Studentská Vědecká Konference 2011

NUMERICKÁ SIMULACE PROUDĚNÍ MĚLKÉ VODY

Martin FIŠER [1]

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá popisem a numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic mělké vody (z angličtiny Shallow Water Equations), dále jen SWE. SWE je vhodné použít pro modelování dynamického proudění tekutin, kdy šířka hladiny je mnohem větší než rozsah výšky této hladiny a za předpokladu, že při proudění nevznikají víry. To splňuje například zjednodušené atmosférické proudění či proudění oceánu, příliv, odliv, popřípadě vlna tsunami. V matematickém modelu budeme uvažovat vliv dna.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Matematický model vodní hladiny popisujeme nelineárním nehomogením systémem Saint-Venatových rovnic. Rovnice řešíme na výpočtové oblasti Ω s počáteční podmínkou $\mathbf{U}_0$. Na okraji výpočtové oblasti $\partial\Omega$ je předepsána podmínka nulové normálové rychlosti. V kartézském souřadném systému můžeme rovnice ve 2D případě zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{R}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{U}$ je vektor konzervativních proměnných, výšky hladiny h a rychlostí proudění u a v ve směrech x a y,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hv \\ hu \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$\mathbf{R}$ je zdrojový vektor dna

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial}{\partial x}B(x,y) \\ -gh\frac{\partial}{\partial y}B(x,y) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

zde $B(x,y)$ značí funkci reliéfu dna, a $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ jsou vektory toků ve směru x a y

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

[1] Bc. Martin Fišer, student navazujícího studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: mfiser@students.zcu.cz

3 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Výpočet provádíme metodou konečných objemů. Výpočtovou oblast Ω rozdělíme na strukturovanou síť pravoúhlých disjunktních čtyřúhelníků $\Omega_{i,j}$. Po integraci rovnice (1) přes $\Omega_{i,j}$ můžeme integrál toků aproximovat numerickými toky přes příslušné stěny buňky Ω_i, tj. $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j}$ a $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}$. Po nahrazení integrálu časové derivace integrálním průměrem $\mathbf{U}_{i,j}$ dostáváme semidiskrétní schéma ve tvaru

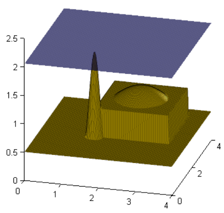
$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = \mathbf{R}_{i,j} - \frac{1}{dx}\left(\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}\right) - \frac{1}{dy}\left(\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}\right). \tag{5}$$

Příslušné numerické toky $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ a zdrojový člen $\mathbf{R}$ vypočteme pomocí „Central-upwind“ schématu (viz. Kurganov et. Petrova (2007)).

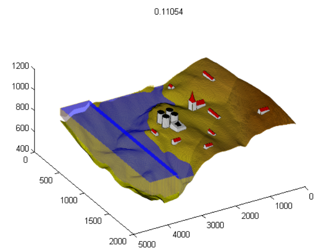
K řešení časové integrace lze použít Rungeho-Kuttova či Eulerova schématu.

4 NUMERICKÉ VÝSLEDKY

Schéma bylo podrobeno testování na zachování počátečního objemu tekutiny a schopnosti udržení počáteční podmínky klidné hladiny nad velmi ostrými gradienty dna. Oboum testům schéma vyhovělo. Test klidné hladiny je vidět na obrázku 1. Na obrázku 2 je zobrazen počáteční stav při simulování nárazu vlny tsunami na mořské pobřeží.



Obrázek 1: Test klidné hladiny



Obrázek 2: Mořské pobřeží

5 ZÁVĚR

Tato práce přinesla rozšíření matematického modelu mělké vody o zdrojový člen dna. Díky tomu již lze simulovat realné proudění řek v korytech, přílivové vlny moří atp. Vytvořený řešič byl implementován v programovacím jazyce C++, čímž byla doba výpočtu (oproti Matlabu) zkrácena na pět procent. Lze tedy simulovat poměrně velké výpočtové oblasti v relativně krátkém čase.

Poděkování: Příspěvek vznikl za podpory interního studentského grantového projektu SGS-2010-046 na ZČU v Plzni.

REFERENCE

Alexander Kurganov and Guergana Petrova: *A Second-Order Well-Balanced Positivity Preserving Central-Upwind Scheme For The Saint-Venant System.*,2007.