnost $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ je nerostoucí a její limita $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pro hodnotu $x = 3$ obdržíme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, která konverguje absolutně.

Hodnoty 1 a 3 patří jak do oboru konvergence, tak i do oboru absolutní konvergence. Proto platí $K = K_a = J = \langle 1;\ 3\rangle$.

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}x^n\ ,\ a>0$

Řešení.

V dané mocninné řadě se vyskytuje parametr a a jde o řadu se středem v počátku $x_0=0$. Použijeme odmocninové kritérium s koeficientem $a_n=\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}=1$. Tedy poloměr konvergence $R=1$ a interval $J=(-1;1)$.

Pro hodnotu $x=-1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}$ a pro $x=1$ řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$.

Abychom určili obor konvergence, musíme provést diskusi pro parametr a.

Bude-li $a\le 1$, pak obě dvě řady budou divergentní, protože nesplňují nutnou podmínku konvergence. Obor konvergence a obor absolutní konvergence je $K=K_a=J=(-1;\ 1)$.

Pro $a>1$ budou obě dvě řady konvergentní. Pro první řadu lze užít Leibnizovo kritérium a pro druhou srovnávací kritérium, kdy její majoranta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ je vždy konvergentní. Tudíž obor konvergence a obor absolutní konvergence se rovná $K=K_a=\langle -1;\ 1\rangle$.

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\ a>0$ a $b>0$

Řešení.

Tento příklad je o něco složitější, protože se nám zde vyskytují parametry a a b a ještě ve společném součtu. Proto danou mocninnou řadu můžeme rozložit na součet dvou řad: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$, se společným středem $x_0=0$. Pro každou řadu určíme zvlášť poloměr konvergence, interval a obor konvergence.

1. Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$, na kterou můžeme použít odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{n}}=a$. Dostáváme tak poloměr konvergence $R_1=\frac{1}{a}$ a interval $J_1=\left(-\frac{1}{a};\ \frac{1}{a}\right)$.

   Dosadíme teď hodnotu $x=-\frac{1}{a}$ do řady, tím pádem dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. O té víme, že je konvergentní podle Leibnizova kritéria. Tato hodnota patří do oboru konvergence.

   Pro hodnotu $x=\frac{1}{a}$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}$, která je divergentní.

   Obor konvergence je roven $K_1=\left\langle-\frac{1}{a};\ \frac{1}{a}\right)$, ale obor absolutní konvergence je roven intervalu konvergence $K_{a1}=J_1=\left(-\frac{1}{a};\ \frac{1}{a}\right)$.

2. Nyní mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$. Stejně jako v předchozí řadě použijeme odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{b^n}{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt[n]{n^2}}=b$. Zde poloměr konvergence vychází $R_2=\frac{1}{b}$ a interval $J_2=\left(-\frac{1}{b};\ \frac{1}{b}\right)$.

   Dosadíme-li hodnotu $x=-\frac{1}{b}$ do řady, dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, konvergentní řadu podle Leibnizova kritéria.

   S hodnotou $x=\frac{1}{b}$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}$, která je konvergentní.

   Interval patří do oboru konvergence i do oboru absolutní konvergence řady $K_2=K_{a2}=J_2=\left\langle-\frac{1}{b};\ \frac{1}{b}\right\rangle$.

Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$ vzniklá součtem dvou řad má poloměr konvergence jako minimum jednotlivých poloměrů konvergence $R=\min(R_1;\ R_2)$. Nyní zkoumáme situaci, kdy $a \geq b$, pak je poloměr konvergence $R=\frac{1}{a}$. Obor konvergence se rovná $K=\left\langle -\frac{1}{a};\ \frac{1}{a}\right)$. Pro případ $a<b$ je poloměr konvergence $R=\frac{1}{b}$ a obor konvergence s oborem absolutní konvergence vychází $K=K_a=\left\langle -\frac{1}{b};\ \frac{1}{b}\right\rangle$.

1.3.2 UDEJTE PŘÍKLAD MOCNINNÉ ŘADY, KTERÁ MÁ OBOR KONVERGENCE

a) $K=(1;\ 3)$

Řešení.

Nejprve si vypíšeme vše, co můžeme o mocninné řadě napsat. Vidíme, že její střed se nachází v $x_0=2$ a poloměr konvergence je roven $R=1$. Hledáme takovou řadu, ve které vyjde po užití odmocninového či podílového kritéria $q=1$.

Vezmeme-li řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-2)^n$, zjistíme, že poloměr konvergence vyjde jedna. Bohužel, tato řada nemá zadaný obor konvergence. Pro hodnotu $x=1$, podle Leibnizova kritéria vyjde řada konvergentní, ale my potřebujeme řadu divergentní.

Proto můžeme vzít buď $a_n=n:\sum_{n=1}^{\infty}n(x-2)^n$, nebo jen $a_n=1:\sum_{n=1}^{\infty}1(x-2)^n$. Obě dvě mocninné řady jsou divergentní pro každou z hodnot $x=1,\ x=-1$. Není pro ně splněna nutná podmínka konvergence.

b) $K=(-\infty;\ \infty)$ s $x_0=15$

Řešení.

Jelikož poloměr konvergence se nachází v celém svém oboru $R=\infty$, pak daný střed konvergence $x_0=15$ je tu jako dodatek k řadě. Nyní zkoumáme limitu, která se musí rovnat $q=0$. Stejně jako v předchozím příkladě použijeme podílové kritérium. Pro tento případ hledáme zlomek, kde v čitateli je neznámá s mocninou menší než ve jmenovateli. Příklad na obor konvergence $(-\infty;\ \infty)$ je $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^n}(x-15)^n$.

c) $K=\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right\rangle$

Řešení.

Střed řady se nachází $x_0=1$ s poloměrem konvergence $R=\frac{1}{2}$, tím pádem výsledkem z některého z kritérií musí být $q=2$.

Vyberme nejprve takovou řadu, pro niž vyjde interval $J=\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Mohla by to být $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n$? Když použijeme odmocninové kritérium, pak daný interval vychází. Dosadíme-li krajní body do řady, vyjdou nám divergentní řady. Musíme ji tedy poupravit.

Zkusme tedy řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-1)^n$, pro kterou vychází správný interval konvergence.

