

Fučíkovo spektrum diferenčních operátorů druhého řádu

Iveta Looseová¹, Petr Nečas²

1 Úvod

Naším cílem je studium kvalitativních vlastností Fučíkova spektra reálných čtvercových matic. Pro čtvercovou matici \mathbf{A} rozumíme jejím Fučíkovým spektrem množinu $\Sigma(\mathbf{A})$ všech uspořádaných dvojic $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro které existuje netriviální řešení \mathbf{u} rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^-, \quad (1)$$

kde \mathbf{A} je matice řádu n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, \mathbf{u} je sloupcový vektor $[u_1, \dots, u_n]^t$, \mathbf{u}^+ a \mathbf{u}^- jsou sloupcové vektory tvaru

$$\mathbf{u}^+ = [\max\{u_1, 0\}, \dots, \max\{u_n, 0\}]^t, \quad \mathbf{u}^- = [\max\{-u_1, 0\}, \dots, \max\{-u_n, 0\}]^t.$$

Uvažujeme-li $\alpha = \beta$, potom úloha (1) je úlohou na reálná vlastní čísla matice \mathbf{A} , neboť $\alpha(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) = \alpha\mathbf{u}$. Je-li tedy λ_k reálné vlastní číslo matice \mathbf{A} , potom dvojice (λ_k, λ_k) patří do Fučíkova spektra.

2 Okrajová úloha s Neumannovými okrajovými podmínkami

Popsat strukturu Fučíkova spektra pro obecnou reálnou čtvercovou matici je složitý problém. V tomto příspěvku budeme uvažovat pouze třídiagonální matici řádu n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

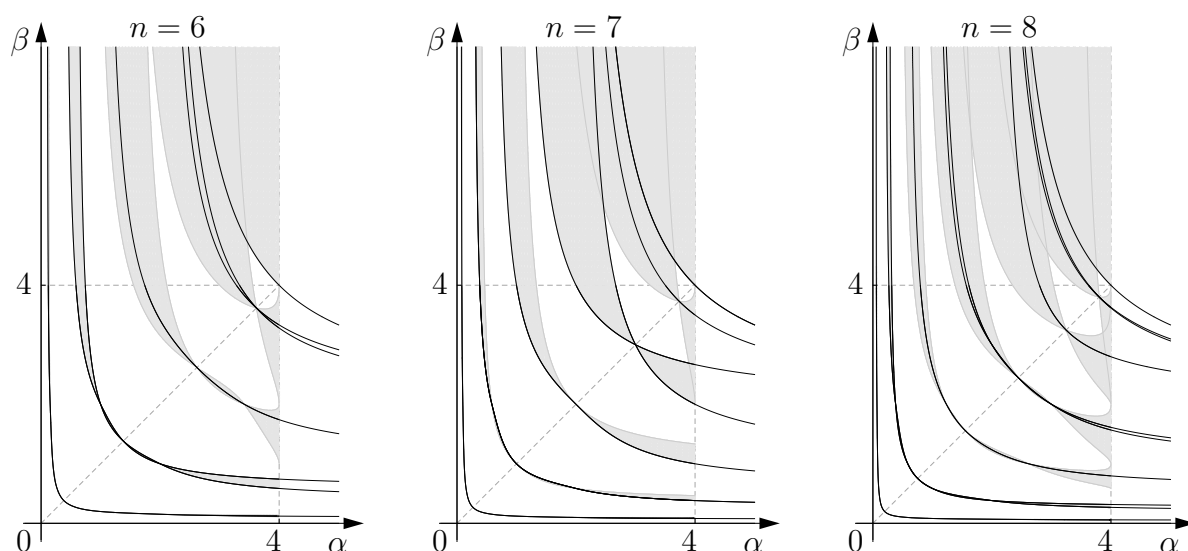
V takovém případě úloha (1) představuje okrajovou úlohu pro diferenční rovnici druhého řádu s Neumannovými okrajovými podmínkami.

Podářilo se získat následující nové výsledky:

1. úplný analytický implicitní popis všech větví tvořící Fučíkovo spektrum $\Sigma(\mathbf{A})$,
2. analytické odhady pro jednotlivé větve Fučíkova spektra $\Sigma(\mathbf{A})$,
3. části některých větví Fučíkova spektra $\Sigma(\mathbf{A})$ lze popsat explicitně $\beta = \beta(\alpha)$.

¹ studentka doktorského studijního programu Matematika, obor Aplikovaná matematika, e-mail: looseova@kma.zcu.cz

² odborný asistent katedry matematiky, e-mail: pncasal@kma.zcu.cz



Obrázek 1: Odhady pro větve Fučíkova spektra (šedé regiony) pro matici \mathbf{A} řádu 6, 7 a 8. Černé křivky znázorňují Fučíkovy větve a patří do Fučíkova spektra $\Sigma(\mathbf{A})$.

Pro každou větev Fučíkova spektra $\Sigma(\mathbf{A})$ umíme vymežit region, ve kterém se větev nachází (viz šedé regiony na obrázku 1). Hranice regionu je popsána pomocí Čebyševových polynomů druhého druhu. Získané odhady jsou svým způsobem optimální, neboť některé větve Fučíkova splývají s hranicí našich regionů (viz obrázek 1 pro $n = 7$). Poznamenejme dále, že náročnost numerické realizace těchto odhadů je nezávislá na velikosti řádu n matice \mathbf{A} .

3 Závěr

Získané výsledky lze snadno rozšířit i pro případ okrajové úlohy s Dirichletovými okrajovými podmínkami, tj. pro třídiagonální symetrickou matici \mathbf{A} ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{bmatrix}.$$

Popisem Fučíkova spektra pro tuto matici se zabývali autoři Stehlík (2013) a Ma et al. (2010). Naším postupem lze jejich výsledky značně rozšířit a doplnit.

4 Seznam literatury a citace

Poděkování

Příspěvek byl podpořen Grantovou agenturou České republiky, projekt č. 13-00863S.

Literatura

Ma, R., Xu, Y., a Gao, C., 2010. Spectrum of linear difference operators and the solvability of nonlinear discrete problems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2010.

Stehlík, P., 2013. Discrete Fučík spectrum - anchoring rather than pasting. *Boundary Value Problems 2013*.