

Zapadočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování interakce nestlačitelné vazké tekutiny s tuhým
tělesem pomocí lattice Boltzmannovy metody

Plzeň 2016

Eliška Blažková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 6. června 2016

.....

Anotace

Tato práce je zaměřena na numerické řešení interakce mezi tekutinou a pevnou strukturou. K simulaci dynamiky tekutin byla použita lattice Boltzmannova metoda a k simulaci pevného tělesa Immersed boundary method. V rámci Immersed boundary method byla zkoumána možnost využití kinematické okrajové podmínky na povrchu tělesa namísto silového působení, které se využívá tradičně. Navržené algoritmy byly implementovány ve výpočtovém prostředí MATLAB a v jazyce C++. V závěru práce jsou porovnány numerické výsledky získané vlastním vyvinutým softwarem s publikovanými výsledky jiných autorů.

Klíčová slova: lattice Boltzmannova metoda, immersed boundary method, interakce tekutiny s tělesem, výpočtová dynamika tekutin, odporový koeficient, Boltzmannova rovnice, vícenásobný relaxační čas

Abstract

This thesis focuses on numerical approach to interaction between fluid and solid structure. Lattice Boltzmann method was used for fluid dynamics simulation and modified Immersed boundary method for solid structure dynamics. Instead of classical approach to Immersed boundary method using forcing term, the possibility of using kinematic boundary condition on the surface of solid body. Designed LBM and IBM algorithm was implemented in computing environment of MATLAB and programming language of C++. The end of this work contains comparison of numerical results obtained by self-developed software to ones published by other authors.

Keywords: lattice Boltzmann method, immersed boundary method, fluid-structure interaction, computational fluid dynamics, fluid flow, drag coefficient, Boltzmann equation, multiple relaxation time

Obsah

Úvodem	1
1 Lattice Boltzmannova metoda	3
1.1 Diskretizace a struktura LBM	4
1.2 Prostorový a rovinný model	8
1.3 Okrajové podmínky	10
1.3.1 Okrajové podmínky na vstupu a výstupu	11
1.3.2 Periodické okrajové podmínky	12
1.3.3 Okrajové podmínky na stěně	13
1.3.4 Kinematická okrajová podmínka	14
1.4 Multiple-relaxation time	15
2 Interakce proudící tekutiny s tuhým tělesem	19
2.1 Váhové funkce vlivu tělesa na tekutinu	21
2.2 Silové účinky tekutiny na těleso	23
2.3 Působení tělesa na tekutinu	25
2.4 Pohyb tělesa	26
3 Teorie podobnosti	29
3.1 Rozměrová analýza	29
3.2 Jednotky pro LBM	31
4 Implementace	33
4.1 Struktura výpočtu	33
4.2 Paralelizace	36
5 Výsledky	39
5.1 Stanovení odporového koeficientu	39
5.2 Srovnání IBM s pevnou stěnou	41
5.3 Pád koule v odporovém prostředí	42
5.4 Aplikační příklady	47
5.4.1 Proudění vzduchu kolem automobilu	47
5.4.2 Dmýchání vzduchu ventilátorem	47

Úvodem

Úloha interakce tělesa a kolem proudící tekutiny postihuje reálné situace, kdy je pevné těleso ponořeno v tekutině, či kdy naopak tekutina protéká pevnou strukturou. Zvláště v posledních letech se simulace takovýchto interakcí rozvíjí a přibývá možností, jak modelovat složitější problémy. Obtékaná tělesa již zdaleka nemusí být statická, ale novými metodami lze postihnout i jejich dynamiku či pružnost a lze řešit i tok geometricky složitými (příp. časově proměnnými) oblastmi. Řešení problému interakce lze pak aplikovat na nepřehlednou škálu problémů biomechaniky (průtok krve pulsující cévou, interakce tekutiny s elastickou membránou), sedimentace částic [6], zjišťování aerodynamických vlastností obtékaných objektů např. v automobilovém či leteckém průmyslu [26] nebo proudění porézními materiály [8] [17].

Interakci pevné struktury lze řešit celistvě - tedy sestavením rovnic, které popisují jednotlivé fáze proudění včetně interakce. Vzhledem k multidisciplinární povaze úlohy je však mnohdy vhodnější a univerzálnější využít více výpočetních metod a vzájemně je propojit na hranici tělesa a tekutiny. Druhou zmíněnou cestou se ubírá i tato práce.

K modelování proudění je v této práci použita Lattice Boltzmannova metoda (LBM). Zakládá se na principu buněčných automatů, tedy nevyhází prvotně z řešení Navierových-Stokesových rovnic, ale z řešení dynamiky modelových částic pohybujících se po pravidelné mřížce. Modelové částice jsou svou velikostí na mezoskopické úrovni, protože lze LBM použít k modelování jak mikroskopického tak makroskopického proudění. Její výhodou je snadná implementace, vysoká variabilita (základní metodu lze rozšířit např. pro řešení právě interakce s tělesem, řešení vícefázového proudění atd.) a hlavně možnost masivní paralelizace výpočtu. Nevýhodou je nestabilita pro vysoká Reynoldsova čísla - tento problém je však do určité míry řešitelný [30] [11]. Dále je LBM limitována pravidelnou krychlovou sítí, která se hůře přizpůsobuje nepravidelným geometriím - i tento problém lze řešit [20].

V kombinaci s LBM se při modelování interakce tekutiny a pevné struktury zpravidla používají dva přístupy. Pro tělesa tuhá a nehybná je zvykem nahradit těleso stěnou. Těleso je tak "zabudováno" do výpočetní domény a jeho vliv na tekutinu je řešen stejně jako vliv stěn, tedy kinematickými okrajovými podmínkami.

Pro tělesa poddajná či pohyblivá je pak nejčastěji používána tzv. metoda vnořené hranice (Immersed boundary method, IBM). Těleso je reprezentováno sítí bodů na jeho povrchu, které kolem sebe vyvolávají silové pole stejné, jaké by vyvolávalo i těleso. Sílové pole pak dále působí na tekutinu a ovlivňuje tak její rychlost proudění v okolí tělesa.

V této práci zkoumáno využití kombinace právě LBM a IBM k simulaci interakce tekutiny a pevné struktury. V rámci metody vnořené hranice je zkoumáno využití kombinace předešlých dvou přístupů, tedy aplikace kinematických okrajových podmínek na povrchu pohyblivého tělesa reprezentovaného pohyblivou sítí bodů jeho povrchu - tedy hranice tělesa není součástí geometrie domény, nicméně tekutině je u jeho povrchu nucena kinematická okrajová podmínka, jak by tomu bylo na stěně. Výsledky ukazují, že tento přístup dává výsledky srovnatelné s jinými přístupy a je o něco méně výpočetně náročný než původní IBM.

Správné fungování použité metodiky je ověřeno na příkladech zjišťování odporových koeficientů základních trojrozměrných objektů a porovnání rychlosti pádu kuličky v tekutině s vlastními experimentálními daty.

Kapitola 1

Lattice Boltzmannova metoda

Řešení základní úlohy dynamiky tekutin vychází ze zákona zachování hmotnosti a Navierových-Stokesových rovnic. Pro nestlačitelnou tekutinu se zákon zachování hmotnosti zúží na požadavek nulového gradientu rychlosti

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

a Navierovy-Stokesovy rovnice na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

kde \mathbf{u} je vektor rychlosti proudění, t je čas, ρ je hustota tekutiny, p je tlak a ν kinematická viskozita.

Vzhledem k tomu, že předešlé rovnice jsou analyticky řešitelné jen pro několik málo jednoduchých případů proudění, je zpravidla nutné použít numerických metod k nalezení jejich řešení. Obecně existuje mnoho způsobů (výpočetních schémat) řešení předešlých rovnic, přičemž převážná většina z nich se zakládá na převodu operátorů derivací na diferenční operátory a řešení má pak iterační charakter.

V osmdesátých letech však vznikl i nový přístup k řešení problému proudění, který se zakládá na principu buněčných automatů. Na tekutinu v tomto případě není nahlíženo jako na spojitou masu, ale je brána spíše jako její mikroskopická podstata, tedy jako částice pohybující se v prostoru a srážející se mezi sebou. Tento přístup vychází z dynamiky částic, přesto lokálně splňuje základní požadavky dříve popsanych zákonů zachování hmotnosti a hybnosti (Navierovy-Stokesovy rovnice).

Do této skupiny spadá i Lattice Boltzmannova metoda (LBM), která se během let ukázala jako velice úspěšná metoda pro řešení nestlačitelného proudění.

Tato kapitola je věnována LBM jako takové. Je představena základní struktura LBM.

Dále jsou uvedeny základní modely LBM pro rovinné i prostorové úlohy. Kapitola je zakončena stručným přehledem okrajových podmínek.

1.1 Diskretizace a struktura LBM

Lattice Boltzmannova metoda vychází nikoli z makroskopických rovnic proudění (rovnice (1.1) a (1.2)), nýbrž se zakládá pohybu samotných částic tekutiny. S ohledem na fakt, že skutečných částic (molekul) je příliš mnoho, aby mohla být každá jedna z nich postížena ve výpočtu, pracuje LBM s modelovými částicemi. Jde o pomyslné částice, které v sobě seskupují reálné částice s podobnými vlastnostmi, jimiž jsou poloha a rychlost. Tedy částice, které se v jeden časový okamžik vyskytují poblíž určitého bodu a směřují podobným směrem, jsou soustředěny do tohoto bodu, do jedné modelové částice, jejíž rychlost jakousi průměrnou rychlostí reálných částic do ní soustředěných.

Diskretizace času pro LBM se nikterak neliší od diskretizace času jinými numerickými metodami - totiž nahrazením spojité časové proměnné posloupností malých časových kroků o trvání T . Délka této časové jednotky se odvíjí od jiných volených parametrů a též je nutné dbát na stabilitu výpočtu - více k vhodné volbě časového kroku je uvedeno v kapitole 3.

Prostorová diskretizace pro LBM je jednoznačně dána pravidelnou pravoúhloú mřížkou, na které metoda operuje. Pro rovinné úlohy jde o mřížku čtvercovou o hraně S , pro trojrozměrné úlohy je mřížka krychlová. Spojitý prostor výpočetní oblasti je tak převeden na konečné množství uzlů. Modelové částice se mohou vyskytovat jen v uzlech této mřížky. Reálné částice jsou pomyslně koncentrovány do uzlu z jeho čtvercového respektive krychlového okolí o straně S a se středem v daném uzlu.

Vzhledem k tomu, že předešlé tvrzení platí pro každý iterační krok, je zřejmé, že časová a prostorová diskretizace bude mít přímý vliv i na diskretizaci času, neboť modelové částice se musí zjevně pohybovat jen takovou rychlostí, aby se za jeden časový krok T dostaly do jiného uzlu mřížky (vektory rychlosti mají počátek i konec v uzlech). Zároveň jsou v rámci LBM vektory diskretních rychlostí \mathbf{e}_α ($\alpha = 1, \dots, Q - 1$) dále omezeny a to tak, že modelové částice se mohou během jednoho časového kroku přesunout pouze do několika nejbližších uzlů, nikoli dál. Od počtu uzlů, které jsou brány jako "nejbližší" se odvíjí různé modely LBM. Tyto modely budou představeny dále.

K předešlému je vhodné dodat, že simulace je doporučeno provádět v systému jednotek definovaném mimo jiné časovou jednotkou Δt a délkovou jednotkou Δx . Převodem do tohoto systému je zaručeno výrazné zjednodušení výpočtů, neboť časový krok i délkový krok jsou apriori rovny jedné ($T = 1\Delta t$ a $S = 1\Delta x$). Nadále

bude i v této práci uvažováno toto zjednodušení a použito odpovídající označení Δt pro časový krok a Δx pro délku strany buňky mřížky. Z toho dále plyne, že hmotnost soustředěná do uzlu též odpovídá lokální hustotě tekutiny vyjádřené v systému jednotek LBM, jelikož objem buňky náležící jednomu uzlu mřížky je též jednotkový. Jednotka hustoty v systému jednotek LBM je dále značena R . Více k systému jednotek používaném pro simulaci proudění pomocí LBM je uvedeno v kapitole 3.

Každá modelová částice v daném uzlu seskupuje reálné částice z okolí tohoto uzlu, které se pohybují stejným (diskretizovaným) směrem. Vztáhneme-li pak hmotnost jednotlivých modelových částic v uzlu na celkovou hmotnost v uzlu, dostaneme vyjádření odpovídající diskrétní pravděpodobnostní funkci rozdělení částic podle rychlosti. Vzhledem k tomu, že počet vektorů rychlosti je omezen (dle zvoleného modelu LBM), lze modelové částice chápat i ve smyslu pravděpodobnostním, jako pravděpodobnost, že se reálná částice z daného uzlu vydá daným směrem vektoru rychlosti \mathbf{e}_α , $\alpha = 1, \dots, Q - 1$. Z předešlého vyplývá označení hmotnosti modelových částic jako pravděpodobnostních funkcí rychlosti $f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t)$ (dále zkráceně pravděpodobnostní funkce, či funkce rychlosti), kde \mathbf{r}_i je polohový vektor určující polohu i -tého uzlu.

Tato funkce náleží vždy danému uzlu i , může se měnit v závislosti na čase a je nenulová pouze pro Q daným modelem definovaných vektorů rychlosti $\mathbf{e}_\alpha = [e_{\alpha,x}, e_{\alpha,y}, e_{\alpha,z}]^T$ ($\alpha = 0, \dots, Q-1$, kde Q závisí na zvoleném modelu - viz dále). Pro stručnost budou dále označeny nenulové hodnoty funkce rychlosti $f(\mathbf{e}, \mathbf{r}_i, t)$ odpovídající směru vektoru rychlosti \mathbf{e}_α a i -tému uzlu dolním indexem

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) := f_{i,\alpha}(t).$$

Pravděpodobnost, že se modelová částice v i -tém uzlu bude pohybovat jedním ze směrů α , je rovna jedné. Z toho ihned plyne, že i součet všech funkcí $f_{i,\alpha}(t)$ konkrétního uzlu i přes všechny vektory rychlosti \mathbf{e}_α bude roven hmotnosti (modelových i reálných částic) v daném uzlu i . Vzhledem k jednotkovému objemu buňky náležejícímu jednomu uzlu platí i pro lokální hustotu ρ_i v i -tém uzlu

$$\rho_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{Q-1} f_{i,\alpha}(t). \quad (1.3)$$

Lze též snadno nahlédnout, že vektor makroskopické hybnosti $\mathbf{j}_i(t) = [j_{i,x}(t), j_{i,y}(t), j_{i,z}(t)]^T$ v i -tém uzlu může být vyjádřena jako součet hybností jednotlivých modelových částic v uzlu se nacházejících. Jelikož hmotnost modelových částic je vyjádřena právě pravděpodobnostními funkcemi rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$

a jim odpovídající rychlost diskretními vektory rychlosti \mathbf{e}_α , lze zřejmě psát

$$\mathbf{j}_i(t) = \rho_i(t)\mathbf{u}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{Q-1} f_{i,\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha, \quad (1.4)$$

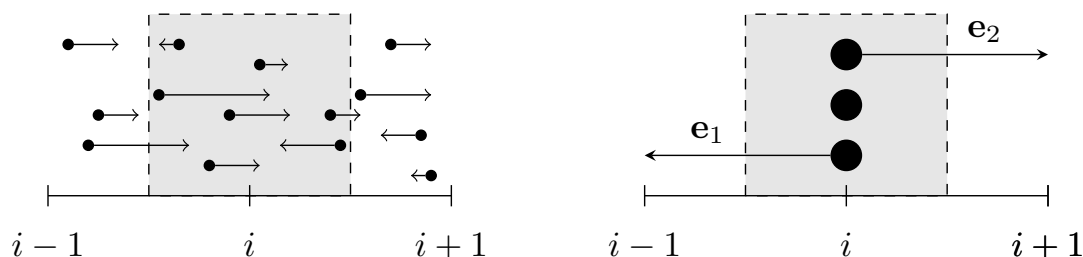
kde $\mathbf{u}_i(t) = [u_{i,x}(t), u_{i,y}(t), u_{i,z}(t)]^T$ je vektor makroskopické rychlosti v i -tém uzlu.

Po složkách lze psát

$$\rho_i u_{i,x} = j_{i,x} = \sum_{\alpha=0}^{Q-1} f_{\alpha} e_{\alpha,x} \quad \text{a} \quad \rho_i u_{i,y} = j_{i,y} = \sum_{\alpha=0}^{Q-1} f_{\alpha} e_{\alpha,y} \quad \text{příp.} \quad \rho_i u_{i,z} = j_{i,z} = \sum_{\alpha=0}^{Q-1} f_{\alpha} e_{\alpha,z}.$$

Pro makroskopický tlak v i -tém uzlu p_i platí jednoduchý vztah [4]

$$p_i = \frac{\rho_i}{3}. \quad (1.5)$$



Obrázek 1.1: Diskretizace jednorozměrného proudění.

Nejlépe přiblížit na příkladu. Mějme jednorozměrný model proudící tekutiny, kdy se tedy všechny částice mohou pohybovat pouze po přímce, jak je znázorněno na obrázku 1.1 vlevo. Naproti tomu diskretní LBM požaduje restrikcí pohybu částic v jednorozměrném prostoru na pohyb vpravo, pohyb vlevo a stagnační pohyb (částice se pohybují nulovou rychlostí) s odpovídajícími diskretními vektory rychlosti (v systému jednotek LBM)

$$\mathbf{e}_1 = [-1, 0, 0]^T \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right], \quad \mathbf{e}_2 = [1, 0, 0]^T \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_0 = [0, 0, 0]^T \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right].$$

Veškeré částice nacházející se v okolí i -tého uzlu (šedá oblast) jsou při diskretizaci přiděleny jedné ze tří molárních částic (obrázek 1.2 vpravo). Molárním částicím lze přiřadit diskretní funkce pravděpodobnosti $f_{i,0}(t)$, $f_{i,1}(t)$ a $f_{i,2}(t)$ a jim odpovídající diskretní vektor rychlosti \mathbf{e}_0 , \mathbf{e}_1 , či \mathbf{e}_2 . Vzhledem k tomu, že

reálné částice byly pouze přeskupeny v částice modelové, celková hmotnost částic náležejících danému uzlu zůstává zachována a je vyjádřena jako součet hmotností částic modelových. Navíc vzhledem k jednotkovému objemu okolí uzlu lze psát $\rho_i(t) = f_{i,0}(t) + f_{i,1}(t) + f_{i,2}(t)$. Obdobně pro hybnost: $\mathbf{j}_i(t) = \mathbf{e}_0 f_{i,0}(t) + \mathbf{e}_1 f_{i,1}(t) + \mathbf{e}_2 f_{i,2}(t)$, kde jedinou nenulovou složkou je $j_{i,x} = f_{i,2}(t) - f_{i,1}(t)$.