Po dosazení hodnot $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$ zjistíme, že se už u jedné z nich objevuje konvergentnost podle Leibnizova kritéria. Bohužel se nachází na špatné straně a obor konvergence je $K=\left\langle\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$. Tedy musíme do čitatele přidat $(-1)^n$, aby se konvergence prohodila. Výsledná mocninná řada, pro niž platí obor konvergence má tvar: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}(x-1)^n$.

d) $K = \{11\}$

Řešení.

Obor konvergence je roven středu konvergence řady, který se nachází v $x_0 = 11$. Aby poloměr konvergence byl $R = 0$, musí daná limita vyjít $q = \infty$. To můžeme zjistit podílovým kritériem, kde dostaneme zlomek. Takovou podmínku splňuje například mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-11)^n$.

e) $K = \langle -16;\ -8)$

Řešení.

Z oboru konvergence je zřejmé, že střed je $x_0 = -12$ a poloměr konvergence $R = 4$. Výsledkem některého z užívaných kritérií musí být $q = \frac{1}{4}$.

Najít mocninnou řadu pro tento obor hodnot je jednoduché. Stačí využít formulace z příkladu *b)*, která má obrácené závorky. Vezmeme-li tedy řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n}\left(x+12\right)^n$ a vypočteme její limitu s odmocninovým kritériem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n}}$, zjistíme, že se $q = 4$. Musíme tedy hodnoty obrátit a následná řada vypadá: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}\left(x+12\right)^n$. Tato řada již má interval $J = (-16;\ -8)$ a nyní zjistíme, zda se rovná i oboru konvergence. Dosadíme hodnotu $x = -16$ do řady a vychází nám divergentní řada. Musíme tedy hodnotu *n* vrátit zpátky do jmenovatele. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n4^n}\left(x+12\right)^n$ má stejný interval a i obor konvergence. Číselná řada vzniklá dosazením $x = -16$ už konverguje podle Leibnizova kritéria a hodnota $x = -8$ diverguje.

f) $K = \left\langle -\frac{21}{5};\ -\frac{19}{5} \right\rangle$

Řešení.

Nevadí ani, že tento obor konvergence obsahuje zlomky s většími čísly. Lehce zjistíme, že má střed $x_0 = -4$ a poloměr konvergence má být $R = \frac{1}{5}$. Tedy musí vyjít limita $q = 5$. Nejprve si najdeme řadu s intervalem $J = \left(-\frac{21}{5};\ -\frac{19}{5} \right)$ a pak ji případně pozměníme jako v předchozích příkladech.

Vezměme si jednoduchou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x+4)^n$. Po použití odmocninového kritéria $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$ zjistíme, že se rovná poloměru konvergence a dále intervalu, ale oboru konvergence ne. Pro obě krajní hodnoty daná řada diverguje.

Přidáme-li neznámou *n* do jmenovatele ve zlomku, pak řada vypadá: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n}(x+4)^n$.

Stále má stejný interval. Dosadím hodnotu $x = -\frac{21}{5}$ a dostávám konvergentní řadu podle Leibnizova kritéria. Již je jasné, že pro hodnotu $x = -\frac{19}{5}$ bude řada divergentní.

Musíme tedy ještě jednou upravit řadu, a to tak, že přidáme druhou mocninu k neznámé *n*. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}(x+4)^n$ je konečným výsledkem pro tento obor konvergence. Rovná se intervalu konvergence a obě dvě krajní hodnoty jsou vzniklé číselné řady konvergentní.

Poznámka.

Všechny tyto řady jsou jen jednoduchým příkladem k danému oboru konvergence. Do řady můžeme přidat další čísla či neznámé jako např.: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n^2+n+1}(x+4)^n$.

Můžeme pozměnit tvar středu. Pro tento příklad by mohl mít tvar $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}(5x+20)^n$.

Pro toho, kdo si myslí, že je to moc jednoduché, může použít substituci. Řada s velmi jednoduchou substitucí může vypadat takto: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{\left(2n+1\right)^2}(x+4)^{2n+1}$.

Tu si nejprve upravíme do tvaru

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{\left(2n+1\right)^2}(x+4)^{2n+1}=\left(x+4\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{\left(2n+1\right)^2}(x+4)^{2n}$. Do substituce bychom dali $u=\left(x+4\right)^2$ a dostaneme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{\left(2n+1\right)^2}\ u^n$.

2 VLASTNOSTI MOCNINNÝCH ŘAD

Věta: O spojitosti součtové funkce

Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mající součtovou funkci $s = s(x)$, definovanou předpisem $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$. Pak $s(x)$ je spojitou funkcí na svém intervalu konvergence $J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$.

- Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konverguje v krajním bodě $x = x_0 + R$ intervalu konvergence, pak součtová funkce je spojitá v bodě $x = x_0 + R$ zleva, tj. platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + R)^n = \lim\limits_{x \to (x_0+R)^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right)$.
- Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ v krajním bodě $x = x_0 - R$ intervalu konvergence, pak součtová funkce je spojitá v bodě $x = x_0 - R$ zprava a platí: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - R)^n = \lim\limits_{x \to (x_0-R)^+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right)$.

Definice: Operace s mocninnými řadami

Mějme řady: $s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ s poloměrem konvergence $R_1 > 0$ a $s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots$ s poloměrem konvergence $R_2 > 0$. Označme $R = \min(R_1;\ R_2)$. Pak v intervalu konvergence $J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$ definujeme:

1. Součet a rozdíl mocninných řad

   $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$ a pro součtovou funkci

   $s_1(x) \pm s_2(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)(x-x_0) + (a_2 \pm b_2)(x-x_0)^2 + \dots$

2. Součin mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = s_1(x)\cdot s_2(x) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x-x_0) +$$

$$+(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

3. c-násobek mocninné řady, $c \in R$

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n (x-x_0)^n$$

Věta: Integrování mocninné řady

Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ a nechť $s(x)$ je její součtová funkce na intervalu konvergence $J = (x_0 - R;\ x_0 + R)$.

