

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

KATEDRA APLIKOVANÉ ELEKTRONIKY A TELEKOMUNIKACÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Možnosti využití statistického počtu
v elektrotechnice**

vedoucí práce: Ing. Pavel Prosr, Ph.D.

2012

autor: Bc. Jan Hrebinec

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jan HREBINEC**
Osobní číslo: **E10N0158P**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Dopravní elektroinženýrství a autoelektronika**
Název tématu: **Možnosti využití statistického počtu v elektrotechnice**
Zadávající katedra: **Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :


1. Definujte obor spolehlivosti elektrických zařízení.
2. Zpracujte možnosti užití statistického počtu v elektrotechnice.
3. Aplikujte statistické počty na konkrétní data.

Rozsah grafických prací: **dle doporučení vedoucího**
Rozsah pracovní zprávy: **dle doporučení vedoucího**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

Student si vhodnou literaturu vyhledá v dostupných pramenech podle doporučení vedoucího práce.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Pavel Prosr, Ph.D.**
Katedra technologií a měření
Konzultant diplomové práce: **Ing. Pavel Prosr, Ph.D.**
Katedra technologií a měření

Datum zadání diplomové práce: **17. října 2011**
Termín odevzdání diplomové práce: **11. května 2012**


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Dr. Ing. Vjačeslav Georgiev
vedoucí katedry

V Plzni dne 17. října 2011

Anotace

Tato diplomová práce je zaměřena na možnosti využití statistického a pravděpodobnostního počtu v elektrotechnice a ve spolehlivosti elektrotechnických zařízení. Jejím cílem je definovat obor spolehlivosti elektrických zařízení, zpracovat možnosti využití statistického a pravděpodobnostního počtu v této oblasti a demonstrovat různé metody stanovení spolehlivostních parametrů zařízení. Práce se zaměřuje na význam náhodné veličiny v technické praxi a na její dopady na přesnost měření a životnost elektrotechnických zařízení. Cílem je také demonstrovat statistické a pravděpodobnostní počty na konkrétních příkladech a experimentálních datech a popsat využití statistických nástrojů v analýze změřených dat.

Klíčová slova

statistika, pravděpodobnost, spolehlivost, náhodná proměnná, porucha

Abstract

The Possibilities of using of statistical calculations in the Electrical Engineering

This thesis is focused on the use of statistical and probabilistic calculus in electrical engineering and reliability of the electrical equipment. The goal is to define the field reliability of electrical equipment, process the possibility of using of statistical and probabilistic calculus in this field and demonstrate various methods of determination of reliability parameters. The thesis focuses on the importance of random variable in engineering practice and her impacts on measurement accuracy and service life of electrical equipment. The goal is also to demonstrate statistical and probabilistic calculations on the specific examples describe the use of statistical tools in the analysis of measured data.

Key words

statistics, probability, reliability, random variable, failure

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni. Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce. Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

V Plzni dne 7.5.2012

.....
Podpis studenta

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu této diplomové práce Ing. Pavlu Prosovi, Ph.D. za jeho cenné připomínky a odborné rady, které mi byly v průběhu jejího vypracování poskytnuty.

Obsah

Úvod	9
1 Pravděpodobnost a statistika	10
1.1 Statistika	10
1.2 Pravděpodobnost	10
1.2.1 Základní vztahy mezi náhodnými jevy	11
2 Náhodná veličina	14
2.1 Distribuční funkce.....	14
2.2 Číselné charakteristiky náhodné proměnné.....	15
2.2.1 Charakteristiky polohy.....	16
2.2.2 Charakteristiky rozptylu (variability)	18
2.2.3 Charakteristiky šikmosti a špičatosti	20
2.2.4 Kvantilové charakteristiky	21
3 Spolehlivost elektrických zařízení	22
3.1 Teorie spolehlivosti	22
3.2 Základní pojmy teorie spolehlivosti.....	23
3.3 Poruchy.....	24
3.3.1 Dělení poruch	24
4 Spolehlivostní ukazatele	27
4.1 Ukazatele spolehlivosti neobnovovaných objektů.....	28
4.2 Ukazatele spolehlivosti obnovovaných objektů.....	31
5 Pravděpodobnostní rozdělení používaná ve spolehlivosti v elektrotechnice	33
5.1 Rozdělení diskrétních náhodných veličin	33
5.1.1 Binomické rozdělení (Bernoulliho)	33
5.1.2 Poissonovo rozdělení.....	35
5.1.3 Geometrické rozdělení	36
5.1.4 Hypergeometrické rozdělení	37
5.2 Rozdělení spojitých náhodných veličin.....	38
5.2.1 Exponenciální rozdělení.....	39
5.2.2 Normální rozdělení	41
5.2.3 Logaritmicko-normální rozdělení	44
5.2.4 Weibullovo rozdělení.....	45
5.2.5 Rayleighovo rozdělení	47

6	Spolehlivostní modely	48
6.1	Sériové systémy	48
6.2	Paralelní systémy	49
6.3	Séριο-paralelní systémy	50
7	Spolehlivostní analýza systémů	52
7.1	Metoda postupného zjednodušování spolehlivostního schématu	52
7.2	Metoda rozkladu	54
7.3	Metoda cest	55
7.4	Metoda řezů	58
7.5	Metoda seznamu	60
7.6	Metoda stromu poruch	62
7.7	Metoda stromu událostí	62
7.8	Markovovy modely	63
7.8.1	Markovovy řetězce	64
7.8.2	Markovovy procesy	65
7.8.3	Markovovy modely pro opravované systémy	67
8	Měření spolehlivostních parametrů	70
8.1	Náhodný výběr	70
8.1.1	Kombinatorika	71
8.2	Odhady parametrů zákona rozdělení	72
8.2.1	Bodové odhady	72
8.2.2	Intervalové odhady (intervaly spolehlivosti)	73
8.3	Analýza dat	74
8.3.1	Chyby měření	74
8.3.2	Základní předpoklady o datech	76
8.3.3	Grafická identifikace statistických zvláštností dat	78
9	Měření závislostí mezi veličinami	81
9.1	Regresní analýza	81
9.2	Korelační analýza	85
	Závěr	89
	Použité zdroje	90

