FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING
KTE
September 10 - 12, 2003
Pilsen, Czech Republic

METHOD OF CALCULATING STEADY STATES IN LINEAR CIRCUITS WITH PERIODICAL INPUTS

DOC. ING. ROMAN FILC, DSC.[1]

Abstract: The notion of a noble function – a function developable into a Taylor series convergent everywhere, as well as the notion of a noble function equivalent have been introduced.

Analytical method of calculating steady states in linear circuits with periodical inputs that are sequences of functions which are noble functions at the period has been developed. The method is based on using integral equations and on description of functions by means of their equivalents.

Keywords: linear electric circuit, periodical solution, integrał equations, boundary problem.

W [1,2] wykazano, że każdą funkcję szlachetną, tzn. funkcję rozwijalną w szereg Taylora

$$f(t) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)t + \dots + f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

zbieżny wszędzie, można przedstawić w postaci iloczynu

$$f(t) = f_r(r) \cdot 1(t), \tag{2}$$

gdzie $1(t)$ jest funkcją jednostkową, tzn. funkcją przybierającą wszędzie wartość równą jedności,

$$r = \int_0^t dt \cdot \tag{3}$$

jest podstawowym operatorem całkowym, zaś

$$f_r(r) = f^{(0)}(0)r^0 + f^{(1)}(0)r^1 + \dots + f^{(k)}(0)r^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)r^k \tag{4}$$

[1] University of Technology and Agriculture, prof. S. Kaliskiego street, 7, 85-796 Bydgoszcz, Poland
e-mail: filc@mail.atr.bydgoszcz.pl tel. (48 52) 582 04 88

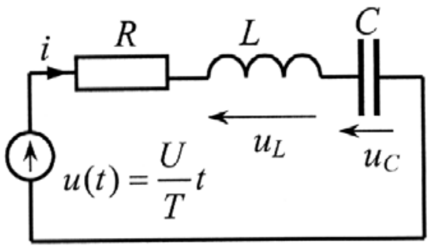
jest równoważnikiem rozpatrywanej funkcji szlachetnej. Dla wielu funkcji szlachetnych szeregi (4) sprowadzają się do funkcji wymiernych. Oto kilka przykładów:

$$\frac{t^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} = \mathrm{r}^{\mathrm{k}} \cdot 1(t); \qquad \mathrm{e}^{at} = \frac{1}{1-a\mathrm{r}} \cdot 1(t); \qquad \mathrm{e}^{at} \frac{t^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} = \frac{\mathrm{r}^{\mathrm{k}}}{(1-a\mathrm{r})^{\mathrm{k}+1}} 1(t);$$
$$\cos(\omega t) = \frac{1}{1+\omega^2 \mathrm{r}^2} \cdot 1(t); \qquad \sin(\omega t) = \frac{\omega \mathrm{r}}{1+\omega^2 \mathrm{r}^2} \cdot 1(t). \tag{5}$$

W [1, 2, 3] przedstawione zostały najważniejsze ogólne właściwości równoważników, podstawy rachunku równoważników jako ogólnej metody rozwiązywania liniowych równań całkowych o współczynnikach stałych i wyrazach wolnych będących funkcjami szlachetnymi oraz wykazano, że rachunek równoważników cechuje się wszystkimi zaletami rachunku operatorów Heaviside'a oraz brakiem często podkreślanych jego wad.

W prezentowanym artykule przedstawiona jest możliwość stosowania rachunku równoważników do obliczania stanów ustalonych liniowych obwodów stacjonarnych przy wymuszeniach okresowych, które na całym okresie lub na każdym z odcinków tego okresu są funkcjami szlachetnymi.

Rozpatrzmy meritum prezentowanej metody na przykładzie obliczania stanu ustalonego w obwodzie przedstawionym na rys. 1 przy wymuszeniu, które w przedziale czasu równym okresowi T jest liniową jednorodną funkcją czasu.