- Pak neurčitý integrál součtu mocninné řady je roven součtu neurčitých integrálů jednotlivých členů řady:

$$\int s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x-x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + c = a_0 (x-x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} +$$

$$+a_2 \frac{(x-x_0)^3}{3} + \dots + c\,,\ c \in R\,.$$

- Pro určitý integrál součtu mocninné řady od x_0 do x vznikne součtem určitých integrálů člen po členu řady, kde $x \in J$:

$$\int_{x_0}^{x} s(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (t-x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + c\,,\ c \in R\,.$$

Proměnná x může nabýt i hodnoty $R(-R)$, jestliže v tomto bodě mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konverguje.

Řady vzniklé integrováním mají stejný poloměr konvergence jako řada původní.

Věta: Derivování mocninné řady

Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ s poloměrem konvergence $R>0$ a nechť $s(x)$ je její součtová funkce na intervalu konvergence $J=\left(x_0-R;\ x_0+R\right)$.

Pak derivace součtu řady je rovna součtu derivací jednotlivých členů řady:

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\left(x-x_0\right)^{n-1}=a_1+2a_2\left(x-x_0\right)+3a_3\left(x-x_0\right)^2+\ldots.$$

Jestliže mocninná řada konverguje v některém krajním bodě intervalu konvergence, pak v tomto bodě existuje jednostranná derivace funkce $s(x)$.

Řady vzniklé derivováním mají stejný poloměr konvergence jako řada původní.

Poznámka:

Mocninnou řadu lze postupným integrováním, případně postupným derivováním člen po členu převést na řadu geometrickou. Pak tuto řadu sečíst a derivováním případně integrováním tohoto součtu získat součet řady původní.

2.1.1 NAJDĚTE PŘEDPIS PRO SOUČTOVOU FUNKCI ŘADY

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

Řešení.

Nejprve si stanovíme interval konvergence dané mocninné řady. Použijeme odmocninové kritérium $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. Interval konvergence je roven $J=\left(-1;\ 1\right)$.

Nyní najdeme obor konvergence této řady.

Dosadíme hodnotu $x=-1$ do řady: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$. Vzniklá číselná řada konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro hodnotu $x=1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}$, která diverguje.

Obor konvergence je $K=\left\langle -1;\ 1\right)$.

V intervalu konvergence existuje součet řady $s(x)$ a řadu lze člen po členu integrovat nebo derivovat. Je zřejmé, že odstranění koeficientu $\frac{1}{n}$ dosáhneme derivováním: $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=(x)'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'+\left(\frac{x^3}{3}\right)'+\ldots=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$.

Tato řada je geometrická řada, jejíž první člen je $a_1=1$ a kvocient $q=x$. Její součet je tudíž roven $\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-x}$ a tedy $s'(x)=\frac{1}{1-x}$ pro všechna $x\in\langle -1;\ 1)$. Odtud dostáváme integrováním $\int s'(x)dx=s(x)=\int\frac{1}{1-x}\,dx=-\ln(1-x)+c$. Zbývá stanovit konstantu c a tu vypočteme po dosazení $x=0$ do předchozí rovnice: $s(0)=-\ln(1-0)+c=c$ a tedy $c=0$.

V intervalu $\langle -1;\ 1)$ tedy platí $s(x)=-\ln(1-x)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n$

Řešení.

Interval konvergence tentokrát vypočteme podle podílového kritéria: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$. Dostáváme $J=(-1;\ 1)$ a po dosazení krajních bodů do mocninné řady zjistíme, že obě dvě hodnoty jsou divergentní. Obor konvergence je $K=(-1;\ 1)$.

V intervalu $(-1;\ 1)$ existuje součtová funkce $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n$. Jelikož se v řadě vyskytuje $(n+1)$, budeme ji tedy integrovat člen po členu.

$\int s(x)\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n dx=$

$\int 2x\,dx+\int 3x^2dx+\int 4x^3dx+\ldots=x^2+x^3+x^4+\ldots+c=x^{n+1}+c$.

Dostáváme tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \int (n+1)\, x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$ geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x^2$ a s kvocientem $q = x$. Její součtová funkce v intervalu $(-1;\ 1)$ je $s'(x) = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{x^2}{1-x}$ a tedy $\int s(x)\, dx = \dfrac{x^2}{1-x} + c$.

Součet původní řady vypočteme derivováním:

$$s(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} + c \right)' = \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

V intervalu $(-1;\ 1)$ je součet řady roven $s(x) = \dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n2^n}$

Řešení.

Pro tuto mocninou řadu využijeme odmocninové kritérium k určení intervalu konvergence: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \dfrac{(-1)^n}{n2^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Tím dostáváme interval konvergence $J = (-2;\ 2)$.

Obor konvergence určíme dosazením hodnoty $x = -2$ a $x = 2$ do mocninné řady. Dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1^n}{n}$, která je divergentní a konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ podle Leibnizova kritéria.

Obor konvergence je roven $K = (-2;\ 2\rangle$.

Nejprve budeme danou řadu derivovat v intervalu $(-2;\ 2\rangle$.

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n2^n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n \frac{x^{n-1}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{2^n}.$$

Tato geometrická řada má první člen této řady $a_1 = -\frac{1}{2}$ a kvocient $q = -\frac{x}{2}$. Tedy

její součet je $s'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2+x}$.

Hledáme ale původní součtovou funkci a tu dostaneme integrováním.

$\int s'(x)\,dx = \int -\frac{1}{2+x}\,dx = -\ln(2+x)+c$.

Konstantu *c* vypočteme po dosazení $x=0$ do předchozí rovnice.

$s(0) = -\ln(2+0)+c$ a z toho vyplývá, že $c = \ln 2$.

Součet řady v intervalu $\left(-2;\ 2\right\rangle$ se rovná $s(x) = -\ln(2+x)+\ln 2 = \ln\frac{2}{2+x}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$

Řešení.

Jelikož se v mocninné řadě objevuje x^{2n}, znamená to, že zde chybí členy s lichou mocninou. Musíme proto využít substituci $x^2 = u$ a dostáváme mocninou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)u^n$, která již má všechny členy.