Úvod

Statistika je dnes velmi používaným nástrojem v mnoha odvětvích. Je založena na systematickém sběru a vyhodnocování dat. Závěry z ní plynoucí jsou pro mnoho oborů užitečným ukazatelem. Zjednodušeně řečeno statistika vypovídá o tom, jakou měrou (případně s jakou intenzitou) se vyskytuje určitý zkoumaný jev. V souvislosti s tím se také často setkáváme s pojmem pravděpodobnost, která vyjadřuje míru správnosti statistikou formulovaných závěrů, resp. vymezuje jakýsi toleranční interval přesnosti (chybovosti). Pravděpodobnost se statistikou tedy velmi úzce souvisí, podobně jako např. fyzika s matematikou. Obecně je předmětem statistického zkoumání celá řada odvětví, jako jsou např. sociologické průzkumy, analýzy rizik a další. V neposlední řadě nachází statistika široké uplatnění i v technických oborech a to zejména v oblasti měření a zpracování technických dat a při stanovování spolehlivosti elektrických a jiných zařízení. Cílem této diplomové práce je zpracovat možnosti využití statistického počtu v elektrotechnice.

1 Pravděpodobnost a statistika

1.1 Statistika

Statistika neodmyslitelně patří k našemu každodennímu životu. Ze statistických informací vycházejí naše znalosti o světě. Tyto informace jsou tvořeny soubory dat, což jsou v podstatě nějaké číselné hodnoty mající určitý kontext. Statistické metody umožňují data znázorňovat, analyzovat, zkoumat jejich struktury, určovat závislosti a dělat o nich závěry. Využíváme přitom naše znalosti o kontextu dat. [2]

Velmi podstatný je původ dat. Rozlišujeme data pozorovaná a experimentální. Statistický výzkum začíná přípravou plánu výzkumu, návrhem schématu sběru dat, následným měřením charakteristik objektů. Tímto způsobem získáme konkrétní hodnoty, se kterými lze dále pracovat. Také posuzujeme smysluplnost a validitu získaných údajů. [2]

Statistika je věda, která nemá vlastní předmětnou oblast v reálném světě. Je částí teoretické i aplikované matematiky a také metodologií výzkumu. Statistika vychází z abstraktních pojmů, které v konkrétní aplikaci nabývají konkrétního obsahu. V teorii statistiky jsou náhodnost a neurčitost modelovány pomocí teorie pravděpodobnosti. [2]

1.2 Pravděpodobnost

Teorii pravděpodobnosti používáme ke zkoumání tzv. náhodných pokusů. Při náhodném pokusu existuje pro určité neměnné počáteční podmínky určitá množina možných výsledků, z nichž nastane jeden z nich (např. hod kostkou). Výsledek pokusu není předem jednoznačně určen a při opakování pokusu tedy může nastat výsledek jiný. To náhodné pokusy odlišuje od pokusů deterministických, jejichž výsledek je na základě určitých neměnných počátečních podmínek vždy stejný a lze ho tedy předem jednoznačně určit (chemická reakce). Množinu možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω . [6] Náhodný jev je podmnožinou množiny Ω .

Náhodnost určitého pokusu je obvykle spojena s nedostatečnou znalostí všech jeho počátečních podmínek. Kdybychom např. při hodu kostkou byli schopni přesně určit a v následujícím pokusu zopakovat všechny počáteční podmínky (poloha a orientace kostky v prostoru, její rychlost, rychlost rotace, úhel a místo dopadu apod.), bylo by možné předpovědět, které číslo na kostce padne. Vzhledem k tomu, že tyto údaje nejsme schopni

dostatečně přesně zjistit a zopakovat, používáme k určení předpovědí metod teorie pravděpodobnosti. [4]

Výsledků teorie pravděpodobnosti využívá zejména matematická statistika. Časté jsou aplikace na různé náhodné procesy sledované v čase. Dnes je teorie pravděpodobnosti široká disciplína zahrnující mnoho podoborů. [5]

Pravděpodobnost náhodného jevu X označujeme $P(X)$ a nabývá reálných nezáporných čísel od 0 do 1, která jsou mírou očekávatelnosti výskytu jevu (0 – nemožná událost, 1 - jistá událost). Často se také setkáváme s procentuálním vyjádřením míry pravděpodobnosti.

Alternativní používanou mírou pravděpodobnosti je **šance**, která je definována jako poměr pravděpodobnosti určité události ku pravděpodobnosti, že nastane událost opačná: $šance = p / (1 - p)$. Šance se často v praxi uvádí jako celočíselný zlomek nebo též poměrově srovnáním pravděpodobnosti výskytu dvou náhodných jevů. Například šance 1:1 je tedy rovna pravděpodobnosti $p = 1/(1+1) = 1/2 = 0,5 = 50\%$.

O tzv. **klasické pravděpodobnosti** mluvíme tehdy, pokud jsou všechny výsledky stejně možné, jejich počet je konečný a nemohou nastat zároveň lze pravděpodobnost náhodného jevu A definovat jako podíl příznivých jevů m a počtu všech možných výsledků n .