Rys. 1

Równania opisujące stan obwodu w każdej chwili $0 < t < T$ okresu T mają postać

$$Ri(t) + u_C(t) + u_L(t) - U\frac{t}{T} = 0;$$
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \mathrm{d}t \cdot i(t) + u_{C0}; \qquad Li(t) = \int_0^t \mathrm{d}t \cdot u_L(t) + Li_0, \tag{6}$$

gdzie R, C, L, T, U są znanymi liczbami, zaś i_0, u_{C0} są niewiadomymi wartościami prądu w obwodzie i napięcia na kondensatorze zapewniającymi spełnienie warunku brzegowego

$$i_0 = i(0) = i(T); \tag{7}$$
$$u_{C0} = u_C(0) = u_{C0}. \tag{8}$$

będącego warunkiem okresowości. Zagadnienie polega na wyznaczeniu takich funkcji $i(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ które spełniają równania (6) oraz warunek (7), (8).

Równaniom (6) odpowiadają równania równoważnikowe

$$Ri_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + u_{C\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + u_{L\mathrm{r}}(\mathrm{r}) - \frac{U}{T}\mathrm{r} = 0; \tag{9}$$

$$u_{C\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = \frac{1}{C}\mathrm{r}i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + u_{C0}; \tag{10}$$

$$Li_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = \mathrm{r}u_{L\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + Li_0. \tag{11}$$

Z równania (11) wynika, że

$$u_{L\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = \frac{L}{\mathrm{r}}i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) - \frac{Li_0}{\mathrm{r}}. \tag{12}$$

Podstawiając (10), (12) do (9) otrzymujemy równanie

$$Ri_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + \frac{1}{C}\mathrm{r}i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) + u_{C0} + \frac{L}{\mathrm{r}}i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) - \frac{Li_0}{\mathrm{r}} - \frac{U}{T}\mathrm{r} = 0, \tag{13}$$

skąd wynika wzór na równoważnik prądu

$$i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = \frac{\frac{U}{T}\mathrm{r} - u_{C0} + \frac{Li_0}{\mathrm{r}}}{R + \frac{1}{C}\mathrm{r} + \frac{L}{\mathrm{r}}} = \frac{\frac{1}{LT}\mathrm{r}^2 U - \frac{1}{L}\mathrm{r}u_{C0} + i_0}{\frac{1}{LC}\mathrm{r}^2 + \frac{R}{L}\mathrm{r} + 1}. \tag{14}$$

Przedstawimy mianownik we wzorze (14) w postaci

$$\frac{1}{LC}\mathrm{r}^2 + \frac{R}{L}\mathrm{r} + 1 = (1 + \alpha_1\mathrm{r})(1 + \alpha_2\mathrm{r}),$$

gdzie α_1, α_2 są pierwiastkami mianownika. Rozkładając równoważnik prądu (14) na ułamki proste otrzymujemy wzór

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = {} & \frac{C}{T}U + C\frac{R - \alpha_1 L}{LT(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{1}{(1 + \alpha_1\mathrm{r})}U - C\frac{R - \alpha_2 L}{LT(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{1}{(1 + \alpha_2\mathrm{r})}U + \\ & + \frac{1}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{1}{(1 + \alpha_1\mathrm{r})}u_{C0} - \frac{1}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{1}{(1 + \alpha_2\mathrm{r})}u_{C0} + \\ & + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{1}{(1 + \alpha_1\mathrm{r})}i_0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{1}{(1 + \alpha_2\mathrm{r})}i_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Oznaczając

$$\begin{gathered} b_{0U} = \frac{C}{T}; \quad b_{\alpha_1 U} = C\frac{R - \alpha_1 L}{LT(\alpha_1 - \alpha_2)}; \quad b_{\alpha_2 U} = -C\frac{R - \alpha_2 L}{LT(\alpha_1 - \alpha_2)}; \\ b_{\alpha_1 u_{C0}} = \frac{1}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}; \quad b_{\alpha_2 u_{C0}} = -\frac{1}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}; \quad b_{\alpha_1 i_0} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}; \quad b_{\alpha_2 i_0} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{gathered} \tag{16}$$

zapiszemy wzór na równoważnik prądu (15) w postaci

$$i_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = b_{0U}U + b_{\alpha_1 U}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}U + b_{\alpha_2 U}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}U +$$

$$+ b_{\alpha_1 u_{C0}}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}u_{C0} + b_{\alpha_2 u_{C0}}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}u_{C0} + b_{\alpha_1 i_0}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}i_0 + b_{\alpha_2 i_0}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}i_0. \qquad (17)$$