V této mocninné řadě určíme interval konvergence pomocí podílového kritéria: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$. Poloměr konvergence je $R=1$ a řada konverguje pro $u \in (-1;\ 1)$. Původní řada pak konverguje pro ta *x*, pro něž $-1 < x^2 < 1$. Nerovnost vlevo platí pro všechna $x \in R$. Zkoumáme, pro která *x* platí $x^2 < 1$. Tedy $|x| = 1$ a interval konvergence původní řady je $J = (-1;\ 1)$. Tím jsme nalezli i obor konvergence $K = (-1;\ 1)$ s poloměrem konvergence $R = 1$.

V tomto intervalu existuje součet řady $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$. Integrováním řady člen po členu dostáváme řadu geometrickou.

$\int s(x)\,dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + ... + c$

První člen je $a_1 = x$ a kvocient $q = x^2$, čímž dostáváme součet $\int s(x)dx = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{x}{1-x^2} + c$.

Součet původní řady vypočteme derivováním předchozí rovnice: $\left(\int s(x)\,dx\right)' = \left(\dfrac{x}{1-x^2} + c\right)' = \dfrac{1-x^2-x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$ v intervalu $(-1;\ 1)$.

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n+1}$

Řešení.

Nejprve řadu upravíme, pro kterou platí: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n+1} = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n}$.

Vyšetřeme obor konvergence řady jen pro sudé mocniny: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n}$. Použijeme substituci $x^4 = u$ a dostáváme novou mocninou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} u^n$, která již má u všech mocnin u^n nenulové koeficienty $a_n = \dfrac{1}{4n+1}$. Využijeme vzorec pro určení poloměru konvergence: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{4(n+1)+1}}{\dfrac{1}{4n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{4n+5} = 1$. Je tedy $R = 1$ a řada konverguje pro interval $u \in (-1;\ 1) = J$. Nyní musíme vyřešit konvergenci v krajních bodech. Dosazením bodů $x = -1$ a $x = 1$ do řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n}$ dostaneme pomocí srovnávacího kritéria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergentní řady. Obor konvergence se rovná $K = (-1;\ 1)$.

Tento interval konvergence a obor konvergence platí i pro řadu původní, pro kterou platí nerovnost $-1 < x^4 < 1$.

Součet řady hledáme ve tvaru funkce $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1} x^{4n+1}$. Funkci $s(x)$ budeme nejprve derivovat na intervalu $(-1;\ 1)$.

Dostaneme $s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}(4n+1)x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$.

Máme geometrickou řadu s prvním členem $a_1=1$ a kvocientem $q=x^4$, jejíž součet $s'(x)=\frac{1}{1-x^4}$. Součet $s(x)$ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$ vypočteme zpětným integrováním získané funkce $s'(x)=\frac{1}{1-x^4}$.

Dostaneme $s(x)=\int s'(x)=\int\frac{1}{1-x^4}\,dx=-\int\frac{1}{x^4-1}\,dx$. Musíme integrovat racionální lomenou funkci, která je „ryze" lomená. Použijeme tedy metodu rozkladu na parciální zlomky.

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{a}{x^2+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

$$1=a\left(x^2-1\right)+b\left(x^2+1\right)(x+1)+c\left(x^2+1\right)(x-1)$$

Koeficienty $b,\ c$ najdeme metodou dosazováním kořenů do rovnice, čímž vychází $b=\frac{1}{4}$ a $c=-\frac{1}{4}$. Koeficient a určíme metodou neurčitých součinitelů, kde dostáváme $0=a+b-c$ a se rovná $a=-\frac{1}{2}$.

Dosazením koeficientů zpátky do integrálu dostáváme

$$-\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|=$$

$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c$. Konstantu c určíme z $s(0)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0+\frac{1}{4}\ln 1+c$ a odtud $c=0$.

Součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$ je funkce $s(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ v intervalu $(-1;\ 1)$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

Řešení.

Pro určení intervalu konvergence použijeme podílové kritérium $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)+1}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$. Interval konvergence je $J = (-1;\ 1)$. Obor konvergence vyšetříme tím, že dosadíme krajní body do řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

Pro hodnotu $x = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, která je konvergentní podle Leibnizova kritéria. Číselná řada vzniklá dosazením $x = 1$ diverguje. Obor konvergence je tedy $K = \langle -1;\ 1)$.

Mějme součet řady ve tvaru funkce $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$. Jelikož tato řada by nám nikterak nepomohla při derivování, ani při integrování, musíme si řadu upravit. Vytkneme výraz $\frac{1}{x}$ a platí: $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Vyšetřujme součet řady bez konstanty $\frac{1}{x}$ a označme si další součet řady $t(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Tu můžeme derivovat $t'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots$.

První člen geometrické řady je $a_1 = x$, kvocient $q = x$. Dostáváme součet řady $t'(x) = \frac{x}{1-x}$ v intervalu $\langle -1;\ 1)$. Abychom dostali součet původní řady, musíme předchozí rovnici integrovat.

$$\int t'(x)\,dx = \int \frac{x}{1-x}\,dx = -\int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = -\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = -x - \ln|x-1| + c$$

Konstantu c vyřešíme $s(0) = -0 - \ln 1$, což je nula. Dostáváme součet řady $t(x) = -x - \ln|x-1|$ pro mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

My ale hledáme součet původní řady $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$. Ten má tvar $s(x)=\frac{1}{x}\,t(x)=-1-\frac{\ln|x-1|}{x}$ v intervalu $\langle -1;\ 1)$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

Řešení.

Určíme obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$. Protože tato mocninná řada „nemá všechny členy", provedeme nejprve substituci $x^2=u$. Z řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{n}}{n(2n-1)}$ určíme poloměr konvergence podílovým kritériem.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n+1-1}}{(n+1)\left[2(n+1)-1\right]}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}=1$. Poloměr konvergence je $R=1$ a interval konvergence je $(-1;\ 1)$. Z nerovnosti $-1<x^2<1$ dostáváme interval konvergence pro původní řadu $J=(-1;\ 1)$.

Zbývá rozhodnout o bodech $x=-1,\ x=1$. V obou případech dostáváme tutéž číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}$, která konverguje podle Leibnizova kritéria. Obor konvergence je $K=\langle -1;\ 1\rangle$.

