



**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Plzeň, 2016

Bc. Jakub Bugár



**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Výpočtová analýza vibrací rotoru turbodmychadla

Plzeň, 2016

Bc. Jakub Bugár

Na konci díla poznáme, čím jsme měli začít.

Blaise Pascal

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni, 29. července 2016

.....

Bc. Jakub Bugár

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Miroslavu Byrtusovi Ph.D. za několikaletou spolupráci, která mimo jiné vyústila v tuto diplomovou práci, dále za inspiraci, příkladné vedení a trpělivost.

Děkuji také všem svým blízkým, kteří při mě stáli, podporovali mě během studia a nepřestali ve mně věřit.

Bc. Jakub Bugár

ABSTRAKT

Práce se věnuje problematice matematického modelování a výpočtové analýzy vibrací rotoru turbodmychadel. V teoretické části je odvozen komplexní linearizovaný matematický model rotoru turbodmychadla, který je uložen na kluzných ložiscích s plovoucími pouzdry. Pro zjištění základních dynamických vlastností rotoru turbodmychadla je provedena modální analýza a dále je zkoumána dynamická odezva vyvolaná zbytkovými nevyváhami rotoru. Metodika výpočtového modelování a dynamické analýzy je aplikována na rotor turbodmychadla typu C12 českého výrobce ČZ, a.s. Implementace vytvořené metodiky modelování je provedena v prostředí MATLAB.

Klíčová slova: Turbodmychadlo, Rotor, Ložisko s plovoucími pouzdry, Modální analýza, Campbellův diagram, Nevývaha

ABSTRACT

This diploma thesis is concerned with an issue of mathematical modelling and computational analysis of turbochargers vibration. In the theoretical part of the thesis, complex linearized mathematical model of a turbocharger rotor which is mounted on fluid-film bearings with floating rings, is derived. For investigation of elementary dynamic properties of the turbocharger rotor the modal analysis is performed and dynamic response to residual unbalances of the rotor is investigated. The derived methods of computational modelling and dynamic analysis are applied to the specific turbocharger type C12 produced by Czech company ČZ, a.s. Implementation of derived methods of modelling is performed using MATLAB.

Key words: Turbocharger, Rotor, Fluid-film bearing, Modal analysis, Campbell diagram, Unbalance

OBSAH

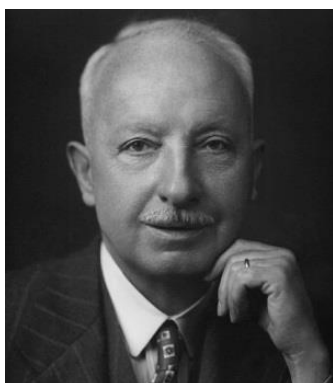
ÚVOD	5
1.1. Historie a obecný princip turbodmychadel	5
1.2. Cíle práce.....	9
1.3. Členění práce	10
MODELOVÁNÍ ROTORU TURBODMYCHADLA	11
2.1. Matematický model diskrétní mechanické soustavy.....	12
2.2. Matematický model hřídele a tuhého kotouče	13
2.2.1. Kinetická a potenciální energie hřídelového elementu	16
2.2.2. Matice hřídelového elementu.....	19
2.2.3. Matice tuhého kotouče	21
2.2.4. Globální matice izolovaného rotoru.....	23
2.3. Matematický model kluzných ložisek.....	25
2.4. Vliv tlumení.....	33
2.4.1. Vliv tlumení kluzného ložiska	34
2.5. Komplexní matematický model rotoru turbodmychadla.....	36
TURBODMYCHADLO C12.....	37
3.1. Základní parametry turbodmychadla C12	37
3.2. Výpočtový model turbodmychadla	39
3.2.1. Diskretizace rotoru turbodmychadla	39
3.2.2. Parametry kluzných ložisek	41
3.3. Výpočtový model	41
3.3.1. Stanovení statického zatížení rotoru	42
DYNAMICKÉ PROJEVY ROTOROVÝCH SOUSTAV	46
4.1. Modální analýza silně nekonzervativní diskrétní mechanické soustavy.....	46
4.1.1. Stabilita z pohledu diskrétní mechanické soustavy.....	51
4.2. Dynamická odezva na nevyváhu rotoru	53
ANALÝZA TURBODMYCHADLA C12	56
5.1. Modální analýza pro případ statické rovnováhy	56
5.1.1. Nerotující izolovaný konzervativní model.....	57
5.1.2. Nerotující izolovaný nekonzervativní model s gyroskopickými účinky.....	57
5.1.3. Nerotující nekonzervativní komplexní model.....	59
5.2. Modální vlastnosti v závislosti na rychlosti rotoru	60
5.2.1. Stanovení kritických otáček	64
5.3. Odezva na nevyváhu	65
ZÁVĚR.....	69
LITERATURA	71

1. Kapitola

Úvod

1.1. Historie a obecný princip turbodmychadel

Je tomu již více jak sto let, kdy prvotní myšlenka turbodmychadla spatřila světlo světa. Konkrétně v roce 1905 si nechal švédský inženýr Alfred Büchi (viz Obr. 1.1 vlevo), ředitel střediska pro vývoj dieselových motorů firmy Gebrüder Sulzer ve Winterthuru, patentovat tento vynález. Ovšem na tu dobu se jednalo o prozatím nerealizovatelnou myšlenku. Proto první aplikace turbodmychadel jsou známy až z první světové války, kdy francouzský inženýr Auguste Rateau zakomponoval turbodmychadlo do motorů Renault, které v té době poháněly francouzská válečná letadla. Ve dvacátých letech se pak objevily první lodě a lokomotivy poháněné dieselovými motory s turbodmychadlem.



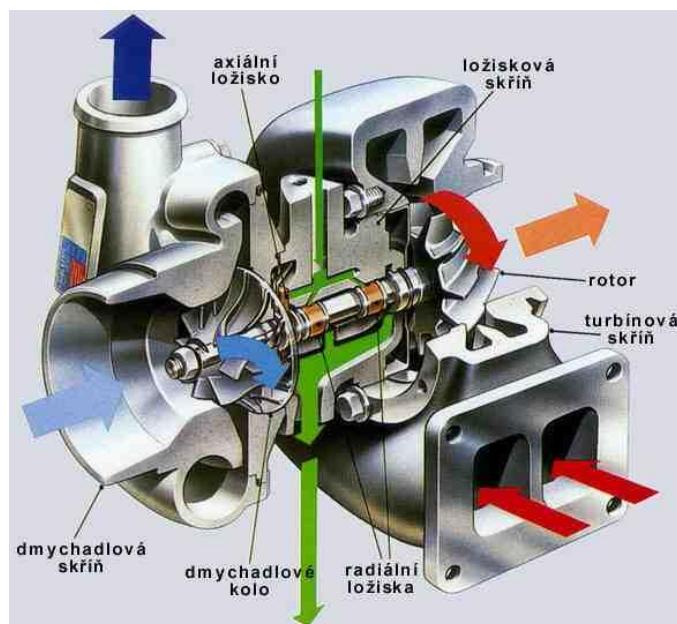
Obr. 1.1 Alfred Büchi (vlevo), Mercedes-Benz 300SD (vpravo)[I2]

Během druhé světové války již motory vylepšené o turbodmychadlo bylo možné nalézt v celé řadě letadel jako například v letadlech P-47 Thunderbolt a B-17 Flying Fortress [7]. V automobilovém průmyslu se první benzínový motor s turbodmychadlem

objevil až v roce 1962 v modelu Oldsmobile Jetfire případně v Chevroletu Monza Spyder [I2]. První diesellový motor s turbodmychadlem přišel až o šestnáct let později a to konkrétně s modelem Mercedes Benz 300SD (viz Obr. 1.1 vpravo) v roce 1978. Postupem času významně narůstá zastoupení motorů s turbodmychadlem a to nejen v automobilovém průmyslu, ale i v letectví a lodním průmyslu. Mění se také samotná filozofie využití turbodmychadla, kdy před několika desítkami let nálepka „TURBO“ na kapotě automobilu symbolizovala dynamiku, sílu, výkon a rychlost. Naopak v dnešní době tuto nálepku spíše vystihují slova jako účinnost, efektivita a je přímo spojená s trendem tzv. downsizingu¹ dnešních pohonných jednotek.

Turbodmychadla jsou koncipována jako samostatná soustrojí, která jsou zpravidla složena z jednostupňové osově turbíny a jednostupňového odstředivého dmychadla [4]. Oběžná kola turbíny a dmychadla mají společný hřídel uložený ve skříni soustrojí (viz Obr. 1.2). Uložení hřídele bývá velmi kvalitní, protože otáčky turbodmychadla jsou významně vysoké, a proto je potřeba zajistit co nejvyšší míru stability rotoru v průběhu celého pracovního cyklu a také co nejdelší provozuschopnost turbodmychadla. Podle druhu přeplňovaného motoru a režimu práce je celkový rozsah otáček současných turbodmychadel v širokém rozmezí 10 000 až 250 000 otáček za minutu. Samotný rozsah provozních otáček turbodmychadel je úměrný jejich velikosti a tvaru. Obecně větší turbodmychadla vykazují podstatně větší setrvačné účinky, a proto nedosahují tak vysokých maximálních hodnot provozních otáček. Jejich uplatnění je v tepelných motorech větších rozměrů, jakými jsou motory stavebních strojů nebo zaoceánských lodí. Opakem jsou turbodmychadla, jejichž rozsah otáček pracovního cyklu dosahuje hodnot až 250 000 ot/min. V tomto případě se jedná o vcelku malá turbodmychadla, která vykazují mnohem lepší dynamickou odezvu na změnu provozního zatížení, avšak nevynikají vysokou účinností jako nízkootáčková turbodmychadla, neboť kvůli malým rozměrům nezajistí dostatečný průtok vzduchu turbodmychadlem. Proto je můžeme najít například v motorech s tzv. dvojitým přeplňováním (obchodní označení „biturbo“ nebo „twin-turbo“), kdy se v motoru nachází dvě různě velká sériově řazená turbodmychadla, kde menší zajišťuje výkon v nižších otáčkách motoru a naopak větší turbodmychadlo ve vyšších otáčkách motoru.

¹ Pojem **downsizing** znamená použití technologií jako například přeplňování či přímé vstřikování paliva k získání stejného výkonu z objemově menších motorů. To má za následek zvýšení účinnosti motoru a snížení jeho emisí [I3].



Obr. 1.2 Stavba turbodmyhadla [8]

Základním a nejčastěji využívaným druhem uložení hřídele je tzv. plovoucí uložení pomocí olejových kluzných ložisek s plovoucími pouzdry. Jedním z jeho typů je plně plovoucí uložení, které je realizováno pomocí dvou radiálních kluzných ložisek a jednoho axiálního ložiska, kdy se ložisková pouzdra kluzných ložisek otáčejí zhruba šestinovou až třetinovou rychlostí otáčení hřídele [14].

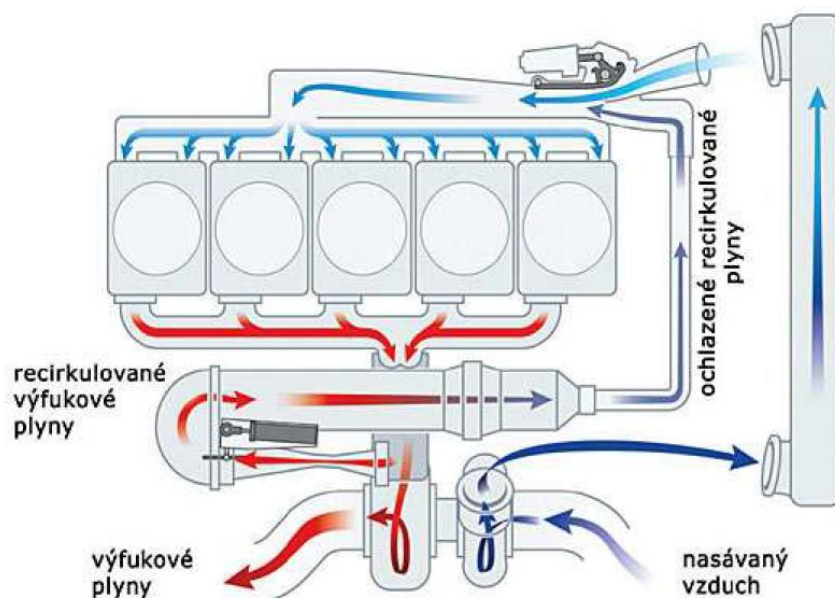
Dále je znám případ tzv. částečně plovoucího uložení, které se vyznačuje uložení rotoru turbodmyhadla ve společném plovoucím pouzdře, kdy ložiskové těleso je zajištěno proti pootočení čepem a požadovaná poloha ložiska je dána pojistnými kroužky.

Jiným typem uložení je tzv. radiálně axiální uložení, které je uskutečněno jedním radiálně axiálním sduženým pouzdrem, které je zastavené pomocí čepu, který je vložen do otvoru na straně pouzdra. Mluvíme zde o tzv. Z-ložisku, které má tvar dutého válce s vybráním ve vnitřní válcové ploše. Výhodou tohoto uskupení je vynechání axiálního ložiska.

Na rozdíl od plovoucího uložení se v praxi můžeme setkat také s uložení hřídele pomocí kuličkových ložisek, kdy tato ložiska mohou být opět zastavena odděleně, případně mohou být sdužená do společného pouzdra. Kuličková ložiska obecně vykazují nízké ztráty a vyšší odolnost vůči zatížení ve srovnání s plovoucími ložisky. Na druhou stranu jsou mnohem složitější na výrobu a nedosahují tak dlouhé životnosti. Pro úplnost ještě můžeme zmínit také typ aerodynamických ložisek, která se od plovoucích ložisek liší tím, že procesním médiem je zde namísto kapaliny plyn [15].

Tato ložiska pak vykazují mnohem nižší třecí ztráty, které jsou dány nízkou viskozitou plynů. Na druhou stranu je potřeba počítat s výrazně nižší únosností a tuhostí aerodynamických ložisek.

Samotný princip turbodmyhadla je vcelku jednoduchý. Výfukové plyny jsou vedeny z výfukového systému motoru co nejkratším tepelně izolovaným potrubím k lopatkám turbíny a po expanzi odcházejí přes výfukové potrubí do atmosféry. Vzduch nasávaný dmychadlem z atmosféry se přes čistič vzduchu a tlumič hluku stlačí a rovněž je co nejkratší cestou veden do plnicího systému motoru [4].



Obr. 1.3 Pracovní cyklus turbodmyhadla [8]

Počet otáček turbodmyhadla, na nichž závisí množství a tlak náplně, se reguluje samočinně podle množství, tlaku a teploty spalin, tedy podle zatížení motoru. S rostoucím zatížením motoru rostou i otáčky turbodmyhadla a tím i množství a tlak náplně. Schéma celého pracovního cyklu turbodmyhadla je patrné z Obr. 1.3.

Z předchozích odstavců lze obecně usoudit, že automobilová turbodmyhadla představují relativně jednoduchá strojní zařízení, která jsou však vystavena extrémním pracovním podmínkám. Zaprvé lze jmenovat značně široké spektrum provozních otáček, kdy rychlost rotoru se může dramaticky měnit v závislosti na proměnlivých požadavcích plnění motoru. Dalším významným negativním faktorem při provozu turbodmyhadla je jeho značná teplotní rozmanitost. Pracovní teploty dieselových motorů se pohybují v rozmezí 650-800 °C (resp. 950-1030 °C pro benzínové motory) [16]. Jako příklad může uvést následující studii [17] provedenou na dvoulitrovém dieselovém motoru při zatížení 250 Nm při 2000 ot/min, při kterém byla

naměřena teplota výfukových plynů vstupujících do turbodmychadla o hodnotě 685 °C, teplota oleje 121 °C, teplota na turbínové skříní na přivrácené straně k motoru 552 °C a teplota na kompresorové skříní na odlehle straně od motoru 94 °C.

Z pohledu samotné dynamiky rotoru turbodmychadla se jako zásadní jeví konstrukční návrh ložiskového uzlu, neboť musí být schopen přenášet veškerá provozní zatížení a navíc je žádoucí, aby rotor v daném ložiskovém uzlu vykazoval stabilní chování v celém provozním spektru otáček rotoru. Z důvodu nepřesností při výrobě a sestavování turbodmychadla je rotor důsledně dovyvažován. I relativně malé zbytkové nevyváhy mohou způsobit při maximálních otáčkách stroje nezanedbatelné silové účinky, které mají dopad na intenzitu vyzařovaného hluku skříní turbodmychadla. Na základě provedených experimentů se ukazuje, že pro stabilitu ložiskového uzlu je určitá míra zbytkové nevyváhy žádoucí [9].

1.2. Cíle práce

Cíle předkládané diplomové práce byly stanoveny v kontextu s vyšetřováním dynamické odezvy turbodmychadel a s celkovým přehledem této problematiky popsáním v předchozí podkapitole. Záměrem je zpracovat ucelený přehled teoretického základu potřebného k sestavení komplexního výpočtového modelu rotoru turbodmychadla uloženého na kluzných ložiscích a popsat základní metody vyšetřování dynamické odezvy takového mechanického systému. Verifikace odvozených teoretických postupů bude provedena na konkrétním turbodmychadle typu C12 českého výrobce ČZ, a. s.

Konkrétně byly stanoveny následující cíle:

- Shrnutí současného stavu řešené problematiky (výpočtové modelování turbodmychadel, konstrukční aspekty turbodmychadel).
- Formulace matematických modelů kmitání rotorů uložených na ložiscích s plovoucími pouzdry.
- Metody pro vyšetřování kmitání studovaných soustav.
- Aplikace: vytvoření výpočtového modelu rotoru turbodmychadla výrobce ČZ, a. s.
- Provedení výpočtové analýzy chování rotoru turbodmychadla pro vybrané provozní parametry (vliv nevyváhy rotoru)

1.3. Členění práce

V duchu stanovených cílů je práce členěna (vyjma úvodní kapitoly) celkově na dvě teoretické a dvě aplikační kapitoly. V teoretických kapitolách je detailně popsán diskretizační přístup aplikovaný na obecný model turbodmychadla, kdy hřídel rotorové části turbodmychadla je nahrazen hřídelovými elementy, na nichž jsou v diskretizačních uzlech přiřazeny účinky dokonale tuhých kotoučů aproximujících turbínové resp. kompresorové kolo a utahovací matici. Další teoretickou částí této práce je kapitola věnovaná linearizaci ložiskových vazeb plovoucích kluzných ložisek. Zbylé teoretické pasáže se zabývají sestavením komplexního výpočtového modelu a dále popisem elementárních dynamických analýz pro vyšetřování odezvy rotorových soustav – jmenovitě se jedná o modální analýzu a dynamickou odezvu na nevývahu rotoru.

Z důvodu většího rozsahu práce a pro přehlednosti je první aplikační kapitola zařazena hned za první teoretickou. V aplikačních kapitolách jsou uplatněny diskutované teoretické postupy, které byly použity pro vyšetření dynamických vlastností turbodmychadla typu C12 českého výrobce ČZ, a.s. Veškeré výpočty byly prováděny a odladěny ve výpočetním prostředí programu MATLAB (verze R2013a).

2. Kapitola

Modelování rotoru turbodmychadla

Modelování² představuje stěžejní proces pro sestavení matematického modelu zkoumaného objektu, soustavy nebo systému. V takovémto procesu jsou zohledněna předem určená zjednodušení, která znamenají přechod od reálného modelu k fyzikálnímu modelu. Přiřazení matematického popisu fyzikálnímu modelu představuje přechod od fyzikálního modelu k obecnému matematickému modelu.

Cílem této kapitoly je odvození komplexního matematického modelu rotoru turbodmychadla, který se skládá z hřídele, olopatkovaných kol, která jsou pevně přichycena na hřídel, a dále ložisek, jež tvoří propojení mezi rotorovou a statorovou částí turbodmychadla (turbodmychadlová skříň).

Kapitola je rozdělena do následujících celků. První část je věnovaná odvození matematického modelu izolované rotorové části turbodmychadla. Další část této kapitoly se zabývá odvozením matematického modelu ložisek. Je zde odvozen matematický model kluzných ložisek s plovoucími kroužky, které jsou nesené dvěma olejovými filmy s uvažováním nelineárních ložiskových vazebných účinků. Z toho důvodu je zde nastíněno řešení modelu proudícího oleje popsaného Reynoldsovou rovnicí a dále model uložení čepu ložiska a pánve ložiska za předpokladu linearizace ložiskových sil v okolí staticky rovnovážné polohy ložiska.

² Pro jednoznačnost bude pojmem **reálný model** označován vybraný model strojní součástky se všemi jeho náležitostmi (geometrické, materiálové, dynamické atd.), pojmem **fyzikální model** bude označován zjednodušený reálný model (zanedbané rozměry, předpoklad izotropního materiálu apod.), pojmem **matematický model** bude označován obecný matematický popis fyzikálního modelu a pojmem **výpočtový model** bude označovaná konkrétní realizace matematického modelu

Separátně je v této kapitole řešena otázka tlumících účinků fyzikálního modelu turbodmyhadla a závěr kapitoly je pak věnován sestavení komplexního matematického modelu rotoru v maticovém tvaru.

2.1. Matematický model diskrétní mechanické soustavy

Pro sestavení výpočtového modelu diskrétní mechanické rotující soustavy lze využít Lagrangeovy rovnice druhého druhu v maticovém tvaru [2]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.1)$$

kde E_k značí kinetickou energii soustavy, E_p je potenciální (deformační) energie přiřazená lineárním konzervativním (elastickým) silám a R je disipační (Rayleighova) funkce přiřazená lineárním (viskózním) tlumícím silám definovaná vztahem

$$R(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_I \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{B}_I \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice vnitřního viskózního tlumení, která je symetrická a pozitivně definitní nebo semidefinitní (u izolovaného tělesa). V rovnici (2.1) označuje $\mathbf{q} = [q_i(t)] \in \mathbb{R}^n$ vektor zobecněných souřadnic, které vyjadřují nezávislé malé výchylky uzlů kolem dané rovnovážné polohy. Pravou stranu rovnice (2.1) obecně tvoří síly jako například nelineární elastické síly, tlumící síly, případně nekonzervativní vazební síly včetně sil budících a jejich výslednice, které jsou zahrnuty do vektoru zobecněných sil $\mathbf{f} = [f_i(t)] \in \mathbb{R}^n$. Kinetickou energii diskrétní mechanické soustavy rotující úhlovou rychlostí ω lze obecně vyjádřit ve tvaru [2]

$$E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \omega \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \omega \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{q}^T \mathbf{K}_\omega \mathbf{q} + \omega^2 \mathbf{q}^T \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2} \omega^2 I. \quad (2.3)$$

V této rovnici $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ označuje matici hmotnosti diskrétní mechanické soustavy a $\mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice vyjadřující „změkčení“ za rotace. Dále \mathbf{C} je antisymetrická Coriolisova matice [10], \mathbf{c}_1 značí globální vektor gyroskopických sil, \mathbf{c}_2 je globální vektor odstředivých sil a poslední člen rovnice (2.3) vyjadřuje kinetickou energii nedeformovaného tělesa o momentu setrvačnosti I k ose rotace, které rotuje úhlovou rychlostí ω .