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

1.2.1 Základní vztahy mezi náhodnými jevy

V oblasti spolehlivosti elektrických zařízení využíváme vztahy mezi náhodnými jevy např. k výpočtu pravděpodobnosti, že náhodně vybraný výrobek z nějaké výrobní linky bude vadný. Dále je používáme při stanovování ukazatelů spolehlivosti ze spolehlivostních schémat – násobení pravděpodobnosti u sériového zapojení prvků atd. Rozlišujeme náhodné jevy neslučitelné (nemohou nastat současně) a slučitelné (mohou nastat současně). Mezi náhodnými jevy platí následující vztahy:

$$\text{Průnik jevů A a B:} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.2)$$

$$\text{Sjednocení jevů A a B (neslučitelné):} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1.3)$$

$$\text{Sjednocení jevů A a B (slučitelné):} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.4)$$

$$\text{Jev opačný (doplňkový) k jevu A:} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.5)$$

Zatím jsme mluvili o jevech nezávislých, kdy výskyt jednoho jevu neovlivňoval výskyt jevu druhého. V opačném případě mluvíme o jevech závislých, pro které platí následující pravidla:

Podmíněná pravděpodobnost - pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal určitý jiný jev B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.6)$$

Bayesova věta - $P(B_j|A)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu B_j za předpokladu, že nastal jev A, a naopak $P(A|B_j)$ je pravděpodobnost jevu A podmíněná výskytem jevu B_j .

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \quad (1.7)$$

[1]

Příklad použití:

Na základě zkušeností je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku vrátí kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, zatímco u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,20. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je opravdu standardní? [3]

Řešení:

Označme si jevy následovně:

Jev A – zkouška u výrobku dopadla kladně,

Jev B_1 – výrobek je standardní,

Jev B_2 – výrobek je nestandardní.

Pravděpodobnost obou hypotéz B_1 a B_2 je $P(B_1) = 0,9$ a $P(B_2) = 0,1$.

Podmíněné pravděpodobnosti jevu A vzhledem k hypotézám B_1 a B_2 nabývají hodnot $P(A/B_1) = 0,95$ a $P(A/B_2) = 0,2$.

Dosazením do vztahu (1.7) pak dostaneme pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška vrátila kladný výsledek, je standardní:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A / B_i)} = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2)} = \frac{0,90 \cdot 0,95}{0,90 \cdot 0,95 + 0,10 \cdot 0,20} = 0,98$$

V technické praxi se poznatky zmíněné v této kapitole využívají zejména pro hodnocení spolehlivosti výrobků, správnosti získaných výsledků, minimalizaci chyb a obecně k analýze a zpracování dat. Důležitým pojmem v těchto oblastech je náhodná veličina.

2 Náhodná veličina

Náhodnou veličinou rozumíme veličinu X , jejíž hodnoty x jsou zcela určeny výsledkem náhodného pokusu [7]. Náhodným pokusem je v technické praxi nejčastěji měření určitých parametrů nějakého zařízení. Například v teorii spolehlivosti je nejčastější náhodná veličina doba do poruchy. Rozlišujeme dva druhy náhodné proměnné:

- **Diskrétní náhodná proměnná** – nabývá ve stanoveném intervalu početného počtu hodnot (např. kostka, ruleta).
- **Spojité náhodná proměnná** – nabývá libovolné hodnoty z určitého intervalu čísel, má v daném intervalu spojitý průběh (např. odečet z měřicího přístroje).

Předpis, který určuje vztah mezi možnými hodnotami náhodné proměnné a jim odpovídajícími pravděpodobnostmi se nazývá zákon rozdělení pravděpodobnosti náhodné proměnné, které lze vyjádřit distribuční funkcí $F(x)$. [1]

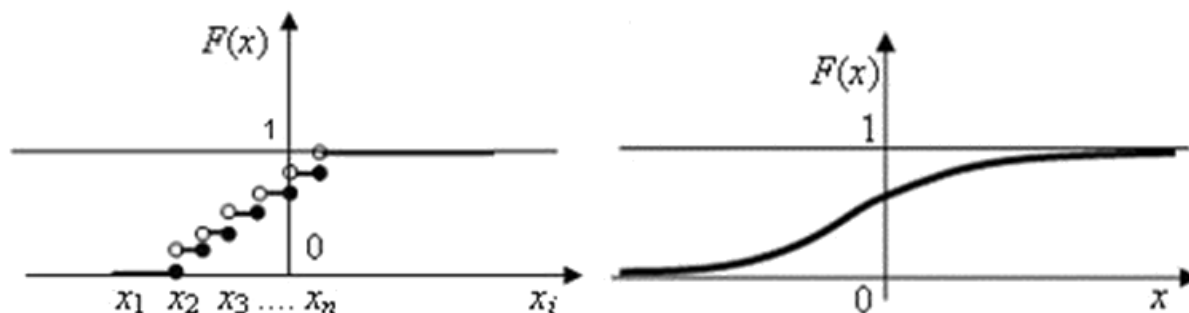
2.1 Distribuční funkce

Pojem distribuční funkce si můžeme vysvětlit následovně. Mějme diskrétní náhodnou proměnnou, která v daném intervalu nabývá řady hodnot $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, přitom jsou známy pravděpodobnosti $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, které těmto hodnotám náhodné proměnné odpovídají. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné proměnné X je pak možno popsat distribuční funkcí podle vztahu (2.1). [7]

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i) \quad (2.1)$$

Distribuční funkci lze sestavit z pravděpodobnostní tabulky obsahující posloupnost hodnot náhodné veličiny a jim příslušející pravděpodobnosti. V případě diskrétní náhodné proměnné je distribuční funkce stupňovitá, kde velikost skoku je rovna pravděpodobnosti nabytí hodnoty. Skoky se nacházejí v bodech, odpovídajících možným hodnotám náhodné proměnné. [7]