Tolik k diskretizaci. Již bylo uvedeno, jakým způsobem LBM přistupuje na diskretizaci prostoru a času (potažmo rychlosti), nicméně nebylo řečeno mnoho o samotném principu metody.

LBM si zle v zásadě představit jako velké množství modelových částic, které se pohybují po pravidelné pravoúhlé mřížce. Tento proces se nazývá propagace a lze ho v řeči pravděpodobnostních funkcí rychlosti zapsat jako

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha, t + \Delta t) = f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t). \quad (1.6)$$

Tedy modelová částice v i -tém uzlu odpovídající α -tému vektoru diskrétní rychlosti se za jeden časový krok přenesse do uzlu ležícím v α -tém směru od uzlu výchozího.

Aby bylo možné tímto způsobem zachytit jevy v proudící tekutině, je nutné vzít v potaz i vzájemné srážky částic. Ty zapříčiňují, že modelové částice při přesunu z jednoho uzlu na druhý navíc mohou přijít (právě vlivem srážky) o část své hmotnosti, či naopak hmotnost nabýt. Zároveň samozřejmě dochází i ke změně hybnosti modelových částic. Tento jev je v LBM obsažen v tzv. kolizním členu Γ a celý proces úpravy hmotnosti modelových částic (tedy opravy hodnot funkcí $f_{i,\alpha}(t)$) je obecně označován jako kolize. Rovnice (1.6) je pak rozšířena o kolizní operátor na tvar [28]

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha, t + \Delta t) = f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) + \Gamma. \quad (1.7)$$

Konkrétní podoba kolizního členu Γ se liší dle zvoleného modelu. Hojně používaný je tvar Bhatnagara, Grosse a Krooka (BGK) [2] [28]

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha, t + \Delta t) = f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) - \frac{1}{\tau} (f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) - f^{eq}(\mathbf{e}_\alpha, \rho_i, \mathbf{u}_i, t)), \quad (1.8)$$

kde $f^{eq}(\mathbf{e}_\alpha, \rho_i, \mathbf{u}_i, t)$ (déle bude značeno převážně $f_{i,\alpha}^{eq}(t)$) je rovnovážná funkce o tvaru

$$f_{i,\alpha}^{eq}(t) = \rho_i(t) w_\alpha \left(1 + 3\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_i(t) + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_i(t))^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}_i^T(t) \mathbf{u}_i(t) \right), \quad (1.9)$$

kde w_α jsou váhové koeficienty odpovídající diskrétním vektorům \mathbf{e}_α a jejich počet i hodnoty jsou opět závislé na volbě konkrétního modelu. Rovnovážné funkce

$f_{i,\alpha}^{eq}$ vyjadřují lokální stav rovnováhy v i -tém uzlu a závisí na vektoru rychlosti \mathbf{e}_α a makroskopických veličinách hustoty $\rho_i(t)$ a rychlosti $\mathbf{u}_i(t)$ v daném uzlu (viz vztahy (1.3), (1.4)). Každé funkci rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ odpovídá právě jedna rovnovážná funkce $f_{i,\alpha}^{eq}$.

Označení τ nese v rovnici (1.8) tzv. relaxační parametr. Představuje čas potřebný k ustálení hodnot funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ ve svých rovnovážných polohách $f_{i,\alpha}^{eq}(t)$. Je přímo závislý na kinematické viskozitě vyjádřené v systému LBM ν_{LB} vztahem

$$\tau = 3\nu_{LB} + 0,5. \quad (1.10)$$

Jeho hodnota spadá do intervalu $(0, 5; 2)$ a je zásadním faktorem ovlivňující stabilitu celé metody (více v kapitole 3). Jelikož BGK model užívá pouze jeden uniformní relaxační čas pro všechny veličiny, nese tento model též označení single-relaxation-time (SRT).

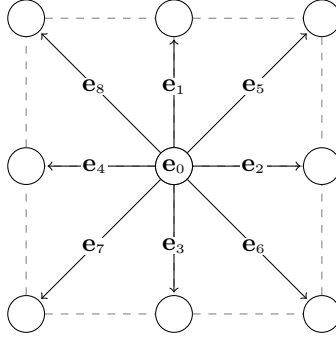
Komplexnější a stabilnější model (s odlišným kolizním operátorem), který operuje na více časových hladinách, tedy s více relaxačními parametry, se nazývá multiple-relaxation-time (MRT) a je představen v příslušné sekci této kapitoly. Existuje též např. model se dvěma relaxačními parametry (two-relaxation-time, TRT), jež používá např. [27].

Kolize a propagace jsou jediné dva kroky LBM. Je vhodné podotknout, že propagační krok zůstává beze změny pro veškeré aplikace. Naopak úpravou (rozšířením) kolizního operátoru lze do systému vnést další vlivy (např. silové působení), což bude využito i v této práci pro interakci tekutiny s vnořeným tělesem (v kapitole 2).

1.2 Prostorový a rovinný model

Jak bylo zmíněno v prvních odstavcích této kapitoly, LBM je metoda pracující na pravidelné pravoúhlé síti uzlů. V rovině je to tedy síť čtvercová, v prostoru pak krychlová. Otázkou zůstalo, jak jsou zvoleny diskrétní vektory rychlosti, po jakých drahách se tedy mohou modelové částice přesouvat z jednoho uzlu na druhý. V literatuře jsou v souvislosti s LBM zmiňovány především modely $D2Q5$, $D2Q9$, $D3Q15$, $D3Q19$ a $D3Q27$ ([12] [22] [7]), přičemž číslice za D udává počet dimenzí prostoru a číslo za Q počet diskrétních vektorů rychlosti \mathbf{e}_α . Vektory diskrétní rychlosti nelze volit libovolně, ale musí splňovat určité vzájemné symetrie, aby daný model odpovídal realitě - tedy splňoval Navierovy-Stokesovy rovnice (existuje mnoho textů věnujících se ukázání spojitostí mezi LBM a Navierovými-Stokesovými rovnicemi, např. [4] [7]).

V této práci budou představeny dvourozměrný model $D2Q9$ a trojrozměrný model $D3Q19$.



Obrázek 1.2: Diskrétní vektory rychlosti pro rovinný model $D2Q9$.

Dvourozměrný model $D2Q9$ je definován devíti směry vektorů rychlosti \mathbf{e}_α , ($\alpha = 0, \dots, 8$). Modelové částice mohou z každého uzlu (mimo uzlů na okraji výpočetní oblasti, které mají snížený počet sousedních uzlů) pokračovat do jednoho z osmi sousedních uzlů, či zůstat v uzlu výchozím. Statickým modelovým částicím odpovídá nulový vektor diskrétní rychlosti \mathbf{e}_0 . Následující čtyři indexy $1, \dots, 4$ odpovídají rychlostem vodorovného a svislého směru a sada indexů $5, \dots, 8$ náleží směrům diagonálním. Jednotlivé vektory rychlosti \mathbf{e}_α jsou naznačeny na schématu 1.2, či je lze popsat vektorově následovně:

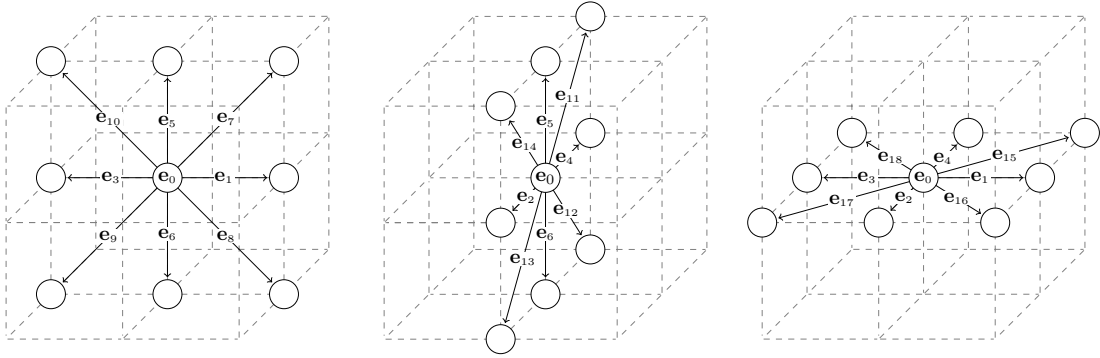
$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= [0, 0], \\ \mathbf{e}_1 &= [0, 1], \mathbf{e}_2 = [1, 0], \mathbf{e}_3 = [0, -1], \mathbf{e}_4 = [-1, 0], \\ \mathbf{e}_5 &= [1, 1], \mathbf{e}_6 = [1, -1], \mathbf{e}_7 = [-1, -1], \mathbf{e}_8 = [-1, 1], \end{aligned}$$

délky vektorů opět přesně vyjadřují vzdálenost daných dvou uzlů, a tedy rozměry jsou v předešlém vyjádření brány v systému jednotek LBM ($[\mathbf{e}_\alpha] = \Delta x / \Delta t$). Indexování je volitelné a je zde uváděno zvláště kvůli snadnější orientaci v dalším textu.

Dále je pro $D2Q9$ BGK model potřeba znát devět váhových koeficientů ze vztahu (1.9) pro vyčíslení rovnovážné funkce. Jejich hodnoty jsou opět nastaveny tak, aby byly dodrženy Navierovy-Stokesovy rovnice [7] a jsou následující:

$$w_0 = \frac{4}{9}, \quad w_{1,2,3,4} = \frac{1}{9}, \quad w_{5,6,7,8} = \frac{1}{36}. \quad (1.11)$$

Trojrozměrný model $D3Q19$ je definován devatenácti vektory diskrétní rychlosti \mathbf{e}_α . Nulový vektor rychlosti je opět označen nulovým indexem, hlavní



Obrázek 1.3: Diskrétní vektory rychlosti pro prostorový model $D3Q19$.

směry (osy mřížky) jsou pokryty šesti následujícími indexy $1, \dots, 6$, zbylých dvanáct indexů $7, \dots, 18$ náleží diskrétním vektorům rychlosti směřujícím do nejbližších uzlů na plochách kolmých k hlavním směrům - tyto vektory mají tedy dvě nenulové složky. Osm zbývajících uzlů, které leží v rozích pomyslné krychle se středem ve výchozím uzlu (e_0) o hraně $2\Delta x$ nejsou tímto modelem pokryty. Přehled indexování vektorů e_α je k nahlédnutí na obrázku 1.3, či lze vektory diskrétní rychlosti e_α též přesně vyjádřit (opět v jednotkách LBM) následovně:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_0 &= [0, 0, 0], \\
 \mathbf{e}_1 &= [1, 0, 0], \mathbf{e}_2 = [0, -1, 0], \mathbf{e}_3 = [-1, 0, 0], \mathbf{e}_4 = [0, 1, 0], \mathbf{e}_5 = [0, 0, 1], \mathbf{e}_6 = [0, 0, -1], \\
 \mathbf{e}_7 &= [1, 0, 1], \mathbf{e}_8 = [1, 0, -1], \mathbf{e}_9 = [-1, 0, -1], \mathbf{e}_{10} = [-1, 0, 1], \\
 \mathbf{e}_{11} &= [0, 1, 1], \mathbf{e}_{12} = [0, 1, -1], \mathbf{e}_{13} = [0, -1, -1], \mathbf{e}_{14} = [0, -1, 1], \\
 \mathbf{e}_{15} &= [1, 1, 0], \mathbf{e}_{16} = [1, -1, 0], \mathbf{e}_{17} = [-1, -1, 0], \mathbf{e}_{18} = [-1, 1, 0].
 \end{aligned}$$

Též váhových funkcí w_α je pro $D3Q19$ model pochopitelně devatenáct a jejich hodnoty jsou:

$$w_0 = \frac{1}{3}, \quad w_{1,2,\dots,6} = \frac{1}{18}, \quad w_{7,8,\dots,18} = \frac{1}{36}. \quad (1.12)$$

1.3 Okrajové podmínky

Ačkoli správné sestavení okrajových podmínek je klíčovým faktorem každé úlohy, okrajové podmínky pro LBM nejsou příliš probádanou oblastí. Stále se využívají zažitě implementace okrajových podmínek, o kterých je známo, že nejsou

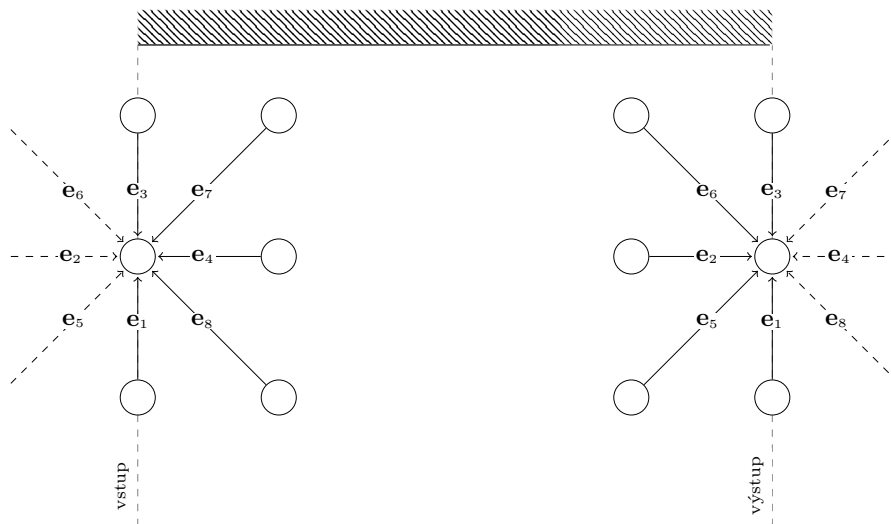
zcela optimální. Stručný přehled tradičních okrajových podmínek nabízí [15] nebo [16] včetně jejich rozboru z hlediska konzistentnosti vzhledem ke zbytku metody i z hlediska numerických chyb daného řešení.

Obecně u Navierových-Stokesových rovnic vazkého nestlačitelného proudění platí, že je nutné předepsat tři respektive čtyři okrajové podmínky. Na vstupu jsou to zpravidla dvě respektive tři složky rychlosti, na výstupu z oblasti pak tlak. Na stěnách je předepsána nulová normálová rychlost.

Pravděpodobnostní funkce je pak třeba upravit či doplnit tak, aby splňovaly požadované makroskopické podmínky.

1.3.1 Okrajové podmínky na vstupu a výstupu

Uzly na vstupu a výstupu z výpočetní oblasti je nutné řešit samostatně. Vzhledem k faktu, že některé jejich sousední uzly leží již mimo výpočetní oblast, zůstávají některé pravděpodobnostní funkce uzlů na vstupu a výstupu po propagaci neznámé.



Obrázek 1.4: Chybějící hodnoty funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ vstupních a výstupních uzlů.

Uvažujme jednoduchou dvourozměrnou doménu jejíž výsek je ilustrován na obrázku 1.4, kde vstup do domény je vlevo, výstup vpravo a horní okraj reprezentuje stěnu. Zde uzly na vstupu postrádají sousedy po své levé straně a tedy při propagaci nezískávají informaci o hodnotách funkcí rychlosti $f_{i,2}$, $f_{i,5}$ a $f_{i,6}$ (vzhledem k obrázku 1.4). Totéž platí pro hodnoty funkcí rychlosti $f_{i,4}$, $f_{i,7}$ a $f_{i,8}$ na výstupu z výpočetní oblasti. Je tedy nutné doplnit chybějící funkce rychlosti, či všechny

v daném uzlu nahradit tak, aby byla zachována konzistence a stabilita modelu a požadované dynamické vlastnosti a makroskopické veličiny.

Asi nejsnazší a hojně využívanou metodou (která je využita i v této práci) je nahrazení všech populací částic v uzlech na vstupu rovnovážnou funkcí, která odpovídá požadované makroskopické rychlosti \mathbf{u}_0 na vstupu a makroskopické hustotě přejaté vždy z vedlejšího uzlu směrem do výpočetní oblasti - s ohledem na obrázek 1.4 z uzlu vlevo od vstupního uzlu. Pokud je zadanou hodnotou tlak, lze požadovanou makroskopickou hustotu případně snadno zjistit ze vztahu (1.10). Tedy pro uzly a vstupu bude platit

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) = f^{eq}(\mathbf{u}_0, \rho(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_2, t)). \quad (1.13)$$

Obdobně je tomu u výstupních uzlů. Zde chybí informace o populacích částic ze směrů s indexy 4, 7 a 8, kde je předepsanou okrajovou podmínkou často makroskopický tlak (respektive makroskopická hustota - opět de vztahu (1.5)). Rychlost lze interpolovat ze sousedních uzlů vpravo (opět s odkazem na konkrétní případ z obrázku 1.4 ve směru vektoru \mathbf{e}_4). Pro uzly na výstupu z výpočetní oblasti bude platit

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) = f_{eq}(\mathbf{u}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_4, t), \rho_0). \quad (1.14)$$

Další možností je zachovat existující hodnoty pravděpodobnostních funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ a doplnit pouze chybějící, opět s podmínkou zachování požadovaných makroskopických momentů a rychlostí. Ve článcích [32] či [10] navrhují autoři možnosti implementace. Vycházejí z vyjádření makroskopických veličin (rovnice (1.3) a (1.4)), tedy pro tři neznámé funkce rychlosti přidávají tři rovnice (pro dvourozměrný případ). Výjimkou jsou rohové uzly, které postrádají více než tři sousední uzly - ty je nutné ošetřit odděleně.

Předešlé okrajové podmínky se používají především u oblastí s přímou hranicí. Zpravidla je možné rovnou hranici oblasti na vstupu a výstupu vytvořit, a tedy není nutné vytvářet metody pro nepřímé hranice.

