Redukce matematických modelů převodových soustav s rázy v ozubení

Bc. Štěpán Dyk[1], Ing. Miroslav Byrtus, PhD.[2]

1 Úvod

Rázy se objevují v řadě jevů jak v přírodě, tak v technice. V technických aplikacích mohou být tyto jevy dvojího druhu; zaprvé jde např. o nejrůznější projevy konstrukčních vůlí, kdy jsou rázy považovány obecně za negativní, neboť při nich dochází ke zvýšenému namáhání stykových částí těles, čímž se snižuje jejich životnost. Rázy jsou navíc doprovázeny nežádoucím vyzařováním hluku. Existuje však rovněž třída technických zařízení, jejichž chod je na přítomnosti rázových jevů přímo založen, např. zhutňovací vibrolisy, buchary, kladiva, apod. Z hlediska matematických modelů těchto soustav je přítomnost rázů typická silnými nelinearitami. Tento příspěvek je zaměřen na matematické modelování tzv. testovací převodovky [Byrtus & Zeman 2006] s uvažováním možnosti odlehnutí zubového záběru, a tedy s potenciální přítomností rázů v ozubení. Jde o jednoduchou jednostupňovou převodovku, sestávající ze dvou rotorových subsystémů a jednoho statorového subsystému. Statorová část je v prvním přiblížení uvažována jako tuhá a modely rotujících subsystémů jsou sestaveny metodou konečných prvků.

2 Matematický model testovací převodovky

Matematický model systému sestavajícího ze subsystémů lze sestavit metodou modální syntézy [Byrtus et al. 2010]. V případě rozsáhlých soustav, kde modely subsystémů byly sestaveny např. pomocí metody konečných prvků, lze užít metody modální syntézy s kondenzací, která umožňuje významně zredukovat počet stupňů volnosti soustavy při zachování jejích základních spektrálně modálních vlastností. Matematický model s-tého rotorového subystému rotujícího úhlovou rychlostí ω_s lze vyjádřit v prostoru zobecněných souřadnic $\boldsymbol{q}_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ ve tvaru

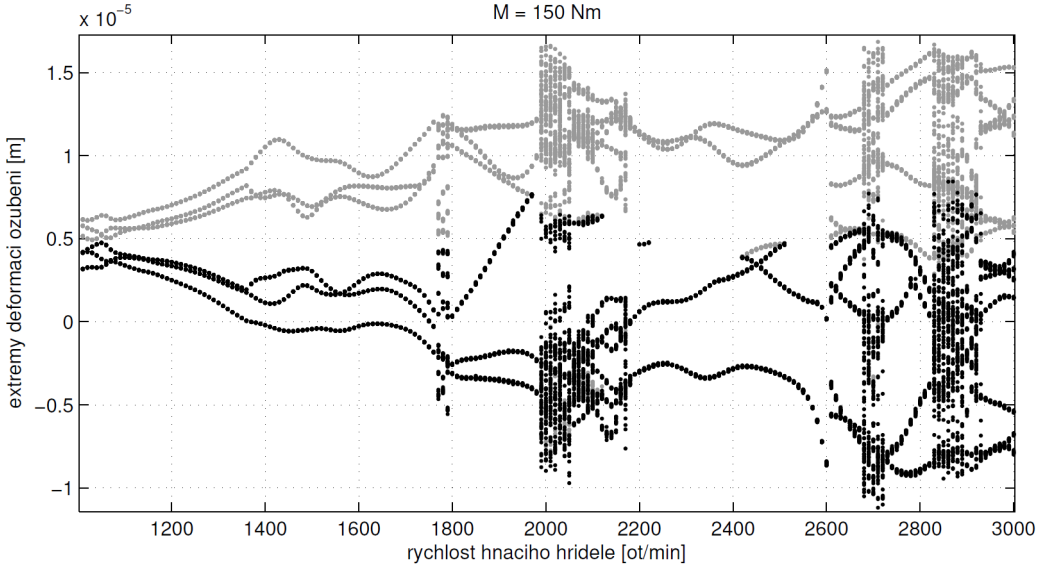
$$\boldsymbol{M}_s\ddot{\boldsymbol{q}}_s + (\boldsymbol{B}_s + \omega_s\boldsymbol{G}_s)\dot{\boldsymbol{q}}_s + (\boldsymbol{K}_s + \omega_s\boldsymbol{C}_s)\boldsymbol{q}_s = \boldsymbol{f}_s^E(t) + \boldsymbol{f}_s^B(t) + \boldsymbol{f}_s^G(t), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{M}_s \in \mathbb{R}^{n_s,n_s}$ je matice hmotnosti, $\boldsymbol{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s,n_s}$ je matice tlumení, $\boldsymbol{G}_s \in \mathbb{R}^{n_s,n_s}$ je matice gyroskopických účinků, $\boldsymbol{K}_s \in \mathbb{R}^{n_s,n_s}$ je matice tuhosti a $\boldsymbol{C}_s \in \mathbb{R}^{n_s,n_s}$ antisymetrická tzv. cirkulační matice. Na pravé straně jsou vektor vnějšího buzení $\boldsymbol{f}_s^E(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$, vektor ložiskových vazebních sil $\boldsymbol{f}_s^B(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ a vektor zubových vazebních sil $\boldsymbol{f}_s^G(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$. Po aplikaci neúplné modální transformace [Byrtus et al. 2010] na model (1) a po převedení systému do globálního prostoru redukovaných modálních souřadnic lze matematický model celého systému formulovat ve tvaru