Jemu odpowiada funkcja czasu

$$i(t) = b_{0U}U + b_{\alpha_1 U}Ue^{-\alpha_1 t} + b_{\alpha_2 U}Ue^{-\alpha_2 t} +$$

$$+ b_{\alpha_1 u_{C0}}u_{C0}e^{-\alpha_1 t} + b_{\alpha_2 u_{C0}}u_{C0}e^{-\alpha_2 t} + b_{\alpha_1 i_0}i_0 e^{-\alpha_1 t} + b_{\alpha_2 i_0}i_0 e^{-\alpha_2 t}. \qquad (18)$$

Równoważnik napięcia na kondensatorze jest zgodnie z (10) (17) równy

$$u_{C\mathrm{r}}(\mathrm{r}) = \frac{1}{C}\mathrm{r}b_{0U}U + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_1 U}}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}U + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_2 U}}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}U +$$

$$+ \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_1 u_{C0}}}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}u_{C0} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_2 u_{C0}}}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}u_{C0} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_1 i_0}}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}i_0 + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{r}b_{\alpha_2 i_0}}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}i_0 + u_{C0}.$$

Rozkładając go na ułamki proste otrzymujemy

$$u_{C\mathrm{r}}(\mathrm{r}) =$$

$$= \frac{b_{0U}}{C}\mathrm{r}U + \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 U}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 U}}{\alpha_2}\right)U - \frac{b_{\alpha_1 U}}{C\alpha_1}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}U - \frac{b_{\alpha_2 U}}{C\alpha_2}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}U +$$

$$+ \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 u_{C0}}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 u_{C0}}}{\alpha_2}\right)u_{C0} - \frac{b_{\alpha_1 u_{C0}}}{C\alpha_1}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}u_{C0} - \frac{b_{\alpha_2 u_{C0}}}{C\alpha_2}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}u_{C0} +$$

$$+ \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 i_0}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 i_0}}{\alpha_2}\right)i_0 - \frac{b_{\alpha_1 i_0}}{C\alpha_1}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}i_0 - \frac{b_{\alpha_2 i_0}}{C\alpha_2}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}i_0 + u_{C0}. \qquad (19)$$

Oznaczając

$$c_{1U} = \frac{b_{0U}}{C}; \quad c_{0U} = \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 U}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 U}}{\alpha_2}\right); \quad c_{\alpha_1 U} = -\frac{b_{\alpha_1 U}}{C\alpha_1}; \quad c_{\alpha_2 U} = -\frac{b_{\alpha_2 U}}{C\alpha_2}$$

$$c_{0u_C} = \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 u_{C0}}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 u_{C0}}}{\alpha_2}\right); \quad c_{\alpha_1 u_{C0}} = -\frac{b_{\alpha_1 u_{C0}}}{C\alpha_1}; \quad c_{\alpha_2 u_{C0}} = -\frac{b_{\alpha_2 u_{C0}}}{C\alpha_2}; \qquad (20)$$

$$c_{0i_0} = \frac{1}{C}\left(\frac{b_{\alpha_1 i_0}}{\alpha_1} + \frac{b_{\alpha_2 i_0}}{\alpha_2}\right); \quad c_{\alpha_1 i_0} = \frac{b_{\alpha_1 i_0}}{C\alpha_1}; \quad c_{\alpha_2 i_0} = -\frac{b_{\alpha_2 i_0}}{C\alpha_2}.$$