1.3.2 Periodické okrajové podmínky

Nejsnadnější implementaci skýtá periodická okrajová podmínka [28]. V tomto případě dochází k propojení vstupních a výstupních uzlů. Vzniká tak vlastně nekonečně dlouhá oblast, která se periodicky opakuje s periodou délky odpovídající

délce výpočetní oblasti. Pak jsou veškeré distribuční funkce $f_{i,\alpha}(t)$ směřující ven z oblasti na výstupu ($\alpha = 2, 5, 6$ - dle 1.4) při propagaci přeneseny na místo odpovídajících distribučních funkcí rychlosti na vstupu a naopak veškeré distribuční funkce směřující ven z oblasti na vstupu ($\alpha = 4, 7, 8$ - dle 1.4) jsou přeneseny na uzly výstupní. Po propagaci nejsou žádné chybějící populace, které by bylo třeba dopočítat. Nutný požadavek, který musí taková oblast splňovat, je shodná velikost i tvar průřezu na vstupu a výstupu z oblasti.

Jediným úskalím je fakt, že vlivem vazkosti proudění dochází u periodické okrajové podmínky k postupnému zpomalování proudu a lze jich užít pouze v případech, kdy je to modelu přidáno vnější silové působení (například zkoumání vlivu gravitace na tekutinu).

Periodická okrajová podmínka je tedy vhodná například i při řešení problémů, kdy neplní okrajové podmínky na vstupu a výstupu funkci "hnacího členu", tedy v případech, kdy proudění má jiný zdroj než tlakový gradient mezi jednotlivými konci sledované oblasti, lze užít periodických okrajových podmínek.

Jelikož periodické okrajové podmínky oblast periodicky uzavírají, není nutné zadávat jakékoli podmínky na makroskopické veličiny.

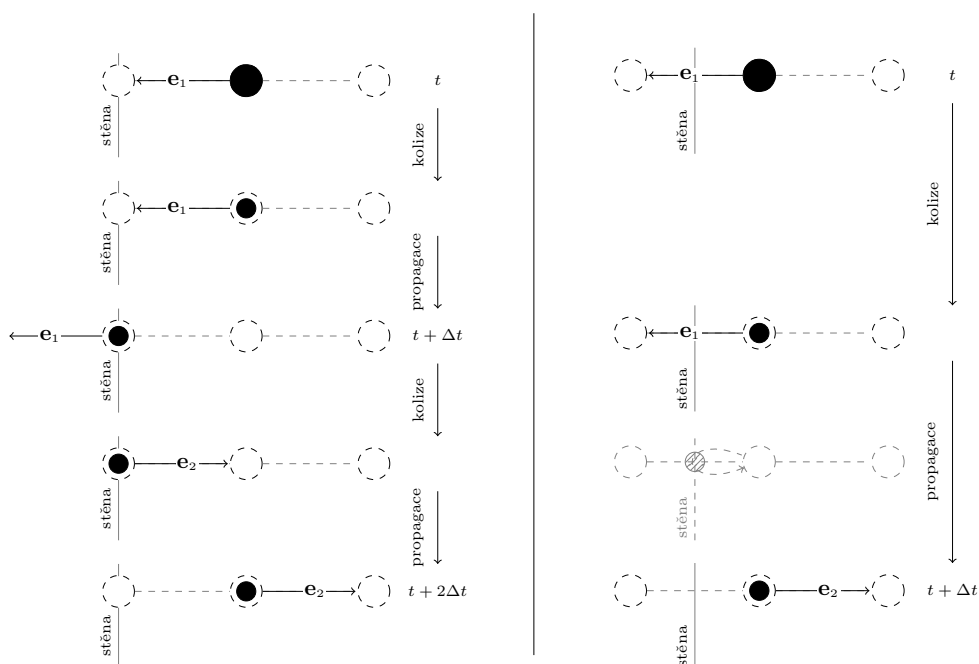
1.3.3 Okrajové podmínky na stěně

Nejběžnější metodou modelování okrajových podmínek na stěně v rámci LBM, je tzv. metoda odrazu. Existují dvě podoby metody odrazu - první možností je ta, kdy stěna se pomyslně nachází mezi dvěma řadami uzlů, tedy poslední řada uzlů již není součástí tekutiny.

Pokud je stěna mezi dvěma řadami uzlů, kolize probíhá ve všech uzlech tekutiny a při odrazu od stěny populace částic opět změni orientaci a během stejného časového kroku se vrací do zpět do výchozího uzlu. Tento přístup je druhého řádu přesnosti.

Pokud stěna prochází řadou uzlů, probíhá kolize pouze na uzlech v tekutině. U uzlů na stěně místo kolize dochází k prostému překlopení populací částic mířících ven z domény do opačného směru. Tak dojde k praktickému vyrovnání populací částic s rychlostmi kolmými na stěnu a makroskopická rychlost normálová ke stěně je automaticky rovna nule. Pokud bude navíc na počátku tečná složka rychlosti v uzlech na stěně nulová, bude nulová vždy. Vzhledem k dvojnásobné vzdálenosti mezi uzlem u stěny a stěnou samotnou vůči předešlému přístupu zřejmě platí, že i čas, za který se částice dostane po odrazu zpět do výchozího uzlu je dvojnásobný - i to je patrné z obrázku 1.5. Tato varianta nabízí pouze první řád přesnosti [1].

Názorné srovnání obou přístupů pro 1D případ nabízí obrázek 1.5.



Obrázek 1.5: Schematické porovnání dvou typů okrajových podmínek na stěně pro jednorozměrnou úlohu. Na obrázku je sledována pozice a rychlost jediné modelové částice při odrazu od stěny v závislosti na čase. Vlevo stěna prochází řadou uzlů, vpravo pak mezi dvěma řadami.

Implementace této okrajové podmínky je snadná a navíc je snadno aplikovatelná i na zakřivené stěny. V zásadě se změní pouze to, že se odrazí pouze jiné populace částic, než by tomu bylo o hranice přímé. Je však těž vidět, že tímto přístupem nelze postihnout křivost hranice dokonale, tvar je vždy omezen pravidelnou čtvercovou mřížkou, na které LBM operuje.

Okrajovou podmínku, která by lépe kopírovala zakřivenou hranici navrhuje ve své práci například Mossige [20].

Při řešení úloh, kdy je stěna pohyblivá, lze užít podobné podmínky, jako na vstupu do oblasti, tedy např. nahrazení chybějících populací částic tak, aby bylo dosaženo požadovaných makroskopických veličin [32].

1.3.4 Kinematická okrajová podmínka

Řada úloh vyžaduje též implementaci kinematické okrajové podmínky uvnitř domény. Od okrajové podmínky na stěně (šlo též o kinematickou podmínku) se liší tím, že se používá výhradně ve vnitřních uzlech, kde jsou apriori známy všechny populace částic.

Je tedy třeba upravit kolizní část výpočtu tak, aby bylo v daných uzlech dosaženo předepsané makroskopické rychlosti $\mathbf{u}_{i,poz}$. Toho lze docílit upravením rovnovážné funkce, která nyní bude funkcí nikoli makroskopické rychlosti v uzlu, ale právě předepsané makroskopické rychlosti $\mathbf{u}_{i,poz}$. Změnou rovnovážné funkce dojde k postupnému ustálení makroskopické rychlosti v uzlu na požadované hodnotě při zachování hmotnosti částic v uzlu. Výsledný kolizní operátor pro popsanou kinematickou podmínku má tvar

$$\Omega_\alpha = f_{i,\alpha}(t) - f_i^{eq}(\mathbf{u}_{i,poz}, \rho_i). \quad (1.15)$$

1.4 Multiple-relaxation time

Model popsaný na předchozích stránkách operuje pouze s jedním relaxačním časem τ , a tedy předpokládá, že všechny veličiny a jejich momenty dosáhnou své rovnovážné polohy za stejnou dobu. Skutečnost je ovšem jiná, například zachovávané veličiny (z části hustota - model umožňuje mírnou stlačitelnost - a hybnost) by měly ve svých rovnovážných polohách setrvávat a tedy jejich čas relaxace by měl být nulový [5]. Tyto nesrovnalosti mají vliv především na stabilitu metody pro vysoká Reynoldsova čísla, ale i v laminárních případech může být SRT model příčinou nepřesnosti simulace. Naopak parametry - relaxační časy - MRT modelu mohou být přesně nastaveny pro konkrétní úlohu, aby bylo dosaženo maximální přesnosti a stability.

Vývoj MRT modelu probíhal téměř souběžně s vývojem základního BGK SRT modelu. V posledních letech byly pro MRT vytvořeny i odpovídající stabilní okrajové podmínky [13] a MRT model se rozšiřuje do nových odvětví, kde by se SRT model aplikoval jen stěží [5]. Nicméně i s ohledem na výhody MRT modelu a nevelké snížení efektivity výpočtu oproti SRT, je SRT model stále užívaný častěji.

Principem MRT modelu je převedení pravděpodobnostních funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ do prostoru momentů rychlosti, hybnosti, energie atp. V tomto prostoru jsou veličiny konfrontovány se svými rovnovážnými polohami a následně opět transformovány do prostoru pravděpodobnostních funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ a dále propagovány. Momentový prostor je definován momenty $m_{i,\alpha}(t)$ a jejich rovnovážnými polohami $m_{i,\alpha}^{eq}(t)$, kde $\alpha = 1, \dots, Q$, tedy jejich počet je totožný s počtem pravděpodobnostních funkcí $f_{i,\alpha}(t)$ a je závislý na volbě modelu. Dále bude v této části uvažováno s prostorovým modelem $D3Q19$, který byl též pro SRT představen v podkapitole 1.2. MRT model opět zasahuje pouze do kolizního kroku, a je tedy pouze jiným typem kolizního operátoru v rovnici (1.7). Nový tvar rovnice (1.7) má

potom tvar

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha, t + \Delta t) = f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) - \sum_{r=0}^{18} \sum_{s=0}^{18} M_{\alpha,r} S_{r,s} (m(\mathbf{e}_s, \mathbf{r}_i, t) - m^{eq}(\mathbf{e}_s, \rho_i, \mathbf{u}_i, t)), \quad (1.16)$$

kde $\mathbf{M} = [M_{\alpha,r}]$ je transformační matice z prostoru momentů do prostoru funkcí rychlosti a $\mathbf{S} = [S_{\alpha,r}]$ diagonální matice relaxačních parametrů.

Kolizi (vztah mezi funkcemi $f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t)$ a $f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t + \Delta t)$ v témže uzlu) lze přehledněji zapsat ve vektorové formě. Dále budou tedy zavedeny vektor momentů \mathbf{m}_i a vektor pravděpodobnostních funkcí rychlosti \mathbf{f}_i a vektory jejich rovnovážných poloh \mathbf{m}_i^{eq} respektive \mathbf{f}_i^{eq}

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i(t) &= [m_{i,0}(t), m_{i,1}(t), \dots, m_{i,18}(t)]^T, \\ \mathbf{f}_i(t) &= [f_{i,0}(t), f_{i,1}(t), \dots, f_{i,18}(t)]^T, \\ \mathbf{m}_i^{eq}(t) &= [m^{eq}(t)_{i,0}, m_{i,1}^{eq}(t), \dots, m_{i,18}^{eq}(t)]^T, \\ \mathbf{f}_i^{eq}(t) &= [f^{eq}(t)_{i,0}, f_{i,1}^{eq}(t), \dots, f_{i,18}^{eq}(t)]^T. \end{aligned}$$

Pak kolizi lze zapsat vektorově následovně:

$$\mathbf{f}_i(t + \Delta t) = \mathbf{f}_i(t) - \mathbf{M}\mathbf{S}(\mathbf{m}_i(t) - \mathbf{m}_i^{eq}(t)) \quad (1.17)$$

Vzhledem k tomu, že transformace mezi momentovým prostorem a prostorem pravděpodobnostních funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ je lineární lze vztah mezi vektory \mathbf{f}_i a \mathbf{m}_i popsat právě (konstantní) transformační maticí \mathbf{M} . Transformace má tvar

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{M}\mathbf{m}_i(t). \quad (1.18)$$

Konkrétní tvar matice \mathbf{M} pro zavedené směry modelu *D3Q19* je

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -30 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Její podoba byla převzata z článku [5], kde je mimo jiné uvedeno i její odvození.

Zpětnou transformaci

$$\mathbf{m}_i(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_i(t)$$

lze dosadit zpět do kolize 1.17, což vede na tvar

$$\mathbf{f}_i(t + \Delta t) = \mathbf{f}_i(t) - \mathbf{MS} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{m}_i^{eq}(t)). \quad (1.19)$$

V prostoru momentů každá složka vektoru $\mathbf{m}_i(t)$ odpovídá konkrétním makroskopickým veličinám

$$\mathbf{m}_i = [\rho_i, e_i, \epsilon_i, j_{i,x}, q_{i,x}, j_{i,y}, q_{i,y}, j_{i,z}, q_{i,z}, 3p_{i,xx}, 3\pi_{i,xx}, p_{i,ww}, \pi_{i,ww}, p_{i,xy}, p_{i,yz}, p_{i,xz}, m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}].$$

tedy $m_{i,0}$ představuje hustotu v i -tém uzlu, $m_{i,1}$ je závislý na energii a $m_{i,2}$ na její druhé mocnině, $m_{i,\{3,5,7\}}$ jsou složky vektoru hybnosti, $m_{i,\{4,6,8\}}$ reprezentují vektor toku tepla $\mathbf{q}_i = [q_{i,x}, q_{i,y}, q_{i,z}]$, $m_{i,9}$, $m_{i,11}$ a $m_{i,13} - m_{i,15}$ značí složky tenzoru deformace \mathbf{p} , $m_{i,10}$ a $m_{i,12}$ jsou momenty čtvrtého řádu příslušící tenzoru \mathbf{p} a $m_{i,\{16,17,18\}}$ jsou momenty třetího řádu závislé na momentu hybnosti \mathbf{j} a tenzoru \mathbf{p} [5].

Každé veličině vektoru $\mathbf{m}_i(t)$ je přiřazen též její relaxační parametr a její rovnovážná poloha.

Relaxační parametry tvoří právě matici \mathbf{S} ve vztahu (1.16) respektive (1.19). Jde o matici diagonální, prvky $S_{\alpha,\alpha}$ odpovídají α -tému momentu. Jeho doporučené hodnoty pro dosažení maximální stability pro základní úlohy proudění jsou [5]

$$\mathbf{S} = \text{diag} [0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_4, 0, s_4, s_9, s_{10}, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{13}, s_{13}, s_{16}, s_{16}, s_{16},],$$

kde $s_1 = 1.19$, $s_2 = s_{10} = 1.4$, $s_4 = 1.2$, $s_{16} = 1.98$ a prvky $s_9 = s_{13}$ jsou vázány ke kinematické viskozitě vztahem

$$\nu_{LB} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_9} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_{13}} - \frac{1}{2} \right). \quad (1.20)$$

Avšak například pro úlohu interakce tekutiny s tělesem, při zjišťování síly jako rozdílu hybnosti vztahem (2.6), je nutné upravit hodnoty relaxačních parametrů $S_{3,3}$, $S_{5,5}$ a $S_{7,7}$, které odpovídají právě hybnostem, na nenulové, závislé na relaxačním parametru τ (totožně s hodnotami s_9 a s_{13} z rovnice (1.20)).

Pro veškeré simulace prováděné v rámci této práce (kapitola 5) byly upraveny i další parametry matice \mathbf{S} na tvar

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left[0, 1.5, 0.6, \frac{1}{\tau}, 1.8, \frac{1}{\tau}, 1.8, \frac{1}{\tau}, 1.8, \frac{1}{\tau}, 1.4, \frac{1}{\tau}, 1.4, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, 1.98, 1.98, 1.98 \right],$$

kde τ , relaxační parametr, je opět vztažen ke kinematické viskozitě (stejně jako u SRT modelu) vztahem (1.10).

Rovnovážné polohy momentů mohou být též získány zpětnou transformací vektoru rovnovážných funkcí rychlosti $\mathbf{f}_i^{eq}(t)$, nicméně je zvykem vyjadřovat jejich hodnoty přímo z makroskopických veličin v uzlu. Jsou definovány jako [5]

$$\begin{aligned} \rho_i^{eq} &= \rho_i, \quad j_{i,x}^{eq} = j_{i,x}, \quad j_{i,y}^{eq} = j_{i,y}, \quad j_{i,z}^{eq} = j_{i,z}, \\ e_i^{eq} &= -11\rho_i + \frac{19}{\rho_{i,0}} \mathbf{j}_i^T \mathbf{j}_i, \\ \epsilon_i^{eq} &= w_e \rho_i + \frac{w_{ej}}{\rho_{i,0}} \mathbf{j}_i^T \mathbf{j}_i, \\ q_{i,x}^{eq} &= -\frac{2}{3} j_{i,x}, \quad q_{i,y}^{eq} = -\frac{2}{3} j_{i,y}, \quad q_{i,z}^{eq} = -\frac{2}{3} j_{i,z}, \\ p_{i,xx}^{eq} &= \frac{1}{3\rho_{i,0}} [2j_{i,x}^2 - (j_{i,y}^2 + j_{i,z}^2)], \quad p_{i,ww}^{eq} = \frac{1}{\rho_{i,0}} (j_{i,y}^2 - j_{i,z}^2), \\ p_{i,xy}^{eq} &= \frac{1}{\rho_{i,0}} j_{i,x} j_{i,y}, \quad p_{i,yz}^{eq} = \frac{1}{\rho_{i,0}} j_{i,y} j_{i,z}, \quad p_{i,xz}^{eq} = \frac{1}{\rho_{i,0}} j_{i,x} j_{i,z}, \\ p_{i,xx}^{eq} &= w_{xx} p_{i,xx}^{eq}, \quad p_{i,ww}^{eq} = w_{xx} p_{i,ww}^{eq}, \\ m_{i,x}^{eq} &= m_{i,y}^{eq} = m_{i,z}^{eq} = 0, \end{aligned}$$

kde w_e , w_{ej} a w_{xx} jsou opět volné parametry, ρ_0 je počáteční makroskopická hustota, jejíž hodnota se nastavuje rovna jedné - jedná se o volný parametr, který nemá vliv na výsledky výpočtu [4]. Lallemand a Luo [14] navrhují $w_e = 0$, $w_{ej} = -476/63$ a $w_{xx} =$ pro dosažení maximální stability výpočtu.