Stejně tak potenciální energii soustavy je možné vyjádřit vztahem

$$E_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice tuhosti soustavy. Tato matice je pozitivně definitní, respektive pozitivně semidefinitní pro případ izolované soustavy. Dosazením vztahů (2.2), (2.3) a (2.4) a do rovnice (2.1) a po provedení naznačených derivací dostaneme pohybové rovnice pro námi zkoumanou rotující diskrétní mechanickou soustavu v maticovém tvaru [2]

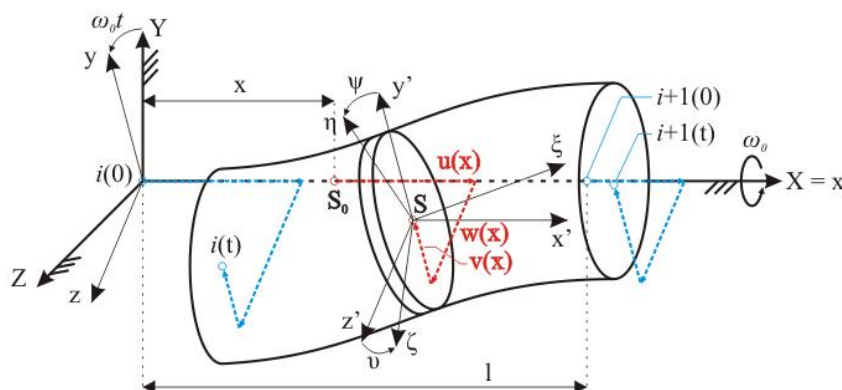
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_l + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q} = \omega^2\mathbf{c}_2 + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.5)$$

ve kterém \mathbf{G} označujeme antisymetrickou matici popisující gyroskopické účinky, pro kterou platí $\mathbf{G} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^T$, a člen $\omega^2\mathbf{c}_2$ charakterizuje odstředivé síly.

2.2. Matematický model hřídele a tuhého kotouče

Následující podkapitola se nejprve zabývá matematickým modelem hřídele, který je odvozen pomocí metody konečných prvků, kdy je diskretizován reálný model hřídele na jednotlivé hřídelové elementy.

Uvažujme hřídelový konečný prvek e , u kterého je obecně předpokládán nekruhový průřez. Koncové uzly elementu jsou označeny jako i a $i + 1$, jejichž vzdálenost udává délku l elementu (viz Obr. 2.1). Za vztažný souřadný systém je zvolen systém kartézských souřadnic xyz s počátkem v uzlu i rotující úhlovou rychlostí ω_0 . Deformace řezu hřídelového prvku, který byl před deformací kolmý k ose tohoto prvku v místě daném souřadnicí x , je definována pomocí podélné výchylky $u(x,t)$ těžiště řezu S a pomocí příčných výchylek $v(x,t)$ ve směru osy y a $w(x,t)$ ve směru osy z . K popisu jsou dále použity Eulerovy úhly natočení roviny řezu $\psi(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ a úhel torzního natočení $\varphi(x,t)$.



Obr. 2.1 Deformovaný hřídelový element

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Uvažujeme-li v našich předpokladech platnost Mindlinovy hypotézy [11], podle které zůstávají řezy hřídelového prvku po jeho deformaci rovinnými, pak můžeme vyjádřit jednotlivé úhly natočení s ohledem na Timošenkovovu teorii [11] ve tvaru

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \bar{\gamma}_{\xi\eta}, \quad \vartheta = \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\gamma}_{\xi\zeta}. \quad (2.6)$$

V těchto rovnicích označují symboly $\bar{\gamma}_{\xi\eta}$ a $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$ průměrné zkosity vyvolané posouvajícími silami. Takto definované průměrné zkosity lze dále dosadit do vztahů

$$k_{\zeta}G\bar{\gamma}_{\xi\eta}A = EJ_{\zeta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad k_{\eta}G\bar{\gamma}_{\xi\zeta}A = -EJ_{\eta} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (2.7)$$

kde E a G jsou moduly pružnosti v tahu a smyku, A označuje plochu průřezu, J_{ζ} a J_{η} značí kvadratické momenty průřezu k příslušným osám.

Pak příčná posunutí těžiště S průřezové plochy S podél hřídelového prvku jsou aproximována polynomy třetího řádu následovně

$$v(x, t) = \Phi(x)\mathbf{c}_1(t), \quad w(x, t) = \Phi(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (2.8)$$

kde $\Phi(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$.

Úhly natočení řezů jsou aproximovány polynomy druhého řádu jako

$$\psi(x, t) = \Theta(x)\mathbf{b}_1(t), \quad \vartheta(x, t) = \Theta(x)\mathbf{b}_1(t), \quad (2.9)$$

kde $\Theta(x) = [1 \ x \ x^2]$.

Podélné a torzní deformace jsou aproximovány polynomy prvního řádu

$$u(x, t) = \Psi(x)\mathbf{c}_3(t), \quad \varphi(x, t) = \Psi(x)\mathbf{c}_4(t), \quad (2.10)$$

kde $\Psi(x) = [1 \ x]$.

Vytknutím průměrných zkosů z rovnic (2.6) a jejich dosazením do rovnic (2.7) dostaneme vztahy

$$\left[\Theta(x) + \frac{EJ_{\zeta}}{k_{\zeta}AG} \Theta''(x) \right] \mathbf{b}_1(t) = \Phi'(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (2.11)$$

$$\left[\Theta(x) + \frac{EJ_{\eta}}{k_{\eta}AG} \Theta''(x) \right] \mathbf{b}_2(t) = -\Phi'(x)\mathbf{c}_2(t),$$

ve kterých lze zavést takzvané smykové parametry jako

$$\kappa_i = \frac{6EJ_i}{k_iAGl^2}, \quad i = \zeta, \eta. \quad (2.12)$$

Nyní je možné porovnat koeficienty u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnic (2.11) a tím dostaneme vztahy mezi vektory koeficientů aproximačních polynomů

$$\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{H}_{\zeta}\mathbf{c}_1(t), \quad \mathbf{b}_2(t) = -\mathbf{H}_{\eta}\mathbf{c}_2(t), \quad (2.13)$$

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

ve kterých jsou zavedeny matice \mathbf{H}_i následovně

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\kappa_i l^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad i = \zeta, \eta. \quad (2.14)$$

Díky vztahům (2.13) je možné rovnice (2.9) přepsat do tvaru

$$\psi(x, t) = \mathbf{\Theta}(x)\mathbf{H}_\zeta \mathbf{c}_1(t), \quad \vartheta(x, t) = -\mathbf{\Theta}(x)\mathbf{H}_\eta \mathbf{c}_2(t). \quad (2.15)$$

Pro popis deformačního stavu hřídelového prvku v zavedeném souřadnicovém systému xyz lze využít vektorů zobecněných posuvů uzlů i (pro $x = 0$) a $i + 1$ (pro $x = l$) ve tvaru

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \left[\mathbf{q}_1^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_2^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_3^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_4^{(e)T}(t) \right]^T, \quad (2.16)$$

ve kterém jsou definovány následující vektory

$$\mathbf{q}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ \psi(l, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} u(0, t) \\ u(l, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4^{(e)} = \begin{bmatrix} \varphi(0, t) \\ \varphi(l, t) \end{bmatrix}.$$

Dále použitím aproximačních vztahů (2.8), (2.10) a (2.15) díky čemu dostaneme rovnice

$$\mathbf{q}_j^{(e)}(t) = \mathbf{S}_j \mathbf{c}_j(t), \quad \text{kde } j = 1, \dots, 4. \quad (2.18)$$

Matice \mathbf{S}_j mají tvar

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\kappa_\zeta l^2 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & (3 - \kappa_\zeta)l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \kappa_\eta l^2 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -(3 - \kappa_\eta)l^2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}.$$

Nyní již je možné vyjádřit aproximační vztahy mezi deformacemi a zobecněnými posuvy uzlů vyloučením vektorů koeficientů $\mathbf{c}_j(t)$ ze vztahů (2.8), (2.10) a (2.15) a použitím inverzních tvarů matic (2.19) [2]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3^{(e)}(t), & v(x, t) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1^{(e)}(t), \\ w(x, t) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2^{(e)}(t), & \varphi(x, t) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4^{(e)}(t), \\ \vartheta(x, t) &= -\mathbf{\Theta}(x)\mathbf{H}_\eta\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2^{(e)}(t), & \psi(x, t) &= \mathbf{\Theta}(x)\mathbf{H}_\zeta\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1^{(e)}(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.1. Kinetická a potenciální energie hřídelového elementu

Pro stanovení kinetické energie hřídelového elementu se vyjde ze základního rozkladu pohybu elementu délky dx v jeho těžišti. Pak můžeme vyjádřit rychlost unášivého posuvného pohybu v rotujícím souřadnicovém systému xyz jako

$$\mathbf{v}_s(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{u}(x, t) \\ \dot{v}(x, t) - \omega_0 w(x, t) \\ \dot{w}(x, t) + \omega_0 v(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Stejně tak může být vyjádřena okamžitá úhlová rychlost relativního sférického pohybu hřídelového prvku v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ ve tvaru

$$\boldsymbol{\omega}(x, t) = \begin{bmatrix} \omega_0 \cos(\vartheta) \cos(\psi) + \dot{\vartheta} \sin(\psi) + \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \cos(\psi) - \omega_0 \cos(\vartheta) \sin(\psi) \\ \dot{\psi} + \omega_0 \sin(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

což lze zjednodušit při uvažování malých úhlů deformace ψ, ϑ na tvar

$$\boldsymbol{\omega}(x, t) \doteq \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\varphi}(x, t) + \dot{\vartheta}(x, t)\psi(x, t) \\ \dot{\vartheta}(x, t) - \omega_0\psi(x, t) \\ \dot{\psi}(x, t) + \omega_0\vartheta(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Celková kinetická energie hřídelového elementu e je definována jako součet energie od unášivého posuvného pohybu a energie od relativního sférického pohybu, kdy je následně tento součet integrován po celé délce elementu

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x)\mathbf{v}_s^T(x, t)\mathbf{v}_s(x, t) + \boldsymbol{\omega}^T(x, t)\mathbf{J}(x)\boldsymbol{\omega}(x, t)]\rho dx, \quad (2.24)$$

kde symbolem ρ je označena hustota materiálu. $\mathbf{J}(x)$ značí matici setrvačnosti, která je definována pomocí kvadratických momentů $J_\eta(x), J_\zeta(x)$ k příslušným osám a pomocí deviačního momentu $D_{\eta\zeta}(x)$ průřezu hřídelového elementu jako

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} J_\eta(x) + J_\zeta(x) & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta(x) & -D_{\eta\zeta}(x) \\ 0 & -D_{\eta\zeta}(x) & J_\zeta(x) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Struktura matice $\mathbf{J}(x)$ odráží fakt, že deviační momenty ke dvojicím os ξ, η a ξ, ζ jsou nulové, neboť ξ je hlavní centrální osou setrvačnosti hřídelového elementu. Nyní je již možné dosadit vztahy (2.21) a (2.23) do rovnice (2.24), čímž dostaneme vzorec pro kinetickou energii hřídelového elementu ve tvaru

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

$$\begin{aligned}
 E_k^{(e)} = & \frac{1}{2} \int_0^l A [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + 2\omega_0(v\dot{w} - w\dot{v}) + \omega_0^2(v^2 + w^2)] \rho dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \{ J_p (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi)^2 + J_\eta \dot{\vartheta}^2 + J_\zeta \dot{\psi}^2 - 2D_{\eta\zeta} \dot{\vartheta}\dot{\psi} + \\
 & + 2\omega_0 [J_p \dot{\varphi} + J_\zeta (\psi\dot{\vartheta} + \vartheta\dot{\psi}) - D_{\eta\zeta} (\vartheta\dot{\vartheta} - \psi\dot{\psi})] + \\
 & + \omega_0^2 (J_p + J_\eta \psi^2 + J_\zeta \vartheta^2 + 2D_{\eta\zeta} \vartheta\psi) \} \rho dx.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ve vztahu (2.26) je J_p polární moment průřezu hřídelového elementu. Na závěr jsou do rovnice (2.26) dosazeny aproximační vztahy pro deformace (případně jejich derivace) (2.20), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
 E_k^{(e)} = & \frac{1}{2} \int_0^l A [\dot{q}_3^T S_3^{-T} \Psi^T \Psi S_3^{-1} \dot{q}_3 + \dot{q}_1^T S_1^{-T} \Phi^T \Phi S_1^{-1} \dot{q}_1 + \dot{q}_2^T S_2^{-T} \Phi^T \Phi S_2^{-1} \dot{q}_2 + \\
 & + 2\omega_0 (\dot{q}_1^T S_1^{-T} \Phi^T \Phi S_2^{-1} \dot{q}_2 - \dot{q}_2^T S_2^{-T} \Phi^T \Phi S_1^{-1} \dot{q}_1) + \\
 & + \omega_0^2 (\dot{q}_1^T S_1^{-T} \Phi^T \Phi S_1^{-1} \dot{q}_1 + \dot{q}_2^T S_2^{-T} \Phi^T \Phi S_2^{-1} \dot{q}_2)] \rho dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \{ J_p \dot{q}_4^T S_3^{-T} \Psi^T \Psi S_3^{-1} \dot{q}_4 + J_\eta \dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\eta S_2^{-1} \dot{q}_2 + \\
 & + J_\zeta \dot{q}_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1 + 2D_{\eta\zeta} \dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1 + \\
 & + 2\omega_0 [J_p \dot{q}_4^T S_3^{-T} \Psi^T \Psi S_3^{-1} \dot{q}_4 - J_\zeta (\dot{q}_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta^T \Theta H_\eta S_2^{-1} \dot{q}_2 + \dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1) - \\
 & - D_{\eta\zeta} (\dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\eta S_2^{-1} \dot{q}_2 - \dot{q}_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1)] + \\
 & + \omega_0^2 (J_p + J_\eta \dot{q}_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1 + J_\zeta \dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\eta S_2^{-1} \dot{q}_2 - \\
 & - 2D_{\eta\zeta} J_\zeta \dot{q}_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta^T \Theta H_\zeta S_1^{-1} \dot{q}_1) \} \rho dx.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pro stanovení potenciální energie hřídelového elementu nejprve vyjádříme posuvy libovolného bodu L_0 o souřadnicích x , y a z vyjádřených ve směru rotujících souřadnicových os x , y a z před jeho deformací (při uvažování malých úhlů ψ , ϑ) jako

$$\begin{aligned}
 u_x &= u(x, t) - y\psi(x, t) + z\vartheta(x, t), \\
 u_y &= v(x, t) - z\varphi(x, t), \\
 u_z &= w(x, t) + y\varphi(x, t).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Poté pro poměrná prodloužení a zkosení v bodě L (po deformaci) platí

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \doteq \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \doteq \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vartheta, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \doteq \varphi - \varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Vztahy (2.29) lze upravit pomocí aproximačních vztahů (2.20) následovně

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \Psi' S_3^{-1} q_3 - \eta \Theta' H_\zeta S_1^{-1} q_1 - \zeta \Theta' H_\eta S_2^{-1} q_2, \\ \gamma_{xy} &= \Phi' S_1^{-1} q_1 - \zeta \Psi' S_3^{-1} q_4 - \Theta H_\zeta S_1^{-1} q_1, \\ \gamma_{xz} &= \Phi' S_2^{-1} q_2 + \eta \Psi' S_3^{-1} q_4 - \Theta H_\eta S_2^{-1} q_2.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Potenciální energie hřídelového elementu e je definována jako

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{(V)} \lambda dV, \quad \text{kde } \lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon. \quad (2.31)$$

V rovnici (2.31) symbol λ označuje hustotu deformační energie, která je při uvažování malých deformací v oblasti platnosti Hookeova zákona definována vektorem deformace

$\varepsilon = [\varepsilon_x \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz}]^T$ a redukovanou maticí tuhosti pro homogenní izotropní materiál[2]

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix},$$

kde E značí Youngův modul pružnosti v tahu a ν Poissonovu konstantu. Dosazením výše zmíněných vztahů do rovnice (2.31) dostaneme

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} [E^* \varepsilon_x^2 + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)] dA dx, \quad (2.32)$$

kde bylo definováno

$$E^* = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{a} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

označuje modul pružnosti ve smyku. Nyní můžeme dosadit aproximační vztahy (2.30) do rovnice pro potenciální energii (2.32) a po úpravách můžeme vyjádřit potenciální energii hřídelového elementu pomocí zobecněných posuvů i -tého a $i+1$ -ího uzlu ve tvaru

$$\begin{aligned}E_p^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^l [E^* A q_3^T S_3^{-T} \psi^T \psi' S_3^{-1} q_3 + E^* J_\zeta q_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta'^T \Theta' H_\zeta S_1^{-1} q_1 + \\ &+ E^* J_\eta q_2^T S_2^{-T} H_\eta^T \Theta'^T \Theta' H_\eta S_2^{-1} q_2 + 2ED_{\eta\zeta} q_1^T S_1^{-T} H_\zeta^T \Theta'^T \Theta' H_\eta S_2^{-1} q_2 + \\ &+ G J_p q_4^T S_3^{-T} \psi^T \psi' S_3^{-1} q_4 + GA q_1^T S_1^{-T} (\Phi' - \Theta H_\zeta)^T (\Phi' - \Theta H_\zeta) S_1^{-1} q_1 + \\ &+ GA q_2^T S_2^{-T} (\Phi' - \Theta H_\eta)^T (\Phi' - \Theta H_\eta) S_2^{-1} q_2] dx.\end{aligned}\quad (2.33)$$

2.2.2. Matice hřidelového elementu

Při vytváření matic hřidelového elementu vycházíme z podmínky ekvivalence Lagrangeových rovnic druhého druhu s obvyklým maticovým tvarem obecně rotující struktury [2]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \left(\mathbf{K}_s^{(e)} - \omega^2 \mathbf{K}_\omega^{(e)} \right) \mathbf{q}^{(e)}. \quad (2.34)$$

V této rovnici jsou na pravé straně označeny $\mathbf{M}^{(e)}$ matice hmotnosti elementu, $\mathbf{G}^{(e)}$ matice gyroskopických účinků elementu, $\mathbf{K}_s^{(e)}$ matice statické tuhosti elementu a $\mathbf{K}_\omega^{(e)}$ matice změkčení za rotace elementu. Dosazením vztahů (2.27) a (2.33) do rovnice (2.34) dostaneme konkrétní tvar jednotlivých matic

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{M}_{1,2}^{(e)} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{2,1}^{(e)} & \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} &= \mathbf{S}_1^{-T} (A\rho \mathbf{I}_\Phi + J_\zeta \rho \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\zeta) \mathbf{S}_1^{-1}, \quad \mathbf{M}_{1,2}^{(e)} = \mathbf{M}_{2,1}^{(e)} = \mathbf{S}_1^{-T} D_{\eta\zeta} \rho \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\eta \mathbf{S}_2^{-1}, \\ \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} &= \mathbf{S}_2^{-T} (A\rho \mathbf{I}_\Phi + J_\eta \rho \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\eta) \mathbf{S}_2^{-1}, \quad \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} A\rho \mathbf{I}_\psi \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} J_p \rho \mathbf{I}_\psi \mathbf{S}_3^{-1}. \end{aligned}$$

a dále

$$\mathbf{G}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{S}_1^{-T} 2A\rho \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_2^{-1} & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_2^{-T} 2A\rho \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K}_\omega^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} (A\rho \mathbf{I}_\Phi + J_\eta \rho \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\eta) \mathbf{S}_1^{-1} & -\mathbf{S}_1^{-T} D_{\eta\zeta} \rho \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\eta \mathbf{S}_2^{-1} & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}_2^{-T} D_{\eta\zeta} \rho \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\zeta \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2^{-T} (A\rho \mathbf{I}_\Phi + J_\zeta \rho \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}_\zeta) \mathbf{S}_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s,1,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{s,1,2}^{(e)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{s,2,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{s,2,2}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{s,3,3}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{s,4,4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

kde

$$\mathbf{K}_{s,1,1}^{(e)} = \mathbf{S}_1^{-T} \left(E^* J_\zeta \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_{\theta'} \mathbf{H}_\zeta + \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{I}_{H\zeta} \right) \mathbf{S}_1^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{s,1,2}^{(e)} = \mathbf{K}_{s,2,1}^{(e)} = \mathbf{S}_1^{-T} E^* D_{\eta\zeta} \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{I}_{\theta'} \mathbf{H}_\eta \mathbf{S}_2^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{s,2,2}^{(e)} = \mathbf{S}_2^{-T} \left(E^* J_\eta \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{I}_{\theta'} \mathbf{H}_\eta + \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{I}_{H\eta} \right) \mathbf{S}_2^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{s,3,3}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} E^* \mathbf{A} \mathbf{I}_{\psi'} \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{K}_{s,4,4}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} G J_k \mathbf{I}_{\psi'} \mathbf{S}_3^{-1}.$$

Ve výše zmíněných vztazích byl navíc zaveden moment odporu v krutu J_k , který lze pro téměř kruhový profil vyjádřit jako [12] $J_k \doteq \frac{A^4}{40J_p}$, kde J_p značí polární moment průřezu.

Dále byly zavedeny následující matice

$$\mathbf{I}_\Phi = \int_0^l \Phi^T(x) \Phi(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \\ \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} \\ \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} & \frac{l^6}{7} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{I}_\Psi = \int_0^l \Psi^T(x) \Psi(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{I}_\Theta = \int_0^l \Theta^T(x) \Theta(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{I}_{\Phi'} = \int_0^l \Phi'^T(x) \Phi'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & l^2 \\ 0 & l & \frac{4}{3}l^2 & \frac{3}{2}l^3 \\ 0 & l^2 & \frac{3}{2}l^3 & \frac{9}{5}l^4 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

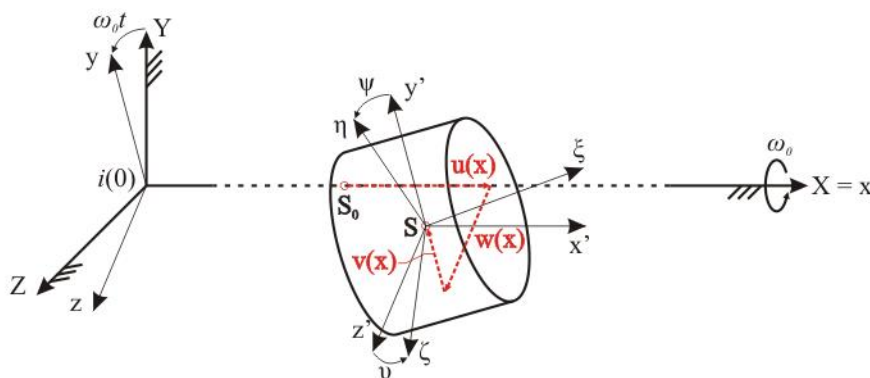
$$\mathbf{I}_{\Psi'} = \int_0^l \Psi'^T(x) \Psi'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{I}_{\theta'} = \int_0^l \boldsymbol{\Theta}'^T(x) \boldsymbol{\Theta}'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & l & \frac{4}{3}l^2 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{Hi} &= \int_0^l (\boldsymbol{\Phi}'(x) - \boldsymbol{\Theta}(x) \mathbf{H}_i)^T (\boldsymbol{\Phi}'(x) - \boldsymbol{\Theta}(x) \mathbf{H}_i) dx = \\ &= l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_i^2 l^4 \end{bmatrix}, \quad i = \eta, \zeta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.2.3. Matice tuhého kotouče

Model tuhého kotouče lze využít jako zjednodušený model ozubených kol, spojek, ventilátorů, disků olopatkových kol, kol kolejových vozidel a podobně. Poddajné kotouče lze pomocí tuhého tělesa (kotouče) modelovat v případě, kdy modelovaný kotouč je výrazně tužší než hřídel, na kterém je nasazen, a dále v případě, kdy předpokládané buzení zkoumaného mechanického systému je frekvenčně nižší než nejnižší vlastní frekvence samotného poddajného kotouče. Dále bude odvozen model tuhého kotouče v rotujícím souřadnicovém systému.



Obr. 2.2 Tuhý kotouč

Uvažujme kotouč o hmotnosti m , který je rotačně symetrický a který má střed hmotnosti S . Dále předpokládejme kartézský souřadnicový systém $\xi\eta\zeta$ s počátkem ve středu hmotnosti kotouče S , kdy tento souřadnicový systém je pevně spojen s kotoučem. Pak rozložení hmotnosti kotouče lze popsat maticí setrvačnosti $\mathbf{I}_S = \text{diag}(I_0, I, I)$, ve které byly definovány tyto momenty setrvačnosti kolem jednotlivých os $I_0 = I_\xi$, $I = I_\eta = I_\zeta$.

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Dále uvažujeme druhý kartézský souřadnicový systém xyz , který rotuje kolem osy x konstantní úhlovou rychlostí ω_0 , která odpovídá jmenovité úhlové rychlosti tělesa ω .

