Studentská Vědecká Konference 2010

LATTICE BOLTZMANOVA METODA PRO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SYSTÉMU SAINT-VENNANTOVÝCH ROVNIC POPISUJÍCÍCH PROUDĚNÍ KAPALINY

Václav HEIDLER [1], Ondřej BUBLÍK [2]

1 ÚVOD

Cílem práce bylo testovat lattice Boltzmanovu metodu (LBM) v aplikaci na numerické řešení hyperbolického systému Saint-Venantových rovnic. LBM je relativně nová, rychle se rozvíjející metoda. Výhodou metody je její snadná paralelizovatelnost, výpočetní nenáročnost a jednoduchá implementace okrajových podmínek.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Saint-Venantovy rovnice jsou odvozeny z Navier-Stokesových rovnic popisujících proudění nestlačitelné vazké tekutiny v případě, kdy hloubka je podstatně menší než horizontální délka. Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které v tenzorovém zápisu jsou ve tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial (hu_i u_j)}{\partial x_j} = -g\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{h^2}{2}\right) + \nu\frac{\partial^2 (hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} + F_i. \tag{2}$$

3 SCHÉMA LATTICE BOLTZMANOVY METODY

Diferenční schéma pro lattice boltzmanovu metodu (LBM) je diskretizací známé Boltzmanovo rovnice pro kontinuum (BE). BE byla odvozena z kinetické teorie pro zředěný plyn. Pomocí rovnice můžeme popsat i plyny s Knudsenovým číslem Kn¿0.05, pro které již neplatí Navier-stokesovy a Fourierovy zákony formulované pouze pro relativně malá Knudsenova čísla. Boltzmanova rovnice tedy popisuje evoluci zředěného plynu a je splněna pro všechna Knudsenova čísla. Poznamenejme, že lattice Boltzmanova rovnice (diferenční schéma LBM) je z ní odvozena a navržena právě pro řešení hydrodynamických problémů.

Lattice Boltzmanova rovnice (BE) je ve tvaru

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}\left(f_\alpha - f_\alpha^{eq}\right) + \frac{\Delta t}{N_\alpha e^2}\mathbf{c}_{\alpha i} F_i, \tag{3}$$

kde f je tzv. distribuční funkce a f_α^{eq} je její hodnota v rovnovážném stavu kapaliny. e je mikroskopická rychlost částic a $\mathbf{c}_\alpha$ jsou vektory mikroskopických rychlostí. V našem případě jsme použili diskretizaci rychlostního pole na tzv. devítirychlostní model (**??**),

[1]Bc. Václav Heidler, student magisterského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: vheidler@students.zcu.cz

[2]Ing. Ondřej Bublík, ZČU v Plzni, FAV, Katedra mechaniky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, tel.: +420 333123456, e-mail: obublik@kme.zcu.cz (vedoucí práce)

potom $\alpha = 1, 2..9$. τ je tzv. relaxční parametr a je lineární funkcí viskozity kapaliny popsanou vztahem

$$\nu = \frac{e^2 \Delta t}{6} (2\tau - 1) > 0. \tag{4}$$

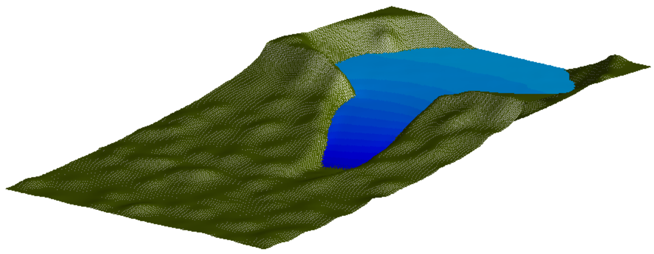
.

Makroskopické veličiny (rychlost, výška hladiny) jsou, jak jsem výše zmínil statistickými momenty distribuční funkce a platí pro ně následující

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{h(\mathbf{x}, t)} \sum_\alpha c_{\alpha i} f_\alpha(x, t) \tag{5}$$

Příklad

Pro příklad jsme vybrali proudění s proměnným dnem. Budeme řešit numerickou simulaci protržení hráze přehrady. Na výstupu všechny makroskopické veličiny extrapolujeme z výpočetní oblasti. Výšku hladiny v počátečním stavu volíme $h = 0.3$ a to pouze v místě přehrady. Pro výpočet jsme použili obdélníkové sítě o prvcích 250x400. Podélné hranice výpočetní oblasti považujeme za nepropustné drsné stěny (tzv. Bounce-back schéma). Ukázka řešení po 10000 iteracích je znázorněna na (obr. 1).



Obrázek 1: *Ukázka řešení příkladu*

4 ZÁVĚR

V naší práci jsme uvedli pouze jednu z mnoho užívaných metod pro modelování volné hladiny, neboli numerické řešení Saint-Venantových rovnic, kterých je v praxi využíváno například pro záplavové a atmosférické modely. Tedy pro hydrodynamické problémy, kde horizontální délka je podstatně větší než hloubka.

Poděkování: Tato práce vznikla za finanční podpory interního studentského grantu SGS-2010-046 na ZCU v Plzni.

REFERENCE

[1] Jian Guo Zhou, Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows

[2] Kevin Tubbs, 2010. Lattice Boltzmann modeling for shallow water equations using high performance computing

[3] A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method