Kapitola 2

Interakce proudící tekutiny s tuhým tělesem

Vzájemné působení tekutiny a tělesa je problém aplikovatelný na širokou škálu reálných úloh: proudění v cévách, pohyb těles v odporovém prostředí, sedimentace, proudění porézní látkou, kmitání pružných těles vlivem proudění atp. Proto se stále rozvíjí nové metody pro simulaci takových interakcí.

Modelování interakce tekutiny a tělesa do ní vnořeného je velice komplexní problém. Jednak je nutné řešit rovnice proudění, jednak dynamiku tělesa, případně jeho přetváření, je-li těleso poddajné. I vzhledem k náročnosti tohoto problému je vývoj výpočetních metod pro řešení těchto úloh otázkou zejména posledních několika let.

Pokud šlo o těleso pevné a statické, bylo možné řešit úlohu prostým nahrazením tělesa pevnou stěnou. Pak interakce tělesa s tekutinou byla realizována okrajovými podmínkami používanými na stěně. Pro tělesa pohyblivá či elastická to však bylo řešení příliš náročné, či nemožné.

Velice oblíbenou metodou při řešení pohyblivých a elastických těles je metoda vnořeného tělesa (Immersed boundary method, IBM), kterou popsal v roce 1972 Charles S. Peschkin [23]. Principem metody je vytvořit v oblasti tekutin síť bodů, která reprezentuje těleso. Tyto body pak vytváří v tekutině silové pole o takové velikosti a síle, jaké by vytvářelo do ní ponořené těleso. Síla je aplikována na síti bodů tělesa a je pak přenesena do uzlů tekutiny. Naopak sílu na těleso lze zjistit v uzlech tekutiny u povrchu tělesa.

Pushkina následovali další, kteří začali využívat IBM ve spojení konkrétně s LBM. Eulerovský popis tekutiny na pravidelné mřížce (LBM) interaguje s Lagrangeovsky popsáním tělesem reprezentovaným nepravidelnou množinou bodů (IBM). Komunikace mezi metodami probíhá interpolací či zpětnou extrapolací silových

účinků mezi uzly tekutiny a body stěny tělesa.

Jednotlivé modely interakce tekutiny a tělesa se pak liší jednak způsobem vyhodnocení síly působící na těleso a také tvarem silového členu. K přenosu informací se používá zpravidla diskretní zvonová funkce, viz např. [31].

Problém interakce tekutiny a tělesa do ní vnořeného lze v zásadě rozdělit na tři dílčí problémy. Jednak jde o zjištění síly, která působí od tekutiny na těleso, poté vyřešení vlastní dynamiky tělesa v návaznosti na ono silové působení a nakonec zjištění působení tělesa zpět na tekutinu. Kolizní operátor LBM se při silovém působení rozšiřuje o silové členy $\Omega_{i,\alpha}(t)$, na tvar

$$f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha, t + \Delta t) = f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) - \frac{1}{\tau} (f(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t) - f^{eq}(\mathbf{e}_\alpha, \rho_i, \mathbf{u}_i, t)) + \Omega(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{r}_i, t). \quad (2.1)$$

Kolizní operátor je závislý pouze na makroskopických veličinách v daném uzlu, a proto může být silové působení zavedeno jak lokálně (např. silové působení od vnořeného tělesa), tak globálně (gravitační síla).

Sílu na těleso Yang a kol. [31] uvažují jako součet hybnosti částic tekutiny, které se pohybují směrem k tělesu, a záporně vzatých hybností částic pohybujících se směrem od tělesa.

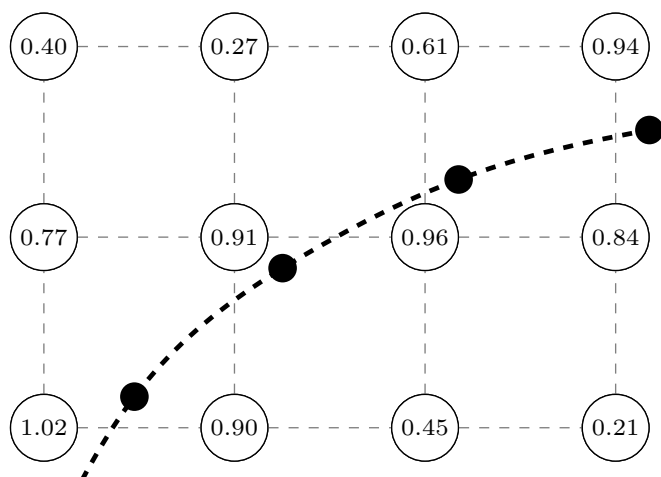
Rojas a kol. [25] se zabývají pouze jednostrannou interakcí - tekutina je poháněna tělesem pohybujícím se zadanou rychlostí. Sílu působící od tělesa na tekutinu uvažují jako podíl rozdílu rychlosti uzlu tělesa (zjištěné interpolací z uzlů tekutiny) od požadované rychlosti a časového kroku. Síla je opět interpolací převedena do uzlů tekutiny a aplikována silovým operátorem ve tvaru $\Omega_{i,\alpha}(t)3w_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{F}_i(t)$, kde $\mathbf{F}_i(t)$ je vektor síly působící na tekutinu v i -tém uzlu, w_α jsou známé váhové funkce (viz např. 1.11, 1.12) a \mathbf{e}_α použitému modelu odpovídající diskretní vektory rychlosti.

Wu a Shu [29] užívají tzv. korekci rychlosti, kdy silový člen je počítán v každém kroku implicitně v závislosti na vývoji rychlosti na stěně tělesa.

Další tvar silového členu zaváděného do uzlů tekutiny uvádí ve svém článku Romero [26], a to $(1 - 1/\tau)w_\alpha(\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{u}_i + 3\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_i \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{F}_i$. Též uvádí, že zlomek síly by měla být připočtena též k makroskopické hybnosti.

Silový člen pro MRT LBM není příliš často uváděn, nicméně lze užít např. tvaru uvedeného ve článku Lia a kol. [18].

V této práci je představen model který kombinuje IBM s kinematickou okrajovou podmínkou LBM. Těleso nepůsobí na okolní tekutinu přímo silou, ale nutí jí rychlost upravením rovnovážné funkce v uzlech tekutiny blízkých tělesu.



Obrázek 2.1: Váhové funkce vlivu tělesa na tekutinu q_i zjištěné pomocí zvonové funkce (2.2)

2.1 Váhové funkce vlivu tělesa na tekutinu

Vliv tělesa na tekutinu lze vyjádřit pomocí váhových funkcí vlivu q_i , které náležejí uzlům tekutiny s odpovídajícím indexem. Hodnoty těchto váhových funkcí se nachází (s ohledem na použitou metodiku) mezi 0 a 1, kdy hodnota 1 znamená plné ovlivnění tekutiny hranicí tělesa, naopak váhové funkce s nulovou hodnotou náležejí uzlům, které jsou od tělesa více vzdáleny a těleso na ně nemá přímý vliv. Toto omezení je nutné pro zachování kladnosti funkcí rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$ při použití kinematické okrajové podmínky, bude vysvětleno níže.

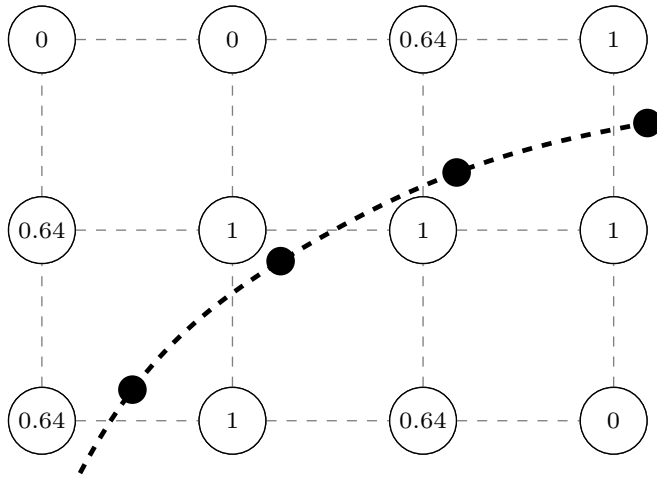
Jak bylo řečeno dříve, mnoho autorů používá pro zjištění váhových funkcí q_i zvonovou funkci [25] $\delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{X}_j)$. Nejčastěji doporučovaný tvar je

$$\delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{X}_j) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \|\mathbf{r}_i - \mathbf{X}_j\|}{2} \right) \right] & \|\mathbf{r}_i - \mathbf{X}_j\| \leq 2 \\ 0 & \|\mathbf{r}_i - \mathbf{X}_j\| > 2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Těleso je pak ovlivněno všemi uzly tekutiny, které jsou od něj vzdálené méně, než je předepsaná maximální vzdálenost. Vzhledem ke zvonovitému charakteru funkce $\delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{X}_j)$ mají největší vliv nejbližší uzly.

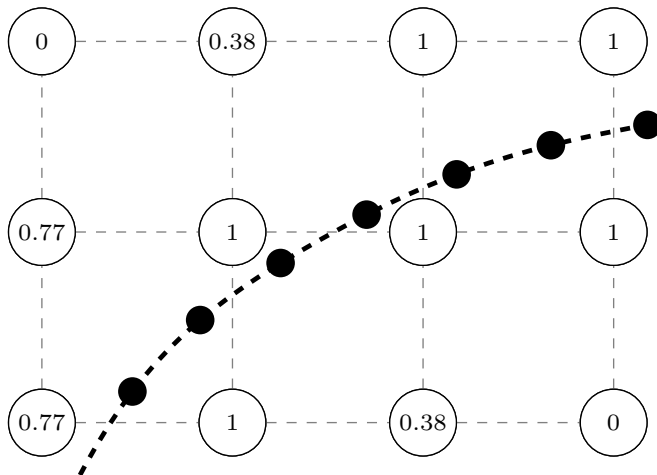
Body tělesa se mohou vyskytovat kdekoli ve výpočetní oblasti a navíc nejsou statické, proto je úloha nalezení bodů tělesa blízkých uzlům tekutiny složitá - je nutné projít každý uzel tekutiny a pro tento pod projít i každý bod tělesa, aby bylo možné ověřit jejich vzájemnou vzdálenost a případně určit váhovou funkci vlivu tělesa na tekutinu zvonovou funkcí $\delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{X}_j)$.

Jak je vidět též na příkladu uvedeném na obrázku 2.1, při použití tohoto přístupu přesahují některé hodnoty váhových funkcí q_i hodnotu 1, což je pro dále popsanou metodiku interakce nepřijatelné, a váhové funkce by bylo nutné dále upravit.



Obrázek 2.2: Váhové funkce vlivu tělesa na tekutinu q_i zjištěné pomocí vztahu 2.4

Na rozdíl od bodů tělesa, které nejsou pravidelně ani pevně umístěny, LBM operuje na pravidelné pravoúhlé mřížce s buňkami o délce stěny $1\Delta x$, a tedy polohové vektory uzlů tekutiny \mathbf{r}_i mají pouze celočíselné složky - $r_{i,x}, r_{i,y}, r_{i,z} \in \mathbb{N}$. Mimo jiné proto byl v této práci využit jiný způsob stanovení váhových funkcí q_i , který právě využívá pravidelnosti LBM sítě. Váhová funkce přímo závisí na počtu bodů tělesa v blízkém okolí uzlu tekutiny. Za blízké okolí se v tomto případě uvažují buňky, v jejichž rohu je daný uzel (pro rovinnou úlohu náleží každému uzlu samozřejmě čtyři buňky, v prostoru pak osm buněk).



Obrázek 2.3: Váhové funkce vlivu tělesa na tekutinu q_i zjištěné pomocí vztahu 2.4 s dvounásobnou koncentrací bodů na povrchu tělesa.

Návrh váhových funkcí q_i^* takovýmto způsobem samozřejmě často vede na hodnoty převyšující hodnotu 1, a je tedy třeba je dále upravit. Aby byly zachovány

proporce mezi váhovými funkcemi q_i a zároveň byly všechny menší než 1, nabízí se vydělit všechny váhové funkce jejich maximální hodnotou, tedy

$$q_i = \frac{q_i^*}{\max_{q_i^* > 0} \{q_i^*\}}. \quad (2.3)$$

Tento přístup však není zcela vhodný například pro tělesa s ostrými hranami, jelikož se například v rozích tělesa mohou objevit takové extrémy váhových funkcí, které vysoce převyšují hodnotu ostatních. Stěny tělesa by pak v porovnání s jeho hranami mohly působit jako „propustné“ - váhové funkce by se blížily hodnotě 1 pouze v rozích tělesa a stěny s výrazně nižší hodnotou váhové funkce by nemohly tekutině nutit kinematickou okrajovou podmínku s dostatečnou důrazností.

Vhodnější variantou je proto vydělit zjištěné váhové funkce q_i^* nikoli jejich maximální hodnotou, ale pouze hodnotou průměrnou získanou jako aritmetický průměr nenulových váhových funkcí q_i^* . Hodnoty váhových funkcí, které i po vydělení větší než jedna, jsou nahrazeny jednotkovou hodnotou. Tato možnost lépe zachycuje tvar tělesa při zachování důležitých proporcí mezi váhovými funkcemi vlivu q_i . Tedy pro výsledné váhové funkce q_i v uzlech tekutiny platí

$$q_i = \begin{cases} \frac{q_i^*}{\bar{q}_i^*} & \frac{q_i^*}{\bar{q}_i^*} \leq 1 \\ 1 & \frac{q_i^*}{\bar{q}_i^*} > 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

kde \bar{q}_i^* je aritmetický průměr nenulových váhových funkcí q_i^* .

Na obrázku 2.2 je uveden příklad vypočtených hodnot váhových funkcí podle vztahu (2.4). Obrázek 2.3 váhové funkce pro dvojnásobnou hustotu bodů tělesa na jeho povrchu.

Je vidět, že hustější síť tělesa přispívá k jemnějšímu rozlišení váhových funkcí. Jako rozumné se jeví vytvořit takovou síť bodů na povrchu tělesa, aby jejich rozešty byly přibližně rovny $\Delta x/3$.

Při zjišťování váhových funkcí q_i pomocí zvonové funkce se oproti tomu standardně doporučují rozešty bodů tělesa cca $1\Delta x$. I přes vyšší počet bodů tělesa při použití druhého způsobu výpočtu váhových funkcí, jde stále o variantu výhodnější z hlediska časové náročnosti výpočtu.

2.2 Silové účinky tekutiny na těleso

Silové účinky působící kdekoli v tekutině lze určit ze změny hybnosti. Jde o změnu hybnosti jednotlivých částic respektive modelových částic. Obecně lze vyjít ze

vztahu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Lze dále přejít k jeho diferenciální podobě pro i -tý uzel

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t + \Delta t) - \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t)}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

vzhledem k tomu, že časový krok Δt se zpravidla pohybuje řádově v mezích milisekund a mikrosekund.

Nejpřesnější odhad síly působící od tekutiny na vnořené těleso by byl dán součtem změn hybností částic, které ztrácí část své energie při odrazu od stěny tělesa. V LBM lze hybnost částic v i -tém uzlu vyjádřit vztahem (1.4). Lze však definovat i dílčí hybnost jednotlivých modelových částic (jejichž hmotnost je vyjádřena právě pravděpodobnostními funkcemi rychlosti $f_{i,\alpha}(t)$) vztahy

$$\mathbf{j}_{i,\alpha}(t) = f_{i,\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha. \quad (2.7)$$

Vektory $\mathbf{j}_{i,\alpha}(t)$ tedy zřejmě mají stejný směr jako vektory rychlosti odpovídajících indexů \mathbf{e}_α .

K určení síly tekutiny působící na těleso jsou důležité částice v takových uzlech tekutiny a směřující takovým směrem, že v daném časovém kroku dojde k jejich nárazu do stěny tělesa. Taková částice se ve stejném časovém kroku od tělesa odrazí opačným směrem a jejich hybnost je pozměněna kolizním krokem (viz rovnici (1.8)). Je tedy zřejmé, že změnu hybnosti částic vinou nárazu do tělesa lze zjistit přímo rozdílem dvou protilehlých distribučních funkcí $f_{i,\alpha}(t)$ v daném uzlu a daném směru.

Tento přístup lze snadno a s velice dobrými výsledky použít pro pevná tělesa, která jsou přímo zabudovaná do geometrie domény (tedy jsou přímo nahrazeny stěnou). Avšak pro IBM je tento přístup velice náročný, neboť ke stanovení uzlů tekutiny a směrů, ze kterých by byla síla na těles vypočtena, by bylo nutné znát nejen body tělesa, ale i jeho plochy. Vzhledem k tomu, že IBM operuje ve své nej-jednodušší podobě jen s množinou bodů reprezentujících hranici tělesa, je náročné stanovit normály k jeho hranici a tedy by bylo obtížné zjistit, které částice směřují k tělesu a které naopak od tělesa.

Pro těleso modelované pomocí IBM je vhodnější využít makroskopickou změnu hybnosti opět v kombinaci s váhovými funkcemi. Uzly tekutiny, které jsou blízko hranice tělesa jsou tělesem plně ovlivněny a lze tedy uvažovat, že veškerá změna hybnosti v těchto uzlech je způsobena právě nárazy do tělesa. Naopak uzly tekutiny více vzdálené od tělesa jsou jím již méně ovlivněny a jen poměrná část změny

hybnosti odpovídá energii ztracené při nárazu. Z předešlého je zřejmé, že při vyhodnocení síly tekutiny na těleso lze užít stejných váhových funkcí vlivu q_i , jako při zjišťování vlivu tělesa na tekutinu.

Problém by mohly způsobovat uzly tekutiny uvnitř tělesa, jelikož i částice z těchto uzlů naráží do stěn tělesa, ovšem z jeho vnitřní strany. Vliv těchto sil však lze zanedbat, a to proto, že rychlost tekutiny uvnitř tělesa se velice rychle vyrovná s rychlostí tělesa samotného. Pak se částice pohybují společně s tělesem a případné nárazy částic do stěn tělesa probíhají při tak nízké relativní rychlosti, že změnu jejich hybnosti lze zanedbat.