Kmitavý pohyb kotouče je popsán posuvy u , v a w ve směrech os x , y a z a Eulerovými úhly φ , ϑ a ψ . Obecný prostorový pohyb tělesa je rozložen na unášivý posuvný pohyb, který je popsán vektorem rychlosti se složkami v rotujícím souřadnicovém systému xyz jako

$$\mathbf{v}_S(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) - \omega_0 w(t) \\ \dot{w}(t) + \omega_0 v(t) \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

a na relativní sférický pohyb kolem středu hmotnosti kotouče S , který je definován v souřadnicovém systému $\zeta\eta\zeta$ pomocí vektoru úhlové rychlosti

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega_0 \cos(\vartheta(t)) \cos(\psi(t)) + \dot{\vartheta}(t) \sin(\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \cos(\psi(t)) - \omega_0 \cos(\vartheta(t)) \sin(\psi(t)) \\ \dot{\psi}(t) + \omega_0 \sin(\vartheta(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Vztah (2.47) lze zjednodušit při uvažování malých úhlů natočení na tvar

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\vartheta}(t)\psi(t) + \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) - \omega_0\psi(t) \\ \dot{\psi}(t) + \omega_0\vartheta(t) \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Pro výše zmíněný rozklad pohybu je stanovena kinetická energie kotouče následovně

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}. \quad (2.49)$$

Dosazením vztahů (2.46) a (2.48) do předchozí rovnice a po úpravách dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{v} - \omega_0 w)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{w} + \omega_0 v)^2 + \frac{1}{2} [I_0 (\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + 2\omega_0 \dot{\vartheta} \psi] + \frac{1}{2} I (\dot{\vartheta} - \omega_0 \psi)^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\psi} + \omega_0 \vartheta)^2. \quad (2.50)$$

Výsledné matice tuhého kotouče obdržíme dosazením vztahu (2.50) do Lagrangeových rovnic tentokrát ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \omega_0 \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \omega_0^2 \mathbf{K}_{D\omega} \mathbf{q}_D, \quad (2.51)$$

kde jsme zavedli vektor zobecněných souřadnic tuhého kotouče jako $\mathbf{q}_D(t) = [u, v, w, \varphi, \vartheta, \psi]^T$. Ve vztahu (2.51) byly odvozeny následující matice tuhého kotouče

$$\mathbf{M}_D = \text{diag}(m, m, m, I_0, I, I), \quad (2.52)$$

kteřá má význam matice hmotnosti tuhého kotouče. Dále byla odvozena matice

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 - 2I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2I - I_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

kteřá označuje matici gyroskopických účinků tuhého kotouče. Poslední matice, kteřá byla odvozena, je matice změkčení za rotace $\mathbf{K}_{D\omega}$, tuhého kotouče, kteřá je diagonální a má tvar

$$\mathbf{K}_{D\omega} = \text{diag}(0, m, m, 0, I, I). \quad (2.54)$$

2.2.4. Globální matice izolovaného rotoru

Izolovanou rotorovou soustavu turbodmyhadla si můžeme představit jako hřídel, kteřý je diskretizován pomocí předem zvoleného počtu hřídelových elementů, na němž je nasazen daný počet dokonale tuhých kotoučů. Jak pro hřídelové prvky, tak pro tuhé kotouče byly v předchozích podkapitolách odvozeny jejich matice. Předpokládejme nejprve $n-1$ hřídelových konečných prvků, kde n je počet uzlů diskretizace hřídele. Pro tyto elementy byl zaveden rovnicí (2.16) vektor zobecněných souřadnic $\mathbf{q}^{(e)}(t)$. Je výhodné přeskupit elementy tohoto vektoru ve smyslu

$$\mathbf{q}_e(t) = [u(0, t), v(0, t), w(0, t), \varphi(0, t), \vartheta(0, t), \psi(0, t), \\ u(l, t), v(l, t), w(l, t), \varphi(l, t), \vartheta(l, t), \psi(l, t)]^T. \quad (2.55)$$

Pro přeskupení jednotlivých matic elementů dle předchozího lze použít transformační vztah

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}_e(t), \quad (2.56)$$

kde symbolem \mathbf{P} byla označena permutační matice ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Transformační vztah pro matice hřídelových prvků z prostoru definovaného vektorem $\mathbf{q}^{(e)}(t)$ (viz rovnice (2.16)) do prostoru definovaného vektorem $\mathbf{q}_e(t)$ (podle vztahu (2.55)) je dán jako

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{P}. \quad (2.58)$$

\mathbf{X} zde značí libovolnou matici hřídelového elementu – tedy matici hmotnosti elementu $\mathbf{M}^{(e)}$ definovanou vztahem (2.35), matici gyroskopických účinků $\mathbf{G}^{(e)}$ danou rovnicí (2.36), matici změkčení za rotace $\mathbf{K}_\omega^{(e)}$, kterou určuje rovnice (2.37) a nebo matici statické tuhosti $\mathbf{K}_S^{(e)}$, kterou popisuje vztah (2.38).

Nyní již můžeme zavést globální vektor výchylek uzlů rotoru turbodmyhadla. Označme tyto uzly vzestupně indexem $i = 1, 2, \dots, n$. Pak globální vektor výchylek uzlů rotoru bude mít tvar

$$\mathbf{q}_{rot}(t) = [\dots, u_i(t), v_i(t), w_i(t), \varphi_i(t), \vartheta_i(t), \psi_i(t), \dots]^T. \quad (2.59)$$

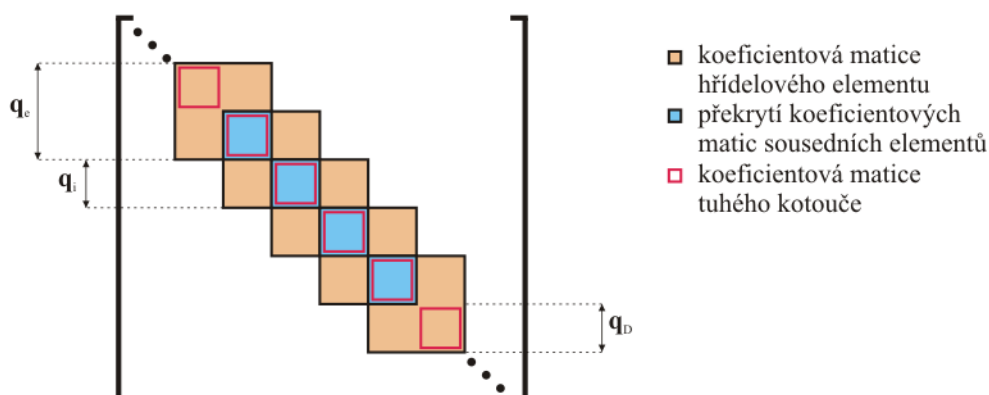
V souladu s pohybovou rovnicí hřídelového elementu odvozenou rovnicí (2.34) můžeme napsat matematický model netlumeného hřídele v rotujícím prostoru jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{rot}(t) + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_{rot}(t) + (\mathbf{K}_S + \omega^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q}_{rot}(t) = 0. \quad (2.60)$$

Globální matice ve vztahu (2.60), které jsou seřazeny podle globálního vektoru výchylek (2.59), mají tu výhodu, že jsou blokově diagonální. Každý blok je tvořen submaticí řádu 12 a sám o sobě je přiřazen zobecněným výchylkám jednoho hřídelového elementu. Pro celkové sestavení těchto globálních matic tedy stačí přičíst již dříve odvozené matice hřídelového prvku, například matici hmotnosti elementu $\mathbf{M}^{(e)}$ definovanou rovnicí (2.35), ke globální matici hmotnosti \mathbf{M} na místa příslušející zobecněným souřadnicím uzlů, které definují daný hřídelový prvek. Tímto způsobem postupujeme i u sestavení ostatních globálních matic izolované rotorové soustavy turbodmyhadla, jmenovitě matice gyroskopických účinků \mathbf{G} , matice statické tuhosti \mathbf{K}_S a matice změkčení za rotace \mathbf{K}_ω .

Model tuhého kotouče lze do globálního modelu začlenit tak, že na příslušná místa globálních matic přičteme matice daného tuhého kotouče. Konkrétně matici hmotnosti tuhého kotouče \mathbf{M}_D (2.52), matici gyroskopických účinků tuhého kotouče \mathbf{G}_D (2.53) a matici změkčení za rotace tuhého kotouče $\mathbf{K}_{D\omega}$ (2.54). Na rozdíl od matic hřídelového prvku jsou matice tuhého kotouče řádu 6. Jejich řazení odpovídá řazení vektoru zobecněných souřadnic tuhého kotouče \mathbf{q}_D , a proto je již nemusíme nijak transformovat a můžeme jejich prvky rovnou přičíst k odpovídajícím prvkům globálních matic

izolované rotorové části turbodmyhadla. Výsledná struktura takovéto globální matice je pak vidět na Obr. 2.3.



Obr. 2.3 Diagonální struktura globálních matic izolovaného hřídele s nasazenými kotouči

2.3. Matematický model kluzných ložisek

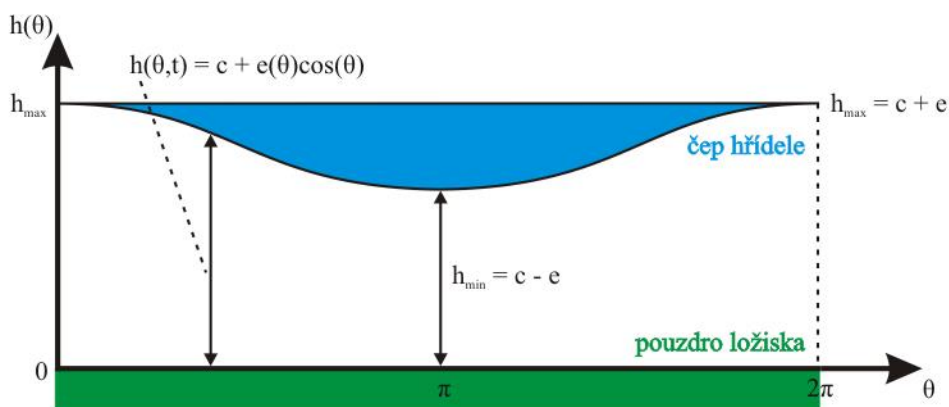
Hlavním úkolem ložisek je zajistit stabilitu rotoru za jakýchkoliv provozních podmínek turbodmyhadla, čemuž dopomáhá i určitá míra zbytkové nevyváhy rotoru, jak již bylo zmíněno v úvodu. V opačném případě by mohlo docházet k nežádoucím vibracím nebo nadměrnému hluku při provozu. Tyto nežádoucí efekty mohou být eliminovány díky vhodné geometrii ložiska, případně pomocí dobře navržených vůlí v uložení samotného ložiska na rotoru turbodmyhadla. Druhým důležitým aspektem ložisek je snaha o co největší snížení tření v ložiscích a tím zvýšení účinnosti turbodmyhadla, čímž dojde i ke snížení emisí CO_2 a NO_x motoru. Za třetí je nutné zohlednit požadavky na životnost stroje. Navíc je v dnešní době brán ohled také na ekonomické hledisko, aby adekvátně navržené ložisko splňující veškeré požadavky bylo vyrobitelné s přijatelnými náklady na výrobu. Výsledný design ložisek tak bývá často kompromisem při splnění výše zmíněných požadavků.

K vyjádření pracovního cyklu radiálního kluzného ložiska uvažujme hřídel, jehož okamžitá rychlost středu je v_j , a dále kluzné ložisko s plovoucím pouzdrem, kde pouzdro rotuje kolem čepu hřídele okamžitou rychlostí v_r . Pak hydrodynamické efekty od proudícího oleje v ložisku probíhající mezi rotujícím čepem hřídele a rotujícím pouzdrem ložiska můžeme popsat pomocí Reynoldsovi rovnice za předpokladu nestlačitelného a nekavitujícího olejového filmu jako [5]

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

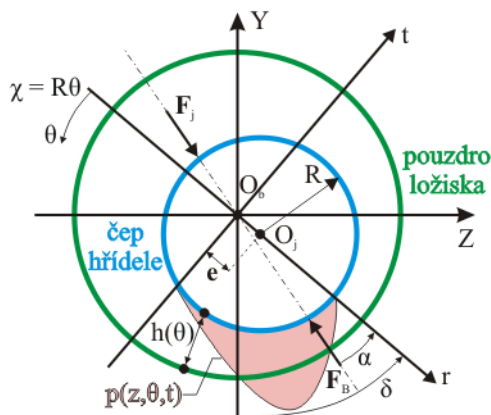
$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\eta \left[(v_j + v_r) \frac{\partial h}{\partial \chi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right], \quad (2.61)$$

kde h značí tloušťku olejového filmu, p je tlak olejového média, η označuje dynamickou viskozitu oleje, χ značí souřadnici v obvodovém směru definovanou jako $\chi = R\theta$ (viz Obr. 2.5) a x je souřadnice v axiálním směru ložiska. V případě kdy hřídel nerotuje je rozložení tlaku v olejovém filmu úměrné tloušťce olejové vrstvy mezi čepem hřídele a pouzdra ložiska, které má klínovitý průběh při vykreslení tloušťky olejové vrstvy v závislosti na polohovém úhlu θ (viz Obr. 2.4).



Obr. 2.4 Tloušťka olejové vrstvy v závislosti na polohovém úhlu

Ztenčení olejového filmu je zapříčiněno statickými silami od tíhy izolované rotorové části turbodmyhadla. V případě, kdy je rotor v pohybu, mají na tloušťku olejového filmu vliv také hydrodynamické efekty vznikající v důsledku rotace hřídele a pouzdra ložiska. Díky těmto efektům je rozložení tlaku v olejové vrstvě vychýleno vzhledem k aktuální poloze ložiska ve smyslu, kdy maximální hodnota tlaku v olejovém filmu není v místě, kde je olejová vrstva nejtěnější (viz Obr. 2.5).



Obr. 2.5 Rozložení tlaku v olejové vrstvě mezi hřídelí a ložiskem

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Tento tlak následně generuje ložiskové síly, které působí proti hřídeli a tím tak udržují rotor ve stabilní poloze. Označme výslednou ložiskovou sílu jako F_B , kterou je možné spočítat jako integrál rozložení tlaku přes část plochy čepu hřídele.

Samotnou tloušťku olejové vrstvy v ložisku lze spočítat na základě polohového úhlu θ , excentricity hřídele vůči ložisku e a vůle v uložení ložiska c ze vztahu [5]

$$h(\theta, t) = c - e(t) \cos(\varphi) = c + e(t) \cos(\theta), \quad (2.62)$$

ve kterém je navíc zaveden úhel φ jako doplňkový úhel k rovinnému úhlu θ . Z rovnice (2.62) na první pohled vyplývají extrémní hodnoty pro tloušťku olejové vrstvy

$$\begin{cases} h_{max} = c + e & \text{pro } \theta = 0 \text{ a } 2\pi, \\ h_{min} = c - e & \text{pro } \theta = \pi. \end{cases} \quad (2.63)$$

Dosazením geometrických závislostí

$$\begin{cases} \chi = R\theta, \\ h(t) = c + e(t)\cos(\theta) \end{cases} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{e} \cos(\theta) = c\dot{e} \cos(\theta), \quad (2.64)$$

kde R značí poloměr čepu hřídele, do rovnice (2.61) dostaneme po úpravách její tvar pro cylindrické souřadnice, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 + \varepsilon \cos(\theta))^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \varepsilon \cos(\theta))^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \\ = -6\eta \left(\frac{R}{c} \right)^2 [(\omega_{rel} - 2\dot{\delta})\varepsilon \sin(\theta) - 2\dot{\varepsilon} \cos(\theta)], \end{aligned} \quad (2.65)$$

kde byla označena symbolem ω_{rel} relativní úhlová rychlost, definovaná v tomto případě jako rozdíl rychlosti rotace hřídele ω a rychlosti rotace pouzdra ložiska ω_R , symbolem $\dot{\delta}$ rychlost excentrického kroužení hřídele kolem geometrického středu ložiska, kde definici úhlu δ lze vyčíst z Obr. 2.5, a symbolem $\dot{\varepsilon}$ časová změna poměrné excentricity hřídele vzhledem ke středu ložiska. K úplné definici výše nastíněného matematického problému je nutné dodefinovat okrajové podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{vstup: } p(\theta = 0, x) = p(\theta = 2\pi, x) = p_i, \\ \text{výstup: } p(\theta, x = L/2) = p(\theta, x = -L/2) = p_o). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Řešení takto zadané úlohy lze odvodit za pomoci zjednodušení, kde rozdělujeme dva případy [5] a to, kdy poměr šířky ložiska L k průměru ložiska D (viz Obr. 2.8) je podstatně větší než 1 (tzv. **dlouhá ložiska**) a za druhé, když je tento poměr menší než 1. Uvažujme druhý případ, který bývá označován jako **krátké ložisko**. V takovémto případě je tlakový gradient v obvodovém směru θ významně menší než v axiálním směru x , proto je možné první člen rovnice (2.65) zanedbat čímž dostaneme

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmychadla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \varepsilon \cos(\theta))^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{-6\eta}{c^2} [(\omega_{rel} - 2\dot{\delta})\varepsilon \sin(\theta) - 2\dot{\varepsilon} \cos(\theta)]. \quad (2.67)$$

Řešením této rovnice s předem danými okrajovými podmínkami (2.66) je rozložení tlaku na povrchu hřídele ve tvaru [5]

$$p(\theta, x) = p_0 + \frac{3\eta}{c^2(1 + \varepsilon \cos(\theta))^3} (\omega_{rel} - 2\dot{\delta})\varepsilon \sin(\theta) - 2\dot{\varepsilon} \cos(\theta) \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right). \quad (2.68)$$

Ložiskové síly nekavitujícího olejového filmu krátkého ložiska získáme integrací rozložení tlaku přes povrch čep hřídele, kde po rozepsání do radiálního a tečného směru dostaneme

$$\begin{cases} F_r = \frac{\eta}{2} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{2\varepsilon^2(\omega_{rel} - 2\dot{\delta})}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\pi\dot{\varepsilon}(1 + 2\varepsilon^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^5}} \right], \\ F_t = \frac{\eta}{2} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{\pi\varepsilon(\omega_{rel} - 2\dot{\delta})}{\sqrt{2(1 - \varepsilon^2)^3}} + \frac{4\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right]. \end{cases} \quad (2.69)$$

Případně je můžeme zapsat ve tvaru

$$F_r = F_{ref} f_r(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\delta}), \quad F_t = F_{ref} f_t(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\delta}), \quad (2.70)$$

kde

$$F_{ref} = \frac{\eta\omega_{rel}}{2} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \quad (2.71)$$

je tzv. referenční síla. Pak bezrozměrné funkce pro radiální f_r a tečnou f_t složku síly mají tvar [6]

$$\begin{aligned} f_r &= \left(1 - \frac{2\dot{\delta}}{\omega_{rel}} \right) \frac{2\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_{rel}} \frac{1 + 2\varepsilon^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^5}}, \\ f_t &= -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2\dot{\delta}}{\omega_{rel}} \right) \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(1 - \varepsilon^2)^3}} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_{rel}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Nyní zkoumejme stav staticky rovnovážné polohy, ve kterém platí, že časové derivace ve vztahu (2.72) jsou rovny nule a celková síla F_B přenášená olejovým filmem se musí rovnat z principu akce a reakce statickému zatížení izolovaného rotoru F_{ST} . Celkovou sílu přenášenou olejovou vrstvou lze vyjádřit ve tvaru

$$F_B = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} = F_{ref} \sqrt{f_r^2 + f_t^2} = F_{ST}, \quad (2.73)$$

což můžeme upravit do rovnice

$$\frac{\pi\varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \left(\frac{4\varepsilon}{\pi} \right)^2} = \frac{F_{ST}}{F_{ref}}, \quad (2.74)$$

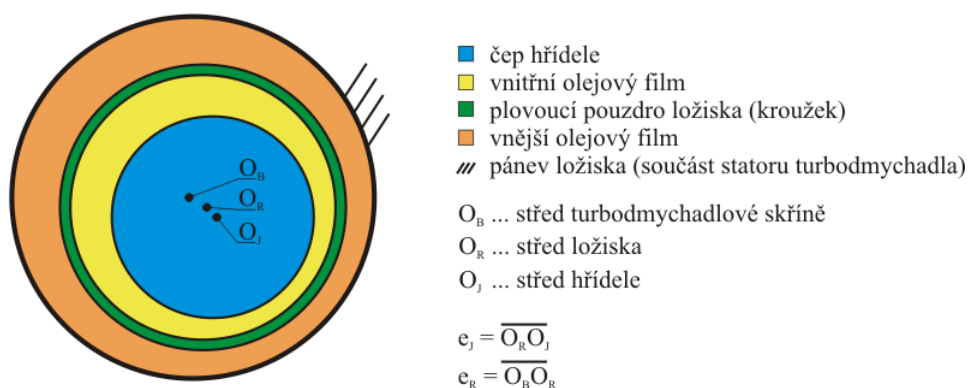
2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

kde po dosazení vztahu (2.71) dostaneme

$$\frac{\pi\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^2} \sqrt{1-\varepsilon^2 + \left(\frac{4\varepsilon}{\pi}\right)^2} = \frac{F_{ST}}{\frac{\omega_{rel}}{2} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{L^3}{R}} \quad (2.75)$$

Tím byla odvozena obecná nelineární rovnice pro výpočet poměrné excentricity ε ve staticky rovnovážné poloze ložiska.

Nyní je potřeba si uvědomit, že olejový film se nenachází pouze mezi čepem hřídele a pouzdem ložiska, ale také mezi pouzdem ložiska a nehybnou pánev ložiska.



Obr. 2.7 Schéma systému hřídel-ložisko-turbodmychadlová skříň

Pro následné rozlišení budeme značit první zmíněnou olejovou vrstvu indexem I a vrstvu mezi pouzdem ložiska a turbodmychadlovou skříňí indexem O . Obecné vztahy jako takové platí pro oba olejové filmy. Pro vnitřní olejový film uvažujeme ve vztahu (2.75) následující substituce:

- $F_{ST} = F_J$ (statické zatížení izolované rotorové části turbodmyhadla)
- $\omega_{rel} = \omega - \omega_R$ (rozdíl úhlové rychlosti hřídele a úhlové rychlosti pouzdra)
- $R = R$ (poloměr čepu hřídele)
- $c = c_I$ (vůle mezi čepem hřídele a vnitřní stranou pouzdra ložiska)
- $L = L_I$ (délka vnitřní strany pouzdra ložiska v axiálním směru)
- $\eta = \eta(T_I)$ kde T_I je teplota vnitřního olejového filmu,

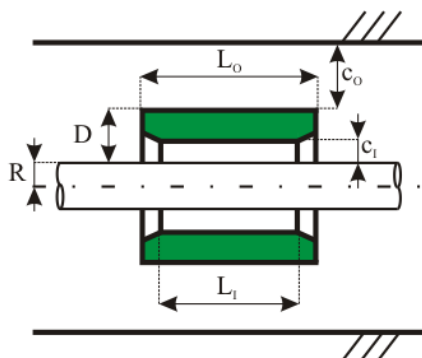
čímž dostaneme rovnici pro výpočet poměrné excentricity ε_J mezi středem pouzdra ložiska a středem excentricky vychýleného čepu hřídele. Obdobně pro vnější olejový film dosazujeme do vztahu (2.75) hodnoty:

- $F_{ST} = F_R$ (statické zatížení izolovaného rotoru včetně tíhy ložiska)
- $\omega_{rel} = \omega_R$ (úhlová rychlost rotace pouzdra ložiska)
- $R = D$ (vnější poloměr pouzdra ložiska)

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

- $c = c_o$ (vůle mezi kroužkem a vnitřní stranou pánve ložiska)
- $L = L_o$ (délka vnější strany pouzdra ložiska v axiálním směru)
- $\eta = \eta(T_o)$ kde T_o je teplota vnějšího olejového filmu,

čímž dostaneme rovnici pro výpočet poměrné excentricity ε_R mezi středem pánve ložiska a středem excentricky vychýleného pouzdra ložiska.