Označme součtovou funkci $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$. Jak jistě vidíme, budeme nejprve tuto součtovou funkci derivovat. Musíme ještě provést jednu úpravu, aby se nám lépe derivovala: $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

Po derivování $s'(x)=\left(2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}\right)'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

stále nedostáváme geometrickou řadu, a proto ji musíme ještě jednou derivovat.

$$s''(x) = \left(2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'' = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = 2\left(1-x^2+x^4-x^6+\ldots\right).$$

Toto již geometrická řada je a její první člen je $a_1 = 1$ a kvocient $q = -x^2$. Její součet je $s''(x) = 2\frac{1}{1+x^2}$ v intervalu $\langle -1;\ 1\rangle$.

Součet $s(x)$ mocninné řady $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ vypočítáme zpětným integrováním získané funkce $s''(x) = 2\frac{1}{1+x^2}$. Jelikož jsme ji dvakrát derivovali, musíme ji i dvakrát integrovat, abychom získali konečný součet $s(x)$. $\int s''(x)\,dx = 2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \operatorname{arctg} x + c_1$. Konstantu c_1 určíme dosazením nuly do součtové funkce první derivace $s'(0) = 2 \operatorname{arctg} 0 + c_1$. Ta vychází $c_1 = 0$ a dostáváme součtovou funkci $s'(x) = 2 \operatorname{arctg} x$.

Teď musíme ještě podruhé integrovat: $\int s'(x)\,dx = 2\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Výpočet tohoto integrálu provedeme metodou per partes:

$$\begin{array}{ll} u' = 1 & v = \operatorname{arctg} x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Po dosazení máme $2x \operatorname{arctg} x - 2\int\frac{x}{1+x^2}\,dx = 2x \operatorname{arctg} x - \ln\left|1+x^2\right| + c_2$.

Protože $s(0) = 0$, je konstanta $c_2 = 0$. Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ je funkce $s(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln\left|1+x^2\right|$ v intervalu $\langle -1;\ 1\rangle$.

h) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n+2}$

Řešení.

Abychom mohli vyřešit obor konvergence, musíme si mocninnou řadu nejprve upravit. Platí $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n+2}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n}$.

Nyní vyšetřeme obor konvergence řady $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n}$. Vidíme, že řada obsahuje jen sudé mocniny. Využijme substituce $x^2=u$, kde dostáváme mocninnou řadu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)u^n$. Pro tuto řadu lze užít podílové kritérium: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\left[4(n+1)^2+6(n+1)+2\right]}{(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+14n+12}{4n^2+6n+2}=1$.

Poloměr konvergence je roven $R=1$ a tato řada tedy konverguje pro $u\in(-1;\,1)$.

Řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)u^n$ pak konverguje pro ta *x*, pro kterou platí $-1<x^2<1$. Tato nerovnost zaručuje, že interval konvergence původní řady $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n}$ je také $(-1;\,1)$.

Dosadíme-li krajní body $x=-1,\ x=1$ do řady $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n}$, dostáváme pro oba případy tutéž číselnou řadu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)$. Jelikož nesplňují nutnou podmínku konvergence $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)\neq 0$, jsou divergentní. Dostáváme obor konvergence $K=(-1;\,1)$.

Stanovme součet řady $s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n+2}$. Vidíme, že kvadratický trojčlen $\left(4n^2+6n+2\right)$ můžeme zapsat ve tvaru $(2n+1)(2n+2)$.

Jelikož řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n+2}$ nám nepomůže ani pro derivování, ani pro integrování, musíme součtovou funkci nejprve upravit:

$$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(4n^2+6n+2\right)x^{2n+2}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2n+2)x^{2n}\ .$$

Hledejme nyní součtovou funkci $t(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2n+2)x^{2n}$, kterou budeme integrovat v intervalu $(-1;\ 1)$. $\int t(x)=\int\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2n+2)x^{2n}dx=$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2n+2)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+2)x^{2n+1}+c\ .$$

Tuto řadu musíme ještě jednou integrovat

$$\int\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+2)x^{2n+1}dx=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+c=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}+c\ .$$

Již dostáváme geometrickou řadu s prvním členem $a_1=x^6$ a kvocientem $q=-x^2$.

Dvojitým integrováním jsme dosáhli součtu $\frac{x^6}{1+x^2}+c$.

Pro získání součtu původní řady teď musíme zpětně dvakrát po sobě derivovat.

$$t'(x)=\left(\frac{x^6}{1+x^2}+c\right)'=\frac{6x^5\left(1+x^2\right)-x^6 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{4x^7+6x^5}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$t''(x)=\left(\frac{4x^7+6x^5}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(28x^6+30x^4\right)\left(1+2x^2+x^4\right)-\left(4x^7+6x^5\right)\left(4x+4x^3\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(28x^{10}+86x^8+88x^6+30x^4\right)-\left(16x^{10}+40x^8+24x^6\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{12x^{10}+46x^8+64x^6+30x^4}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x^4\left(x^2+1\right)\left(6x^4+17x^2+15\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{2x^4\left(6x^4+17x^2+15\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Tohle je konečný součet pro $t(x)$. Součet řady pro $s(x)$ je

$$s(x)=x^2\frac{2x^4\left(6x^4+17x^2+15\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{2x^6\left(6x^4+17x^2+15\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$ v intervalu $(-1;\ 1)$.

3 VYUŽITÍ MOCNINNÝCH ŘAD

Využíváme je pro rozvoj funkcí v mocninné řady, takzvanou Taylorovu řadu a Maclaurinovu řadu.
Mocninné řady se využívají k přibližnému výpočtu integrálů nebo numerických hodnot výrazů.

3.1 TAYLOROVA A MACLAURINOVA ŘADA

Definice: Taylorova řada

Mějme funkci $f(x)$, která má v okolí bodu x_0 derivace všech řádů.

Mocninná řada $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$

$$= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots,$$

se nazývá Taylorova řada funkce $f(x)$ se středem x_0.

Definice: Maclaurinova řada

Mějme funkci $f(x)$, která má v okolí bodu $x_0=0$ derivace všech řádů.

Mocninná řada $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$

$$= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots,$$

se nazývá Maclaurinova řada funkce $f(x)$ se středem $x_0=0$.