Celkovou sílu \mathbf{F} od tekutiny na těleso lze tedy vyjádřit součtem elementárních sil od jednotlivých uzlů tekutiny jako

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t + \Delta t) - \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t)}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

Při uvažování $\Delta t = 1$ v systému jednotek LBM lze opět přejít k jednoduššímu vyjádření

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N q_i [\mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t + \Delta t) - \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t)]. \quad (2.9)$$

Při znalosti polohy středu hmotnosti $\mathbf{r}_t(t)$ tělesa lze určit i celkový moment sil od tekutiny na těleso. Jeho tvar je dán součtem momentů od sil v jednotlivých uzlech tekutiny ke středu hmotnosti tělesa

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_t(t)) \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t + \Delta t) - \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t)). \quad (2.10)$$

Při použití popsané metodiky jsou body tělesa potřebné pouze při zjišťování váhových funkcí vlivu q_i , tedy stačí nalézt uzly tekutiny blízké uzlům tělesa a nikoli naopak (což je - z uvedených důvodů - úloha podstatně složitější). Zároveň je tím ale limitována informace o silovém působení, neboť takto lze získat pouze celkovou sílu či celkový moment působící na těleso a nikoli jeho rozvržení po povrchu tělesa, jak by to např. vyžadovaly konečně-prvkové simulace poddajných těles.

2.3 Působení tělesa na tekutinu

Síla od tělesa na tekutinu, jak již bylo mnohokrát uvedeno, se do LBM aplikuje zavedením silového členu $\Omega_{i,\alpha}(t)$ v rovnici (2.1).

V této práci je využita v silovém členu kinematická okrajová podmínka. Vzhledem k tomu, že tekutina je vazká, ulpívá na povrchu tělesa, a tedy se v bezprostřední blízkosti tělesa pohybuje spolu s ním. Je-li tedy znám pohyb tělesa, lze ho silovým členem vnutit i okolní tekutině. Míra vlivu tělesa na tekutinu v každém jejím uzlu je vyjádřena váhovou funkcí q_i v daném uzlu.

Uzly tekutiny nejbližší tělesu, kde je váhová funkce vlivu q_i jednotková, budou tedy plně ovlivněny kinematickou okrajovou podmínkou, a jejich rovnovážná funkce bude funkcí požadované makroskopické rychlosti (viz sekce 1.3.4). Pokud je váhová funkce v i -tém uzlu rovna 0, pak zřejmě těleso nemá na tento uzel vliv a kolize má standardní tvar (1.8). Pro $q_i \in (0, 1)$ bude mít kinematická okrajová podmínka omezený vliv, kolize bude zčásti probíhat klasickým způsobem, z části bude plněna kinematická krajová podmínka.

Pro všechny předešlé varianty lze souhrnně psát silový člen ve tvaru

$$\Omega_{i,\alpha} = -\frac{1}{\tau}(1 - q_i)f_{eg}(\mathbf{u}_i, \rho_i) + \frac{1}{\tau}q_i f_{eg}(\mathbf{u}_{poz,i}, \rho_i). \quad (2.11)$$

2.4 Pohyb tělesa

Pokud je pohyb tělesa předepsaný, jedná se pouze o úlohu jednostranné interakce. Zatímco těleso svým pohybem působí na okolní tekutinu, působení tekutiny zpět na těleso nemá na jeho dynamiku žádný vliv. Těleso je uvažováno jako tuhé, v opačném případě by nebylo možné vliv tekutiny na těleso zanedbat. Je nutné znát rychlost každého bodu tělesa a jeho polohu (v každém časovém kroku), jelikož bez těchto informací není možné zahrnout vliv tělesa na tekutinu do výpočtu.

Tak jako tekutina je reprezentována svými uzly. Těleso je reprezentováno uzly svém na povrchu, jejichž poloha je dána v souřadném systému tělesa s počátkem v jeho středu hmotnosti polohovými vektory $[\mathbf{X}_i]_t$. Počet bodů povrchu tělesa je P . Pokud jde o těleso pevné, vzájemná poloha bodů tělesa se s časem nemění, tedy vektory $[\mathbf{X}_i]_t$ jsou konstantní. Naopak těleso jako celek je často pohyblivé (posuvný i rotační pohyb), tedy souřadný systém tělesa se pohybuje či natáčí vzhledem k pevnému souřadnému systému. Poloha tělesa je plně definována polohou těžiště $\mathbf{r}_t(t)$ a třemi natočeními tělesa kolem jeho definovaných os $\Phi_t(t) = [\Phi_x(t), \Phi_y(t), \Phi_z(t)]$. V počáteční konfiguraci není těleso nijak natočeno ($\Phi_t(0) = \mathbf{0}$), tedy souřadný systém tělesa je pouze posunut vůči pevnému systému o vektor $\mathbf{r}_t(t)$.

S ohledem na předešlé je nevhodnější uchovávat v paměti počítače informaci o počáteční poloze bodů tělesa $[\mathbf{X}_{i,0}]_t$ v systému souřadnic tělesa. Pak je možné snadno zjistit polohu každého bodu tělesa v pevném souřadném systému $\mathbf{X}_i(t)$ pootočením polohových vektorů $[\mathbf{X}_{i,0}]_t$ kolem středu hmotnosti tělesa o úhly $\phi_t(t)$

a přičtením polohového vektoru středu hmotnosti tělesa $\mathbf{r}_t(t)$:

$$\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{r}_t(t) + \mathbf{T}(t)[\mathbf{X}_{i,0}]_t, \quad (2.12)$$

přičemž transformační matice má standardní tvar

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\Phi_y \cos\Phi_z & \cos\Phi_x \sin\Phi_z + \sin\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z & \sin\Phi_x \sin\Phi_z - \cos\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z \\ -\cos\Phi_y \cos\Phi_z & \cos\Phi_x \sin\Phi_z - \sin\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z & \sin\Phi_x \sin\Phi_z + \cos\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z \\ \sin\Phi_y & -\sin\Phi_x \cos\Phi_y & \cos\Phi_x \cos\Phi_y \end{bmatrix}.$$

(Byl použit zkrácený zápis bez uvedení časové závislosti.)

V případě, že je předepsán průběh zrychlení tělesa $\mathbf{a}_t(t)$ a úhlového zrychlení $\boldsymbol{\alpha}_t(t)$, jeho rychlost se bude v jednotlivých časových krocích vyvíjet podle vzorce

$$\mathbf{u}_t(t + \Delta t) = \mathbf{u}_t(t) + \mathbf{a}_t(t), \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\omega}_t(t + \Delta t) = \boldsymbol{\omega}_t(t) + \boldsymbol{\alpha}_t(t), \quad (2.14)$$

přičemž v systému jednotek LBM stále platí, že časový krok je jednotkový.

Pro polohu středu hmotnosti tělesa a natočení tělesa pak podobně platí

$$\mathbf{r}_t(t + \Delta t) = \mathbf{r}_t(t) + \mathbf{u}_t(t), \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t(t + \Delta t) = \boldsymbol{\Phi}_t(t) + \boldsymbol{\omega}_t(t). \quad (2.16)$$

Rychlost každého bodu tělesa $\mathbf{u}_i^t(t)$ ($i = 1, \dots, P$) ve složkách souřadných os pevného souřadného systému je dána součtem příspěvků rychlosti od posuvného pohybu a rotačního pohybu tělesa. Zatímco rychlost od pohybu posuvného je tožná pro všechny body tělesa, úhlová rychlost v bodu závisí na jeho poloze vůči středu hmotnosti tělesa. Pro rychlost bodů tělesa v pevném souřadném systému platí

$$\mathbf{u}_i^t(t) = \mathbf{u}_t(t) + \boldsymbol{\omega}_t(t) \times [\mathbf{X}_i(t)]_t. \quad (2.17)$$

Dále je nutné převést tuto rychlost na uzly tekutiny, aby ji bylo možné uplatnit v kinematické okrajové podmínce (2.11). Rychlost požadovanou v uzlu tekutiny u povrchu tělesa $\mathbf{u}_{pož,i}(t)$ lze zřejmě jistou aproximační funkcí zjistit ze znalosti pohybu bodů tělesa v jeho blízkosti, zřejmě by bylo možné použít váhové funkce q_i .

Pokud ale vztah 2.17 aplikujeme s malou obměnou přímo na uzly tekutiny ve tvaru

$$\mathbf{u}_{pož,i}(t) = \mathbf{u}_t(t) + \boldsymbol{\omega}_t(t) \times (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_t(t)), \quad (2.18)$$

bude (zvláště úhlová) rychlost přenesena na uzly tekutiny přesněji.

Zrychlení, respektive úhlové zrychlení tělesa lze získat přímo ze silového působení na těleso

$$\mathbf{a}_t(t + \Delta t) = \mathbf{a}_t(t) + \frac{\mathbf{F}(t)}{m_t} + \mathbf{L}, \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t(t + \Delta t) = \boldsymbol{\alpha}_t(t) + \mathbf{I}_t^{-1} \mathbf{M}(t), \quad (2.20)$$

kde \mathbf{L} je vektor dalších zrychlení případně působících na těleso - příslušné složky vektoru \mathbf{L} mohou obsahovat například gravitační zrychlení g nebo zrychlení od vztlakové síly $F_{vz} = \rho V_t g / m_t$. Matice \mathbf{I}_t^{-1} je pak inverzní matice setrvačnosti tělesa ke středu hmotnosti. Pro symetrické těleso je diagonální $\mathbf{I}_t^{-1} = \text{diag}([1/I_x, 1/I_y, 1/I_z])$.

Při výpočtu síly od tekutiny na těleso často vznikají drobné oscilace této veličiny, které jsou způsobeny numerickým řešením. Aby se zamezilo výraznějšímu ovlivnění výsledků těmito oscilacemi síly, je vhodné odstranit je pomocí nějakého filtru.

V této práci byl použit tzv. low-pass filtr pro zrychlení. První vztah z (2.19) je upraven následujícím způsobem

$$\mathbf{a}_t(t + \Delta t) = \epsilon \mathbf{a}_t(t) + (1 - \epsilon) \left[\frac{\mathbf{F}(t)}{m_t} + \mathbf{L} \right] \quad (2.21)$$

pro volbu $\epsilon = 0.97$.

Kapitola 3

Teorie podobnosti

LBM pracuje v systému vlastních jednotek, které jsou vhodně zvoleny tak, aby výpočet byl co nejjednodušší. Nicméně nelze je zvolit libovolně, neb musí být zachována jakási relace mezi původním reálným problémem a modelem a též je třeba brát ohled na stabilitu a přesnost metody. V následující kapitole je stručně nastíněna teorie podobnosti a její konkrétní aplikace na LBM.

3.1 Rozměrová analýza

Teorie podobnosti slouží primárně pro jednodušší a ekonomičtější zpracovávání dat, ať už z experimentů, že analytických řešení problémů. Každý problém je definován svými veličinami a parametry, kterých je obecně velké množství. Principem teorie podobnosti je najít taková podobnostní čísla, která dokáží v sobě obsáhnout podstatu zkoumaného problému (tedy obsahují relace parametrů problému pro něj charakteristické). Tato podobnostní čísla pak úplně popisují daný problém a jejich počet je výrazně nižší.

Problém proudění je popsán Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Zákon zachování hybnosti má pro proudící tekutinu tvar

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{u} je rychlost proudění, t je čas, ρ je hustota tekutiny, p je tlak a ν kinematická viskozita. Každá z těchto veličin má vlastní jednotku. To znamená, že při změně jednotkového systému dojde ke změně celé rovnice. Proto je výhodné přejít na bezrozměrný tvar rovnice. Všechny veličiny lze převést na bezrozměrné (dále značené hvězdičkou) dělením původní veličiny tzv. charakteristickou veličinou. Např. lze zvolit charakteristickou délkovou jednotku L jako šířku kanálu, a veškeré délkové rozměry v předešlé rovnici vztahovat k této míře. Pak lze zavést bezrozměrnou

délku

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L}. \quad (3.2)$$

Veličina \mathbf{r}^* je již bezrozměrná, neb jak \mathbf{r} tak L jsou vyjádřeny v metrech. Zároveň je vhodné poznamenat, že charakteristická délka je skalární veličina, vyjadřuje měřítko mezi vektory \mathbf{r}^* a \mathbf{r} . Jako charakteristickou délku lze brát např. šířku kanálu, či šířku obtékaného tělesa.

Obdobně lze zvolit charakteristický časový krok T a zavést bezrozměrnou časovou jednotku

$$t^* = \frac{t}{T}. \quad (3.3)$$

Analogicky lze vyjádřit veškeré základní jednotky soustavy SI. Bezrozměrný tvar dalších veličin je již závislý na volbě charakteristických veličin základních jednotek. Například jednotka rychlosti je podílem jednotky délky a času. A tedy charakteristická rychlost U závisí na volbě charakteristické délky a charakteristického času. Lze psát

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U} = \frac{\mathbf{u}}{\frac{L}{T}}. \quad (3.4)$$

Stejným způsobem lze odvodit bezrozměrné tvary všech užitých veličin, jak jsou uvedeny v tabulce 3.1.

veličina	jednotky	charakteristické veličiny
rychlost \mathbf{u}	$[\text{ms}^{-1}]$	L/T
časová derivace ∂t	$[\text{s}^{-1}]$	$1/T$
gradient ∇	$[\text{m}^{-1}]$	$1/L$
hustota ρ	$[\text{kgm}^{-3}]$	K/L^3
tlak p	$[\text{kgms}^{-2}]$	KL/T^2
kinematická viskozita ν	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$	L^2/T

Tabulka 3.1: Převody odvozených jednotek

Dosazením do rovnice 3.1 a úpravou lze dospět k jejímu bezrozměrnému tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \frac{L}{T^2} + \mathbf{u}^* \nabla^* \mathbf{u}^* \frac{L}{T^2} &= -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* \frac{L}{T^2} + \nu (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^* \frac{1}{LT} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^* \frac{\nu}{UL} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^* \frac{1}{Re}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Všechny členy poslední rovnice jsou bezrozměrné a rovnice samotná je shodná s rovnicí (3.1) až na poslední člen, který je rozšířen o převrácenou hodnotu Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (3.6)$$

Reynoldsovo číslo je jedno z podobnostních čísel, které vyjadřuje poměr setrvačných a vazkých sil v tekutině.

Reynoldrovo číslo je jediné podobnostní číslo vyskytující se v rovnici (3.5), a tedy řešení rovnice je stejné pro všechny problémy, které mají totožné Reynoldsovo číslo.

3.2 Jednotky pro LBM

Pro LBM je typické, že pro výpočet užívá vlastního systému jednotek. Hlavní charakteristikou je fakt, že šířka mřížky je rovna jedné délkové jednotce a časový krok jedné jednotce časové. Časový krok je tedy $1\Delta t$ a šířka buňky $1\Delta x$. Též jednotka hustoty tekutiny odpovídá hustotě tekutiny, aby platilo, že je hustota v systému jednotek LBM jednotková (tedy i hmotnost, vzhledem k tomu, že objem je Δx^3 , tedy též jedna).

Zároveň, jak bylo uvedeno v předchozím, je nutné dodržet v systému LBM Reynoldsovo číslo totožné s tím, které popisuje reálný problém. Je zřejmé, že možnosti, jak zvolit charakteristické rozměry v systému jednotek LBM je nekonečně mnoho. Nicméně je třeba brát ohledy na limity jednotlivých veličin tak, aby nebyla narušena stabilita metody. Požadavky stability omezují rychlost a relaxační čas. Maximální rychlost (v systému LBM) nesmí překročit hodnotu $0,3\Delta x/\Delta t$. Pokud je velikost maximální rychlosti při simulaci neznámá, je třeba ponechat určitou rezervu a referenční rychlost volit např. rovnu $0,1\Delta x/\Delta t$. Relaxační parametr je z intervalu $(0,5; 2)$, přičemž s tím, jak se přibližuje k hodnotě $0,5$, model se stává nestabilním.

Systém jednotek LBM je charakterizován především délkovou jednotkou Δx , časovou jednotkou Δt a jednotkou hmotnosti Δm . V těchto jednotkách je pak třeba nalézt takové charakteristické rozměry, které odpovídají Reynoldsovu číslu reálného problému. Možným postupem je nejprve stanovit Reynoldsovo číslo reálného problému. Dále stanovit charakteristickou rychlost u_{LB} a charakteristický rozměr l_{LB} v jednotkách LBM ($\Delta x/\Delta t$ respektive Δx). Z těchto vyplynou převody pro rozměr c_L a rychlost c_U

$$c_L = \frac{L}{l_{LB}}, c_U = \frac{U}{u_{LB}}. \quad (3.7)$$

Z toho lze zjistit převod pro čas a kinematickou viskozitu ze stále platných vztahů $c_T = c_L/c_U$ a $c_\nu = c_L c_U$. Pak lze již přímo ze vztahu (1.10) zjistit hodnotu relaxačního času τ .

Pro příklad uvedme převod jednotek kanálu, jehož charakteristické fyzikální parametry jsou: šířka kanálu $L = 0,05m$, maximální rychlost $U = 1m/s$, kinematická viskozita $\nu = 5 \cdot 10^{-4}m^2/s$. Z uvedených údajů plyne Reynoldsovo číslo $Re=100$. Za charakteristický rozměr v systému LBM je vhodné zvolit opět šířku kanálu, nicméně v jednotkách Δx . Pokud tedy šířku kanálu představuje např. 50 buněk, je jeho rozměr $l_{LB} = 50\Delta x$. Pevod pro délku pak $c_L = 0.001$. To znamená, že šířka buňky Δx má v systému fyzikálních jednotek rozměr $0,001m$. Rychlost lze stanovit s ohledem na předchozí jako $u_{LB} = 0.1\Delta x/\Delta t$, tedy převod rychlosti je $c_U = 10$. Vzhledem k tomu, že i v systému LBM musí být dodrženo stejné Reynoldsovo číslo, kinematická viskozita musí být $\nu_{LB} = l_{LB}u_{LB}/Re$ a následně relaxační čas $\tau = 0.5+3\nu_{LB}$. Konkrétní hodnoty jsou $\nu_{LB} = 0.05\Delta x^2/\Delta t$ a $\tau = 0.65\Delta x^2/\Delta t$. Navíc pro převod času platí $c_T = c_L/c_U$, tedy $c_T = 10^{-4}$. Na popsání jedné vteřiny reálného proudění je potřeba 10 000 iterací.