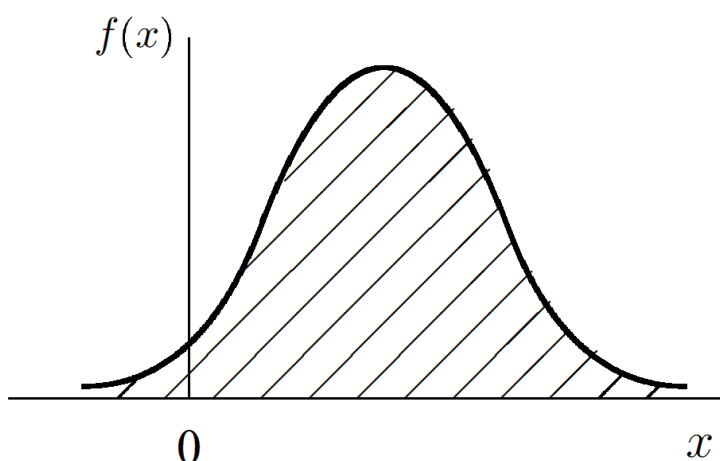
V případě distribuční funkce spojitě náhodné proměnné je pravděpodobnost $P(X = x) \rightarrow 0$ vzhledem k nekonečnému počtu možných stavů. Průběh distribuční funkce diskrétní i spojitě náhodné proměnné je zobrazen na *Obr. 1*. [8]



Obr. 1 - Průběh distribuční funkce diskrétní (vlevo) a spojitě (vpravo) náhodné proměnné [8]

Rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny se určuje prostřednictvím funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x)$, která je zobrazena na Obr. 2 a definována vztahem (2.2). [7]

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.2)$$



Obr. 2 - Průběh hustoty pravděpodobnosti [7]

2.2 Číselné charakteristiky náhodné proměnné

Pro zjednodušení se informace o náhodné veličině vyjadřuje jedním nebo více ukazateli, které náhodnou proměnnou dobře vystihují a pro jejichž výpočet existuje jednoznačná definice. Tyto číselné charakteristiky poskytují informaci o poloze náhodné proměnné, jejím rozptylu, šikmosti a špičatosti. [7]

2.2.1 Charakteristiky polohy

Charakteristiky polohy jsou určité hodnoty, které lze považovat za střed, kolem kterého náhodné veličiny kolísají. [9] Určují tedy polohu rozdělení na číselné ose. K charakteristikám polohy patří střední hodnota, medián a modus.

Střední hodnota

Střední hodnota je parametrem rozdělení náhodné veličiny, který je definován jako vážený průměr daného rozdělení. [4]

Pro *diskrétní náhodnou proměnnou* lze psát:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad (2.3)$$

kde x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ jsou možné hodnoty náhodné proměnné a $p(x_i)$ jsou jim příslušející pravděpodobnosti nebo přesněji pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné X , které nabývají konkrétních hodnot x_i s pravděpodobnostmi $p(x_i) = P(X = x_i)$. [7]

Je-li pravděpodobnost všech diskretních hodnot stejná, pak lze předchozí vztah vyjádřit jako jejich aritmetický průměr:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.4)$$

Pro střední hodnotu *spojité náhodné proměnné* je možno psát vztah:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2.5)$$

Výše uvedené vztahy platí pro parametry základního souboru resp. parametry rozdělení náhodné veličiny. V případě výběrového souboru (např. naměřené hodnoty) užíváme místo střední hodnoty aritmetický průměr \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.6)$$

Nevýhodou střední hodnoty a aritmetického průměru je jeho velké zkreslení extrémními hodnotami.

Medián

Medián \tilde{x} je hodnota dělící řadu podle velikosti seřazených hodnot na dvě stejně početné poloviny. Jedná se tedy o prostřední hodnotu takto seřazeného souboru. Toto platí pro lichý počet n hodnot v souboru. V případě sudého počtu prvků, se obvykle medián stanovuje jako aritmetický průměr hodnot na místech $n/2$ a $n/2+1$.

Pro medián platí následující vztah (pro spojitou náhodnou proměnnou):

$$P(X < \tilde{x}) = P(X > \tilde{x}) \quad (2.7)$$

Velkou výhodou mediánu jako statistického ukazatele je, že není ovlivněn extrémními hodnotami ve zkoumaném statistickém souboru. Proto se často používá v případech, kdy aritmetický průměr dává nevhodné výsledky zkreslené právě extrémními hodnotami. Medián souboru $\{1, 2, 2, 3, 9\}$ je číslo 2, což je zjevně vhodnější ukazatel převažující tendence než hodnota aritmetického průměru 3,4.

V případě sudého počtu prvků souboru $\{20, 20, 20, 20, \mathbf{20}, \mathbf{30}, 30, 35, 64, 92\}$ se medián stanoví jako aritmetický průměr prostředních dvou hodnot, tedy $(20+30)/2=25$.

Medián lze definovat i na nečíselném souboru, např. $\{\text{bez vzdělání, absolvent ZŠ, vyučen, maturant, vysokoškolák}\}$ je roven hodnotě *vyučen*, pokud kategorie vzdělání považujeme za seřazené podle stupně dosaženého vzdělání.

Použití mediánu je nevýhodné u souborů, ve kterých sledovaný znak nabývá jen dvou možných hodnot. Tam se medián chová stejně jako modus – je hrubým měřítkem vlastností rozdělení a v případě, že obě kategorie jsou zastoupeny zhruba stejně, je velmi nestabilní. [11]

Modus

Modus náhodné veličiny X (označováno jako $Mod(X)$) nebo \hat{x} je hodnota, která se v daném statistickém souboru vyskytuje nejčastěji (je to hodnota znaku s největší relativní četností). Představuje jakousi typickou hodnotu sledovaného souboru a jeho určení předpokládá roztřídění souboru podle obměn znaku.

Modem souboru $\{10, 15, \mathbf{20}, \mathbf{20}, 25, 38, 40\}$ je číslo s nejvyšší četností, tedy 20.