Věta: Lagrangeův tvar zbytku

Má-li funkce $f(x)$ derivace až do řádu $n+1$ v uzavřeném intervalu s krajními body x_0 a *x*. Pak je možno zbytek $R_{n+1}(x)$ vyjádřit mezi funkční hodnotou $f(x)$ a hodnotou Taylorova rozvoje $T_n(x)$ ve tvaru: $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

se nazývá Lagrangeův tvar zbytku, kde ξ je jisté číslo z otevřeného intervalu s krajními body x_0 a *x*.

3.2 ROZVOJ ZÁKLADNÍCH FUNKCÍ

Bylo na matematicích, aby nalezli rozvoje některých elementárních funkcí do mocninných řad a zároveň nalezli intervaly konvergence těchto řad. Uvádíme dále dosti bohatý, ale stejně neúplný přehled výsledků.

1. $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \pm x \pm x^2 \pm x^3 \pm \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

2. $\frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \pm 2x \pm 3x^2 \pm 4x^3 \pm \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

3. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \qquad (-1 \le x \le 1)$

4. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$

5. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$

6. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$

7. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \ldots \qquad (a > 0,\ -\infty < x < \infty)$

8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$

9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad (-1 \le x < 1)$

10. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \qquad (-1 < x < 1)$

11. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right) \qquad (|x| > 1)$

12. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right] \qquad (x > 0)$

13. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$

14. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$

15. $\sin^2 x = x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{45}x^4-\frac{1}{315}x^6+\frac{2}{14175}x^8-...\right)$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

16. $\cos^2 x = 1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+\frac{1}{315}x^8-\frac{2}{14175}x^{10}+...$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

17. $\sin^3 x = x^3\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{120}x^4-\frac{41}{3024}x^6+\frac{671}{604800}x^8-...\right)$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

18. $\cos^3 x = 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{8}x^4-\frac{61}{240}x^6+\frac{547}{13440}x^8-\frac{703}{172800}x^{10}+...$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

19. $\operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+...$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

20. $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-...$ $\quad(0 < |x| < \pi)$

21. $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{x^7}{7}+...$ $\quad(-1 \le x \le 1)$

22. $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$ $\quad(-1 \le x \le 1)$

23. $\sinh x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

24. $\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$ $\quad(-\infty < x < \infty)$

25. $\operatorname{tg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+...$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

3.2.1 VYPOČTĚTE PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET INTEGRÁLŮ

a) Vypočtěte $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení.

Pro uvedený integrál uvažujme rozvoj funkce $f(x)=e^t$, čímž jsme nahradili funkci $f(x)=e^{-x^2}$. Rozvoj této funkce je $e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+...$ a dosaďme $t=-x^2$. Dostaneme rozvoj funkce $e^{-x^2} = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...$

Nyní můžeme vypočítat integrál $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ člen po členu a přibližnou hodnotu najít.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_1^0 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots\right) dx =$$

$$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{2!5}\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{3!7}\right]_0^1 + \left[\frac{x^9}{4!9}\right]_0^1 - \left[\frac{x^{11}}{5!11}\right] + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!11} + \ldots$$

Dostáváme řadu alternující a tak využijme toto tvrzení:

Máme-li alternující řadu konvergentní a její posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající, pak pro součet s platí: $a_1 - a_2 < s < a_1$. Obecně pro součet s řady splňující uvedené podmínky platí: $|a_{k+1} - a_{k+2}| < |s - s_k| < |a_{k+1}|$.

Je zřejmé, že daná řada splňuje oba předpoklady. Máme-li určit součet s řady s chybou menší než 10^{-4}, tak hledáme takové k, aby platilo $|s - s_k| < 10^{-4}$. Stačí najít takový k, aby platilo $a_{k+1} \leq 10^{-4}$ a tedy volíme $k+1=5$. Dosadíme za $k=5$ do $|a_{k+1} - a_{k+2}| < 10^{-4}$ a dostáváme $|a_6 - a_7| = \left|\frac{1}{5!11} - \frac{1}{6!13}\right| = 6{,}507\cdot 10^{-4} < 10^{-4}$.

Vychází nám, že stačí vzít jako poslední člen sedmý, aby chyba byla menší než 10^{-4}.

Pro kontrolu si vypišme postupně členy, kolik nám dají hodnotu. První člen je jedna, druhý člen $\frac{1}{3} = 0{,}333$ a další $\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{1}{3!7} = 0{,}0238$, $\frac{1}{4!9} = 4{,}629\cdot 10^{-3}$, $\frac{1}{5!11} = 7{,}575\cdot 10^{-4}$, $\frac{1}{6!13} = 1{,}068\cdot 10^{-4}$ a $\frac{1}{7!15} = 1{,}323\cdot 10^{-5}$.

Vidíme, že osmý člen je už menší než 10^{-4}. Proto stačí vzít součet prvních sedmi členů této řady $s_7 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!11} + \frac{1}{6!13} \doteq 0{,}7468$ pro daný integrál, který má chybu menší než 10^{-4}.

b) Vypočtěte $\int_0^1 \cos x^2 dx$ s chybou menší než 10^{-5}.

Řešení.

Výraz $\cos x^2$ je funkce $\cos t$ s funkční hodnotou $t = x^2$.

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \ldots$, kde pak $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \frac{x^{16}}{8!} - \ldots$.

Integrál této funkce je:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \frac{x^{16}}{8!} - \ldots\right) dx = [x]_0^1 - \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 + \left[\frac{x^9}{4!9}\right]_0^1 - \left[\frac{x^{13}}{6!13}\right]_0^1 +$$

$+\left[\frac{x^{17}}{8!17}\right]_0^1 - \ldots = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{6!13} + \frac{1}{8!17} - \ldots$. Tato řada je alternující, a abychom vypočetli daný integrál s chybou menší než 10^{-5}, stačí určit s_4. Pátý člen řady je $\frac{1}{8!17} = 1,458 \cdot 10^{-6}$ a je tedy menší než 10^{-5}.

Dostáváme součet prvních čtyř členů: $\int_0^1 \cos x^2 dx = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{6!13} \doteq 0,90452$.

c) Vypočtěte $\int_0^{0,1} \sqrt{1+x^3}\, dx$ s chybou menší než 10^{-6}.

Řešení.

Využijeme rozvoje $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2\cdot 4}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^4 + \ldots$, kde $t = x^3$.