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že simulace bude stabilní (vzhledem k tomu, že relaxační parametr je vzdálen hodnotě 0.5), nicméně poněkud časově náročná. Pomocí následujících vodítek lze najít stabilní a výpočetně méně náročné nastavení parametrů. O stabilitě a efektivnosti metody rozhoduje převážně relaxační parametr τ .

- Při zachování charakteristické rychlosti lze ovlivnit stabilitu metody zkrácením časového kroku. Nelze tak však činit neomezeně, neboť maximální hodnota relaxačního parametru je shora omezena. Časový krok by se měl pohybovat mezi hodnotami 0 a $0.5Re/l_{LB}^2$, přičemž při zvolení Δt z pravé části intervalu je simulace stabilnější a časově náročnější.
- Pokud voleným parametrem není časový krok, nýbrž charakteristická rychlost, lze ovlivnit výpočet obdobně. Při zachování délkového rozměru vede totiž změna rychlosti přímo na úměrnou změnu časového kroku. Dále maximální rychlost při výpočtu nesmí přesáhnout hodnotu $0.3\Delta x/\Delta t$. Charakteristická rychlost by měla spadat do intervalu $(0; 0.5Re/l_{LB})$.
- Na druhou stranu při zachování rychlosti (či časového kroku) lze zajistit stabilitu metody jemnější sítí, kdy tedy l_{LB} je větší, a tedy jednotka Δx naopak menší (vyjadřuje kratší vzdálenost). Kvadrát charakteristické délky by zároveň neměl překročit hodnotu $0.5Re/t_{LB}$

Kapitola 4

Implementace

Pro správné a efektivní fungování popsané metody je třeba správná implementace. Vhodné či nevhodné zvolení parametrů zásadně ovlivňuje jak rychlost výpočtu, tak především přesnost a stabilitu metody (viz kapitolu 3). Zvolením vhodné datové struktury lze minimalizovat nároky na paměť počítače. K urychlení výpočtu lze pak přispět paralelizací jeho vybraných částí.

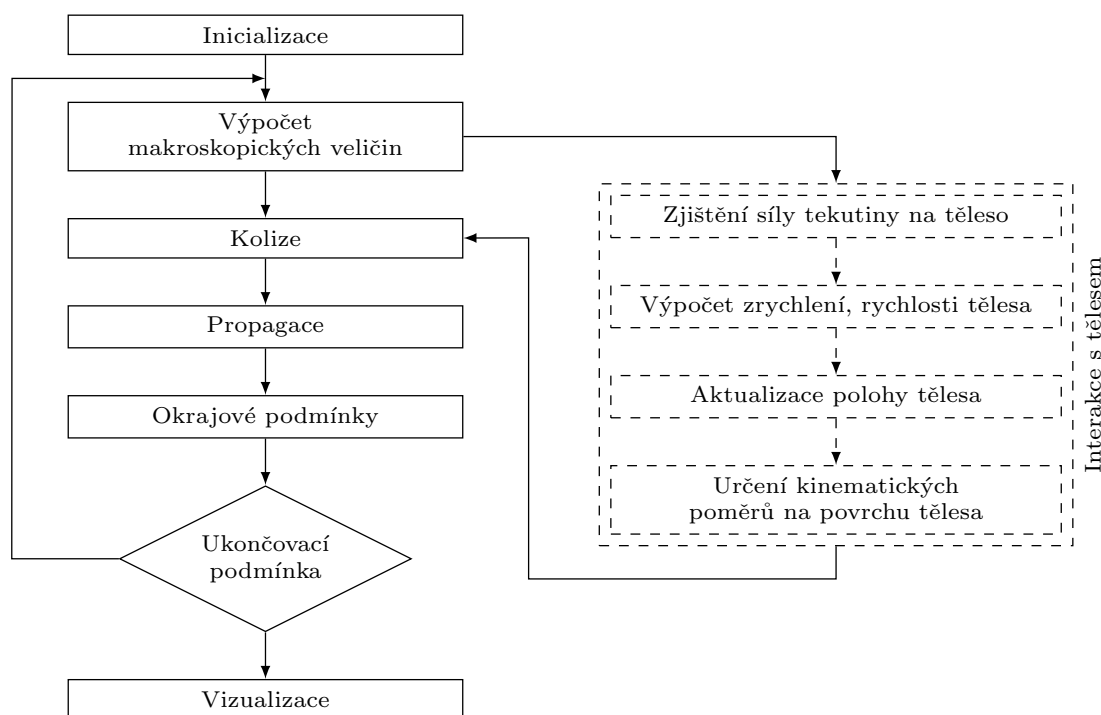
Implementace LBM relativně přímočará. Každému uzlu je nutné přiřadit makroskopické rychlosti, makroskopickou hustotu a příslušné množství distribučních funkcí rychlosti.

V každé iteraci se pak tyto hodnoty upravují a přesouvají z jedné pozice na následující dle pravidel kolize a propagace. Dále je třeba zohlednit případné interakce s tělesem.

4.1 Struktura výpočtu

Při implementaci LBM, případně jejího doplnění o IBM, lze postupovat dle schématu, které je uvedeno na obrázku 4.1.

Při inicializaci výpočtu je nejprve třeba definovat výpočetní oblast, tedy vytvořit soubor uzlů s danou pozicí a charakteristikou - zda se uzel nachází v oblasti, nebo na stěně, případně zda jde o uzly na vstupu či výstupu z oblasti. Implementaci lze zjednodušit využitím maticového uspořádání, kde na každou dvojici (respektive trojici pro trojrozměrné problémy) indexů připadá jeden uzel. Indexy pak zároveň dávají i informaci o poloze uzlu. Nicméně pro nepravidelné geometrie je taková konfigurace nevýhodná, a to jak z hlediska využití paměti, tak z hlediska časové náročnosti. Maticové uspořádání zbytečně uchovává informace o uzlech, které nejsou přímou součástí domény (neaktivní uzly). Tyto uzly jsou též při každé iteraci zbytečně procházeny. V případě složitějších tvarů výpočetních oblastí je tedy



Obrázek 4.1: Struktura výpočtu. Vývojový diagram hlavní větve programu (LBM) a její propojení s vedlejším výpočtem interakce tekutiny s tělesem (IBM).

vhodnější řadit za sebe do vektoru pouze aktivní uzly. Informace o jejich pozicích i o sousedících uzlech je třeba evidovat odděleně. I přesto se jedná o konfiguraci pro složité geometrie oblastí výhodnější. Obdobně je třeba definovat uzly tělesa a jejich polohu.

Dále je nutné definovat parametry simulace s ohledem na teorii podobnosti a požadavky stability, jak bylo uvedeno v sekci 3.2. Těmito parametry jsou například požadované okrajové podmínky (zpravidla složky rychlosti tekutiny na vstupu a tlak na výstupu z výpočetní oblasti).

Počáteční podmínky jsou dány makroskopickými veličinami. Je vhodné nastavit rychlost i tlak v celé oblasti konstantní, odpovídající okrajovým podmínkám. Výchozí stav simulace je tedy takový, že distribuční funkce rychlosti v každém uzlu odpovídají rovnovážným funkcím definovaným vztahy (1.9) (pro $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ a $\rho = \rho_0 = 3p_0$).

Prvním krokem každé iterace je zjištění aktuálních makroskopických rychlostí a hustoty v každém uzlu dle vztahů (1.3), (1.4). Ty je třeba znát jednak pro vyčíslení

kolizního operátoru a případně ke zjištění informací o silovém působení tekutiny na těleso.

Následuje kolize, během níž se přepočítají hodnoty distribučních funkcí rychlosti v každém uzlu, ať už se jedná o SRT model (kolize dle (1.8)), či MRT model (dle (1.17)). Kolizní část výpočtu může dále ovlivnit těleso s tekutinou interagující, pak má kolize tvar (2.1).

Během propagace již nejsou počítány žádné nové hodnoty, pouze dochází k jejich přesunu do jiných uzlů. Existují dvě výjimky. První jsou uzly u stěny - u nich na místo kolize dochází pouze ke změně směru složky rychlosti kolmé na stěnu. A druhou uzly na vstupu a výstupu, ze kterých probíhá propagace pouze ve směru dovnitř domény.

Okrajové podmínky jsou ošetřeny podobně jako podmínky počáteční - všechny distribuční funkce rychlosti náležící uzlům na vstupu a výstupu jsou v každém časovém kroku nahrazeny rovnovážnými funkcemi, jak je uvedeno v sekci 1.3.1.

Program je zastaven při splnění některé z těchto podmínek. Buď je dosaženo požadovaného konkrétního počtu iterací - této možnosti lze využít především při zkoumání nestacionárního proudění. Nebo dosažením ustáleného proudění, tedy pokud rozdíl proudových polí ve dvou po sobě následujících iteracích je dostatečně malý.

Pokud je předmětem úlohy simulace interakce tekutiny s vnořeným tělesem, je třeba paralelně s výpočtem LBM vést i výpočet IBM (na obrázku 4.1 uvedeno čerchovaně). Nejprve je nutné zjistit působení tekutiny na těleso, k čemuž je nutné znát aktuální makroskopické rychlosti v uzlech tekutiny. Jak je naznačeno v sekci 2.4, ze síly tekutiny působící na těleso vyplývá jeho zrychlení a potažmo rychlost. Od toho se pak odvíjí i nová poloha tělesa, dochází k jeho posunutí či pootočení. V posledním kroku se pak stanoví rychlost každého bodu tělesa, která se následně přenese zpět do uzlů tekutiny (viz kapitolu 2). Požadované hodnoty rychlosti u povrchu tělesa vstupují zpět do kolize v hlavní větvi výpočtu.

Pro veškeré simulace a vizualizace uvedené v kapitole 5 bylo použito kombinace programovacího jazyků MATLAB a C++, pro vizualizaci trojrozměrných dat pak prostředí ParaView. Výhody MATLABu jsou především ve snadné a rychlé vizualizaci výsledků a bohaté knihovně funkcí, C++ vyniká rychlostí a relativně snadnou možností paralelizace.

4.2 Paralelizace

Výhodou paralelizace je urychlení výpočtu. Jejím principem je rozdělení výpočtu mezi více jader procesoru. Lze ji však využít pouze pokud jsou jednotlivé části výpočtu z velké části nebo zcela nezávislé. Paralelizace může však být i nevýhodná a to tehdy, pokud je výpočetní čas jednotlivých úkonů distribuovaných jádrům procesoru výrazně nižší, než čas potřebný pro distribuci samotnou. O možnostech a výhodnosti paralelizace pojednávají následující odstavce této kapitoly.

LBM je metoda zakládající se na diskretizaci času a prostoru, je tedy jasné, že v implementaci se musí objevit jednak vnořený cyklus, který prochází v každém časovém kroku jednotlivé uzly. Cyklus iterační nelze paralelizovat, jelikož výpočet v každém časovém kroku je bezprostředně závislý na výstupu z kroku předešlého. Naopak lze paralelizovat výpočet uvnitř iterační smyčky - výpočet probíhající na jednotlivých uzlech závisí při kolizi pouze na hodnotách v daném uzlu a při propagaci pouze na hodnotách sousedních uzlů.

Velice často využívanou možností paralelizace LBM je rozdělení výpočetní oblasti do menších celků, které jsou distribuovány mezi jádra procesoru. Touto cestou postupovali například Martys a Hagedorn [19]. Výpočetní oblast je rozdělena na stejně velké podoblasti, jejichž počet odpovídá počtu jader procesoru. V rámci těchto podoblastí pak probíhá jak kolize, tak propagace. Jádra procesoru mezi sebou komunikují jen v jediné fázi iterace, a to při propagaci probíhající v uzlech na hranici podoblastí.

Tato možnost je efektivní, nicméně vyžaduje delší přípravu - rozdělení oblasti na jednotlivé podoblasti je, zvláště u oblastí se složitější geometrií, poměrně komplikované. Každou geometrii výpočetní oblasti je třeba řešit individuálně.

V této práci je paralelizována pouze kolizní část metody, při níž je výpočet v jednotlivých uzlech zcela nezávislý na uzlech sousedních. Kolize na jednotlivých uzlech jsou postupně po jedné řešeny na dostupném počtu jader procesoru. Během jedné iterace tedy každému jádru procesoru připadne velké množství jednodušších výpočtů. Propagace již probíhá pouze na jednom jádru procesoru.

Implementace je oproti předešlé variantě paralelizace snadná. Kolize a propagace se rozdělí do dvou nezávislých for cyklů, cyklus obsahující kolizi se poté zamění za `parallel_for`, který je pro C++ přístupný v knihovně `ppl.h`. Základní struktura programu LBM v paralelní verzi má potom tvar

```

#include <windows.h>
#include <ppl.h>
using namespace concurrency;
using namespace std;

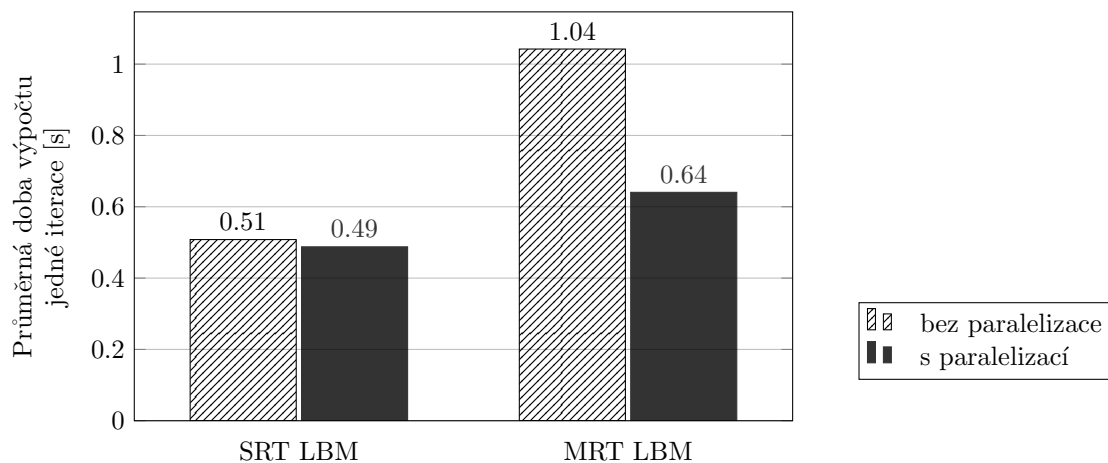
parallel_for (size_t(0), N, [&](size_t i)
{
    //..kolize..
});
for (size_t i = 0; i < N; i++)
{
    //..propagace..
}

```

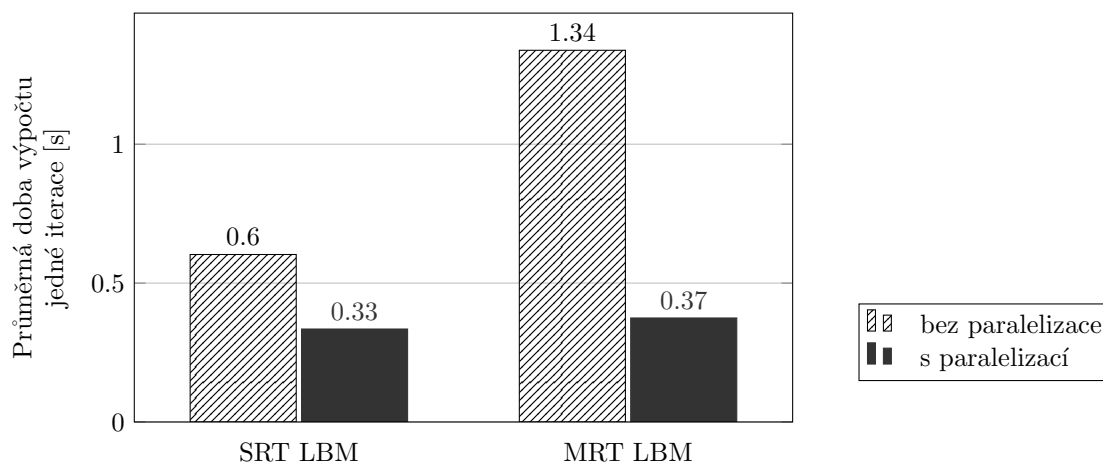
Při použití MRT modelu zabírá kolize zhruba 80% výpočetního času jedné iterace výpočtu. Z toho plyne, že i paralelizace samotné kolize má vysoký vliv na urychlení výpočtu.

V případě SRT LBM, kdy kolize zabírá zhruba 60% výpočetního času jedné iterace, nepřináší paralelizace výrazné urychlení. Výpočetní náročnost přiřazování jednotlivých výpočtů kolizí jádrům procesoru je neúměrně vysoká vzhledem k výpočetní náročnosti výpočtu samotného.

Porovnání výpočetních časů při použití MRT či SRT modelu pro danou velikost domény je zobrazeno v grafu 4.2 při provedení výpočtu na dvou jádrovém procesoru, v grafu 4.3 pak na 24-jádrovém procesoru.



Obrázek 4.2: Graf porovnání výpočetních časů jedné iterace paralelizovaného a neparalelizovaného výpočtu pro SRT a MRT model na výpočetní oblasti o milionu uzlů. Výpočet byl proveden na dvoujádrovém procesoru. Uvedené hodnoty jsou průměrné hodnoty ze vzorku tří set iterací.



Obrázek 4.3: Graf porovnání výpočetních časů jedné iterace paralelizovaného a neparalelizovaného výpočtu pro SRT a MRT model na výpočetní oblasti o milionu uzlů. Výpočet byl proveden na 24-jádrovém procesoru. Uvedené hodnoty jsou průměrné hodnoty ze vzorku tří set iterací.

Při využití počítače se sdílenou pamětí (paměť je společná pro všechny procesory) je nutné přiřadit každému jádru procesoru vlastní proměnné - v opačném případě by totiž docházelo k jejich vzájemnému přepisování. Mohou tak vzniknout další nároky na operační paměť počítače, nicméně při vhodné implementaci jsou minimální.