- L_o ... axiální délka vnější strany kroužku
- L_i ... axiální délka vnitřní strany kroužku
- R ... poloměr čepu hřídele
- D ... vnější poloměr pouzdra ložiska
- c_i ... vnitřní vůle mezi čepem ložiska a kroužkem
- c_o ... vnější vůle mezi kroužkem a pánví ložiska

Obr. 2.8 Charakteristické rozměry ložiska a jeho uložení

Tyto dvě konkrétní nelineární algebraické rovnice tvoří provázanou soustavu rovnic

$$\frac{\pi \varepsilon_J}{2(1 - \varepsilon_J^2)^2} \sqrt{1 - \varepsilon_J^2 + \left(\frac{4\varepsilon_J}{\pi}\right)^2} = \frac{F_J}{\eta(T_i) \frac{\omega_J - \omega_R}{2} \left(\frac{R_J}{c_i}\right)^2 \frac{L_i^3}{R_J}} \quad (2.76)$$

$$\frac{\pi \varepsilon_R}{2(1 - \varepsilon_R^2)^2} \sqrt{1 - \varepsilon_R^2 + \left(\frac{4\varepsilon_R}{\pi}\right)^2} = \frac{F_R}{\eta(T_o) \frac{\omega_R}{2} \left(\frac{R_R}{c_o}\right)^2 \frac{L_o^3}{R_R}}$$

kde vzájemné provázání rovnic je zapříčiněno členem ω_R . Tomu odpovídá i fyzikální význam uložení ložiska, kdy hydrodynamické síly generované pohybem čepu hřídele a vnitřním olejovým filmem mají vliv na pohyb kroužku ložiska, které svým pohybem následně ovlivňuje chování vnější olejové vrstvy. Rychlosti čepu hřídele a kroužku ložiska jsou spolu vázány následující vazbou

$$\omega_R = RSR\omega_J, \quad (2.77)$$

kde RSR označuje tzv. Ring-Speed-Ratio³, pro který platí vztah [6]

³ neboli rychlostní poměr kroužku a čepu hřídele

$$RSR = \frac{1}{1 + \frac{\eta(T_0)}{\eta(T_1)} \frac{L_0}{L_1} \frac{c_I \sqrt{1 - \varepsilon_J^2}}{c_O \sqrt{1 - \varepsilon_R^2}} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3}. \quad (2.78)$$

Pokud tento vztah dosadíme do rovnice (2.77), dojde k výše zmíněnému provázání jednotlivých rovnic soustavy. Symbol η vyskytující se ve vztahu (2.78) a v rovnicích (2.76) definuje dynamickou viskozitu daného olejového filmu v závislosti na jeho teplotě T . Pro zpřesnění výpočtu lze hodnotu dynamické viskozity vypočítat pomocí Cameronova-Vogelova vztahu [5]

$$\eta(T) = a \cdot \exp\left(\frac{b}{273 + T - c}\right), \quad (2.79)$$

ve kterém a , b a c značí charakteristické parametry jednotlivých typů olejů a lze je nalézt v tabulce 9.2 v [5]. Případně známe-li hodnoty dynamické viskozity pro tři různé hodnoty teploty (η_1, T_1) , (η_2, T_2) , (η_3, T_3) , je možné koeficienty a , b a c vypočítat následovně [5]

$$c = \frac{\beta T_3 - T_2}{\beta - 1} \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3}\right) \ln\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)}{\ln\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)},$$

$$b = \frac{(T_1 - c)(T_2 - c) \ln\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}{(T_1 - T_2)}, \quad a = \frac{\eta_1}{\exp\left(\frac{b}{T_1 - c}\right)}$$

Konstanta a předchozího vztahu má rozměr Nsm^{-2} a konstanty b a c mají rozměr teploty v Kelvinových stupních. Známe-li poměrné excentricity ε_J a ε_R můžeme snadno dopočítat samotné excentricity e_J a e_R (viz Obr. 2.7) podle vztahů

$$e_J = \varepsilon_J c_I, \quad e_R = \varepsilon_R c_O, \quad (2.80)$$

potazmo můžeme vyjádřit souřadnice statické rovnovážné polohy středu hřídele O_J a souřadnice statické rovnovážné polohy středu ložiska O_R

$$O_J = [-e_R \cos(\alpha_R) - e_J \cos(\alpha_J), e_R \sin(\alpha_R) + e_J \sin(\alpha_J)],$$

$$O_R = [-e_R \cos(\alpha_R), e_R \sin(\alpha_R)]. \quad (2.81)$$

Ve vztazích (2.81) jsme navíc zavedli úhel α , pro který obecně platí s přihlédnutím ke vztahům (2.69), resp. (2.72)

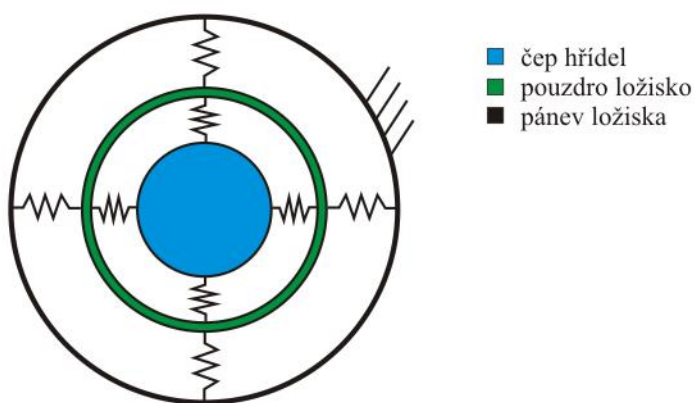
$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{F_t}{F_r} = \frac{f_t}{f_r}.$$

2. KAPITOLA – Modelování rotoru turbodmyhadla

Po dosazení a při uvažování staticky rovnovážného stavu dostaneme konkrétně

$$\alpha_J = \arctg\left(\frac{\pi}{4\varepsilon_J}\sqrt{1-\varepsilon_J}\right), \quad \alpha_R = \arctg\left(\frac{\pi}{4\varepsilon_R}\sqrt{1-\varepsilon_R}\right). \quad (2.82)$$

Známe-li staticky rovnovážné polohy čepu hřídele a kroužku ložiska, je možné v blízkém okolí těchto poloh linearizovat ložiskové síly od příslušných olejových filmů pomocí uvažování lineárních členů Taylorova rozvoje a tím je následně vyjádřit pomocí koeficientů tuhosti.



Obr. 2.9 Linearizovaný model ložiskových vazeb

Je vhodné mít tento model vyjádřený v pevném nerotujícím souřadnicovém systému. Vyjádřeme proto nejprve složky ložiskových sil transformované z rotujícího souřadnicového systému do pevného jako

$$F_Y = F_r \sin(\delta) + F_t \cos(\delta), \quad F_Z = F_r \cos(\delta) - F_t \sin(\delta). \quad (2.83)$$

Pak zavedeme-li označení sil F_Y, F_Z s indexem $i = 1, 2$, a radiálních výchylek v, w jako

$$\mathbf{q}_{ring} = [v, w]^T. \quad (2.84)$$

obecně s indexem $j = 1, 2$ můžeme ložiskové síly linearizovat pomocí Taylorova rozvoje (pro jednoduchost vynecháme indexy I a O)

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_{ring,j}} = \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_{ring,j}} + \frac{\partial F_i}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial q_{ring,j}}, \quad (2.85)$$

čímž jsme dostali linearizované tuhostní koeficienty $k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}$ olejové vrstvy. Po dosazení, provedení parciálních derivací a po úpravě obdržíme vztahy pro tuhostní koeficienty linearizované soustavy v pevném souřadnicovém systému YZ (viz Obr. 2.9)

$$k_{ij} = \kappa_{ij} \frac{F_{st}}{c}, \quad i = Y, Z, \quad j = Y, Z. \quad (2.86)$$

Tuhostní konstanty κ_{ij} mají tvar [6]

$$\begin{aligned}
 \kappa_{YY} &= \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4}{1 - \varepsilon^2} A(\varepsilon), \\
 \kappa_{YZ} &= -\frac{\pi \pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4}{4 \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} A(\varepsilon), \\
 \kappa_{ZY} &= \frac{\pi \pi^2 (1 - 2\varepsilon^2) - (16 - \pi^2)\varepsilon^4}{4 \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} A(\varepsilon), \\
 \kappa_{ZZ} &= [2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2] A(\varepsilon), \\
 A(\varepsilon) &= \frac{4}{\sqrt{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^3}}.
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Vztahy (2.87) jsou obecnými vztahy, kde konkrétně pro vnitřní olejový film dosazujeme $F_{ST} = F_J$, $c = c_I$, $\varepsilon = \varepsilon_J$ a pro vnější olejový film $F_{ST} = F_R$, $c = c_O$, $\varepsilon = \varepsilon_R$.

Na závěr zavedme matici tuhosti \mathbf{K}_B linearizovaných ložiskových vazeb ložisek ve tvaru

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} k_{YY} & k_{YZ} \\ k_{ZY} & k_{ZZ} \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

kteří obecně obsahují vypočítané tuhostní koeficienty linearizovaných ložiskových vazeb podle vztahů (2.86). Tyto matice následně využijeme pro implementaci ložiskových vazeb do celkového výpočtového modelu turbodmyhadla v kapitole 2.5.

2.4. Vliv tlumení

Při uvažování diskretních mechanických soustav nelze opomíjet tlumící členy, abychom dostatečně interpretovali reálné chování modelovaných soustav. U hřídelů rotorových soustav jsou tlumící účinky způsobeny odporem prostředí, ve kterém hřídel rotuje (tzv. vnější tlumení), a dále samotným materiálovým tlumením (tzv. vnitřní tlumení) při kmitavém pohybu takovýchto soustav. U obou případů tlumení lze přibližně předpokládat viskózní charakter, tedy kdy tlumení je úměrné rychlosti deformace.

V dalším předpokládáme, že vliv vnějšího tlumení (zejména aerodynamické síly vyvolané prouděním vzduchu/spalin v kompresoru/turbíně) nemá dominantní vliv na dynamické chování rotoru turbodmyhadla a lze jej zanedbat.

Vnitřní materiálové tlumení jako takové ovšem zanedbat nelze. Tento typ tlumení lze modelovat pomocí Kelvin-Voightova materiálového modelu. V takovémto modelu je možné normálové napětí od normálových tlumících sil ve směru osy rotace vyjádřit

proporciálně k tahovému (příp. tlakovému) deformačnímu napětí $\sigma_I = b_\sigma E \dot{\epsilon}_x$ a stejně tak smyková napětí od tlumících sil při krutu proporcionalně ke smykovým deformačním napětím $\tau_{Ixy} = b_\tau G \dot{\gamma}_{xy}$ a $\tau_{Ixz} = b_\tau G \dot{\gamma}_{xz}$. V těchto vztazích byly symboly b_σ a b_τ [s] označeny koeficienty proporcionalního materiálového tlumení. Rayleighova disipační funkce, která byla prvně použita ve vztahu (2.1), popisuje výkon disipačních sil, konkrétně jejich záporně vzatou polovinu. Celkovou Rayleighovu disipační funkci pro materiálové tlumení hřídelového elementu pak můžeme zapsat ve tvaru

$$R_I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} [b_\sigma E \dot{\epsilon}_x^2 + b_\tau G (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2)] dA dx. \quad (2.89)$$

Již dříve v této práci byla vztahem (2.2) definována Rayleighova disipační funkce pomocí kvadratické formy. Z toho důvodu musí také platit následující identita

$$\frac{\partial R_I^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} = \mathbf{B}_I^{(e)} \dot{\mathbf{q}}_{xyz}^{(e)}, \quad (2.90)$$

ve které jsme označili symbolem $\mathbf{B}_I^{(e)}$ matici vnitřního tlumení hřídelového prvku. Dále je uvažováno vyjádření této matice v rotujícím souřadnicovém systému, kdy je tato matice konstantní v čase. Zanedbáním vlivu zkosů dojde ke značnému zjednodušení této matice. Při uvažování vztahů (2.19) a matice (2.43) bude mít matice $\mathbf{B}_I^{(e)}$ následující tvar

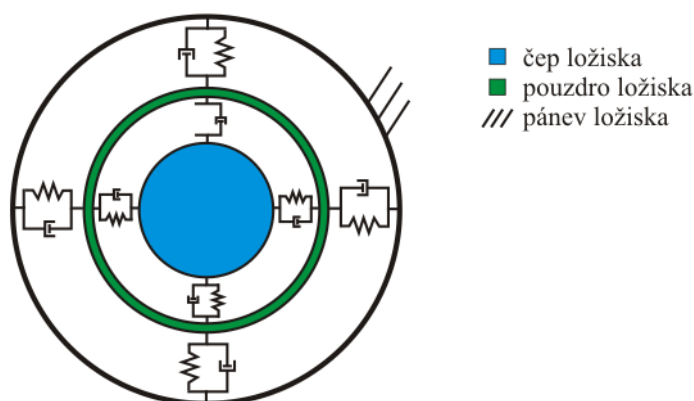
$$\mathbf{B}_I^{(e)} = \begin{bmatrix} b_\sigma S_1^{-T} E J_\zeta I_{\phi''} S_1^{-1} & b_\sigma S_1^{-T} E D_{\eta\zeta} I_{\phi''} S_2^{-1} & 0 & 0 \\ b_\sigma S_2^{-T} E D_{\eta\zeta} I_{\phi''} S_1^{-1} & b_\sigma S_2^{-T} E J_\eta I_{\phi''} S_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_\sigma S_3^{-T} E A I_{\psi'} S_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_\sigma S_3^{-T} G J_k I_{\psi'} S_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

kde je zavedena matice s přihlédnutím ke (2.8)

$$I_{\phi''} = \int_0^l \Phi''^T(x) \Phi''(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

2.4.1. Vliv tlumení kluzného ložiska

V kapitole 2.3. byl odvozen linearizovaný model ložiskových vazeb modelu plovoucího kluzného ložiska definovaný pomocí tuhostních koeficientů. Analogickým způsobem lze odvodit tlumící koeficienty linearizovaného modelu ložiskových vazeb.



Obr. 2.10 Linearizovaný model ložiskových vazeb s uvažováním tlumících účinků

V analogii s (2.85) lze pro koeficienty tlumení psát

$$b_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_{ring,j}} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{\epsilon}} \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \dot{q}_{ring,j}} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{\delta}} \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_{ring,j}}, \quad (2.93)$$

respektive ve srovnání s (2.86)

$$b_{ij} = \beta_{ij} \frac{F_{st}}{c \omega_{rel}}, \quad i = Y, Z, \quad j = Y, Z. \quad (2.94)$$

Pro koeficienty β_{ij} platí následující vztahy [6]

$$\begin{aligned} \beta_{YY} &= \frac{\pi \pi^2 + 2(24 - \pi^2)\epsilon^2 + \pi^2 \epsilon^4}{2 \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}} A(\epsilon), \\ \beta_{YZ} &= \beta_{ZY} = -2[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\epsilon^2] A(\epsilon), \\ \beta_{ZZ} &= \frac{\pi \sqrt{1 - \epsilon^2}}{2 \epsilon} [\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\epsilon^2] A(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Rovnice (2.95) jsou obecnými vztahy a pro jejich konkretizaci se definují obdobné substituce jako u vztahů (2.87), tedy pro vnitřní olejový film dosazujeme $F_{ST} = F_J$, $c = c_I$, $\epsilon = \epsilon_J$, $\omega_{rel} = \omega - \omega_R$ a pro vnější olejový film $F_{ST} = F_R$, $c = c_O$, $\epsilon = \epsilon_R$ a $\omega_{rel} = \omega_R$.

Nakonec i zde jako u matice tuhostních koeficientů linearizovaného modelu ložiskových vazeb ložiska (2.88) lze linearizované tlumící síly v jedné vrstvě olejového filmu vyjádřit pomocí matice tlumících koeficientů linearizovaných ložiskových vazeb ložiska \mathbf{B}_B ve tvaru

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} b_{YY} & b_{YZ} \\ b_{ZY} & b_{ZZ} \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

2.5. Komplexní matematický model rotoru turbodmychadla

Dosavadní výpočtový model daný rovnicí (2.60) popisující netlumenou izolovanou rotorovou část turbodmychadla ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{rot}(t) + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_{rot}(t) + (\mathbf{K}_S + \omega^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q}_{rot}(t) = 0$$

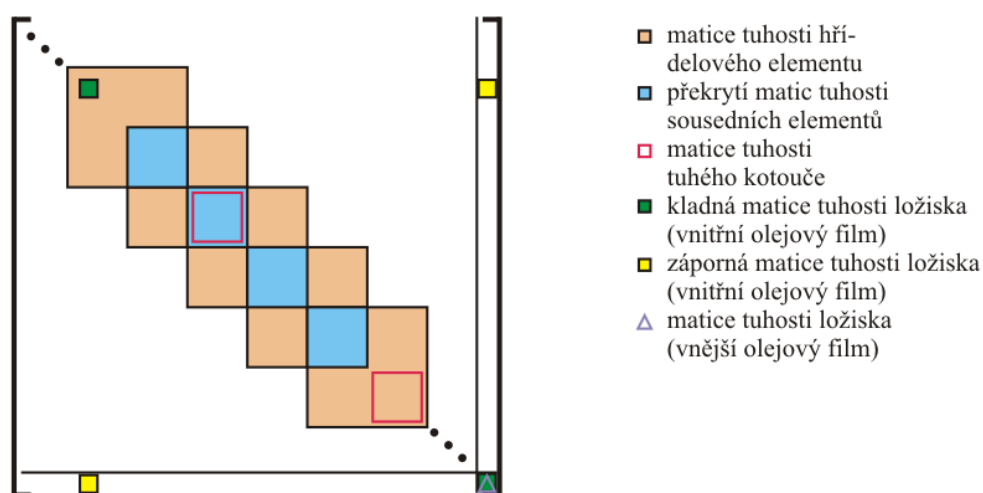
rozšíříme o vliv tlumení a zahrneme linearizovaný model ložiskových vazeb uvažovaných ložisek. Komplexní matematický model rotoru turbodmychadla budeme formulovat v prostoru zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{rot}, \mathbf{q}_{ring}]^T, \quad (2.97)$$

kde \mathbf{q}_{rot} představuje vektor zobecněných souřadnic hřídele (2.59) a \mathbf{q}_{ring} vektor příčných výchylek v a w středu kroužku ložiska. Jelikož platí $\mathbf{q}_{ring} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tak při uvažování dalšího ložiska by došlo k nárůstu počtu stupňů volnosti celkového výpočtového modelu turbodmychadla o 2, což odpovídá radiálním výchylkám ložiska v a w (při uvažování radiálního typu ložiska). Komplexní matematický model rotoru turbodmychadla při uvažování vnitřního tlumení hřídelových elementů a linearizovaných ložiskových vazeb bude mít tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q}(t) = 0. \quad (2.98)$$

Pro sestavení globálních matic hmotnosti, tlumení, gyroskopických účinků, tuhosti a tuhosti za rotace postupujeme obdobně jako v kapitole 2.2.4. Příklad struktury výsledné globální matice tuhosti \mathbf{K} je patrný z Obr. 2.11.



Obr. 2.11 Schéma globální matice tuhosti matematického modelu rotoru turbodmychadla

3. Kapitola

Turbodmychadlo C12

V předchozí kapitole byla popsána metodika matematického modelování rotorové části turbodmychadla včetně kluzných ložisek. Ve třetí kapitole je aplikována odvozená metodika k vytvoření matematického a výpočtového modelu turbodmychadla, konkrétně modelu C12 výrobce ČZ, a.s. Úvodní část kapitoly je věnována popisu zkoumaného turbodmychadla a samotné diskretizaci reálného modelu. Druhá polovina této kapitoly se pak zabývá popisem získaného konkrétního výpočtového modelu turbodmychadla C12, který byl za tímto účelem vytvořen a implementován ve výpočtovém prostředí MATLAB. Závěr kapitoly je soustředěn na stanovení statického zatížení rotoru, které je nezbytné pro stanovení parametrů linearizovaného modelu kluzných ložisek s plovoucími pouzdry.

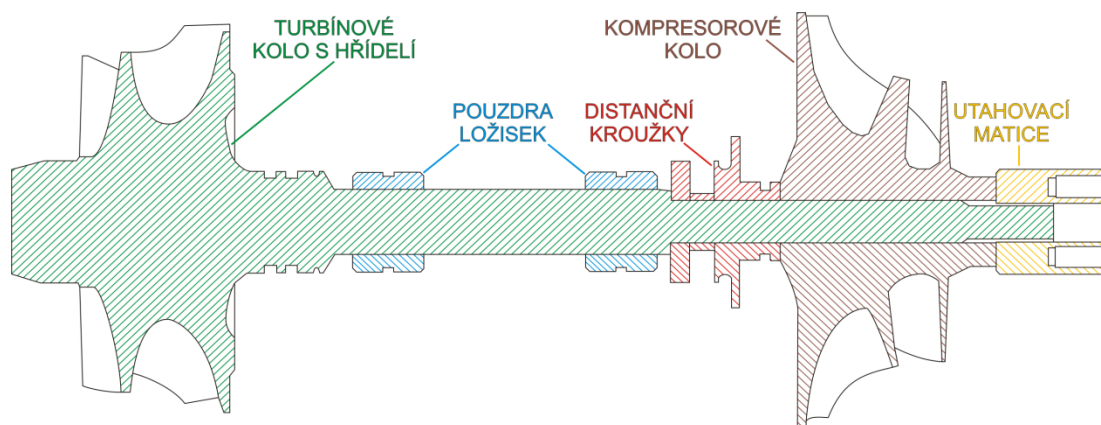
3.1. Základní parametry turbodmychadla C12

Předmětem praktické aplikace spojené s touto prací je turbodmychadlo českého výrobce ČZ, a. s. divize Turbo, který má již více jak třicetiletou zkušenost s výrobou turbodmychadel pro spalovací motory. Konkrétním zkoumaným modelem bylo turbodmychadlo typu C12 [I8]. Tento typ spadá do modelové řady C1 a je určen do nízko-výkonových spalovacích motorů (20 – 80 kW) poháněných dieselvou směsí, nebo LPG o objemu válců 2 – 4 litry. Toto turbodmychadlo má průměr turbínového kola 50 mm a dokáže tak zajistit průtok vzduchu o hodnotách 0,02 – 0,13 kg/s. Rozsah provozních otáček tohoto modelu je 0 – 170000 ot/min.



Obr. 3.1 Kompletní zástavba turbodmychadla modelu C12

Z pohledu zkoumání dynamické odezvy nás zajímá především rotorová část turbodmychadla a její uložení vzhledem ke statorové části turbodmychadla, která je tvořena turbodmychadlovou skříní. Rotor zkoumaného turbodmychadla jako takový sestává z hřídele, na kterém je napevno přivařené turbínové kolo. Na druhé straně hřídele je umístěno kompresorové kolo (viz Obr. 3.2), které je nasazeno na hřídel a zajištěno pomocí utahovací matice.



Obr. 3.2 Rotor turbodmychadla C12 s ložisky

Nalevo od kompresorového kola jsou umístěny distanční kroužky, které slouží k uchycení axiálního ložiska. Celý rotor turbodmychadla je uložen na dvou kluzných ložiscích s plovoucími pouzdry. Olejový film se nachází jak uvnitř (mezi čepy hřídele a

vnitřkem pouzder ložisek), tak vně ložisek (mezi vnější stranou pouzder ložisek a pánví ložisek) a během provozu turbodmychadla protéká radiálními otvory v plovoucích pouzdrech směrem k hřídeli a pak je sběrným kanálem odváděn zpět do olejového okruhu motoru.