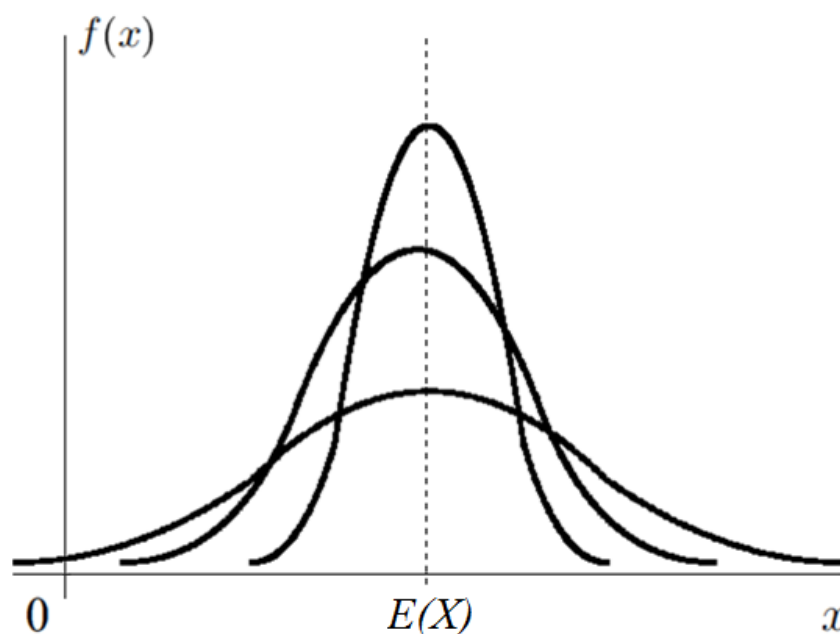
Stejně jako v případě mediánu je výhodou modu možnost použití i pro nečíselná data. Např. modus souboru $\{\mathbf{jablko}, \text{pomeranč}, \text{hruška}, \text{pomeranč}, \mathbf{jablko}, \mathbf{jablko}, \text{hruška}\}$ je *jablko*. [11]

2.2.2 Charakteristiky rozptylu (variability)

Charakteristiky rozptylu udávají míru rozptýlení hodnot náhodné veličiny kolem nějaké charakteristiky polohy (např. střední hodnoty). K charakteristikám rozptylu patří rozptyl, směrodatná odchylka a variační koeficient. [7]

Rozptyl

Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako střední hodnota kvadrátů odchylek od střední hodnoty a značí se $\sigma^2(X)$, $S^2(X)$, nebo $D(X)$. [4] Rozptyl vyjadřuje rozptýlenost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty, jak ukazuje *Obr 3*.



Obr. 3 - Rozptyl hodnot náhodné proměnné kolem její střední hodnoty [7]

Rozptyl **diskrétní náhodné proměnné** X vzhledem k její střední hodnotě $E(X)$ je možno popsat rovnicí

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot p(x_i) \quad (2.8)$$

kde x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ jsou hodnoty náhodné proměnné a $p(x_i)$ jsou jim odpovídající pravděpodobnosti.

Je-li pravděpodobnost všech diskretních hodnot stejná, pak se předchozí vztah zjednoduší na:

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \quad (2.9)$$

V případě výběrového souboru se rozptyl značí S^2 a namísto střední hodnoty se použije aritmetický průměr \bar{x} . Např. u souboru hodnot $\{4, 8, 6, 8, 7, 8, 7, 4, 8, 10\}$ je aritmetický průměr roven číslu 7 a rozptyl kolem něho 3,2.

Pro rozptyl *spojité náhodné proměnné* platí rovnice:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx \quad (2.10)$$

[7]

Směrodatná odchylka σ

Směrodatná odchylka je v teorii pravděpodobnosti a statistice často používanou mírou statistické disperze. Jedná se o kvadratický průměr odchylek hodnot znaku od jejich střední hodnoty. Značí se řeckým písmenem σ , se obvykle definuje jako odmocnina z rozptylu náhodné veličiny X . [7]

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (2.11)$$

V podstatě vypovídá o tom, jak moc se od sebe navzájem liší typické případy v souboru zkoumaných čísel. Pokud je malá, jsou si prvky souboru většinou navzájem podobné, a naopak velká směrodatná odchylka značí velké vzájemné odlišnosti. Pomocí pravidel 1σ a 2σ (viz kapitola 5.2.2) lze přibližně určit, jak daleko jsou čísla v souboru vzdálená od průměru, resp. hodnoty náhodné veličiny vzdálené od střední hodnoty. Společně s rozptylem je směrodatná odchylka nejužívanější charakteristika variability náhodné proměnné. [11]

Variační koeficient

Variační koeficient je relativním ukazatelem rozptýlení hodnot náhodné proměnné. Na základě střední hodnoty a směrodatné odchylky nemusí být při porovnání dvou souborů vždy patrná srovnatelnost rozptylu. Pro variační koeficient platí vztah:

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \quad (2.12)$$

Někdy se užívá jeho stonásobku a udává se potom v procentech. [7]

Často se také setkáváme s **variačním rozpětím**, které je definováno jako rozdíl maximální a minimální hodnoty náhodné proměnné X :

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (2.13)$$

Používá se např. pro sestavení histogramu nebo krabicového grafu (viz kapitola 8.3.3).

2.2.3 Charakteristiky šikmosti a špičatosti

Šikmost charakterizuje tvar křivky rozdělení náhodné veličiny. Vypovídá o tom, jak jsou hodnoty náhodné proměnné symetricky či asymetricky rozloženy kolem střední hodnoty. Je vyjádřena koeficientem šikmosti, kde \bar{x} značí aritmetický průměr a s směrodatnou odchylku.