Při využití počítače s distribuovanou pamětí (každý procesor je vybaven vlastní pamětí) by nastaly další komplikace - jednotlivé paměti by totiž musely mezi sebou při každé iteraci komunikovat, a to minimálně během propagace. V tomto případě se jeví jako podstatně výhodnější první zmíněný způsob paralelizace LBM, kdy komunikované množství dat mezi jednotlivými paměťmi obsahuje pouze hodnoty z hranic jednotlivých podoblastí.

V posledních letech se k výpočtům stále častěji používají také grafické karty. Možností jejich využití pro LBM se zabývá například Peng a kol [21]. Podobně jako Martys a Hagedorn [19] navrhuji rozdělení výpočetní domény na podoblasti, ty jsou však mnohem menší, jelikož grafické karty pracují s mnohonásobně vyšším počtem operačních jednotek, než je tomu u procesorů.

Kapitola 5

Výsledky

Na následujících stranách jsou prezentovány výsledky získané pomocí vlastního softwaru. Pomocí nich bylo ověřeno správné fungování metody, a to jednak porovnáním s výsledky jiných autorů (výsledky zjišťování odporových koeficientů obtékané koule a krychle pro škálu Reynoldsových čísel), ale také s výsledky vlastního experimentu (zkoumání volného pádu těles v tekutině).

Dále tato kapitola nabízí ukázky možného využití vlastního softwaru na simulaci proudění vzduchu vířeném rotujícím ventilátorem a proudění vzduchu kolem automobilu.

5.1 Stanovení odporového koeficientu

Správnost implementace IBM byla ověřena především na jednoduchém experimentu zjištění odporového koeficientu c_D koule a krychle v závislosti na Reynoldsovo číslo. Reynoldsovo číslo bylo v případě výpočtu odporového koeficientu koule stanoveno vždy jako $Re = u_\infty D / \nu$, kde D je průměr koule a u_∞ je referenční rychlost - v tomto případě rychlost na vstupu. V případě stanovení odporového koeficientu krychle se veškeré charakteristické rozměry brali jako odpovídající rozměry koule s totožným objemem.

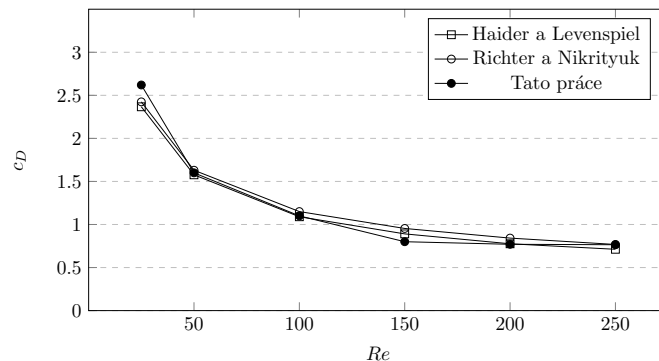
Vzhledem k tomu, že výstupem LBM je síla působící na těleso, je nutné dále stanovit odporový koeficient přímým výpočtem dosazením do vzorce

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_0 u_\infty^2 A}, \quad (5.1)$$

kde F_D je skutečná odporová síla působící na těleso, ρ_0 je hustota tekutiny na vstupu a A je plocha průmětu tělesa do roviny kolmé k proudu (tedy pro obě uvedená tělesa jde o plochu $A = \pi D^2 / 4$).

Výpočet proběhl na doméně o 90x90x100 uzlech. Průměr koule byl $6\Delta x$ a délka strany krychle $12\Delta x$.

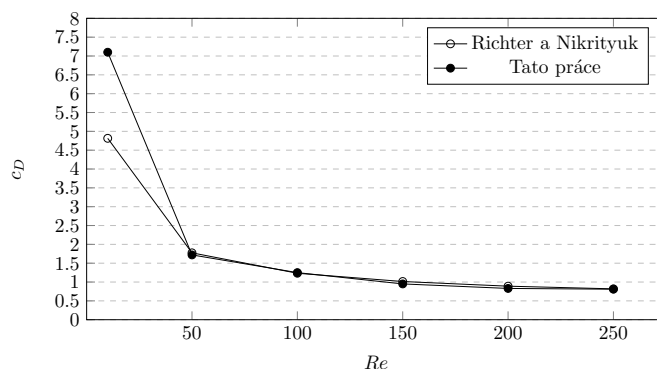
Výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách 5.1 a 5.2 a alternativně i v grafech 5.1 a 5.2. Ke srovnání byly použity výsledky prezentované ve článku Richtera a Nikrikiuka [24]. V případě odporového koeficientu koule i s experimentálními daty zveřejněnými v [9].



Obrázek 5.1: Odporový koeficient obtékané koule v závislosti na Reynoldsově čísle. Porovnání s pracemi [24], [9].

Re	Haider a Levenspiel	Richter a Nikrikyuk	Tato práce
25	2.367	2.424	2.62
50	1.557	1.63	1.6
100	1.090	1.150	1.1
150	0.891	0.954	0.8
200	0.776	0.842	0.77
250	0.712	0.768	0.765

Tabulka 5.1: Srovnání odporového koeficientu koule s referenčními hodnotami.



Obrázek 5.2: Odporový koeficient obtékané krychle v závislosti na Reynoldsově čísle. Porovnání s prací [24].

Re	Richter a Nikrityuk	Tato práce
10	4.815	7.1
50	1.775	1.72
100	1.233	1.25
150	1.014	0.95
200	0.89	0.83
250	0.819	0.81

Tabulka 5.2: Srovnání odporového koeficientu krychle s referenčními hodnotami.

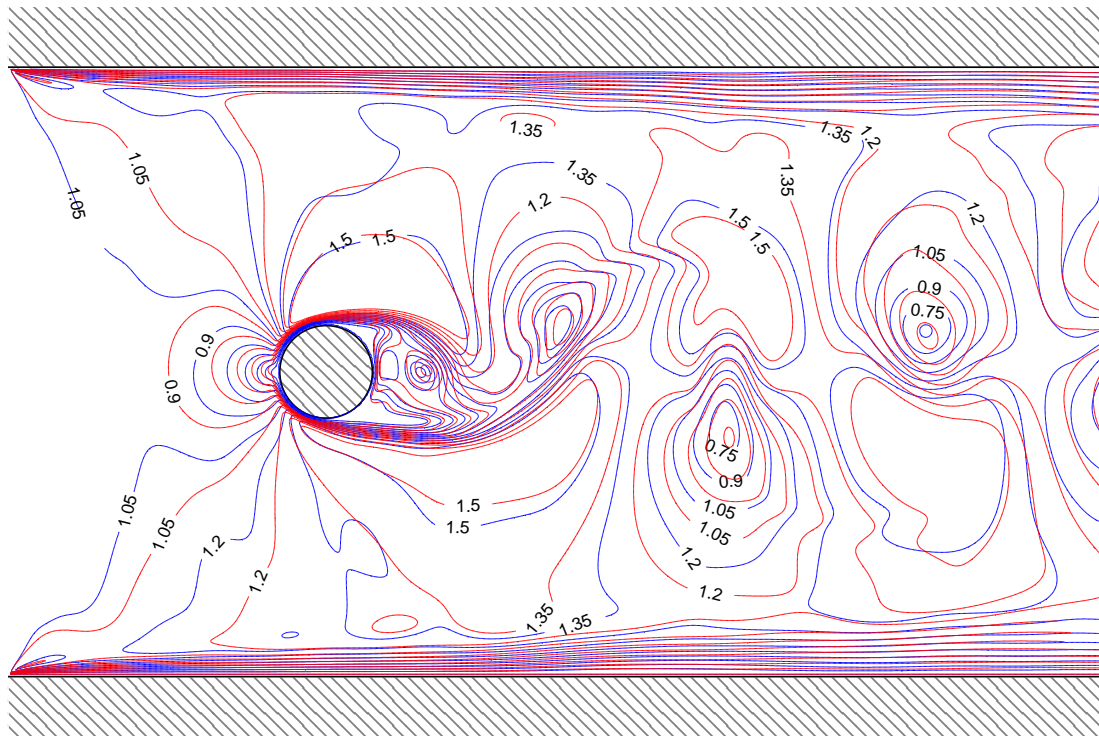
5.2 Srovnání IBM s pevnou stěnou

V rámci ověření správného fungování IBM bylo testováno proudění kolem válce (2D úloha). Válec byl nejprve přímo zabudován v geometrii domény (byl nahrazen pevnou stěnou) a poté simulován pomocí IBM.

Výpočet byl v obou případech proveden na doméně o vnějších rozměrech $500\Delta x$ na $900\Delta x$, průměr válce $81\Delta x$. V simulaci byla použita tekutina o kinematické viskozitě $\nu = 6.04 \cdot 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}]$ a hustotě $\rho = 1000 [\text{kg}/\text{m}^3]$, rychlost proudění na vstupu pak byla $u_0 = 1 [\text{m}/\text{s}]$.

Vzhledem k tomu, že Reynoldsovo číslo řešeného proudění je $Re = 248$, vzniká za válcem víření, tzv. Karmanova stezka. Za válcem se v rozmezí Reynoldsových čísel $50 < Re < 10^5$ střídavě odtrhávají víry. Srovnáním velikostí a rozestupů takových vírů lze snadno kvalitativně posoudit proudění.

Shoda obou přístupů je velice dobrá, jak je vidět z porovnání hladin rychlosti na obrázku 5.3. Odlišnosti je možno připsat například faktu, že při nahrazení válce pevnou stěnou je jeho povrch nahrazen schodovitou aproximací, jelikož LBM operuje na čtvercové mřížce, která není schopna postihnout oblý povrch. Naproti



Obrázek 5.3: Porovnání hladin rychlostního pole (v metrech za sekundu) proudění kolem válce vyjádřeného pevnou stěnou (modře) a IBM (červeně).

tomu IBM dokáže zaoblení postihnout lépe.

5.3 Pád koule v odporovém prostředí

Dalším testovacím příkladem je volný pád tělesa v odporovém prostředí. Výsledky simulace jsou konfrontovány s vlastním experimentem a též s referenčními daty [3].

Předmětem experimentů bylo sledování volného pádu kulovitého tělesa v odporovém prostředí.

Vlastní experiment byl prováděn v nádobě kvádrového tvaru s čtvercovou podstavou. Rozměry této nádoby jsou 140 [mm] x 140 [mm] x 340 [mm], přičemž tato nádoba byla naplněna do výšky 300 [mm] vodou z důvodu snadnější manipulace. Měřenými veličinami byly čas a především poloha tělesa, přičemž z předešlých je možné stanovit přibližnou rychlost tělesa v průběhu času. Poloha tělesa byla snímána fotoaparáty ze dvou stran, vzájemný snímací úhel fotoaparátů byl přibližně 90°. K měření byl použity vysokofrekvenční fotoaparáty s frekvencí snímání 29Hz. Nákres nastavení experimentu je uveden na obrázku 5.4.

Při simulaci experimentu byla použita hustota vody při 21°C, tedy $\rho = 998[\text{kgm}^{-3}]$. Hustota koule byla stanovena na $\rho_k = 1025[\text{kgm}^{-3}]$ a její průměr 39.85mm. Těleso bylo na začátku experimentu umístěno do výšky 280 [mm] ode dna nádoby. Pro simulaci pádu koule nebyla okolní tekutina podrobena působení gravitační síly, ale namísto toho byla na kouli samotnou aplikována vztlaková síla. Jako referenční hustota pro vztlakovou sílu

$$F_{vz} = \rho_r V g \quad (5.2)$$

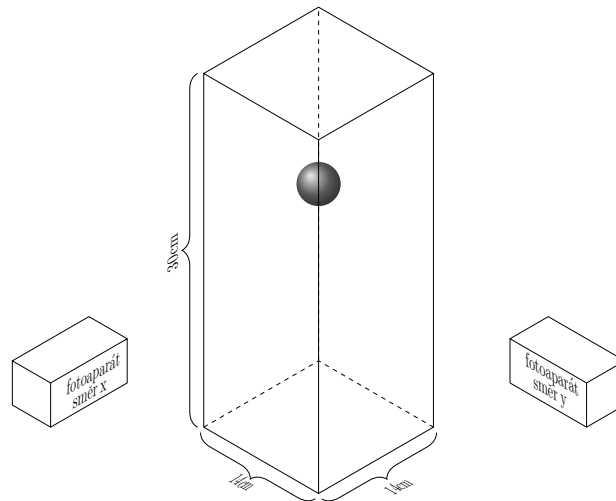
byl použit aritmetický průměr hustot tekutin v jejím nejbližším okolí.

Změna polohy koule byla v experimentu sledována pouze ve svislém směru, případné její výchylky v horizontálním směru či natočení nebyly vyhodnocovány. Nicméně i tyto výchylky a natočení mohly mít vliv na pohyb ve svislém směru. Na obrázku 5.5 jsou srovnány výsledky vlastního experimentu z obou pohledů (vlevo) s výsledky simulace (vpravo). Na výsledcích simulace je též znázorněno rychlostní pole.

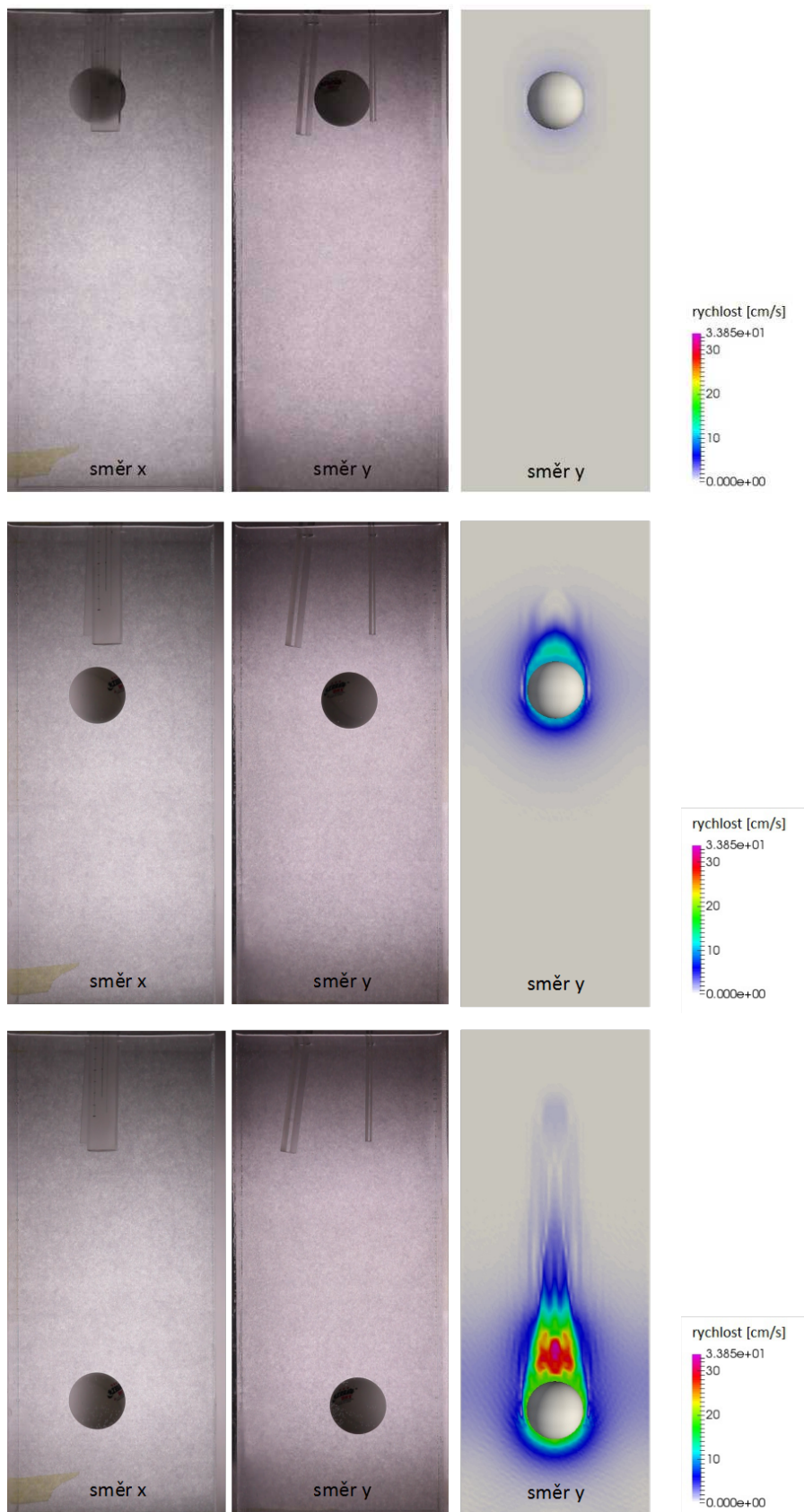
Podrobný graf polohy koule (zjištěné simulací a vlastním experimentem) vztažený k jejímu poloměru je též uveden na obrázku 5.6.

Vývoj polohy a rychlosti padající koule byl též porovnán z experimentem uvedeným ve článku [3] pro dvě nejvyšší uvedené Reynoldsova $Re = 11.6$ a $Re = 32.2$. Parametry experimentu lze též nahlédnout v článku.

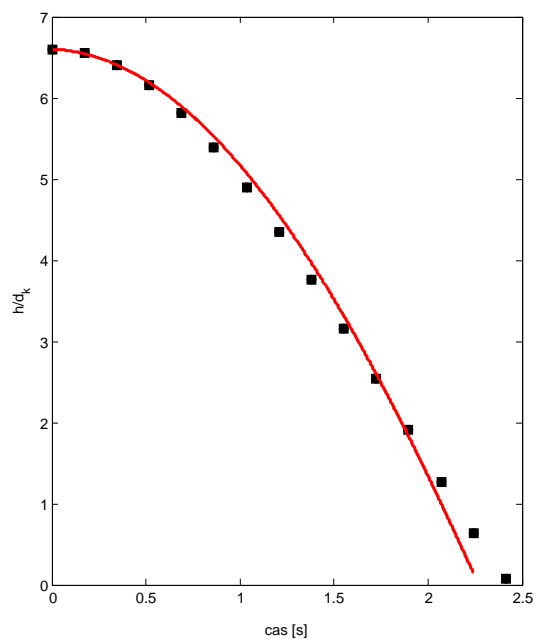
Výsledky porovnání jsou zřejmé z obrázku 5.7.