zapiszemy wzór (19) na równoważnik napięcia na kondensatorze w postaci

$$u_{C\mathrm{r}}(\mathrm{r}) =$$

$$= c_{0U}U + c_{1U}\mathrm{r}U + c_{0i_0}i_0 + (c_{0u_C} + 1)u_{C0} + c_{\alpha_1 U}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}U + c_{\alpha_2 U}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}U +$$

$$+ c_{\alpha_1 u_{C0}}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}u_{C0} + c_{\alpha_2 u_{C0}}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}u_{C0} + c_{\alpha_1 i_0}\frac{1}{1+\alpha_1 \mathrm{r}}i_0 + c_{\alpha_2 i_0}\frac{1}{1+\alpha_2 \mathrm{r}}i_0. \qquad (21)$$

Jemu odpowiada funkcja czasu

$$u_C(t) = c_{0U_1}U + c_{1U_1}Ut + c_{0i_0}i_0 + (c_{0u_C} + 1)u_{C0} + c_{\alpha_1 U_1}e^{-\alpha_1 t}U + c_{\alpha_2 U_1}e^{-\alpha_2 t}U +$$
$$+c_{\alpha_1 u_{C0}}e^{-\alpha_1 t}u_{C0} + c_{\alpha_2 u_{C0}}e^{-\alpha_2 t}u_{C0} + c_{\alpha_1 i_0}e^{-\alpha_1 t}i_0 + c_{\alpha_2 i_0}e^{-\alpha_2 t}i_0. \qquad (22)$$

Podstawiając do wzoru (18) $t = 0$ oraz $t = T$ otrzymujemy z uwzględnieniem oznaczeń (16) odpowiednio

$$i(0) = i_0; \qquad (23)$$

$$i(T) = b_{0U}U + b_{\alpha_1 U}Ue^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 U}Ue^{-\alpha_2 T} +$$
$$+b_{\alpha_1 u_{C0}}u_{C0}e^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 u_{C0}}u_{C0}e^{-\alpha_2 T} + b_{\alpha_1 i_0}i_0e^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 i_0}i_0e^{-\alpha_2 T}. \qquad (24)$$

Podstawiając (23), (24) do (7) otrzymujemy równanie

$$(b_{\alpha_1 i_0}e^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 i_0}e^{-\alpha_2 T} - 1)i_0 + (b_{\alpha_1 u_{C0}}e^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 u_{C0}}e^{-\alpha_2 T})u_{C0} =$$
$$= -(b_{0U} + b_{\alpha_1 U}e^{-\alpha_1 T} + b_{\alpha_2 U}e^{-\alpha_2 T})U. \qquad (25)$$

Podstawiając do wzoru (22) $t = 0$ oraz $t = T$ otrzymujemy z uwzględnieniem oznaczeń (16), (20) odpowiednio

$$u_C(0) = u_{C0}; \qquad (26)$$

$$u_C(T) =$$
$$= c_{1U}UT + c_{0U}U + +c_{0i_0}i_0(c_{0u_C} + 1)u_{C0} + c_{\alpha_1 U}e^{-\alpha_1 T}U + c_{\alpha_2 U}e^{-\alpha_2 T}U +$$
$$+c_{\alpha_1 u_{C0}}e^{-\alpha_1 T}u_{C0} + c_{\alpha_2 u_{C0}}e^{-\alpha_2 T}u_{C0} + c_{\alpha_1 i_0}e^{-\alpha_1 T}i_0 + c_{\alpha_2 i_0}e^{-\alpha_2 T}i_0. \qquad (27)$$

Podstawiając (26), (27) do (8) otrzymujemy równanie

$$(c_{\alpha_1 i_0}e^{-\alpha_1 T} + c_{\alpha_2 i_0}e^{-\alpha_2 T} + c_{0i_0})i_0 + (c_{\alpha_1 u_{C0}}e^{-\alpha_1 T} + c_{\alpha_2 u_{C0}}e^{-\alpha_2 T} + c_{0u_C})u_{C0} =$$
$$= (c_{\alpha_1 U}e^{-\alpha_1 T} + c_{\alpha_2 U}e^{-\alpha_2 T} + c_{0U} + c_{1U}T)U. \qquad (28)$$