3.2. Výpočtový model turbodmychadla

Jak již zaznělo v úvodu druhé kapitoly, je potřeba nejprve převést reálný model zkoumaného turbodmychadla na fyzikální, který následně popíšeme matematickými rovnicemi a obdržíme tak matematický model. Přejít z fyzikálního na matematický model byl podrobně popsán ve 2. kapitole. Přejít z reálného modelu, kdy je tato reálná soustava tvořena nekonečně mnoha hmotnými body (kontinuum), na fyzikální (diskrétní) model, který je tvořen konečným počtem hmotných bodů (diskretizačních uzlů), je proveden pro hřídel rotoru pomocí metody diskretizace a použitím dříve odvozených hřídelových elementů. Na takto získaný fyzikální model hřídele jsou dále přiřazeny účinky dalších částí turbodmychadla, konkrétně turbínového a kompresorového kola a utahovací matice, které vztáhneme vždy ke konkrétnímu diskretizačnímu uzlu předem vytvořeného fyzikálního modelu hřídele, a to ve smyslu modelu dokonale tuhých kotoučů.

3.2.1. Diskretizace rotoru turbodmychadla

Pro sestavení odpovídajícího výpočtového modelu vyšetřovaného turbodmychadla nejprve diskretizujeme hřídel rotoru turbodmychadla na základní hřídelové elementy, které byly odvozeny ve 2. kapitole. To provedeme rozdělením hřídele na třináct (dále jen $NEL = 13$) homogenních sériově řazených izotropních hřídelových elementů neměnného kruhového průřezu s danými parametry (viz Tab. 3.1), které kopírují reálné geometrické rozměry hřídele zkoumaného turbodmychadla.

číslo prvku	1	2	3	4	5	6	7
Ø D [mm]	12,701	8,723	8,723	8,723	8,160	8,160	5,700
l [mm]	10,365	8,305	9,950	11,000	9,950	6,773	5,000

číslo prvku	8	9	10	11	12	13
Ø D [mm]	5,700	5,700	5,700	5,700	4,398	4,398
l [mm]	6,155	8,000	10,000	5,173	6,134	6,134

Tab. 3.1 Stanovené charakteristické rozměry hřídelových elementů

3. KAPITOLA – Turbodmychadlo C12

Každý i -tý hřídelový element je spojen se sousedním hřídelovým elementem společným diskretizačním uzlem (viz Obr. 3.3). Takovýto diskretizační uzel má 6 stupňů volnosti, tudíž dohromady má celá soustava 84 stupňů volnosti. Z tabulky 3.1. jsou patrné charakteristické rozměry každého hřídelového prvku a to jeho průměr kruhového průřezu D a jeho délka l . Jako referenční materiál pro hřídelové elementy byla zvolena konstrukční ocel o hustotě $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$, s modulem pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ a Poissonově čísle $\nu = 0,3$.

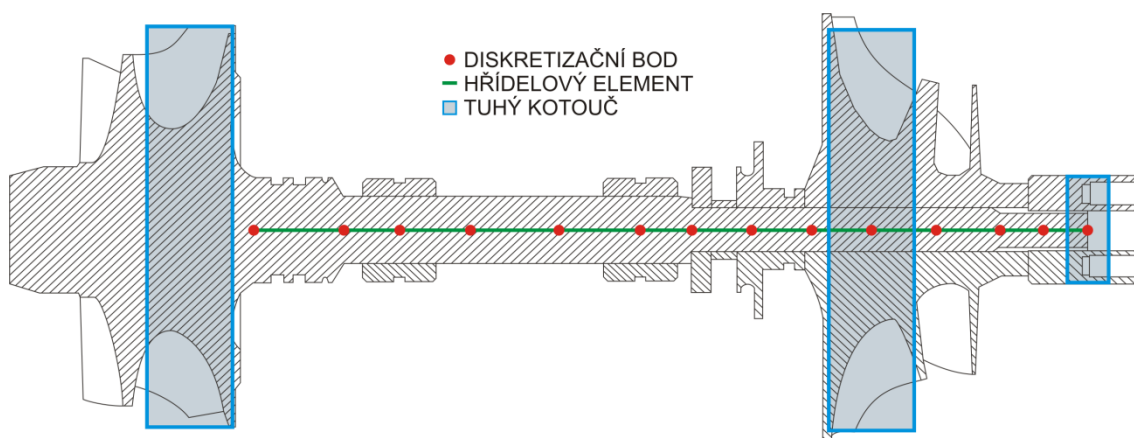
Turbodmychadlové kolo, kompresorové kolo a utahovací matici lze modelovat jako dokonale tuhé kotouče obecného nekruhového průřezu, jejichž parametry jsou patrné z Tab. 3.2.

	m [g]	$I_0 = I_x [10^{-6} \text{ kgm}^2]$	$I_y [10^{-6} \text{ kgm}^2]$	$I_z [10^{-6} \text{ kgm}^2]$
turbínové kolo	144,290	23,554	20,134	20,293
kompresorové kolo	36,760	7,341	5,169	5,149
utahovací matic	5,601	0,151	0,181	0,177

	$D_{xy} [10^{-9} \text{ kgm}^2]$	$D_{yz} [10^{-9} \text{ kgm}^2]$	$D_{xz} [10^{-9} \text{ kgm}^2]$
turbínové kolo	8,140	122,220	4,170
kompresorové kolo	-4,360	0,405	0,023
utahovací matic	0	0	0

Tab. 3.2 Hmotnostní parametry tuhých kotoučů

Hodnoty pro dokonale tuhé kotouče v Tab. 3.2 definují hmotnost daného kotouče m , kvadratické momenty I_j průřezu k patřičné ose j a deviační momenty D_{ij} příslušející osám i a j .



Obr. 3.3 Schéma výsledné diskretizace rotoru turbodmychadla

3.2.2. Parametry kluzných ložisek

Rotorovou část turbodmychadla uvažujeme uloženou ve statorové části pomocí dvou (dále jen $NR = 2$) radiálních kluzných olejových ložisek. Charakteristické rozměry obou ložisek jsou v analogii s Obr. 2.8 dány v Tab. 3.3.

	m_r [g]	c_i [mm]	c_o [mm]	D [mm]	L_i [mm]	L_o [mm]
1. ložisko	5,80	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$4,05 \cdot 10^{-2}$	$4,36 \cdot 10^{-2}$	7,60	8,60
2. ložisko	5,80	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$5,20 \cdot 10^{-2}$	$4,36 \cdot 10^{-2}$	7,60	8,60

Tab. 3.3 Parametry zkoumaných ložisek

Olejové filmy v ložiscích definujeme pomocí fyzikálních veličin[9] v Tab. 3.4.

	η_i [Nsm-2]	η_o [Nsm-2]	T_i [°C]	T_o [°C]
1. ložisko	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$4,60 \cdot 10^{-3}$	120	80
2. ložisko	$5,50 \cdot 10^{-3}$	$6,70 \cdot 10^{-3}$	120	80

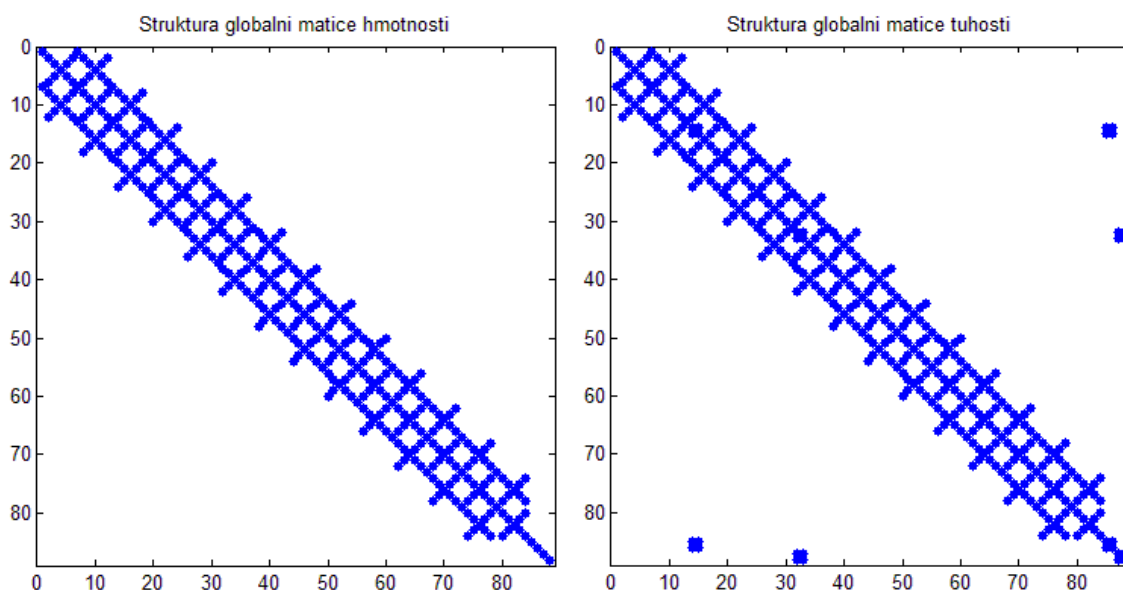
Tab 3.4 Parametry předpokládaných olejových filmů

kde symbol η značí dynamickou viskozitu vnitřního „I“ nebo vnějšího „O“ olejového filmu a T označuje teplotu vnitřní případně vnější olejové vrstvy.

3.3. Výpočtový model

Na základě metodiky matematického modelování rotoru turbodmychadla odvozené v 2. kapitole byl vytvořen plně parametrický výpočtový model v prostředí MATLAB verze R2013a. Vstupní data hřídelových elementů (viz. Tab. 3.1), dokonale tuhých kotoučů (Tab. 3.2) a ložisek (Tab. 3.3 a 3.4) jsou použita k sestavení výsledných globálních matic výpočtového modelu v souladu s rovnicí (2.98).

Výhodou zvoleného předpokladu pravidelného kruhového průřezu hřídelových elementů je fakt, že matice hřídelových prvků (2.35), (2.37) a (2.38) budou mít nenulové všechny členy, které obsahují deviační momenty D_{ij} , neboť v tomto případě se stanou osy η a ζ (viz Obr. 2.1) hlavními osami průřezu, a tyto matice se tak stanou blokově diagonálními. Tím se značně zjednoduší tvar výsledných globálních matic. Struktura takovýchto matic je patrná z Obr. 3.4, kdy například předpokládanou strukturu globální matice tuhosti lze srovnat s Obr. 2.11.



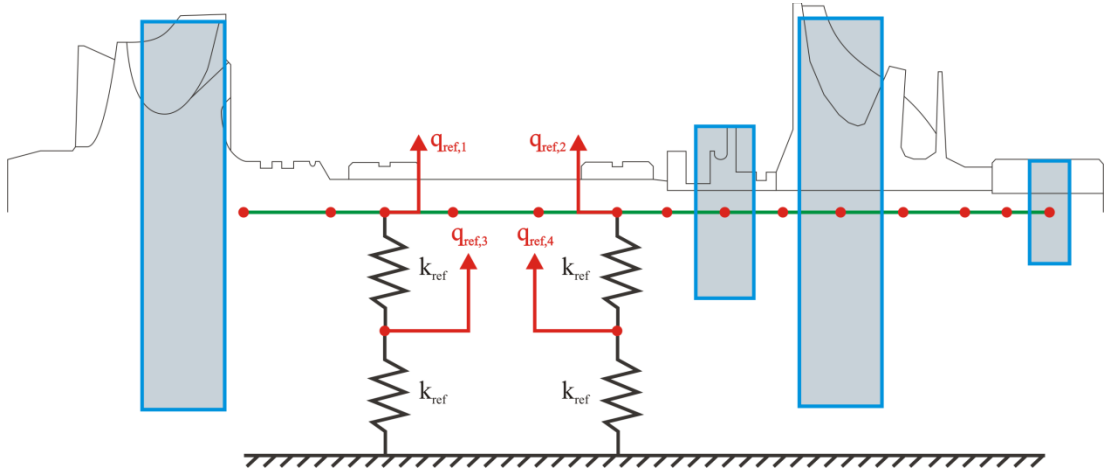
Obr. 3.4 Struktura globální matice hmotnosti rotoru turbodmychadla (vlevo) a matice tuhosti (vpravo)

3.3.1. Stanovení statického zatížení rotoru

Při sestavování komplexního výpočtového modelu rotoru turbodmychadla za předpokladu linearizovaného modelu kluzných ložisek s plovoucími pouzdry je nutné definovat statickou rovnovážnou polohu rotoru, neboť matematický model ložisek je vzhledem k této poloze linearizován. Statické rovnovážné poloze odpovídá statické zatížení F_{ST} (2.75) potřebné pro výpočet poměrných excentricit vnitřního a vnějšího olejového filmu. Statické zatížení F_{ST} určíme následovně: představme si pomyslné schéma uložení rotoru turbodmychadla na dvou radiálních ložiscích (viz Obr. 3.5), kde tuhosti vazeb mezi státorem turbodmychadla a kroužky a mezi kroužky a čepem hřídele jsou dány známými hodnotami k_{ref} . Dále předpokládejme pouze vertikální výchylky soustavy vyvolané vlastní tíhou rotoru turbodmychadla a plovoucích pouzder.

Nechť je dána globální matice hmotnosti \mathbf{M} izolované rotorové části turbodmychadla definovaná v souladu s rovnicí (2.60), kdy tato matice je řazena v analogii s globálním vektorem výchylek uzlů rotoru (2.59), a tím pádem je i stejného řádu. Rozšířme tuto matici o matici hmotnosti ložisek \mathbf{M}_{ring} následovně

$$\mathbf{M}_{ST} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ring} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(84+2 \cdot NR) \times (84+2 \cdot NR)}, \quad (3.1)$$



Obr. 3.5 Schéma pro výpočet tíhové síly rotoru ve staticky rovnovážné poloze

kde matice hmotnosti ložisek pro konkrétní případ izolovaného rotoru turbodmychadla uloženého na dvou ložiscích má tvar

$$\mathbf{M}_{ring} = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2 \cdot NR) \times (2 \cdot NR)}, \quad (3.2)$$

ve kterém m_r označuje hmotnost ložiska, a tato matice je řazena podle vektoru zobecněných výchylek ložiska \mathbf{q}_{ring} (2.84) pro zachování struktury v souladu s výsledným globálním vektorem zobecněných výchylek \mathbf{q} (2.97). Pak lze definovat vektor statických sil vztahem

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{M}_{ST} \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{(84+2 \cdot NR) \times 1}, \quad (3.3)$$

ve kterém je označen symbolem $\tilde{\mathbf{g}}$ specifický vektor gravitačních zrychlení pro který platí

$$\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{(84+2 \cdot NR) \times 1}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \begin{cases} -g \text{ pro } \forall \tilde{g}_j \text{ kde } j = (m-1)NEL + 2; m = 1, \dots, NEL, \\ -g \text{ pro } \forall \tilde{g}_k \text{ kde } k = 84 + (n-1)NR + 2; n = 1, \dots, NR, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Dále zavedme matici tuhosti \mathbf{K}_{ST} jako rozšíření globální matice statické tuhosti \mathbf{K}_S izolovaného rotoru a to následovně

$$\mathbf{K}_{ST} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2 \cdot NR) \times (2 \cdot NR)}. \quad (3.4)$$

Dále jsou k prvkům matice \mathbf{K}_{ST} přičteny prvky matice referenčních tuhostí \mathbf{K}_{ref} předpokládaného modelu, která vyjadřuje příspěvky od referenčních pružin uvažovaných dle Obr. 3.5. Aby nedošlo k omylu, je potřeba zdůraznit, že tyto referenční tuhosti nemají nic společného s tuhostmi linearizovaných ložiskových vazeb olejových filmů v kluzných ložiscích. Jejich význam vyplyne z následujících úvah.

3. KAPITOLA – Turbodmychadlo C12

Zavedme vektor zobecněných referenčních výchylek \mathbf{q}_{ref} (viz Obr. 3.5), který bude mít tvar

$$\mathbf{q}_{ref} = [q_{ref,1}, q_{ref,2}, q_{ref,3}, q_{ref,4}]^T, \quad (3.5)$$

ve kterém jsou postupně označeny symbolem $q_{ref,1}$ vertikální výchylka diskretizačního uzlu čepu hřídele prvního ložiska, dále symbolem $q_{ref,2}$ vertikální výchylka diskretizačního uzlu čepu hřídele druhého ložiska, symbolem $q_{ref,3}$ vertikální výchylku pouzdra prvního ložiska a na závěr symbolem $q_{ref,4}$ vertikální výchylku pouzdra druhého ložiska. Potenciální energii takovéto soustavy lze vyjádřit jako

$$E_p = \frac{1}{2}k_{ref}(q_{ref,1} - q_{ref,3})^2 + \frac{1}{2}k_{ref}q_{ref,3}^2 + \frac{1}{2}k_{ref}(q_{ref,2} - q_{ref,4})^2 + \frac{1}{2}k_{ref}q_{ref,4}^2. \quad (3.6)$$

Víme-li, že platí obecně vztah (2.4), pak matici referenční tuhosti \mathbf{K}_{ref} můžeme určit pomocí následující ekvivalence

$$\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}_{ref}} = \mathbf{K}_{ref} \mathbf{q}_{ref} = \begin{bmatrix} k_{ref} & 0 & -k_{ref} & 0 \\ 0 & k_{ref} & 0 & -k_{ref} \\ -k_{ref} & 0 & 2k_{ref} & 0 \\ 0 & -k_{ref} & 0 & 2k_{ref} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{ref,1} \\ q_{ref,2} \\ q_{ref,3} \\ q_{ref,4} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Získané prvky matice \mathbf{K}_{ref} přičteme k příslušným prvkům rozšířené matice tuhosti \mathbf{K}_{ST} .

Pro stav statické rovnováhy platit následující rovnice

$$(\mathbf{K}_{ST} + \mathbf{K}_{ref})\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}},$$

ze které je možné vypočítat výchylky zobecněných souřadnic ve staticky rovnovážné poloze jako

$$\mathbf{q}_{ST} = (\mathbf{K}_{ST} + \mathbf{K}_{ref})^{-1} \tilde{\mathbf{f}}. \quad (3.8)$$

Výhodou celého tohoto postupu je fakt, že při dodržení tvaru vektoru statických sil (3.3) a při dosazení jednotkových referenčních tuhostí ($k_{ref} = 1$) jsou výchylky zobecněných souřadnic \mathbf{q}_{ST} ve staticky rovnovážné poloze velikostně rovny reakčním statickým silovým účinkům v jednotlivých diskretizačních uzlech. Konkrétně v zobecněných souřadnicích, které odpovídají výchylkám $q_{ref,1}$ a $q_{ref,2}$, se jedná o reakční síly, které odpovídají statickým tíhovým silám F_J a které působí na čepy hřídele v místech, kde se nacházejí kluzná ložiska. Tyto síly následně dosazujeme do vztahu (2.76) pro výpočet poměrných excentricit ε_j mezi hřídelí a kluzným ložiskem.

3. KAPITOLA – Turbodmychadlo C12

Pro náš případ mají tyto reakční síly po dosazení vstupních hodnot z Tab. 3.1, Tab. 3.2 a hmotnosti ložisek z Tab. 3.3 velikosti $F_{J,1} = -1,314 \text{ N}$ a $F_{J,2} = 3,649 \text{ N}$, což odpovídá hmotnosti izolovaného rotoru turbodmychadla o velikosti $m_{rot} = 238 \text{ g}$.

Navíc je patrný značný nepoměr v rozložení hmotnosti v axiálním směru rotoru turbodmychadla, který plyne z několikanásobně vyšší hmotnosti turbínové kola ve srovnání s hmotností kompresorového kola (viz Tab. 3.2). Pro určení poměrných excentricit ε_R mezi pouzdrem a pánví ložiska (turbodmychadlovou skříní) platí pro tíhové síly $F_{R,i}$ vztah

$$F_{R,i} = F_{J,i} + m_r g \quad , \quad i = 1,2, \quad (3.9)$$

kde i označuje index ložiska.

4. Kapitola

Dynamické projevy rotorových soustav

Pod pojmem analýza soustav se skrývá soubor postupů a metod, na základě kterých vyšetřujeme odezvu daného systému. Odezvu jako takovou můžeme mít zaprvé statickou, kdy se mechanická soustava nepohybuje a je ve stavu statické rovnováhy. V takovém případě zjišťujeme například reakční síly v uložení, nebo silové účinky pro udržení rovnovážného stavu. Druhým případem odezvy je odezva dynamická, kdy je soustava v pohybu. Nejčastějším výstupem jsou časové průběhy zobecněných souřadnic (výchyly a natočení), případně jejich derivace (rychlosti a zrychlení).

Speciálním typem analýzy v oblasti mechaniky je modální analýza, která nám poskytuje důležité informace charakterizující danou mechanickou soustavu. Konkrétně se jedná hodnoty vlastních frekvencí a jim přidružené vlastní tvary, ze kterých můžeme následně vyvodit závěry ohledně stability soustavy. Proto je první polovina této kapitoly zaměřena na modální analýzu a to z pohledu obecného diskrétního mechanického systému včetně diskuse stability takovéto mechanické soustavy. Zbylá část kapitoly je věnována jednomu konkrétnímu typu dynamické odezvy a to odezvě na nevyváhu rotoru, jejíž výstupy mají široké uplatnění právě u rotorových soustav.

4.1. Modální analýza silně nekonzervativní diskrétní mechanické soustavy

Jednou ze stěžejních metod pro zkoumání dynamického chování mechanických soustav je modální analýza. Jedná se o analýzu, jejímž výstupem jsou vlastní frekvence a jim

přidružené vlastní tvary, což bývá obecně označováno jako modální parametry. Obecně je modální analýza rozdělována na dva základní případy a to pro vyšetřování modálních parametrů slabě nekonzervativních soustav, kam spadají i konzervativní soustavy (netlumené soustavy), a pro vyšetřování modálních parametrů silně nekonzervativních soustav. Druhému případu se bude věnovat následující podkapitola. V literatuře je dále možné setkat se se speciálními případy modálních analýz jako například při vyšetřování konzervativních soustav s gyrokopickými účinky [2].

Zaměříme se na modální parametry diskrétní mechanické soustavy se soustředěnými parametry, kterou lze popsat rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

kde je předpokládána dimenze matic $\mathbb{R}^{n \times n}$, a v analogii s rovnicí (2.98) bylo označeno

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \omega\mathbf{G} \quad , \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \omega^2\mathbf{K}_\omega. \quad (4.2)$$

Uvažujeme, že matice tlumení \mathbf{B}^* obecné diskrétní mechanické soustavy může být nesymetrická a dále že nespĺňuje podmínku komutativnosti ve tvaru [1]

$$\mathbf{K}^*\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^*.$$

Stejně tak matice tuhosti \mathbf{K}^* tohoto diskrétního systému může být nesymetrická. Rovnici (4.1) rozšíříme o identitu

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

a dále zavedeme tzv. stavový vektor

$$\mathbf{u}(t) = [\dot{\mathbf{q}}(t) \quad \mathbf{q}(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}. \quad (4.4)$$

Rozšířením systému (4.1) o identitu (4.3) dostaneme soustavu ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kteřá můžeme být s přihlédnutím k (4.4) přepsána do tvaru

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Koeficientové matice \mathbf{N} a \mathbf{P} jsou v tomto případě dimenze $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ a jejich definice je patřná ze vztahu (4.5). Tím byla převedena zkoumaná diskrétní mechanická soustava z prostoru zobecněných souřadnic do tzv. stavového prostoru.