Dosadíme-li zpátky, dostaneme rozvoj

$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{12} + \ldots$, který můžeme integrovat.

$$\int_0^{0,1} \sqrt{1+x^3}\, dx = \int_0^{0,1} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{12} + \ldots\right) dx =$$

$$[x]_0^{0,1} + \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^{0,1} - \left[\frac{x^7}{8\cdot 7}\right]_0^{0,1} + \left[\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{10}}{10}\right]_0^{0,1} - \ldots = 0,1 + \frac{1}{8}0,1^4 - \frac{1}{56}0,1^7 + \ldots$$

Součet prvních členů z hledaného integrálu vezmeme z alternující řady, které mají chybu menší než 10^{-6}. První člen je 0,1, druhý člen a_2 je roven $\frac{1}{8}0,1^4 = 1,25 \cdot 10^{-5}$ a třetí člen je $a_3 = \frac{1}{56}0{,}1^7 = 1{,}7857 \cdot 10^{-9}$. Vidíme, že třetí člen je menší než 10^{-6}.

Proto bereme součet prvních dvou členů z hledaného integrálu $\int_0^{0,1} \sqrt{1+x^3}\,dx$, což je

$s_2 = 0{,}1 + \frac{1}{8}0{,}1^4 = 0{,}1000125$.

3.2.2 URČETE PŘIBLIŽNOU HODNOTU

a) Vypočtěte e s chybou menší než 10^{-9}.

Řešení.

Vezměme rozvoj funkce $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$ a za x dosadíme 1.

Dostáváme rozvoj funkce $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots$.

Hledáme první sčítanec a_n takový, že bude platit $a_n < 10^{-9}$. Tato řada není alternující a tak musíme použít jiný postup.

Vypíšeme si hodnoty prvních členů této funkce:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \ldots = 2 + 0{,}5 + 0{,}166 +$$

$$+ 0{,}0416 + 8{,}33 \cdot 10^{-3} + 1{,}38 \cdot 10^{-3} + 1{,}984 \cdot 10^{-4} + 2{,}48 \cdot 10^{-5} + 2{,}755 \cdot 10^{-6} +$$

$$+ 2{,}755 \cdot 10^{-7} + 2{,}5052 \cdot 10^{-8} + 2{,}08 \cdot 10^{-9} + 1{,}605 \cdot 10^{-10} + \ldots$$

Dostaneme se k členu a_{12}, který je zřejmě poslední co má chybu větší než 10^{-9}.

Zbylé členy zanedbáváme $\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{15!} + \ldots$. Ale co když jejich společný součet má chybu větší než 10^{-9}? Tento nekonečný součet odhadneme pomocí geometrické řady s prvním členem $a_1 = \frac{1}{13!}$ a kvocientem $q = \frac{1}{14}$.

Platí: $\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{15!} + \ldots < \frac{1}{13!}\left(1 + \frac{1}{14} + \frac{1}{14^2} + \ldots\right)$, tedy součet je roven

$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{13!}}{1 - \frac{1}{14}} = \frac{1}{13!} \cdot \frac{14}{13} \doteq 1{,}7294 \cdot 10^{-10}$ a ten má chybu ještě menší než 10^{-9}.

Jak vidíme po dlouhém výpočtu, stačí nám vzít prvních dvanáct členů, které jsou menší než 10^{-9}. Součet je $s_{12} \doteq 2{,}718281828$.

Nebo můžeme výpočet provést přes Maclaurinovu řadu s tzv. Lagrangeovým tvarem zbytku $R_n(x) = \dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}e^{\xi}$, kde $\xi \in (0;\ x)$.

Je-li $x \in \langle 0;\ 1 \rangle$, je $x^{n+1} \le 1$ a $\xi \in (0;\ 1)$, proto $e^{\xi} < 3$ a pro zbytek $R_{n+1}(x)$ platí:

zvoj funkce $R_{n+1}(x) < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Mějme ro $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$

Jelikož máme $x = 1$, pak rozvoj funkce je ve tvaru:

$e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!} + \ldots \dfrac{1}{n!} + R_n(1)$, kde a $0 < \xi < 1$.

K určení přesnosti potřebujeme, aby platilo $R_{n+1}(x) \le 10^{-9}$, tj. takové n, pro které platí nerovnost $\dfrac{3}{(n+1)!} \le 10^{-9}$. Tato vlastnost platí pro $n = 12$.

Součet prvních dvanácti členů dostává $s_{12} \doteq 2{,}718281828$.

b) Vypočtěte $\cos 19°$ s chybou menší než 10^{-5}.

Řešení.

Mějme rozvoj funkce $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$, přičemž $1° = \dfrac{\pi}{180}$.

Do funkce dosadíme $x = 19°$ a dostáváme

$\cos 19° = \cos\dfrac{19\pi}{180} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{19\pi}{180}\right)^2 + \dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{19\pi}{180}\right)^4 - \dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{19\pi}{180}\right)^6 + \ldots$, která je řadou alternující. Nyní musíme najít první sčítanec a_n takový, že $|a_n| < 10^{-5}$.

Vezměme člen $a_4 = \dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{19\pi}{180}\right)^6 < \dfrac{1}{6!}\dfrac{19^6 \cdot 10^3}{18^6 \cdot 10^6} = \dfrac{1}{6!}\dfrac{19^6}{18^6 \cdot 10^3} < \dfrac{1}{6!}\dfrac{19^6}{10^6 \cdot 10^3} < 10^{-5}$.

Tento člen má hodnotu mnohem nižší než 10^{-5} a proto jej i následující členy alternující řady zanedbáme. Budeme brát člen a_3, který je jistě menší než hledaná chyba: $a_3 = \frac{1}{4!}\left(\frac{19\pi}{180}\right)^4 < \frac{1}{4!}\frac{19^4 \cdot 100}{18^4 \cdot 10^4} = \frac{1}{4!}\frac{19^4}{18^4 \cdot 10^2} < \frac{1}{4!}\frac{19^4}{10^4 \cdot 10^2} > 10^{-5}$.

Stačí sečíst první tři členy $\cos 19° = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{19\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{19\pi}{180}\right)^4 \doteq 0,94552$.

c) Vypočtěte $\sqrt[5]{36}$ s chybou menší než $2 \cdot 10^{-5}$.