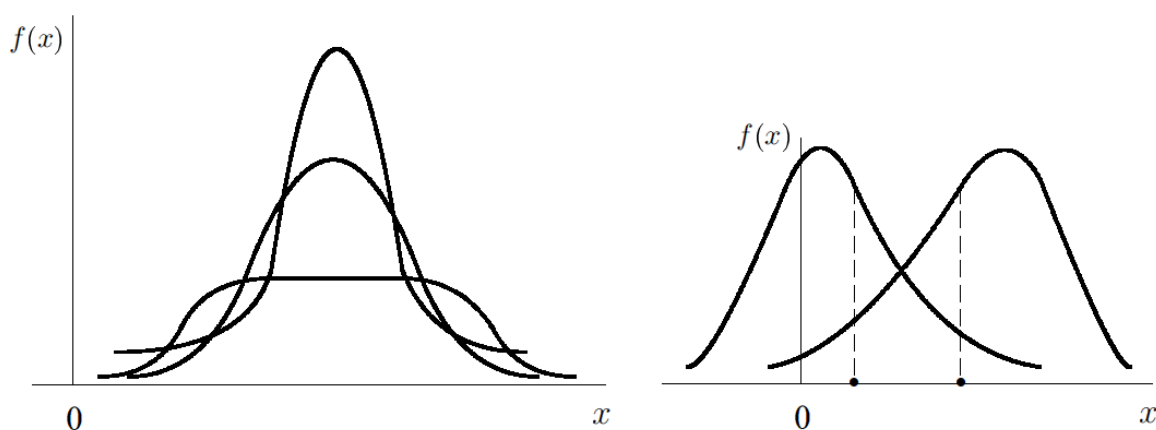
$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot s^3} \quad (2.14)$$

Symetrická rozdělení jako např. normální rozdělení (viz kapitola 5.2.2) mají koeficient šikmosti roven nule. Sešikmení k vyšším hodnotám je vyjádřeno kladným koeficientem, sešikmení k nižším hodnotám naopak koeficientem záporným. [6]

Špičatost vypovídá o tom, jak je rozdělení náhodné veličiny špičaté (strmé) nebo naopak ploché. Je vyjádřena koeficientem špičatosti, který je pro normální rozdělení nulový.

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot s^4} \quad (2.15)$$

Kladný koeficient špičatosti značí, že dané rozdělení je špičatější než rozdělení normální. Záporný koeficient naopak znamená, že dané rozdělení je plošší než normální. [6]



Obr. 4 - Charakteristiky špičatosti (vlevo) a šikmosti (vpravo) [7]

Obr. 4 ukazuje různé případy šikmosti a špičatosti rozdělení. Na základě charakteristik šikmosti a špičatosti lze posuzovat normalitu naměřených dat (viz kapitola 8.3.2), což je základní předpoklad pro provedení jejich analýzy.

2.2.4 Kvantilové charakteristiky

Kvantily jsou ve statistice hodnoty, které dělí uspořádaný statistický soubor na určitý počet stejně velkých částí. Popisují body, ve kterých distribuční funkce náhodné proměnné prochází danou hodnotou (viz Obr. 5). [1] Stanovení obecně $p\%$ kvantilu (např. doby do poruchy nějakého zařízení) znamená určit takovou dobu provozu, kdy pravděpodobnost poruchy dosáhne právě $p\%$ hodnoty (např. určit čas, kdy je pravděpodobnost poruchy 5 %). Kvantily pro některé význačné hodnoty mají vlastní specifické názvy:

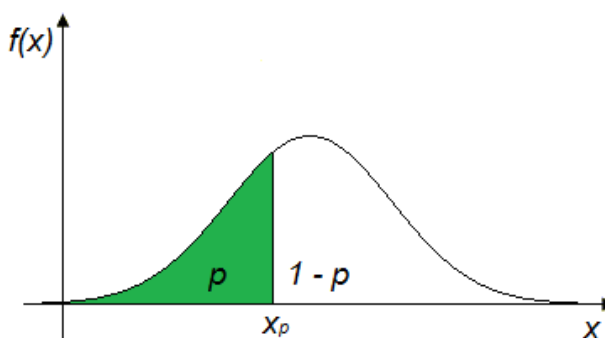
Kvartil – dělí uspořádaný soubor na čtyři stejně obsazené části.

Medián - 50% kvantil $x_{0,5}$ rozděluje statistický soubor na dvě stejně početné části.

Decil – dělí uspořádaný soubor na deset stejně obsazených částí, značí se $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,9}$.

Percentil – dělí soubor na sto stejně obsazených částí, značí se $x_{0,01}, x_{0,02}, \dots, x_{0,99}$.

Kvantilové rozpětí – rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším kvantilem.



Obr. 5 – $p\%$ kvantil x_p rozděluje plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti v poměru $p : (1-p)$

S náhodnými veličinami se v technické praxi setkáváme velmi často. Jsou nepředvídatelné a ovlivňují např. výsledky měření nebo spolehlivost nejrůznějších zařízení. Dříve uvedené poznatky v této kapitole (2) se používají pro modelování náhodných poruch a tvoří tak základ teorie spolehlivosti.