Rozwiązując liniowy układ równań algebraicznych (25), (28) otrzymujemy wartości początkowe prądu oraz napięcia na kondensatorze, przy których stan obwodu jest stanem okresowym. Podstawiając je do wzorów (18), (22) otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienie brzegowego przedstawiając je w postaci

$$i(t) = b_0U + (b_{\alpha_1 U}U + b_{\alpha_1 u_{C0}}u_{C0} + b_{\alpha_1 i_0})i_0e^{-\alpha_1 t} + (b_{\alpha_2 U}U + b_{\alpha_2 u_{C0}}u_{C0} + b_{\alpha_2 i_0}i_0)e^{-\alpha_2 t};$$

$$u_C(t) = c_{0U}U + c_{1U}Ut + c_{0i_0}i_0 + (c_{0u_C} + 1)u_{C0} +$$
$$+(c_{\alpha_1 U}U + c_{\alpha_1 u_{C0}}u_{C0} + c_{\alpha_1 i_0}i_0)e^{-\alpha_1 t} + (c_{\alpha_2 U}U + c_{\alpha_2 u_{C0}}u_{C0} + c_{\alpha_2 i_0}i_0)e^{-\alpha_2 t}.$$

Rachunek równoważników można stosować również do obliczania stanów okresowych obwodów rozgałęzionych. Liczba równań w układzie liniowym równań algebraicznych na niewiadome wartości początkowe zawsze równa jest liczbie niezależnych wartości początkowych występujących w równaniach opisujących stan nieustalony w obwodzie.

Często wymuszenie okresowe jest funkcją, która na okresie jest ciągiem funkcji szlachetnych na kolejnych K odcinkach tego okresu. Przy obliczaniu stanu ustalonego w tym przypadku należy:

1a) wyznaczyć równoważniki odpowiedzi na pierwszym odcinku jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

1b) zapisać wzory na odpowiedzi na pierwszym odcinku jako funkcje czasu oraz wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

1c) zapisać wzory na wartości odpowiedzi na końcu pierwszego odcinka jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

2a) wyznaczyć równoważniki odpowiedzi na drugim odcinku jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

2b) zapisać wzory na odpowiedzi na drugim odcinku jako funkcje czasu oraz wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

2c) zapisać wzory na wartości odpowiedzi na końcu drugiego odcinka jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

...

Ka) wyznaczyć równoważniki odpowiedzi na K-tym odcinku jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

Kb) zapisać wzory na odpowiedzi na K-tym odcinku jako funkcje czasu oraz wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

Kc) zapisać wzory na wartości odpowiedzi na końcu K-tego odcinka jako funkcje wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku;

przyrównując wyniki z p. Kc) do wartości początkowych odpowiedzi na pierwszym odcinku obliczyć wartości początkowe odpowiedzi na pierwszym odcinku;

podstawiając uzyskany wynik kolejno do wzorów uzyskanych w pp. 1b), 2b), ... Kb) wyznaczyć odpowiedzi na tych odcinkach okresu.

Głównymi zaletami rachunku równoważników w porównaniu z rachunkiem operatorów Heaviside'a przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych są brak konieczności stosowania funkcji uogólnionych (funkcji Heaviside'a i funkcji Diraca) oraz teorii funkcji zmiennej zespolonej, jak również bardziej proste przekształcenia algebraiczne.

References

[1] Filc R. Equivalents Method of Linear Circuits Transients Calculation. Proceedings of International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science. TCSET-2002. Lviv - Sławsko, pp. 18 – 23.

[2] Filc R. Równoważniki funkcji analitycznych: definicje, własności, stosowanie w elektrotechnice. V International Conference of Advanced Methods in the Theory of Electrical Engineering. AMTEE-2001. Plzen.

[3] Filc R. Metoda równoważnikowa obliczania stanów nieustalonych obwodów liniowych. VII Konferencja Naukowo – Techniczna „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice". ZKwE-2002. Poznań – Kiekrz, ss. 27 – 30.