Řešení.

Rozvoj $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$ platí pouze v $(-1;\ 1)$ a tedy nesmíme dosadit $x = 35$. Můžeme ale pracovat s rozvojem této funkce v bodě, který je „blízko" k číslu 36 a to je $2^5 = 32$. Toho využijeme $\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{4}{32}\right)} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{8}}$.

Nyní rozepíšeme rozvoj

$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{5^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{36}{5^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{4 \cdot 9 \cdot 13}{5^4 \cdot 4!}x^4 + \dots$ a dosadíme $x = \frac{1}{8}$:

$\sqrt[5]{1+\frac{1}{8}} = 1 + \frac{1}{40} - \frac{4}{5^2 \cdot 2!}\frac{1}{64} + \frac{36}{40^3 \cdot 3!} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 13}{40^4 \cdot 4!} + \dots$ Jde o alternující číselnou řadu a stačí sečíst tolik prvních členů této řady, aby absolutní hodnota prvního vynechaného členu byla menší než 10^{-5}.

Vypíšeme-li hodnoty členů, zjistíme, že nám stačí čtyři členy:

$1 + \frac{1}{40} - \frac{4}{5^2 \cdot 2!}\frac{1}{64} + \frac{36}{40^3 \cdot 3!} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 13}{40^4 \cdot 4!} + \dots = 1 + 0,025 - 1,25 \cdot 10^{-3} + 9,375 \cdot 10^{-5} -$

$7,617 \cdot 10^{-6} + \dots$. Zbylé členy můžeme zanedbat pro jejich velikost, než uvažujeme.

Součet hodnoty $\sqrt[5]{36}$, která má chybu menší než $2 \cdot 10^{-5}$ je

$s_4 = 2\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{4}{5^2 \cdot 2!}\frac{1}{64} + \frac{36}{40^3 \cdot 3!}\right) = 2 \cdot 1,02384 = 2,04768$.

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů týkajících se mocninných řad, které pak mohou pomoct pochopit lépe učivo, případně pomoct k zápočtovým a zkouškovým testům. Kromě příkladů obsahuje také teorii s potřebnými základními pojmy, která je nezbytná k pochopení dané problematiky. Pro vytvoření sbírky jsme použili program MathType, který pomohl vypsat všechny řady, limity, derivace, integrály apod.

Práce je rozdělena do tří kapitol, které jsou dále členěny na podkapitoly. V jednotlivých kapitolách je nejprve uvedena potřebná teorie a pak příklady.

První kapitola pojednává o základních pojmech mocninné řady a je rozdělena do tří podkapitol. První udává, jak mocninná řada vypadá, jaký má střed a koeficienty. Ve druhé podkapitole je řešen poloměr konvergence a následně interval konvergence, který je s ním spjat. Třetí kapitola se zabývá oboru konvergence a oboru absolutní konvergence mocninných řad. V této podkapitole jsou dva druhy příkladů. U prvních máme určit obor konvergence. U druhého způsobu máme obor konvergence a k tomu najít danou mocninnou řadu.

Druhá kapitola se věnuje vlastnostem mocninných řad (o spojitosti funkce, operace s mocninnými řadami, integrování a derivování). Zde se nacházejí příklady, kdy hledáme funkční předpis pro součtovou funkci řady pomocí těchto vlastností.

Třetí kapitola je zaměřena na využití mocninných řad. Tato kapitola je rozdělena do dvou podkapitol. V první je definována Taylorova a Maclaurinova řada s Lagrangeovým tvarem zbytků. Druhá podkapitola dává přednost rozvoji základních funkcí do mocninných řad, které pomůžou najít přibližný výpočet integrálů nebo určit přibližnou hodnotu výrazu.

Tato bakalářská práce je zaměřená převážně na praktickou část, ve které jsou podrobně vysvětleny postupy k řešení příkladů. Pro každou kapitolu jsme hledali takové příklady, aby se od sebe lišili jak výpočtem, tak i výsledkem, tak i obtížností. V teoretické části jsou zmíněny jen nejdůležitější definice a věty, které stačí k pochopení daného problému.

RESUMÉ

The aim of this thesis is solve examples of power series. In addition it also contains theory with the necessary basic concepts. The thesis is divided into three chapters.

The first chapter discusses the basic concepts of power series. Is indicated how of power series looks like, what is the middle and coefficients. Farther is solved radius of convergence and interval of convergence. Is also included the domain of convergence and domain of absolute convergence of power series in this chapter.

The second chapter is devoted to properties of power series. There are examples of when we are looking for functional prescription for totalizing function of series.

The third chapter focuses on the use of power series. We define Taylor and Maclaurin series with Lagrange shape residues. There is dedicated to the development of basic functions in power series, which will then help to find an approximate calculation of integrals or determine an approximate value of the expression.

This thesis is focused primarily on the practical part - explains the procedures to solve problems in detail. In the theoretical part are mentioned only the most important definitions and theorems. It is enough to understand the problem.

SEZNAM LITERATURY

[1] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003, 460 s. ISBN 80-7200-587-1.

[2] KAŇKA, Miloš. *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. 1. vyd. Praha: Victoria Publishing, 1996, 744 s. ISBN 8071871486.

[3] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 720 s. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-7196-180-9.

[4] ZACH, Jiří. *Posloupnosti a řady: sbírka příkladů a cvičení*. 3. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, Fakulta pedagogická, 1999, 102 s. ISBN 80-7082-550-2.

[5] Kapitola 2, Mocninné řady [online], dostupné z: http://analyza.kma.zcu.cz/-PREDMETY/M2_MA2/zaznamy/MA2_02_Mocninne_rady.pdf

[6] Mocninné řady [online], dostupné z:http://home.zcu.cz/~pstehlik/m2/M2_2013_cv-04_mocninne_rady.pdf

[7] Mocninné řady [online], dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3d.htm

[8] Mocninné řady a Taylorovy řady [online], dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/-Mocninne-a-Taylorovy-rady/sc-39-sr-1-a-54/default.aspx

[9] Řešené příklady pro řady: Řady funkcí [online], dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/-mt/txte/3/txc3ec3.htm

SEZNAM OBRÁZKŮ

PŘÍLOHA

CD s bakalářskou prací ve formátu PDF