3 Spolehlivost elektrických zařízení

Poznatky zmíněné v předchozích kapitolách jsou důležitými nástroji pro obor spolehlivosti. Spolehlivost elektrických zařízení má stále vyšší význam, a to zejména díky rostoucí složitosti a počtu prvků v elektronických systémech, čímž logicky narůstá i pravděpodobnost poruchy, protože každý prvek v systému má svou vlastní spolehlivost (resp. pravděpodobnost bezporuchového provozu). Velký důraz na spolehlivost je kladen v kritických oblastech souvisejících s bezpečností, jako jsou např. bezpečnostní systémy automobilu. Zde by mohlo mít selhání řídicí elektroniky či akčního členu v kritický moment fatální a život ohrožující následky. V důsledku toho obsahují komplexní systémy vlastní vnitřní diagnostiku. O spolehlivosti systému vypovídá celá řada faktorů, které je třeba sledovat a vyvozovat z nich patřičné závěry. Spolehlivost je nejčastěji udávána jako míra pravděpodobnosti, tedy jakási procentní šance, že dané zařízení bude po určitou dobu bezchybně plnit funkci, pro kterou bylo navrženo, a to v předem definovaných mezích a podmínkách. Spolehlivost by sama o sobě byla pouhým pojmem, pokud by nebyla kontrolována, měřena a počítána. Jde o důležitou vlastnost každého, nejen elektrického, zařízení. Díky testování spolehlivosti získávají výrobci důležitou zpětnou vazbu o kvalitě výrobního procesu a platí, že čím dříve je závada odhalena (v rané fázi výroby), tím nižší jsou náklady na její odstranění.

3.1 Teorie spolehlivosti

Teorie spolehlivosti je disciplína aplikované statistiky, která se zabývá zjišťováním, předvídáním a řízením spolehlivosti technických a dalších systémů. Stěžejním údajem, kterým se vyjadřuje spolehlivost daného objektu, je střední doba mezi poruchami (*MTBF*), která je většinou chápána jako průměrná doba bezporuchového provozu. Z dílčích hodnot *MTBF* jednotlivých komponent systému pak lze stanovit jeho celkovou spolehlivost. U složitějších technologických celků jsou spolehlivostní výpočty zahrnuty již do jejich návrhu. V takových případech se ve výpočtech uvažuje kromě střední doby do poruchy dané komponenty také střední doba do opravy (případně výměny) dané komponenty. Na základě spolehlivosti jednotlivých dílčích prvků je pak navrhována redundance. Při výpočtech se často pracuje s převrácenou hodnotou *MTBF*, neboli tzv. intenzitou poruch, která se označuje řeckým písmenem λ (lambda). [19]

3.2 Základní pojmy teorie spolehlivosti

Spolehlivost je definována jako obecná vlastnost objektu spočívající ve schopnosti plnit požadované funkce při zachování hodnot stanovených provozních ukazatelů v daných mezích a v čase podle stanovených technických podmínek. Spolehlivost je komplexní vlastnost, která zahrnuje dílčí spolehlivostní vlastnosti, jako např. bezporuchovost, životnost, udržitelnost, skladovatelnost a jiné vlastnosti. [15]

Bezporuchovost – schopnost výrobku plnit nepřetržitě požadované funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek. [15]

Životnost – definovaná doba, po kterou by měl výrobek plnit funkci, pro kterou byl navržen, vyjádřená počtem provozních hodin, provozních cyklů nebo kalendářní dobou. [7]

Udržitelnost – schopnost zařízení setrvat v provozuschopném stavu (předcházet poruchám) při dodržení předepsané údržby. [15]

Skladovatelnost – schopnost objektu zachovávat nepřetržitě bezvadný (a tedy provozuschopný) stav po dobu skladování a přepravy při dodržení předepsaných podmínek. Číselně se vyjadřuje např. střední dobou skladovatelnosti. [15]

Morální životnost – snížení užitné hodnoty výrobku působením času v důsledku rozvoje vědy a techniky, čímž dochází k zastarání stěžejních parametrů zařízení a tedy i k snížení jeho konkurenceschopnosti. [7]

Pohotovost – je komplexní vlastnost objektu, zahrnující bezporuchovost a opravitelnost objektu v podmínkách provozu. [1]

Bezpečnost – vlastnost objektu neohrožovat lidské zdraví nebo životní prostředí při plnění předepsané funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek. [1]

Provozuschopnost – objekt plní stanovené funkce a dodržuje hodnoty sledovaných parametrů v předepsaných mezích. [15]

Bezvadný stav – provozuschopný stav z hlediska všech sledovaných parametrů, které nás zajímají. [1]

Poškozený stav – narušení bezvadného stavu. [1]

Oprava – je souhrn činností konaných po poruše za účelem navrácení objektu do provozuschopného stavu. [15]

Diagnostika – Pojem diagnostika pochází z řeckého slova „dia-gnosis“ (skrže poznání). Cílem technické diagnostiky je detekce a lokalizace poruchy, zjištění jejího rozsahu, příčin vzniku a šíření poškození.

3.3 Poruchy

Pojmem porucha rozumíme narušení provozuschopného stavu objektu. Poruchy vznikají důsledkem působení mnoha vnitřních a vnějších vlivů, které jsou často nepostižitelné, nekontrolovatelné a zpravidla je nelze předem stanovit. Proces vzniku poruch je tedy považován za náhodný a lze tak na něj aplikovat pravidla teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. [7]

3.3.1 Dělení poruch

V teorii spolehlivosti uvažujeme pouze náhodné poruchy. Příčiny jejich vzniku mohou být různorodé a mohou také různě ovlivňovat funkci zařízení. Kritéria pro dělení poruch jsou dána jednak řetězcem událostí příčina – porucha – následek a jednak charakterem samotných poruch. V tomto ohledu lze poruchy dle [7] rozdělit následujících hledisek:

a) Podle příčin vzniku poruchy

- **Porucha z vnějších příčin** - vzniká nedodržováním stanovených provozních podmínek.
- **Porucha z vnitřních příčin** – porucha způsobená vlastní nedokonalostí objektu.
- **Nezávislá porucha** - porucha prvku, která nebyla způsobena vadou nebo poruchou jiného prvku soustavy.