Je-li alespoň jedna z matic \mathbf{B}^* nebo \mathbf{K}^* nesymetrická, je potřeba sestavit k modelu (4.1), resp. (4.6), model adjungovaný ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{B}^{*T}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}^{*T}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{0}, \\ \text{resp. } \mathbf{N}^T\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{P}^T\mathbf{w}(t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

4. KAPITOLA – Dynamické projevy rotorových soustav

kde

$$w(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad N^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & M \\ M & B^{*T} \end{bmatrix} \quad a \quad P^T = \begin{bmatrix} -M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K^{*T} \end{bmatrix}.$$

Předpokládejme, že diskretním systémům (4.6) a druhé rovnici (4.7), které jsou definovány ve stavovém prostoru, vyhovuje řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}e^{\lambda t}, \quad (4.8)$$

tedy po dosazení

$$(\lambda N + P)\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad \text{resp.} \quad (\lambda N^T + P^T)\mathbf{w}e^{\lambda t} = \mathbf{0}.$$

Tyto rovnice musí být splněny obecně pro libovolný časový okamžik, tedy i pro $t = 0$, kdy jsou exponenciální členy rovny jedné. Proto můžeme přepsat tyto vztahy do tvaru tzv. frekvenční rovnice

$$(\lambda N + P)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{resp.} \quad (\lambda N^T + P^T)\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Frekvenční (charakteristické) rovnice definují problém nalezení tzv. vlastních hodnot. Kořeny charakteristických rovnic (4.9) λ_ν , kde $\nu = 1, \dots, 2n$, nazýváme vlastními čísly diskretního systému. Získáme je za předpokladu, že netriviální řešení rovnic (4.9) existuje pouze tehdy, je-li patřičný determinant roven nule

$$\det(\lambda N + P) = 0 \quad \text{resp.} \quad \det(\lambda N^T + P^T) = 0. \quad (4.10)$$

Obdržená vlastní čísla λ_ν mohou být po dvojicích komplexně sdružená

$$\lambda_\nu = -\alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \lambda_{\nu+m} = -\alpha_\nu - i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (4.11)$$

případně ryze reálná

$$\lambda_\nu = -\alpha_\nu, \quad \nu = 2m + 1, 2m + 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

Je zvykem řadit vlastní čísla λ_ν tak, že prvních m vlastních čísel s kladnou imaginární částí β_ν seřadíme vzestupně a to tak, aby platilo $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$. Zbylá vlastní čísla se zápornou imaginární částí seřadíme stejným způsobem, jako jsou seřazeny jim komplexně přidružená vlastní čísla s kladnou imaginární částí. Reálná vlastní čísla o celkovém počtu $2(n - m)$ řadíme na úplný konec.

Známe-li vlastní čísla λ_ν , pak každému z nich je přiřazen tzv. pravostranný vlastní vektor \mathbf{u}_ν nebo levostranný vlastní vektor \mathbf{w}_ν , které splňují rovnici

$$\begin{aligned} (\lambda_\nu N + P)\mathbf{u}_\nu &= \mathbf{0}, \\ (\lambda_\nu N^T + P^T)\mathbf{w}_\nu &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde části těchto vektorů (odpovídající výchylkám) vypovídají o tzv. vlastním tvaru, kterým se zkoumaná mechanická soustava deformuje při dané hodnotě vlastní frekvence λ_ν . Avšak vzhledem k homogenitě rovnic (4.13) je potřeba vlastní vektory

4. KAPITOLA – Dynamické projevy rotorových soustav

normovat, abychom je tak jednoznačně určili. Ve stavovém prostoru je k normování vhodná podmínka s váhovou maticí N

$$\mathbf{w}_v^T N \mathbf{u}_v = 1. \quad (4.14)$$

Samotné vlastní vektory řadíme po sloupcích do tzv. modální matice pravostranných (resp. levostranných) vlastních vektorů U (resp. W), pro které platí

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_v] \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \text{ resp. } \mathbf{V} = [\mathbf{v}_v] \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}. \quad (4.15)$$

Seřazená vlastní čísla skládáme na diagonálu do tzv. spektrální matice Λ , která je definována následovně

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_v) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}. \quad (4.16)$$

Závěrem dodejme, že lze dokázat platnost podmínek biortogonalit na základě dvou různých netriviálních řešení rovnic (4.13), které mají tvar [1]

$$\mathbf{w}_i^T N \mathbf{u}_j = 0 \text{ a } \mathbf{w}_i^T P \mathbf{u}_j = 0 \text{ pro } \forall i \neq j. \quad (4.17)$$

A dále při normování podle (4.14) lze dokázat biortonormalitu pravostranných a levostranných vlastních vektorů, což lze zapsat jako

$$\mathbf{w}_i^T N \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \text{ a } \mathbf{w}_i^T P \mathbf{u}_j = -\lambda_j \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (4.18)$$

kde symbol δ_{ij} označuje Kroneckerův symbol. Zavedením modálních matic (4.15) a spektrální matice (4.16) lze přepsat podmínky biortonormality do maticového tvaru

$$\mathbf{W}^T N \mathbf{U} = \mathbf{E} \text{ a } \mathbf{W}^T P \mathbf{U} = -\Lambda, \quad (4.19)$$

ve kterém \mathbf{E} značí jednotkovou matici řádu $2n$.

Vlastní vektory $\mathbf{u}_v = 1, 2, \dots, 2n$ jsou obecně komplexní a lineárně nezávislé, neboť rovnici

$$\sum_{v=1}^{2n} c_v \mathbf{u}_v = 0$$

splňují díky podmínkám biortonormality (4.18) jen v triviálním případě, kdy platí $c_1 = c_2 = \dots = c_{2n} = 0$. Samotné vlastní vektory navíc tvoří bázi ve $2n$ rozměrném Eukleidovském prostoru, a proto každý možný pohyb zkoumaného diskrétního systému (4.1) lze určit jako lineární kombinaci pravostranných vlastních vektorů, tedy

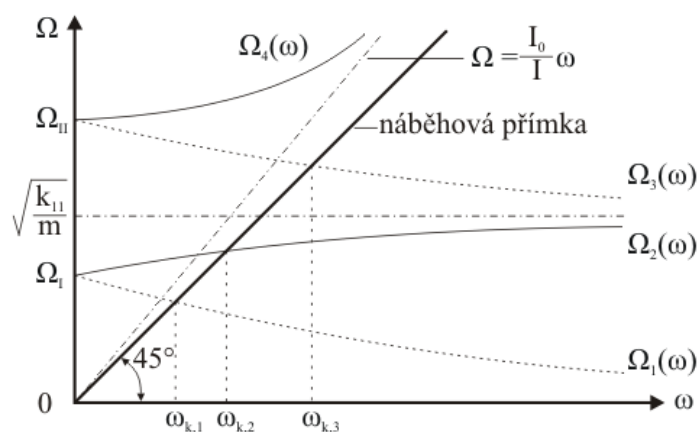
$$\mathbf{u}(t) = \sum_{v=1}^{2n} \mathbf{u}_v x_v(t) = \mathbf{U} \mathbf{x}(t), \quad (4.20)$$

kde symbolem x se označují tzv. zobecněné modální souřadnice v modálním prostoru.

4. KAPITOLA – Dynamické projevy rotorových soustav

Ze vztahu (4.20) je patrné, že se jedná o transformaci ze stavového prostoru reálných souřadnic do modálního prostoru modálních souřadnic. Proto transformaci (4.20) nazýváme modální transformací ve stavovém prostoru.

Hned v úvodu byl nechán bez povšimnutí fakt, že systémové matice (4.2) jsou pro případ výpočtového modelu turbodmyhadla (2.98) závislé na otáčkách ω rotorové části turbodmyhadla a tím tak může docházet ke změnám samotných vlastních frekvencí v závislosti na provozních otáčkách turbodmyhadla. Graficky lze tuto závislost vyjádřit pomocí Campbellova diagramu viz Obr. 4.1, kde je zobrazen diagram pro případ dokonale tuhého kotouče na nehmotném pružném hřídeli, jehož teoretické odvození lze nalézt v literatuře [2].



Obr. 4.1 Campbellův diagram dokonale tuhého kotouče na nehmotném hřídeli

Z Campbellova diagramu je vidět, že vlastní frekvence se štěpí v bodech pro $\omega = 0$ v hodnotách frekvencí Ω_I a Ω_{II} , což je zapříčiněno vlivem gyroskopických účinků. Pro zjištění kritických otáček v Campbellově diagramu zavádíme tzv. náběhovou přímku, která je osou prvního kvadrantu diagramu a odpovídá hodnotám, kdy úhlová rychlost otáček rotoru ω je totožná s příslušnou hodnotou vlastního čísla $\Omega(\omega) = \omega$. Průsečíky náběhové přímky a křivek průběhů vlastních čísel $\Omega(\omega)$ v závislosti na otáčkách rotoru ω nazýváme body, které odpovídají kritické úhlové rychlosti ω_k rotoru. V našem případě, kdy máme čtyři vlastní čísla, můžeme předpokládat čtyři hodnoty kritických otáček ω_k . Výjimkou je případ, kdy moment setrvačnosti I_0 kotouče k ose rotační symetrie je číselně větší než moment setrvačnosti I k příčné ose, což nastává u kotouče tvaru tenkého disku.

4.1.1. Stabilita z pohledu diskrétní mechanické soustavy

Zkoumání stability obecných mechanických soustav dává odpověď na otázku, zda chování této soustavy s ohledem na časový rozvoj dynamické odezvy bude vykazovat stabilní, nebo nestabilní charakter. V reálném provozu je samozřejmě jasným cílem vyhnout se jakýmkoliv nestabilitám, neboť ty mohou zapříčinit nežádoucí jevy při chodu strojů, jako nadměrné vibrace a emise hluku, nebo v horším případě i jejich destrukci.

Zaměříme se na otázku stability z pohledu obecné diskrétní mechanické soustavy se soustředěnými parametry. Pro takovou soustavu byl odvozen v předchozí části kapitoly postup pro nalezení modálních parametrů pro případ silně nekonzervativního diskrétního mechanického systému.

Aplikací modální transformace (4.20) na výpočtový model diskrétního systému popsaného ve stavovém prostoru rovnicí (4.6) dostaneme

$$NU\dot{x}(t) + PUx(t) = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

Po vynásobení rovnice (4.21) zleva transponovanou modální maticí levostranných vlastních vektorů U^T (4.15) a při platnosti podmínek biortonormality (4.19) lze upravit předchozí rovnici na tvar

$$\dot{x}(t) - \Lambda x(t) = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Díky tomu došlo k převedení rovnice (4.6) ze stavového prostoru do modálního prostoru. Počáteční podmínky je možné určit ze vztahu pro modální transformaci (4.20) pro čas $t = 0$ s přihlédnutím k prvnímu vztahu (4.19)

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{U}\mathbf{x}(0) \Rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{u}(0) = \mathbf{W}^T \mathbf{N}\mathbf{u}_0 = [x_\nu(0)], \quad (4.23)$$

ve kterém $\mathbf{u}_0 = [\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0]^T$ je vektor počátečních podmínek zobecněných souřadnic vyjádřený ve stavovém prostoru. Maticová soustava (4.22) je systémem $2n$ nezávislých diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\dot{x}_\nu(t) - \lambda_\nu x_\nu(t) = 0 \quad \text{pro } \nu = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.24)$$

s příslušnou počáteční podmínkou

$$x_\nu(0) = \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N}\mathbf{u}_0. \quad (4.25)$$

Řešení ν -té rovnice (4.24) předpokládáme ve tvaru

$$x_\nu(t) = e^{\lambda_\nu t} x_\nu(0). \quad (4.26)$$

Pak volné kmitání dané nulovou pravou stranou výpočtového modelu (4.1) je způsobeno nenulovými počátečními podmínkami \mathbf{u}_0 a na základě definice modální transformace (4.20) jej můžeme popsat rovnicí

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{v=1}^{2n} \mathbf{u}_v e^{\lambda_v t} x_v(0). \quad (4.27)$$

Stejně tak v prostoru zobecněných souřadnic s využitím definice vektoru počátečních podmínek zobecněných souřadnic \mathbf{u}_0 a vztahu (4.25) lze použít

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{v=1}^{2n} \mathbf{q}_v \mathbf{w}_v^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_v t}. \quad (4.28)$$

Změnu libovolné i -té zobecněné souřadnice v čase můžeme popsat jako

$$q_i(t) = \sum_{v=1}^{2n} q_{i,v} \mathbf{w}_v^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_v t}, \quad (4.29)$$

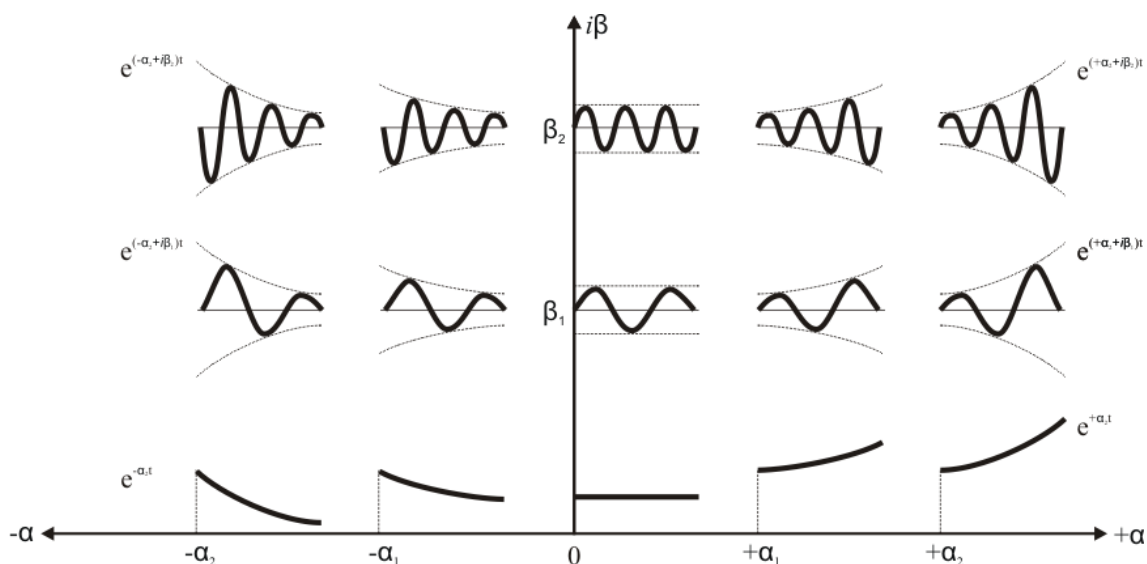
kde jednotlivé členy sumy (4.29) přísluší $2m$ komplexně sdruženým vlastním číslům (4.11) a $2(n-m)$ reálným vlastním číslům (4.12). Tyto členy můžeme díky specifickému řazení všech získaných vlastních čísel přepsat do tvaru [1]

$$q_i(t) = \sum_{v=1}^{2m} 2|q_{i,v} \mathbf{w}_v^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0| e^{-\alpha_v t} \cos(\beta_v t + \varphi_{i,v}) + \sum_{v=2m+1}^{2n} q_{i,v} \mathbf{w}_v^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{-\alpha_v t}, \quad (4.30)$$

ve kterém $i = 1, 2, \dots, n$. Vztah (4.30) je důležitým, neboť z něj vyplývá několik stěžejních závěrů:

1. Reálná část $-\alpha_v$ každého v -tého vlastního čísla vyjadřuje tlumení vlastního tlumeného volného kmitání a imaginární část β_v má význam úhlové frekvence.
2. Z první sumy ve vztahu (4.30) je patrné, že vlastní vektory, které přísluší páru komplexně sdružených vlastních čísel, mají za následek tlumený kmitavý pohyb. Naopak druhá suma vztahu (4.30) říká, že vlastní vektory, které přísluší reálným vlastním číslům, mají za následek nekmitavý (přetlumený, aperiodický) pohyb.
3. Výsledné znaménko výrazu „ $-\alpha_v$ “ rozhoduje o stabilitě pohybu, potažmo o stabilitě celé diskrétní mechanické soustavy.
 - Pokud všechny reálné části α_v vlastních čísel jsou větší než nula, pak je systém asymptoticky stabilní.
 - Jestli alespoň jedno vlastní číslo nebo jeden pár komplexně sdružených čísel má nulovou reálnou část ($\alpha_v = 0$), pak se vyšetřovaná soustava nachází na tzv. mezi stability.

- Má-li alespoň jedno vlastní číslo nebo jeden pár komplexně sdružených čísel reálnou část α_v menší než nula, pak je výsledný výraz „ $-\alpha_v$ “ kladný a systém se tak stává nestabilním. Jedná-li se o ryze reálné vlastní číslo, jde o tzv. nestabilitu typu divergence, a pokud se jedná o pár komplexně sdružených vlastních čísel, mluvíme o tzv. nestabilitě typu flutter.



Obr. 4.2 Příklady odezev v závislosti na reálné a imaginární části vlastního čísla soustavy

4.2. Dynamická odezva na nevyváhu rotoru

Výrobní proces jednotlivých komponentů turbodmychadla může mít za následek prvotní nevyváženost jednotlivých dílů, díky čemuž může dojít například k vyosení středu hmotnosti kompresorového kola vzhledem k ose hřídele turbodmychadla. Následkem toho vznikají nežádoucí silové a momentové účinky, které mohou vést k nestabilitě celé rotorové soustavy, což může vést ke zvýšení opotřebení ložisek nebo k samotnému zadření turbodmychadla. Navíc nevyvážený rotor turbodmychadla generuje nežádoucí „pískot“ o frekvenci odpovídající řádu provozní frekvence turbodmychadla [5].

Existují dva možné přístupy výroby součástek rotorových částí turbodmychadel. První přístup bere ohled na maximální přesnost výrobku, kdy excentricita středů hmotnosti jednotlivých dílů vzhledem k ose hřídele turbodmychadla nepřesahuje několik mikronů. Dá se předpokládat, že tento přístup bude použitelný pouze pro omezený počet aplikací, kdy požadavek na precizní funkčnost výrobku značně převyšuje významně zvýšené

náklady na výrobu takovýmto postupem. Druhým přístupem je uvažování nevyváženosti jednotlivých dílů již během výroby. Tento přístup je obecně častěji využíváný a to nejen díky menším nárokům na výrobu, ale také pro podstatně nižší finanční náklady. Z technologického hlediska známe dva základní typy vyvažování rotorů turbodmychadel v automobilovém průmyslu a to nízko-rychlostní vyvažování (do 3400 otáček za minutu), které se používá především na vyvážení jednotlivých dílů turbodmychadla. Dalším typem je vysoko-rychlostní vyvažování, které pomáhá ke zlepšení dynamické odezvy zejména v oblasti nad první kritickou rychlostí.

V našem případě je důležitá informace, jak se projeví uvažování dané nevyváhy na výpočetní model dokonale vyváženého turbodmychadla popsaného rovnicí (2.98). Uvažujme nevyvážek o hmotnosti Δm umístěný v radiálním směru od bodu diskretizace hřídele, jehož poloha je popsána polohovým vektorem \mathbf{e} . Velikost polohového vektoru $e = |\mathbf{e}|$ udává excentricitu nevyvážku vzhledem k diskretizačnímu bodu na ose hřídele. Takto definovaný nevyvážek generuje při rotaci rotoru turbodmychadla rychlostí ω odstředivou sílu

$$\mathbf{F} = \Delta m \mathbf{e} \omega^2 \quad (4.31)$$

ve směru polohového vektoru \mathbf{e} . Budeme-li kótovat axiální natočení $\varphi = \omega t$ rotorové části turbodmychadla od pevné osy Y, můžeme rozložit složky odstředivé síly (4.31) do směrů os Y a Z pevného souřadnicového systému

$$F_Y = \Delta m e \omega^2 \cos(\omega t) \quad , \quad F_Z = \Delta m e \omega^2 \sin(\omega t). \quad (4.32)$$

Pro další postup předpokládejme, že odstředivá síla (4.31) bude generovat v systému harmonické buzení, které lze obecně popsat vektorem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_C \cos(\omega t) + \mathbf{f}_S \sin(\omega t), \quad (4.33)$$

ve kterém jsme označili symboly \mathbf{f}_C a \mathbf{f}_S vektory amplitud kosinových a sinových složek buzení. Výsledný systém popisující harmonicky buzený výpočtový model rotoru turbodmychadla bude mít tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_C \cos(\omega t) + \mathbf{f}_S \sin(\omega t). \quad (4.34)$$

Uvažujme, že ustálená odezva systému na harmonické buzení (4.33) je dána partikulárním řešením, které bude taktéž harmonické, tedy

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_C \cos(\omega t) + \mathbf{q}_S \sin(\omega t), \quad (4.35)$$

kdy pro jeho derivace platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= -\omega\mathbf{q}_C \sin(\omega t) + \omega\mathbf{q}_S \cos(\omega t), \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -\omega^2\mathbf{q}_C \cos(\omega t) - \omega^2\mathbf{q}_S \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4.36)$$

4. KAPITOLA – Dynamické projevy rotorových soustav

Dosazením odhadu řešení (4.35) a jeho derivací (4.36) do vztahu (4.34) dostaneme

$$\begin{aligned} & \omega^2 \mathbf{M}(-\omega^2 \mathbf{q}_C \cos(\omega t) + \omega^2 \mathbf{q}_S \sin(\omega t)) + \omega^2 \mathbf{G}(-\mathbf{q}_C \sin(\omega t) + \mathbf{q}_S \cos(\omega t)) + \\ & + \mathbf{K}^*(\mathbf{q}_C \cos(\omega t) + \mathbf{q}_S \sin(\omega t)) = \mathbf{f}_C \cos(\omega t) + \mathbf{f}_S \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (4.37)$$

kde jsme symbolem \mathbf{K}^* označili $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \omega^2 \mathbf{K}_\omega$ pro zjednodušení. Nyní porovnejme koeficienty u členů obsahujících $\sin(\omega t)$ a u členů obsahujících $\cos(\omega t)$, čímž dostaneme dvě koeficientové rovnice

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_S - \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{q}_C + \mathbf{K}^* \mathbf{q}_S &= \mathbf{f}_S, \\ -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_C + \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{q}_S + \mathbf{K}^* \mathbf{q}_C &= \mathbf{f}_C. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dále zavedme následující komplexní amplitudy

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_C - i \mathbf{q}_S \quad a \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_C - i \mathbf{f}_S. \quad (4.39)$$

Vynásobením první rovnice (4.38) zápornou imaginární jednotkou $-i$ a přičtením ke druhé rovnici (4.38) dostaneme s přihlédnutím ke (4.39)

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M} + i \omega^2 \mathbf{G}) \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad (4.40)$$

kde výraz v závorce definuje tzv. matici dynamické tuhosti $\mathbf{Z}(\omega)$. Ze vztahu (4.40) můžeme vypočítat komplexní amplitudu zobecněných výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$ inverzním vztahem

$$\tilde{\mathbf{q}} = (\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M} + i \omega^2 \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{f}}. \quad (4.41)$$

Pro úplnost doplňme, že inverzní matici ve vztahu (4.41), tedy inverzní matici k matici dynamické tuhosti $\mathbf{Z}(\omega)$, nazýváme matici dynamické poddajnosti neboli matici frekvenčních přenosů.

Grafickým výstupem odvozených veličin je amplitudová charakteristika, která vykresluje závislost velikosti i -té zobecněné souřadnice vektoru komplexních amplitud zobecněných výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$ v závislosti na rozsahu otáček ω rotorové soustavy. Jiným výstupem je amplitudo-fázová (frekvenční) charakteristika, která zobrazuje závislost imaginární složky i -té zobecněné souřadnice vektoru komplexních amplitud zobecněných výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$ v závislosti na reálné složce i -té zobecněné souřadnice vektoru komplexních amplitud zobecněných výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$, kdy výsledná křivka je tvořena body odpovídajícími dané velikosti imaginární resp. reálné složky pro konkrétní okamžik daný okamžitou úhlovou rychlostí ω otáčení rotorového systému.

5. Kapitola

Analýza turbodmychadla C12

Následující kapitola je věnována dynamické analýze rotoru turbodmychadla C12 výrobce ČZ, a.s. Prezentované výsledky byly získány využitím výpočtového modelu, který byl implementován ve výpočtovém prostředí MATLAB.

Následující kapitola je věnována prezentaci obdržených výsledků získaných během práce s výpočtovým modelem zkoumaného turbodmychadla, který byl odvozen ve **3. kapitole**. Kapitola je členěna v souladu s dosavadním teoretickým odvozením, tedy v úvodu kapitoly jsou diskutovány výsledky modálních analýz pro několik variant výpočtového modelu turbodmychadla ve stavu statické rovnováhy. Následně jsou v analogii s kapitolou **4.1** začleněny Campbellovy diagramy, které popisují vývoj vlastních frekvencí rotoru v pohybu. Závěr kapitoly je věnován zkoumání odezvy na neváhy rotoru soustavy turbodmychadla.