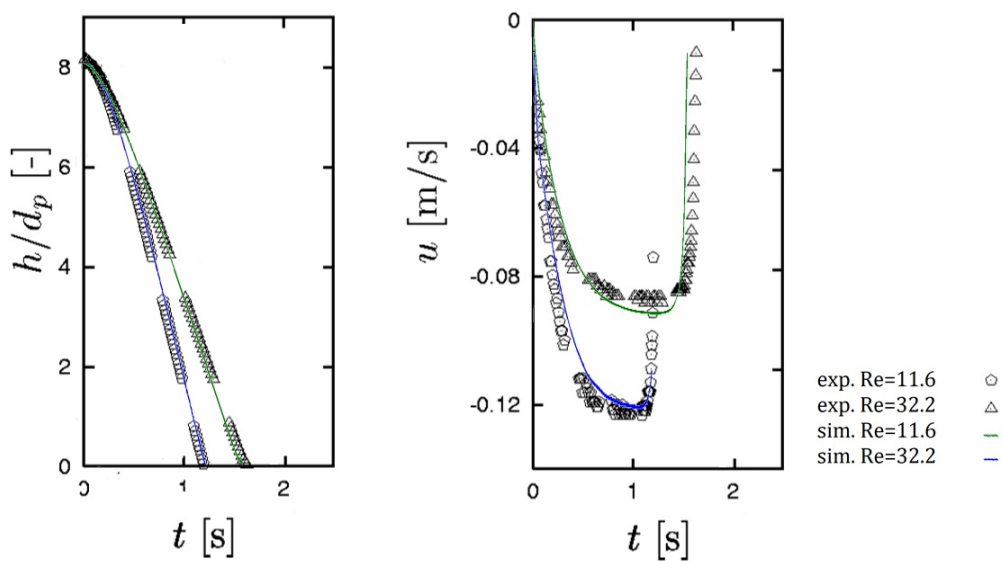
Obrázek 5.4: Nastavení experimentu - pád koule v odporovém prostředí.



Obrázek 5.5: Srovnání výsledků experimentu (z různých pohledů - první a druhý sloupec) a výsledků simulace (vpravo) včetně zobrazení proudového pole. Srovnání jsou uvedena zhora v časech $t = 0\text{[s]}$, $t = 1\text{[s]}$ a $t = 2\text{[s]}$.



Obrázek 5.6: Srovnání polohy koule zjištěné vlastním experimentem s polohou zjištěnou simulací (vztaženo na průměr koule d_k).



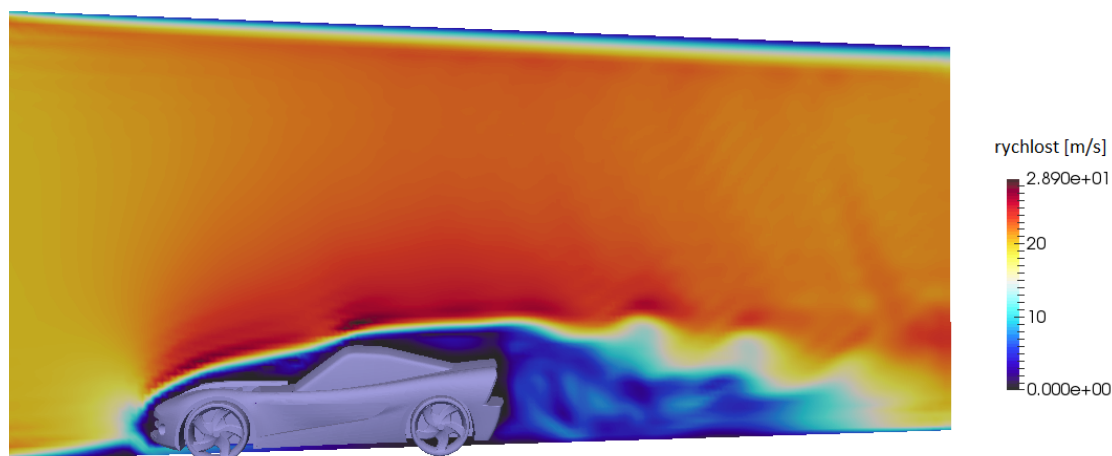
Obrázek 5.7: Srovnání rychlosti a polohy koule zjištěné experimentálně ([3]) a simulací pro dané parametry. (Poloha opět vztažena na průměr koule.)

5.4 Aplikační příklady

V této sekci jsou uvedeny dva příklady dalšího užití interakce tělesa s tekutinou. Ačkoli možnosti využití jsou daleko širší, v této práci uvádím ukázkou proudění vzduchu kolem automobilu a dmýchání vzduchu rotujícím ventilátorem.

5.4.1 Proudění vzduchu kolem automobilu

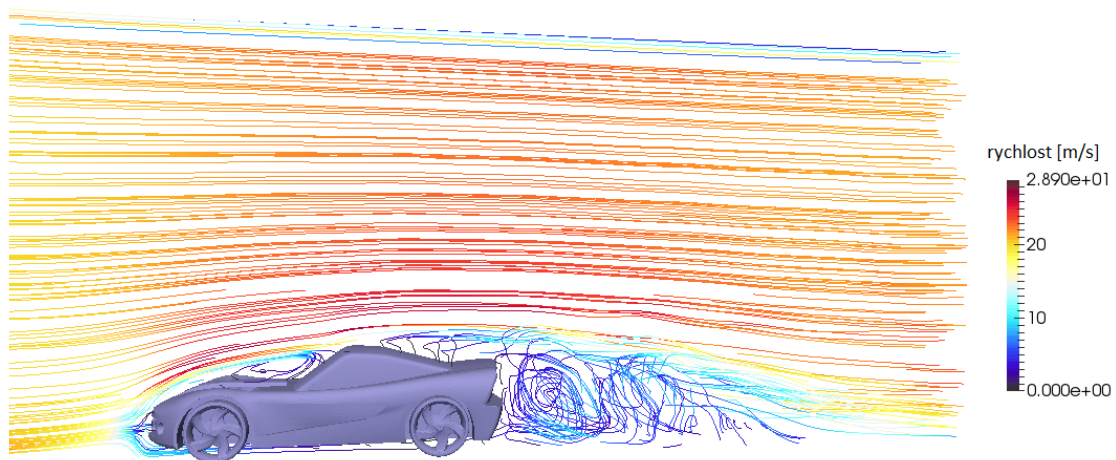
Na obrázcích 5.8 a 5.9 níže jsou uvedeny výsledky simulace proudění vzduchu kolem karoserie automobilu. Karoserie automobilu byla v simulaci nehybná, pohyboval se pouze okolní vzduch, který byl proti karoserii hnán rychlostí 20[m/s]. V tomto případě tedy byla řešena pouze jednostranná interakce, jelikož vliv proudícího vzduchu na karoserii nebyl brán v potaz.



Obrázek 5.8: Rychlostní pole vzduchu proudícího kolem karoserie automobilu při rychlosti 72[km/h]).

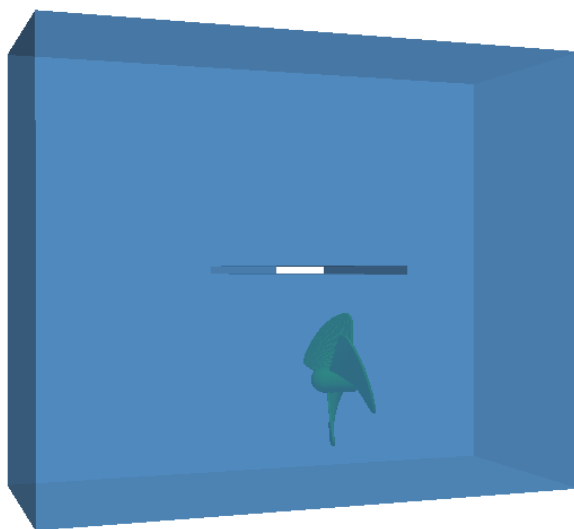
5.4.2 Dmýchání vzduchu ventilátorem

Dalším využitím interakce může být vliv pohybujícího se tělesa na okolní tekutinu. V rámci této práce je uveden vliv rotujícího ventilátoru na pohyb vzduchu v uzavřeném prostoru. Geometrii domény lze nahlédnout na obrázku 5.10. Nádoba je kvádrového tvaru a horní část je od spodní oddělena příčkou. Ventilátor je umístěn ve spodní části. Na počátku byla rychlost proudění v celé oblasti nulová.

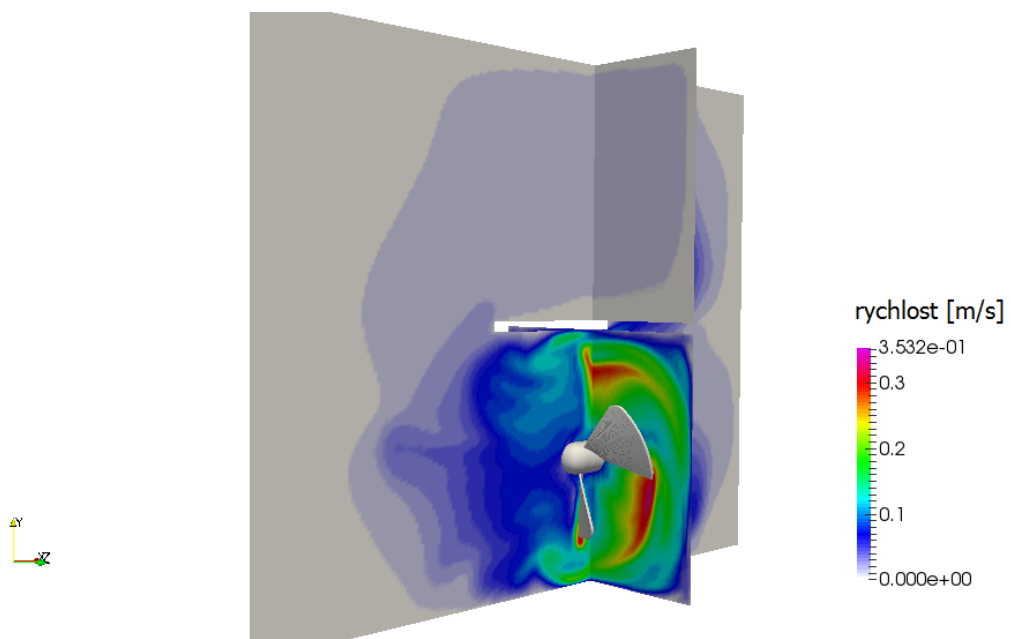


Obrázek 5.9: Proudnice vzduchu proudícího kolem karoserie automobilu při rychlosti 72[km/h]).

Na obrázku 5.11 je opět vidět rychlostní pole vzduchu v oblasti. Snímek zachycuje stav po 8.27 vteřinách.



Obrázek 5.10: Geometrie oblasti pro simulaci dmýchání vzduchu rotujícím ventilátorem.



Obrázek 5.11: Rychlostní pole vzduchu dmýchaného rotujícím ventilátorem.

Závěr

V této práci byla prozkoumána možnost řešení interakce tuhého tělesa s tekutinou pomocí lattice Boltzmannovy metody a immersed boundary method.

Pomocí immersed boundary method bylo možné postihnout složité geometrie oblastí či obtékaných těles - bylo ale nutno zajistit hustou a pravidelnou síť bodů na povrchu tělesa. Zatímco tradiční IBM pracuje se silovým působením tělesa na tekutinu, úprava IBM prezentovaná v této práci využívá aplikaci kinematické okrajové podmínky v tekutině u povrchu tělesa. Potom je možné zjistit požadovanou rychlost tekutiny v blízkosti tělesa přímým výpočtem ze znalosti rychlosti tělesa, a byla tedy odstraněna nutnost zpětné aproximace vlivu tělesa na tekutinu. V práci uvedená varianta IBM se tedy ukázala být vhodným nástrojem pro simulaci interakce tekutiny s tuhým tělesem, tomu odpovídají i výsledky simulací, které se kvalitativně neliší od referenčních.

Nevýhodou užití IBM je fakt, že pro nízká Reynoldsova čísla ($Re < 10$) není okrajová podmínka na hranici tělesa dodržena dostatečně přesně. Pravděpodobně z toho důvodu, že nízká Reynoldsova čísla vedou na vysoký relaxační parametr τ a rychlost tekutiny u povrchu tělesa se příliš pomalu ustaluje na požadované rychlosti. Tento úkaz lze sledovat u výsledků zjišťování odporových koeficientů krychle a koule.

Naopak pro vysoká Reynoldsova čísla (řádově vyšší než 10^5) může být nestabilní lattice Boltzmannova metoda. Bohužel při použití IBM není možné použít standardní stabilizační metody zakládající se na potlačování velkých změn rychlosti (např. LES), a tedy zbývá možnost řešit nestabilitu kratším časovým krokem či jemnější mřížkou LBM.

Výsledky uvedené v poslední kapitole ukazují, že prezentovaná metodika je použitelná na simulaci interakce tekutiny se statickými i pohyblivými tuhými tělesy. Dobré výsledky, kterých bylo dosaženo, přislubují, že popsanou metodu bude možné použít na širokou škálu problémů.

V budoucnu lze přistoupit k simulaci interakce tekutiny s poddajnými tělesy. To znamená, že stávající LBM a IBM by musely být doplněny o metodu pro řešení deformací poddajného tělesa (např. MKP). O to širší uplatnění pak řešení takového problému skýtá.

Literatura

- [1] Y. B. Bao and J. Meskas. Lattice boltzmann method for fluid simulations. 2011.
- [2] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. *Physical Review*, 1954.
- [3] A. Cate, C. H. Nieuwstad, J. J. Derksen, and H. E. A. Van den Akker. Particle imaging velocimetry experiments and lattice-boltzmann simulations on a single sphere settling under gravity. *Physics of Fluids*, 2002.
- [4] S. Chen and G. D. Doolen. Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998.
- [5] D. d’Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three-dimensions. *Philosophical Transactions of Royal Society of London A*, 2002.
- [6] J. Feng, H. H. Hu, and D. D. Joseph. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid. part 1. sedimentation. *Journal of Fluid Mechanics*, 261:95–134, 1994.
- [7] U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J.-P. Rivet. Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex System*, 1987.
- [8] Z. Guo and T. S. Zhao. Lattice boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Physical Review E*, 66, 2002.
- [9] A. Haider and O. Levenspiel. Drag coefficient and terminal velocity of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology*, 58:63–70, 1989.
- [10] T. Inamuro, M. Yoshino, and F. Ogino. A non-slip boundary condition for lattice boltzmann simulations. *Physics of Fluids*, 1995.

- [11] M. Izham, T. Fukui, and K. Morinishi. Application of regularized lattice boltzmann method for incompressible flow simulation at high reynolds number and flow with curved boundary. *Journal of Fluid Science and Technology*, 6, 2011.
- [12] G. V. Krivovichev. Numerical stability analysis of lattice boltzmann equations for linear diffusion. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 9:1687–1692, 2015.
- [13] A. J. C. Ladd. Numerical Simulations of Particulate Suspensions via a Discretized Boltzmann Equation Part I. Theoretical Foundation. *J. Fluid Mech.*, 271, 1994.
- [14] P. Lallemand and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, 2000.
- [15] J. Latt, B. Chopard, O. Malaspinas, M. Deville, and A. Michler. Straight velocity boundaries in the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, 77, 2008.
- [16] E. Le Coupanec. Lattice boltzmann bathnagar-gross-krook no-slip boundary condition for tangentially moving walls. Master’s thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2010.
- [17] Q. Liu and Y.-L. He. Multiple-relaxation-time lattice boltzmann modeling of incompressible flows in porous media. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 429:215–230, 2015.
- [18] Q. Liu, Y.-L. He, Q. Li, and W.-Q. Tao. A multiple-relaxation-time lattice boltzmann model for convection heat transfer in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 73, 2014.
- [19] N. S. Martys and J. G. Hagedorn. Multiscale modeling of fluid transport in heterogeneous materials using discrete boltzmann methods. *Materials and Structures*, 35:650–659, 2002.
- [20] E. J. Mossige. Curved boundary conditions for the lattice boltzmann method. Master’s thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2011.
- [21] L. Peng, K.-i. Nomura, T. Oyakawa, R. K. Kalia, A. Nakano, and P. Vashishta. Parallel lattice boltzmann flow simulation on emerging multi-core platforms. *Lecture Notes in Computer Science*, 5168, 2008.

- [22] D. A. Perumal and A. K. Dass. A review on the development of lattice boltzmann computation of macro fluid flows and heat transfer. *Alexandria Engineering Journal*, 54, 2015.
- [23] C. S. Peschkin. Numerical analysis of blood flow in the heart, journal =.
- [24] A. Richter and P. A. Nikrityuk. Drag forces and heat transfer coefficients for spherical, cuboidal and ellipsoidal particles in cross flow at sub-critical reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 2012.
- [25] R. Rojas, T. Seta, K. Hayashi, and A. Tomiyama. Immersed boundary-finite difference lattice boltzmann method using two relaxatoin times. 2012.
- [26] J. I. B. Romero. Fluid-particle interaction with the immersed boundary lattice boltzmann method. Master's thesis, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2012.
- [27] B. Servan-Camas and F. T.-C. Tsai. Two-relaxation-time lattice boltzmann method for the anisotropic dispersive henry problem. *Water Resource Research*, 46, 2010.
- [28] S. Succi. *The Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press, 2009.
- [29] J. Wu and C. Shu. A coupled immersed boundary lattice boltzmann method and its simulation for biomimetic problems. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2015.
- [30] F. Yang, X. Shi, X. Guo, and Q. Sai. Mrt lattice boltzmann schemes for high reynolds number flow in two-dimensional lid-driven semi-circular cavity. *Energy Procedia*, 16, 2012.
- [31] J. Yang, Z. Wang, and Y. Qian. A momentum exchange-based immersed boundary-lattice boltzmann method for fluid structure interaction. *APCOM & ISCM*, 2013.
- [32] Q. Zou and X. He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Phys. Fluids*, 9, 1997.