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\tilde{\boldsymbol{B}}^r + \omega\tilde{\boldsymbol{G}}^r + \tilde{\boldsymbol{B}}_B^r + \tilde{\boldsymbol{B}}_G^r){}^{(m)}\dot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{\Lambda}^r + \omega\tilde{\boldsymbol{C}}^r + \tilde{\boldsymbol{K}}_B^r + \tilde{\boldsymbol{K}}_G^r){}^{(m)}\boldsymbol{x} = \\ = {}^{(m)}\boldsymbol{V}^T[\boldsymbol{f}^E(t) + \boldsymbol{f}^I(t)], \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Bc. Štěpán Dyk, student navazujícího studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: stepan24@students.zcu.cz
[2] Ing. Miroslav Byrtus, PhD., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: mbyrtus@kme.zcu.cz

kde ${}^{(m)}\boldsymbol{x}_s \in \mathbb{R}^m$ je vektor hlavních modálních souřadnic globálního modelu, $\boldsymbol{V} = \mathrm{diag}\{{}^{(m)}\boldsymbol{V}_s\}$ je redukovaná modální matice, ${}^{(m)}\boldsymbol{V}_s$ je redukovaná modální matice s-tého subsystému a všechny koeficientové matice globálního systému s pravým horním indexem r jsou redukované, čtvercové řádu $m < n = \sum_s n_s$. Matice $\tilde{\boldsymbol{K}}_B^r, \tilde{\boldsymbol{B}}_B^r, \tilde{\boldsymbol{K}}_G^r, \tilde{\boldsymbol{B}}_G^r$ jsou redukované matice tuhosti a tlumení ložiskových (B) a zubových (G) vazeb. Zde $\boldsymbol{f}^E(t)$ je vektor vnějšího buzení a $\boldsymbol{f}^I(t)$ je vektor vnitřního buzení od kinematické úchylky ozubení a ω jsou referenční otáčky. Různé metody redukce jsou potom založeny na různých způsobech výběru hlavních tvarů kmitu. Je-li navíc uvažována možnost odlehnutí zubového záběru, lze matematický model (2) doplnit o vektor silně nelineárních sil $\boldsymbol{f}_N(d_z)$, kde d_z je deformace ozubení. Tato funkce zohledňuje možnost styku pracovních boků zubů, možnost pohybu v boční vůli v ozubení a možnost styku nepracovních boků zubů. Na matematickém modelu doplněném o vliv buzení nelineárními silami byla provedena analýza vlivu rychlosti rotace hnacího hřídele na kvalitativní změnu deformace ozubení d_z. Tu lze sledovat prostřednictvím bifurkačních diagramů (pro konkrétní hnací moment viz obr. 1), v němž jsou ukázány extrémy deformace v ozubení v závislosti na otáčkách hnacího hřídele.



Obrázek 1: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 150$ Nm

3 Závěr

Uvedený přístup lze beze změny v metodice modelování aplikovat na komplexnější modely reálných převodových ústrojí. Výstupní bifurkační diagramy umožňují predikovat oblasti otáček, pro které bude docházet k nežádoucímu rázovému pohybu soustavy, či detekovat oblasti s minimální periodickou deformací ozubení.

Poděkování: Tato práce byla podpořena grantem SGS-2013-036.

Literatura

[Byrtus et al. 2010] Byrtus, M. – Hajžman, M. – Zeman, V.: *Dynamika rotujících soustav*. Západočeská univerzita v Plzni, 2010, ISBN 978-80-7043-953-1.