5.1. Modální analýza pro případ statické rovnováhy

Ve stavu statické rovnováhy se rotor turbodmychadla neotáčí a nepůsobí tak na něj žádné tlumící ani gyroskopické účinky, které závisí na rychlosti otáčení rotorové soustavy. Obecně jsou dynamické vlastnosti rotoru turbodmychadla závislé na jeho otáčkách a na statickém zatížení rotoru, které ovlivňuje vlastnosti kluzných ložisek s plovoucími pouzdry, na nichž je rotor uložen.

5.1.1. Nerotující izolovaný konzervativní model

Jako první zkoumaný referenční případ uvažujme konzervativní model nerotujícího rotoru turbodmychadla izolovaného v prostoru. Vlastní frekvence takovéto soustavy lze obdržet pomocí implementované funkce „*eig*“ ve výpočtovém prostředí MATLAB [I1] pro případ, kdy jako vstupní parametr jsou zadány matice hmotnosti izolovaného rotoru M zmíněná ve vztahu (2.60) a matice statické tuhosti izolovaného rotoru K_S . V Tab. 5.1 lze vidět výčet prvních patnácti vlastních frekvencí včetně charakteru jim příslušejících vlastních tvarů.

v	f_v [Hz]	charakter tvaru kmitání
1.	0,00	posuv v axiálním směru
2.	0,00	rotace kolem osy rotační symetrie rotoru
3.	0,14	rotace+posuv
4.	0,14	rotace+posuv
5.	0,15	rotace+posuv
6.	0,15	rotace+posuv
7.	1118,57	torzní
8.	1179,57	ohybový
9.	1179,61	ohybový
10.	2696,10	ohybový s 1 uzlem
11.	2700,56	ohybový s 1 uzlem
12.	3943,47	ohybový s 2 uzly
13.	3951,36	ohybový s 2 uzly
14.	5271,71	torzní
15.	7734,01	ohybový se 3 uzly

Tab. 5.1 Hodnoty vlastních frekvencí konzervativního výpočtového modelu izolovaného rotoru turbodmychadla (řešeno v prostoru zobecněných souřadnic)

5.1.2. Nerotující izolovaný nekonzervativní model s gyroskopickými účinky

Dále se zaměříme na úlohu hledání modálních parametrů konzervativního modelu s uvažováním gyroskopických účinků, které jsou dány maticí gyroskopických účinků G modelu izolovaného rotoru (2.36). Definujme tuto úlohu ve stavovém prostoru, kde z hlediska programování je výhodné převést soustavu (4.6) na tvar

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

kde byla symbolem A zavedena tzv. systémová matice, která je pro případ konzervativního modelu s gyroskopickými účinky definován jako,

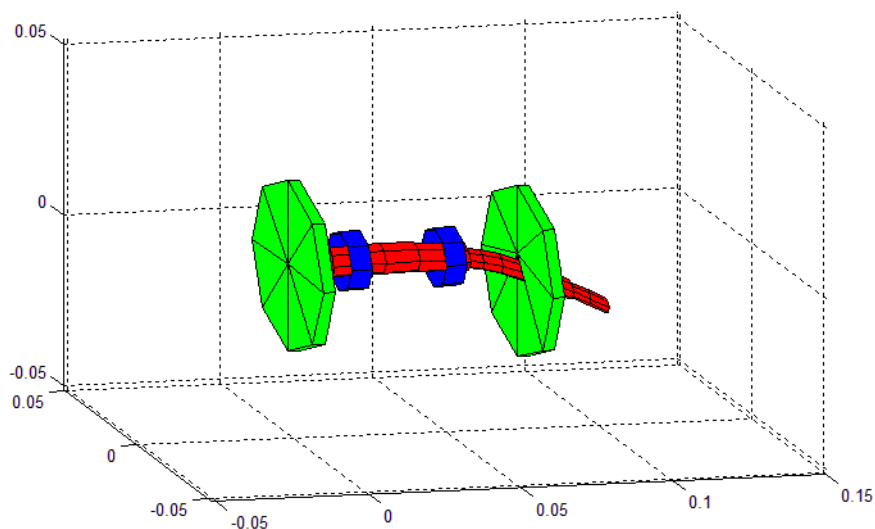
$$A(\omega) = \begin{bmatrix} -M^{-1}\omega G & -M^{-1}K_S \\ E & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nx2n}. \quad (5.2)$$

Je vidět, že systémová matice A pro tento případ je závislá na otáčkách rotoru ω . Avšak pro případ nerotujícího izolovaného hřídele platí $\omega = 0$. Po provedení modální analýzy dostaneme vlastní frekvence patrné z Tab. 5.2.

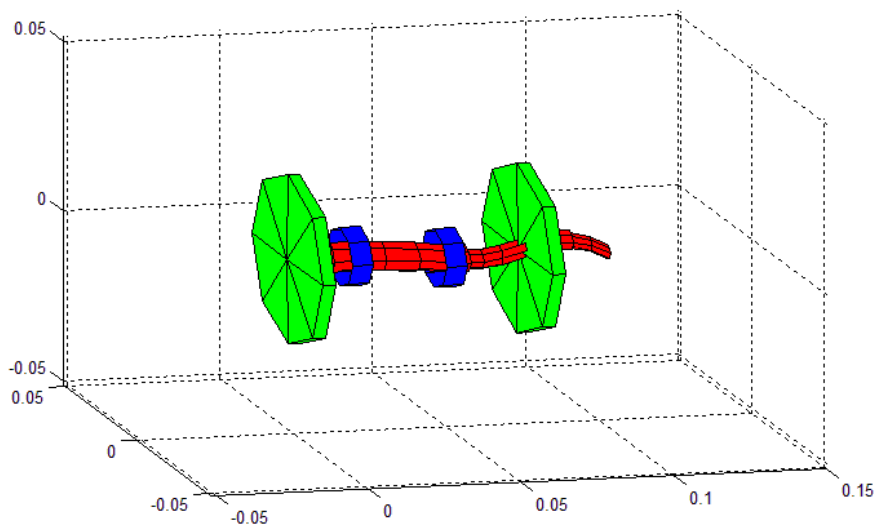
v	f_v [Hz]	charakter tvaru kmitání
1.	0,00	posuv v axiálním směru
2.	0,00	rotace kolem osy rotační symetrie rotoru
3.	0,07	rotace+posuv
4.	0,07	rotace+posuv
5.	0,37	rotace+posuv
6.	0,38	rotace+posuv
7.	1118,57	torzní
8.	1179,47	ohybový
9.	1179,70	ohybový
10.	2696,09	ohybový s 1 uzlem
11.	2700,56	ohybový s 1 uzlem
12.	3943,47	ohybový s 2 uzly
13.	3951,36	ohybový s 2 uzly
14.	5271,71	torzní
15.	7734,02	ohybový se 3 uzly

Tab. 5.2 Hodnoty vlastních frekvencí nekonzervativního výpočtového modelu s uvažováním gyroskopických účinků izolovaného rotoru turbodmyhadla (řešeno ve stavovém prostoru)

Na první pohled je vidět, že hodnoty vlastních frekvencí pro oba modely (viz Tab. 5.1 a Tab. 5.2) jsou téměř identické. Drobné odchylky vznikly nejspíše numerickou nepřesností z důvodu použití jiného postupu výpočtu. Dále je zde patrný fyzikální význam takto uvažovaného výpočtového modelu a to, že v obou případech vyšlo vždy prvních šest vlastních frekvencí (až na drobné numerické odchylky) nulových. Může za to fakt, že v dosavadním výpočtovém modelu nebylo uvažováno jakékoliv uchycení rotoru vzhledem ke statorové části turbodmyhadla. Vizualizací prvních šesti vlastních tvarů lze zjistit, že se izolovaný rotor v těchto případech pohybuje jako tuhé těleso, což odpovídá fyzikálnímu významu úlohy. Příklady vizualizace vlastních tvarů jsou k vidění na Obr. 5.1 a Obr. 5.2.



Obr. 5.1 8. vlastní ohybový tvar kmitání příslušející frekvenci 1179,70 Hz



Obr. 5.2 15. vlastní ohybový tvar kmitání se 3 uzly příslušející frekvenci 7734,02 Hz

5.1.3. Nerotující nekonzervativní komplexní model

Posledním zkoumaným případem je model, kdy jsou již uvažovány linearizované ložiskové vazby ložisek. Pro stav statické rovnovážné polohy nadále platí $\omega = 0$. Systémová matice se pro tento model změní následovně

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} -M^{-1}\omega G & -M^{-1}(K_S + K_B) \\ E & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad (5.3)$$

kde matice K_B je matice tuhosti linearizovaných ložiskových vazeb ložisek (2.88). Vypočítané vlastní frekvence takového modelu jsou uvedeny v Tab. 5.3.

v	f_v [Hz]	charakter tvaru kmitání
1.	0,36	posuv v axiálním směru
2.	0,43	rotace kolem osy rotační symetrie rotoru
3.	30,29	torzní
4.	86,25	ohybový
5.	222,67	ohybový
6.	400,35	ohybový
7.	845,11	ohybový
8.	1118,57	ohybový
9.	1174,11	ohybový
10.	1252,94	ohybový
11.	2688,95	ohybový s 2 uzly
12.	2701,84	ohybový s 2 uzly
13.	3935,03	ohybový se 3 uzly
14.	3943,05	ohybový se 3 uzly
15.	5271,71	ohybový se 3 uzly

Tab. 5.3 Hodnoty vlastních frekvencí nekonzervativního komplexního výpočtového modelu rotoru turbodmyhadla

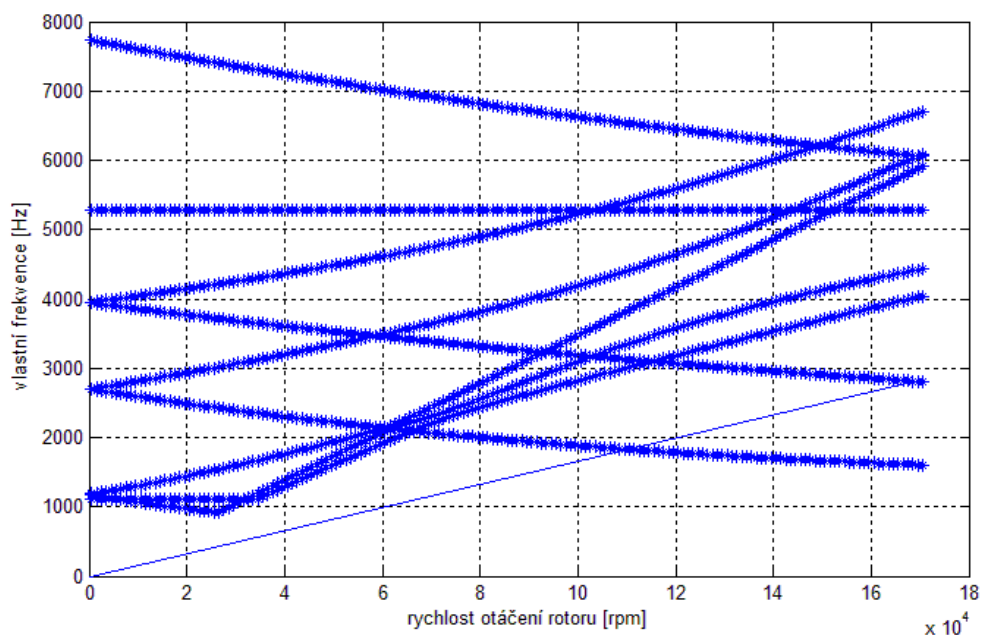
Na první pohled je patrné, že získané vlastní frekvence se výrazně liší od předchozích modelů po zavedení vlivu tuhosti ložiskových vazeb. V celkovém spektru vlastních frekvencí přibýly frekvence nižší hodnoty. V předchozích případech vyšla první nenulová vlastní frekvence 1118,57 Hz, zde je tato frekvence až šestou „nenulovou“ vlastní frekvencí. Fyzikální význam takto definované úlohy předpokládá, že by se ve výčtu vlastních frekvencí měly objevit dvě nulové vlastní frekvence odpovídající pohybu rotoru turbodmyhadla, kdy se rotor pohybuje jako tuhé těleso a to buď právě axiálně (z důvodu, že v modelu neuvažujeme implementaci axiálního ložiska), nebo se může torzně natáčet. Avšak v našem případě nám vyšli první dvě nejnižší vlastní frekvence 0,36 Hz a 0,43 Hz. Dá se usuzovat, že tato nepřesnost vznikla v důsledku složitého procesu linearizace ložiskových vazeb (viz kapitola 2.3), jedná se o numerickou chybu.

5.2. Modální vlastnosti v závislosti na rychlosti rotoru

Jak již bylo zmíněno v kapitole 4.1, u rotorových soustav se vlastní frekvence mění v závislosti na rychlosti rotace systému, což lze graficky znázornit pomocí Campbellova diagramu. Uvažujme nejprve výpočtový model z kapitoly 5.1.2, kdy jsme se zabývali

5. KAPITOLA – Analýza turbodmyhadla C12

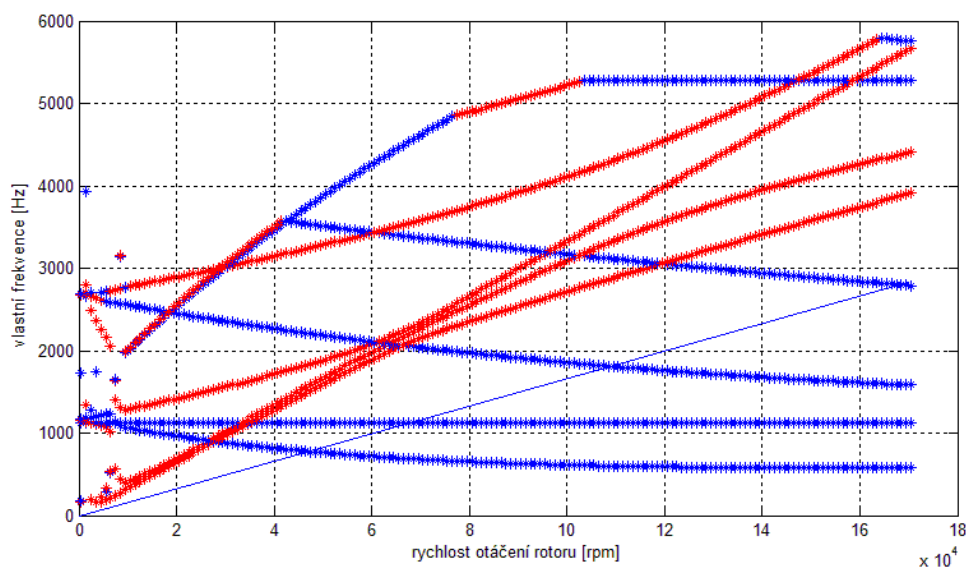
izolovaným rotorem turbodmyhadla s uvažováním gyroskopických účinků. V tabulce 5.2 je vypsáno prvních patnáct vlastních frekvencí tohoto modelu ve stavu statické rovnováhy. Nyní uvažujme celé spektrum provozních otáček, kterého může dosáhnout zkoumané turbodmyhadlo typu C12 a to od 0 do 170000 ot/min. Campbellův diagram, pro tento případ je vidět na Obr. 5.3.



Obr. 5.3 Campbellův diagram výpočtového modelu izolovaného rotoru s uvažováním gyroskopických účinků pro 7. až 15. vlastní frekvenci

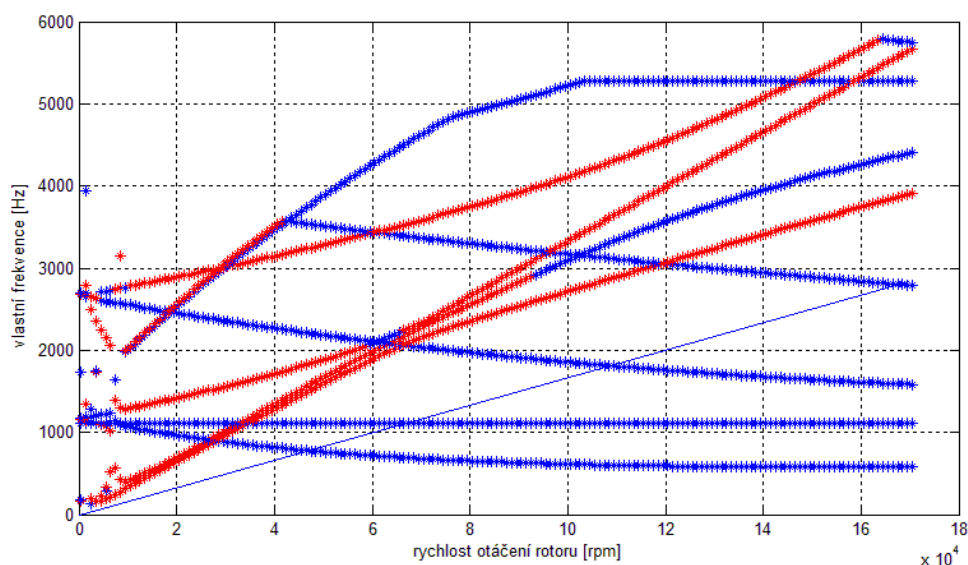
Z obrázku 5.1 jsou jasně patrná štěpení větví jednotlivých průběhů vlastních frekvencí důsledkem gyroskopických účinků. Tenkou čarou je zde zobrazena náběhová přímka, která určuje hodnoty kritických otáček v bodech průsečíků s křivkami průběhů vlastních frekvencí.

Dále s přihlédnutím k podkapitole 5.1.3 zkusíme průběh vlastních frekvencí v závislosti na otáčkách rotoru komplexního výpočtového modelu rotoru turbodmyhadla s uvažováním tuhostí ložiskových vazeb a při absenci veškerých tlumících členů. Campbellův diagram tohoto výpočtového modelu je patrný z Obr. 5.4.



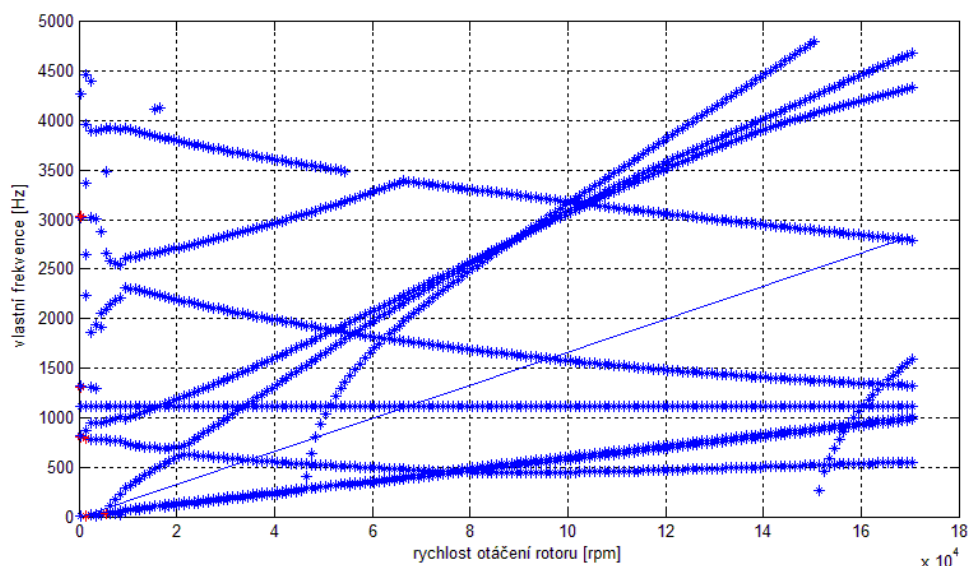
Obr. 5.4 Campbellův diagram rotorů s uvažováním tuhostí ložisek pro 3. až 11. vlastní frekvenci (modře – stabilní oblasti, červeně – nestabilní oblasti)

Ve srovnání s obrázkem 5.3 je na první pohled zřejmé, že samotné tuhosti ložiskových vazeb významně ovlivní průběhy vlastních frekvencí v závislosti na otáčkách rotoru. Dále jsou vidět na Obr. 5.4 průsečíky náběhové přímky s křivkami průběhů vlastních frekvencí, které definují hodnoty kritických otáček dané rotorové soustavy. Na obrázku 5.4 jsou navíc barevně odlišeny stabilní a nestabilní stavy, které byly popsány v podkapitole 4.1.1, kde červenou barvou jsou označeny vlastní frekvence, kterým odpovídají nestabilní tvary kmitání a naopak modrou barvou stabilní tvary kmitání. Předpokladem ke zvýšení stability soustavy je zahrnutí vlivu tlumících elementů. Proto se nyní zaměříme na model, který rozšiřuje předchozí model o materiálové tlumení hřídelových elementů, které bylo popsáno v kapitole 2.4 pomocí koeficientů proporcionálního materiálového tlumení b_{σ} a b_{τ} . Na obrázku Obr. 5.5 je zobrazen Campbellův diagram získaný použitím takovéhoho model hodnoty koeficientů proporcionálního tlumení $b_{\sigma} = 1 \cdot 10^{-6}$ a $b_{\tau} = 1 \cdot 10^{-6}$. Z tohoto obrázku je patrné rozšíření modrých oblastí indikující snížení počtu nestabilních oblastí v průbězích jednotlivých vlastních frekvencí.



Obr. 5.5 Campbellův diagram rotoru s uvažováním tuhostí ložisek a materiálového tlumení hřídelových elementů ($b_{\sigma} = 1 \cdot 10^{-6}$ a $b_{\tau} = 1 \cdot 10^{-6}$) pro 3. až 11. vlastní frekvenci

V reálném světě jsou však koeficienty materiálového tlumení parametry konkrétního materiálu a tudíž jejich změnu docílíme pouze použitím jiného materiálu k výrobě hřídele turbodmychadla.



Obr. 5.6 Campbellův diagram komplexního modelu rotoru s uvažováním materiálového tlumení hřídelových elementů, a tuhosti a tlumení ložiskových vazeb pro 3. až 11. vlastní frekvenci

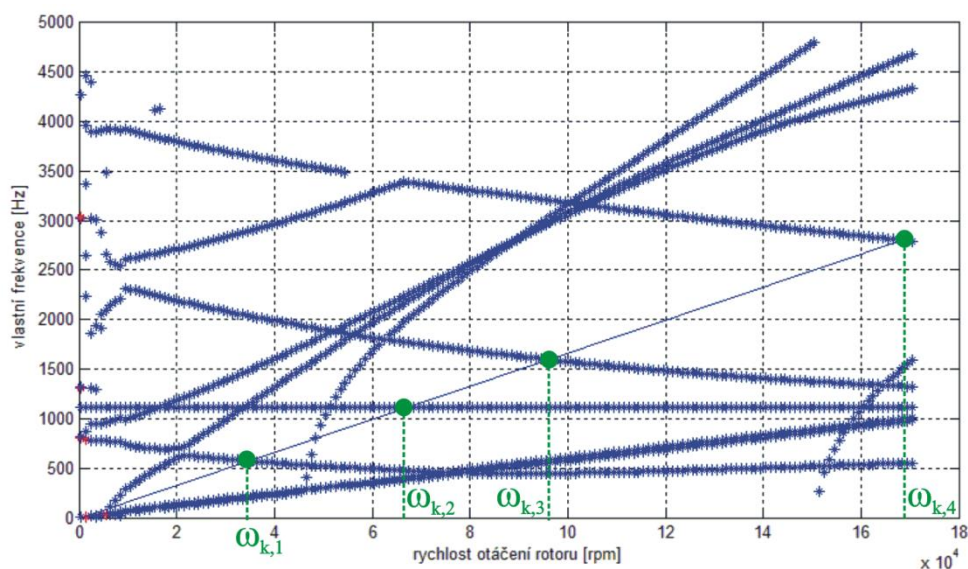
Posledním zkoumaným výpočtovým modelem je rozšíření předchozího modelu o tlumení ložiskových vazeb, které bylo odvozeno v podkapitole 2.4.1. Pro materiálové tlumení ponecháme koeficienty materiálového tlumení na hodnotách

$b_{\sigma} = 1 \cdot 10^{-6}$ a $b_{\tau} = 1 \cdot 10^{-6}$. Výsledný Campbellův diagram je vidět na Obr. 5.6.

Ve srovnání s Obr. 5.5 došlo díky tlumení v ložiskových vazbách ke změně průběhů vlastních frekvencí v závislosti na otáčkách rotoru. Stejně tak je vidět, že došlo k vymizení červených oblastí příslušejících nestabilním tvarům kmitání a to v rozsahu celého provozního spektra otáček. Nejasný průběh křivek v náběhové oblasti do zhruba 10 000 ot/min je zapříčiněn numerickou nestabilitou použitého výpočtového modelu a integrovaných řešičů výpočetního prostředí programu MATLAB.

5.2.1. Stanovení kritických otáček

Zaměříme se nyní na problém nalezení hodnot kritických otáček, jak byl popsán v kapitole 4.1. Z Campbellova diagramu na Obr. 5.7 jsou na první pohled vidět průsečíky náběhové přímky (tenká modrá přímka) s průběhy křivek vlastních frekvencí. Tyto průsečíky definují kritické otáčky, které lze vyčíst z Tab. 5.4.



Obr. 5.7 Kritické otáčky výpočtového modelu turbodmyhadla typu C12

$\omega_{k,i}$	λ_v	f [Hz]	rpm [ot/min]
i = 1	v = 5	574	32871
i = 2	v = 6	1119	64089
i = 3	v = 7	1598	91567
i = 4	v = 8	2806	160971

Tab 5.4 Kritické otáčky výpočtového modelu turbodmyhadla typu C12 pro příslušející vlastní frekvence

5.3. Odezva na neváhu

Zaměřme se nyní na odezvu rotorové soustavy na zadanou neváhu. Tato problematika byla diskutována v kapitole 4.4, kde byl odvozen teoretický postup pro získání amplitudové a fázové charakteristiky, jako grafické reprezentace odezvy na neváhu pro zadané neváhy.

Nejprve uvažujme dva neváhy umístěné na rotorové soustavě, kdy každý z nich bude definován příslušným statickým momentem, který je dán součinem hmotnosti neváhy Δm a vzdálenosti neváhy od osy hřídele e (v analogii s rovnicí (4.31)). Hodnoty statických momentů jednotlivých neváh jsou

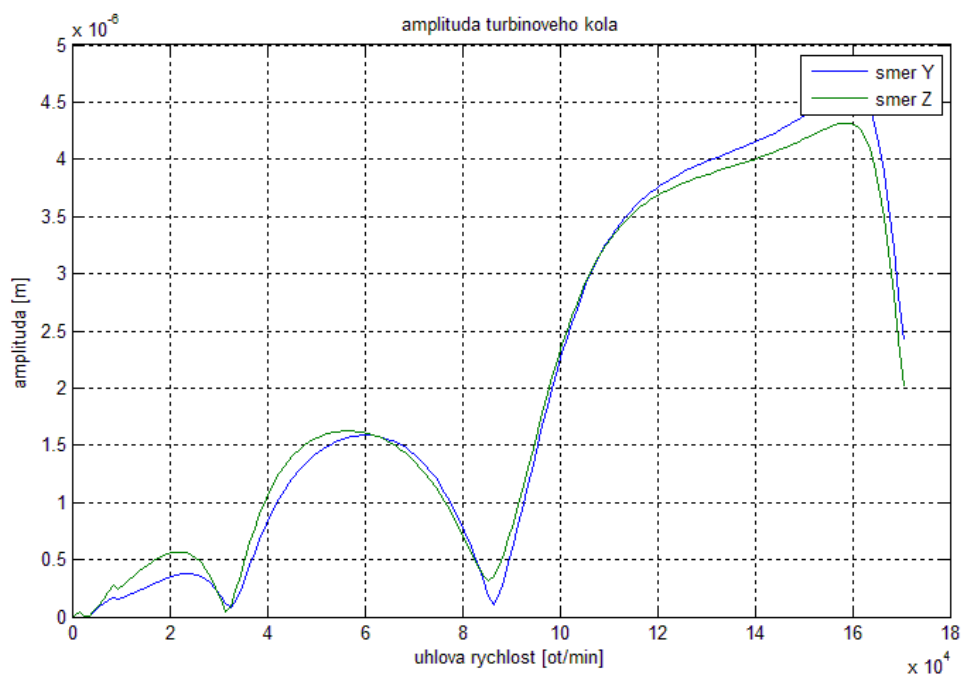
$$\Delta m_1 e_1 = 0,21 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \text{a} \quad \Delta m_2 e_2 = 0,57 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

První neváha bude umístěn v rovině kolmé na osu hřídele procházející diskretizačním bodem, kde leží turbínové kolo. Tím budeme aproximovat případ nasazení neváhy na turbínové kole. Obdobně bude druhý neváha v rovině procházející diskretizačním bodem kompresorového kola. Dále předpokládejme, že ve výchozím stavu, kdy se rotor turbodmyhadla neotáčí, jsou oba neváhy v zákrytu a úhel natočení φ neváhy bude pro oba neváhy roven nule. V takovémto případě bude vektor komplexních amplitud buzení, který se vyskytuje na pravé straně rovnice (4.40) mít následující tvar

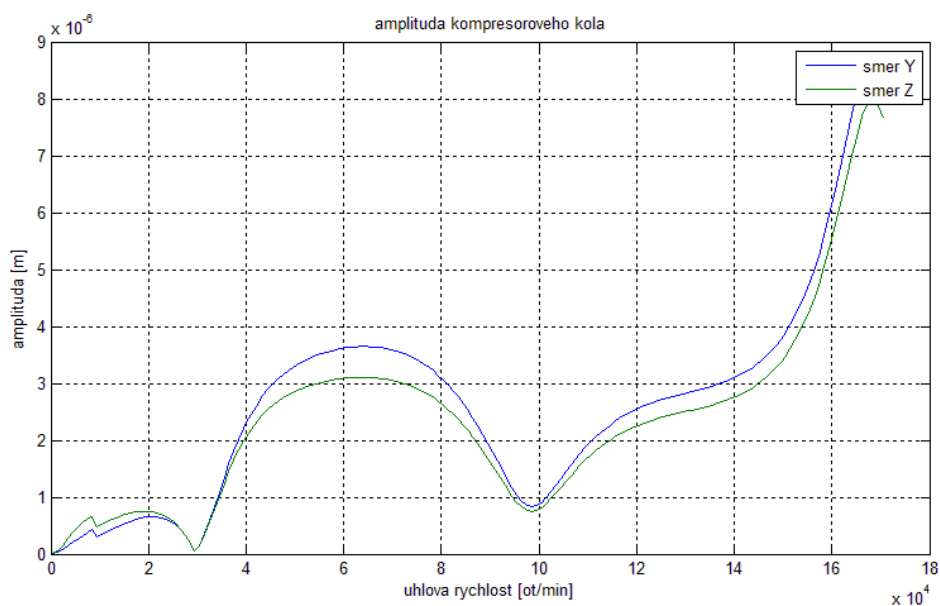
$$\tilde{\mathbf{f}} = [0, \dots, 0, \Delta m_1 e_1 \omega_0^2, -i \Delta m_1 e_1 \omega_0^2, 0, \dots, 0, \Delta m_2 e_2 \omega_0^2, -i \Delta m_2 e_2 \omega_0^2, 0, \dots, 0]^T, \quad (5.4)$$

kdy nenulové prvky budou právě dvě dvojice odpovídající složkám sil (4.32) pro každý neváha. Amplitudová charakteristika znázorňující amplitudy diskretizačního uzlu turbínového (resp. kompresorového) kola ve směrech pevných os Y a Z je vidět na Obr. 5.9 (resp Obr. 5.10).

5. KAPITOLA – Analýza turbodmyhadla C12

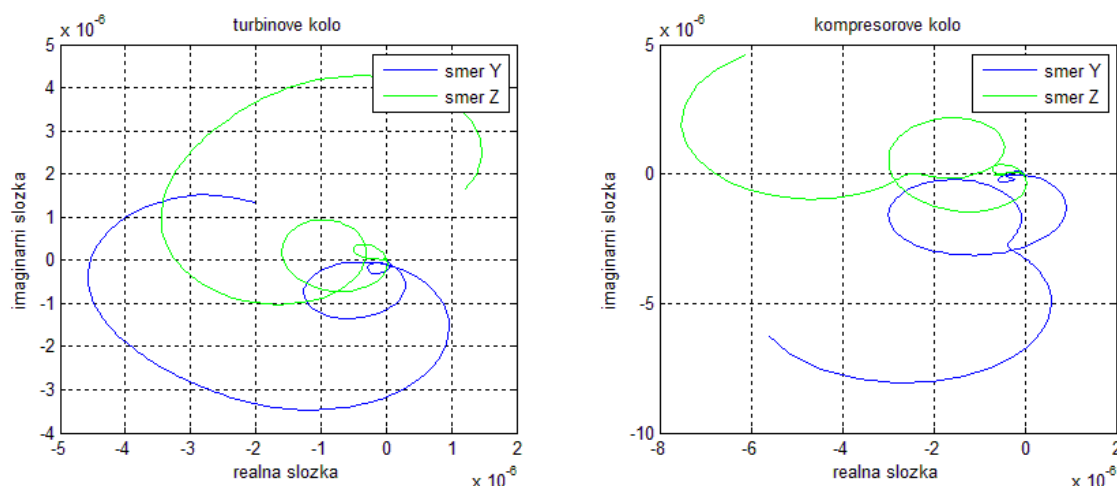


Obr. 5.9 Amplitudová charakteristika pro diskretizační uzel turbínového kola



Obr. 5.10 Amplitudová charakteristika pro diskretizační uzel kompresorového kola

Pro doplnění jsou na obrázku 5.11 zobrazeny fázové diagramy pro diskretizační uzly turbínového a kompresorového kola.



Obr. 5.11 Fázový diagram diskretizačního uzlu turbínového kola (vlevo) a kompresorového kola (vpravo)

Pro srovnání nyní uvažujme případ, kdy nevyvážek na turbínovém kole bude vzhledem k nevyvážku na kompresorovém kole pootočen o konstantní (ve vztahu k otáčkám rotoru) úhel $\alpha = 135^\circ$ ve směru přírůstku úhlu φ . Hodnota úhlu pootočení byla zvolena v souladu s výzkumnou zprávou [9], kdy se při výrobě podařilo vyrobit pouze tento typ nasazení nevyvážků. Předpoklad vzájemného natočení nevyvážků se odrazí na vektoru komplexních amplitud buzení \tilde{f} následovně: Rozepsáním vektoru buzení f , který byl obecně definován vztahem (4.39), pomocí Eulerova vzorce dostaneme (s přihlédnutím ke (4.39)

$$f(t) = f_c \cos(\omega t) + f_s \sin(\omega t) = \tilde{f} e^{i\omega t}. \quad (5.5)$$

Obecně se vychýlení nevyvážku o úhel α projeví v rovnici (5.5) jako

$$f(t) = \tilde{f} e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (5.6)$$

což po rozepsání exponenciálního členu vede na tvar

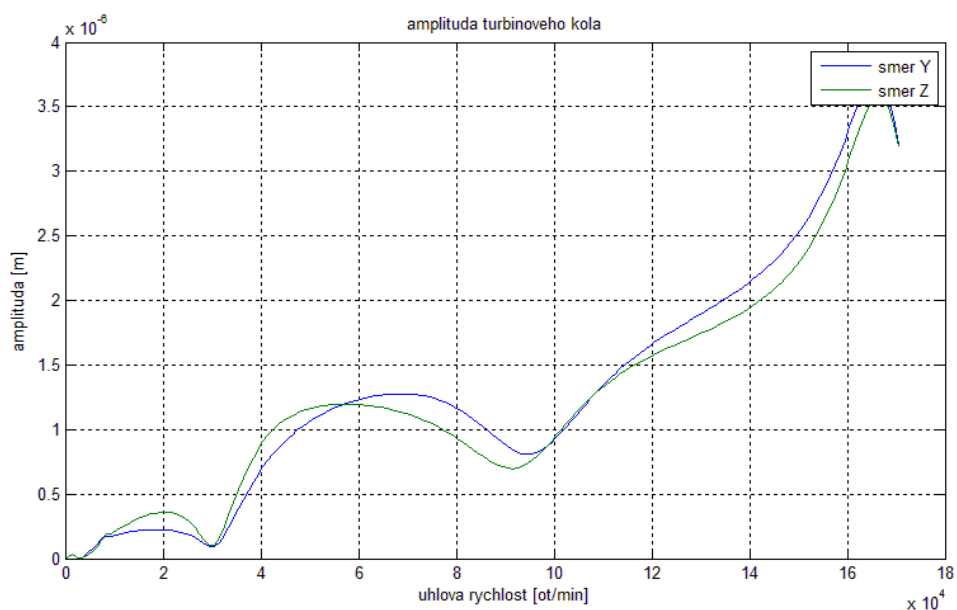
$$f(t) = \tilde{f} e^{i\alpha} e^{i\omega t}. \quad (5.7)$$

Z toho plyne jednoduchý závěr, že v takovémto případě rozložení nevyvážků je potřeba patřičnou dvojici silových účinků ve vztahu (5.4) vynásobit členem $e^{i\alpha}$, který odpovídá natočení daného nevyvážku. Tedy zde se jedná konkrétně o pronásobení první dvojice silových účinků, které připadají na setrvačné síly od nevyvážku na turbínovém kole. Dodejme, že úhel α je potřeba do vztahu (5.7) zadávat v radiánech. Grafické výstupy lze vidět na obrázcích 5.12 a 5.13.

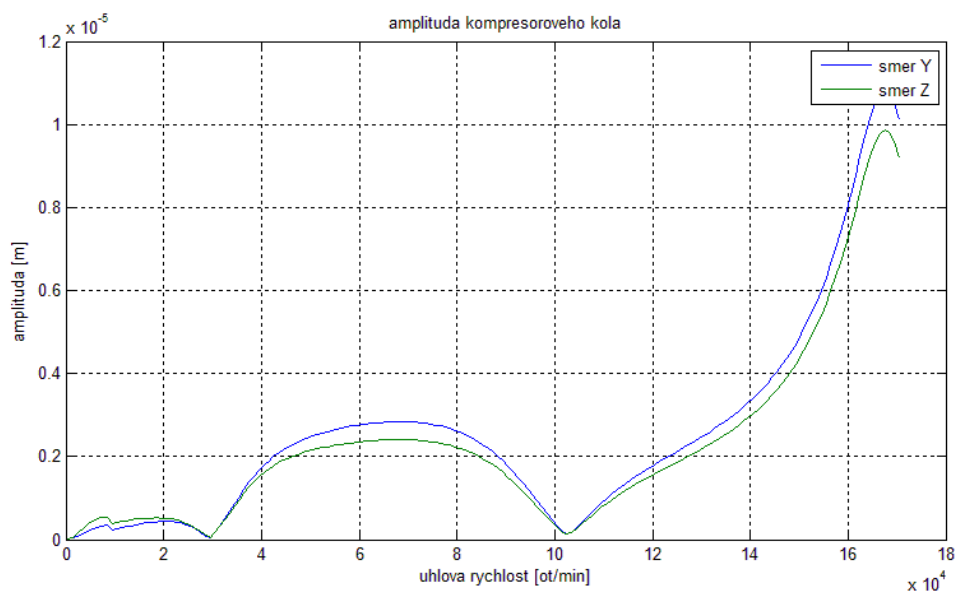
Srovnáním obrázků (zejména Obr. 5.9 a Obr. 5.12) lze zjistit, že vychýlením nevyvážků lze docílit snížení amplitudy výchylky turbínového kola v otáčkách nad 100000 ot/min, což je žádoucí vzhledem k provozu turbodmychadla. Snahou je, co nejvíce předejít

5. KAPITOLA – Analýza turbodmychadla C12

takovému vychýlení, které by zapříčinilo kontakt hřídele a ložiska, případně jiné části rotoru se statorovou částí turbodmychadla.



Obr. 5.12 Amplitudová charakteristika pro diskretizační uzel turbínového kola pro navzájem vychýlené nevývažky o 135°



Obr. 5.13 Amplitudová charakteristika pro diskretizační uzel kompresorového kola pro navzájem vychýlené nevývažky o 135°

6. Kapitola

Závěr

Cílem práce bylo shrnutí aktuálního stavu problematiky turbodmychadel z pohledu metod pro zkoumání jejich dynamických vlastností. Historický vývoj turbodmychadel včetně popisu jejich základních částí a funkce je součástí úvodu práce.

Druhá kapitola je věnována metodice matematického modelování rotorů turbodmychadel. Je zde popsán přístup metody konečných prvků, konkrétně jsou zde odvozeny matice hřídelových prvků vzniklé v důsledku diskretizace hřídele turbodmychadla. Dále je zde nastíněno odvození matic dokonale tuhých kotoučů, které slouží jako modely kol nasazených na poddajné hřídeli, zejména se jedná o turbínové a kompresorové kolo turbodmychadla. Stěžejní podkapitola této části práce je stať věnovaná odvození linearizovaného modelu vazebních účinků kluzných radiálních ložisek s cílem získat matice tuhosti a tlumení linearizovaných ložiskových vazeb. Linearizace ložiskového systému byla provedena v okolí statické rovnovážné polohy ložiska pomocí Taylorova rozvoje ložiskových sil. Výchozím vztahem pro vyjádření ložiskových sil byla Reynoldsova rovnice popisující proudění nestlačitelné nekavitující olejové vrstvy. Závěr této kapitoly popisuje sestavení komplexního matematického modelu rotoru turbodmychadla uloženého na plovoucích kluzných ložiscích.

První aplikační část se nachází ve třetí kapitole. Jako zkoumané turbodmychadlo bylo zvoleno turbodmychadlo typu C12 od českého výrobce ČZ, a. s. Na tomto modelu jsou aplikovány odvozené matematické metodiky a je tak sestaven konkrétní výpočtový model. K sestavení výpočtového modelu bylo použito výpočtového prostředí programu MATLAB (verze R2013a).

Čtvrtá kapitola shrnuje základní postupy v dynamické analýze rotujících soustav. Modální analýza poskytuje informaci o vlastních číslech a jim přidružených vlastních tvarech. Stejně tak má vypovídající hodnotu o stabilitě nekonzervativního mechanického systému. Na závěr je zahrnuta část pojednávající o vyšetřování dynamické odezvy rotorových soustav na nevyváhu rotoru. Simulace ukázaly v souladu s dříve provedeným měřením [9], že přítomnost určité zbytkové nevyváhy má pozitivní vliv na dynamické projevy turbodmychadel.

V poslední páté kapitole jsou uplatněny veškeré teoretické informace ze čtvrté kapitoly. Byly zjištěny modální vlastnosti pro vybrané konfigurace rotoru turbodmychadla C12. Frekvenční závislosti vlastních frekvencí byly zobrazovány pomocí Campbellových diagramů, z nichž lze snadno stanovit hodnoty kritických otáček. Závěr kapitoly analyzuje vliv zadaných nevyvážek na dynamickou odezvu turbodmychadla typu C12. Byly uvažovány dva nevyvážky nacházející se na turbínovém a kompresorovém kole a jejich vzájemná fázová poloha je chápána jako parametr. Simulacemi bylo ukázáno, že vzájemné pootočení nevyvážek ovlivňuje amplitudy výchylek turbínového kola ve vysokých otáčkách a tím tak docílit stabilnějšího chodu turbodmychadla. Tento závěr je v souladu se závěry prováděných experimentů [9].

Problematika dynamiky turbodmychadel je značně široká. Předložená práce je jakýmsi prvním přiblížením chování rotoru reálného turbodmychadla, které se opírá o využití linearizovaných modelů ložisek s plovoucími pouzdry. Z provedených analýz jasně vyplývá, že tento typ ložisek zásadně ovlivňuje dynamické chování tohoto stroje. Jako další krok se nabízí implementace modelu kluzných ložisek s plovoucími pouzdry v časové oblasti. Tím bude možné postihnout další dynamické jevy v odezvě turbodmychadel, zejména subharmonické rezonance a skokové změny odezvy spojené s bifurkacemi řešení tak, jak byly odhaleny v prováděných měřeních [9].

Literatura

Tištěné zdroje:

- [1] ZEMAN, Vladimír; HLAVÁČ, Zdeněk. *Kmitání mechanických soustav*. Plzeň: ZČU v Plzni, 1999. 218 s. ISBN 80-7082-563-4.
- [2] BYRTUS, Miroslav; HAJŽMAN, Michal; ZEMAN, Vladimír. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010. 236 s. ISBN 978-80-7043-953-1.
- [3] GASCH, Robert; PF'UTZNER, Herbert. *Dynamika rotorů*. Do češtiny přeložil JULIŠ Karel et al. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1980. 164 s. DT 62-253.
- [4] KAMEŠ, Josef. *Spalovací motory*. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, 2010. 192 s. ISBN 978-80-213-0895-4.
- [5] NGUYEN-SCHÄFER, Hung. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers*. London, Springer Heidelberg New York Dordrecht, 2012. 326 s. ISBN 978-3-642-27517-3.
- [6] ZEMAN, Vladimír; HLAVÁČ, Zdeněk; RENDLOVÁ, Zdeňka. *Modelování kmitání turbodmychadel*. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2013. 59 s. Výzkumná zpráva číslo 529137-01-13.
- [7] WHITE, Graham. *Allied Aircraft Piston Engines of World War II*. Airlife Publishing Ltd., 1995. 390 s. ISBN 1-85310-734-4.
- [8] VERTAĽ, Peter. *Provoz a údržba vozidel s přeplňovanými motory turbodmychadly*. Brno, Vysoké učení technické v Brně. Ústav soudního inženýrství – Diplomová práce, 2010. 65s.
- [9] BYRTUS, Miroslav; SMOLÍK, Luboš; RENDLOVÁ, Zdeňka; HAJŽMAN, Michal. *Měření vibroakustické odezvy turbodmychadla vybuzevané definovanou nevyváhou rotoru turbodmychadla*. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2015. Výzkumná zpráva číslo NTIS-VP3-0023/2015.
- [10] ŠAŠEK, Jakub. *Dynamika rotorových soustav*. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni – Disertační práce, 2010. 124 s.

- [11] BITTNAR, Zdeněk; ŠEJNOHA, Jiří. *Numerické metody mechaniky I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1992. 309 s. ISBN 80-01-00855-X.
- [12] MICHALEC, Jiří et al. *Pružnost a pevnost I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1995. 308 s. ISBN 978-80-01-04224-3.

Internetové zdroje:

- [I1] MATH WORKS. Matlab and Simulink for Technical Computing: Documentation Center [online]. Natick (Massachusetts): MathWorks © 1984-2013.
Dostupné z WWW: <<http://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>>
- [I2] STK Turbo Technik. *The history of turbocharging* [online]. Dostupné z WWW:
<<http://www.en.turbolader.net/Technology/History.aspx>>
- [I3] SAJDL, Jan. *Downsizing motoru* [online]. 2011. Dostupné z WWW:
<<http://www.autolexicon.net/cs/articles/downsizing-motoru/>>
- [I4] ŠIMEK, Jiří. *Uložení a dynamika rotorů turbodmychadel* [online]. Dostupné z WWW: <<http://www.techlab.cz>>
- [I5] ŠIMEK, Jiří. *Speciální typy ložisek* [online].
Dostupné z WWW: <<http://www.techlab.cz>>
- [I6] PINT, B. A. et al. *Performance of advanced turbocharger alloys and coatings at 850 – 950° C in air with water vapor* [online]. 2012.
Dostupné z WWW: <<http://www.sciencedirect.com>>
- [I7] ROMAGNOLI, Alessandro et al.. *Heat transfer analysis in a turbocharger turbine: An experimental and computational evaluation* [online]. 2012.
Dostupné z WWW: <<http://www.sciencedirect.com>>
- [I8] ČZ, a.s. *ČZ a.s. divize TURBO – Produkty*.
Dostupné z WWW: <<http://www.czas.cz/?pageid=20102&subid=1>>