- **Závislá porucha** - porucha prvku, která byla způsobena vadou jiného prvku soustavy.
- **Systematická porucha** - porucha opakující se u stejných výrobků a způsobená konstrukčními nedostatky objektu, závadami ve výrobním procesu apod.
- **Výrobní porucha** - vzniká nedodržováním výrobních postupů.

b) Podle následků poruchy

- **Závada** - drobná vada, která nemá vliv na schopnost zařízení plnit požadovanou funkci v provozu (např. vadný pixel na LCD panelu)
- **Porucha** – úplná nebo částečná ztráta schopnosti výrobku plnit funkci, pro kterou byl navržen.
- **Kritická porucha** - porucha, jejímž následkem je ohrožení nebo ztráta života, případně velká hmotná škoda.

c) Podle časového průběhu změn parametrů

- **Náhlá porucha** - vzniká prudkou změnou hodnot jednoho nebo více parametrů objektu, je zpravidla nepředvídatelná.
- **Postupná porucha** - vzniká v důsledku postupného zhoršování jednoho nebo více parametrů objektu, zpravidla může být předvídána na základě předchozích kontrol.
- **Občasná porucha (sporadická)** - trvá omezenou dobu, po níž objekt opět dosáhne bezporuchového stavu bez vnějšího zásahu.
- **Trvalá porucha** - objekt nedosáhne bezporuchového stavu bez vnějšího zásahu.

d) Podle stupně porušení provozuschopnosti

- **Úplná porucha** – vzniká v důsledku změn hodnot jednoho nebo více parametrů zařízení od předepsané úrovně stanovené technickými podmínkami, které úplně zabraňují fungování zařízení.
- **Částečná porucha** - vzniká v důsledku změn hodnot jednoho nebo více parametrů zařízení od úrovně stanovené technickými podmínkami, které omezují funkčnost objektu.

- **Havarijní porucha** – porucha, která je náhlá a úplná, má za následek úplnou ztrátu schopnosti provozu.
- **Degradační porucha** – postupná a částečná, má za následek postupné zhoršení schopnosti provozu.

4 Spolehlivostní ukazatele

Ukazatelé spolehlivosti jsou kvantitativní charakteristiky jedné nebo více vlastností objektů, určujících jeho spolehlivost. [1] Existuje řada metod, jak vypočítat spolehlivost konkrétního zařízení. Velká část jich je postavena na principu statistického a pravděpodobnostního počtu. Na tuto oblast existuje podrobný matematický aparát.

Spolehlivostní ukazatele se zjišťují v různých fázích technického života výrobku. V první řadě se jedná o období návrhu, kdy probíhá samotné projektování zařízení a jeho vnitřního uspořádání, na základě kterého se potom vytváří spolehlivostní schéma výrobku. Následně se provádí spolehlivostní analýza (výpočet spolehlivostních parametrů), čímž získáme projektovanou spolehlivost (více v kapitole 7). Při návrhu je třeba také uvažovat účinky prostředí na systém, působení vstupních veličin systému a vlivy člověka (konstruktérů při návrhu, dělníků při výrobě, operátorů, údržbářů při provozu).

V období konstrukce se provádí kontrola a řízení kvality procesu výroby pomocí nástrojů řízení jakosti. Mezi tyto nástroje patří např. diagramy příčin a následků (Ishikawa) nebo regulační diagramy, jejichž cílem je řízení procesů a další. Provádějí se také laboratorní zkoušky spolehlivosti. Ty mohou být *dlouhodobé* (probíhají ve standardních podmínkách jako v provozu až do konce životnosti, mají velkou výpovědní hodnotu), *zrychlené* (při zvýšené zátěži) nebo *zkrácené* (nezkouší se až do konce životnosti, mají malou výpovědní hodnotu). [1]

V souvislosti se zrychlenými zkouškami mluvíme o vytváření tzv. akceleračních modelů, které se používají pro předpověď intenzity poruch sledovaného výrobku při normálním provozním zatížení. Předpověď se provádí na základě dat získaných při vyšším zatížení, kterého se dosahuje různými akceleračními faktory (např. teplotou nebo napětím). Příkladem může být tzv. *Arrheniův zákon* (4.1), což je známý teplotní akcelerační model. Zjednodušeně tento model říká, že při zvýšení teploty o 10°C se životnost sníží o polovinu, při zvýšení o 20°C se životnost sníží o čtvrtinu atd. [29]

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T}} \quad (4.1)$$

A – předexponenciální faktor udávající frekvenci střetávajících se molekul [s^{-1}]

E – aktivační energie reakce [$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$]

R – univerzální plynová konstanta [$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$]

T – je absolutní teplota [K]

V období provozu zjišťujeme spolehlivostní ukazatele dlouhodobým měřením vlastností zařízení a následnou analýzou naměřených hodnot. Při tomto využíváme další nástroje statistického počtu jako např. bodové a intervalové odhady, grafické nástroje pro určení předpokladů o datech (normalita, homogenita), případně další početní nástroje pro určení korelací a regresí. Více o těchto nástrojích je uvedeno v kapitole 8.

4.1 Ukazatele spolehlivosti neobnovovaných objektů

Za neobnovovaný objekt je považován objekt neopravitelný nebo na nepřístupném místě či je jeho oprava neekonomická. Bezporuchovost objektu zpravidla sledujeme v závislosti na čase t , případně na jiné veličině (např. počet sepnutí spínače). [15] Při spolehlivostní analýze jsou dle [7] a [15] stěžejní zejména následující spolehlivostní ukazatele.

Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ udává pravděpodobnost, že v časovém intervalu $(0, t)$ nenastane porucha objektu. Sleduje se náhodná veličina X (doba do poruchy). $X = t \in \langle 0, T \rangle$, kde T je technický život objektu.

Pravděpodobnost bezporuchového provozu lze vyjádřit pomocí vztahu (4.2).

$$R(t) = 1 - Q(t) = P(X > t) = 1 - \int_0^t f(t)dt \quad (4.2)$$

Další možností je vyjádření prostřednictvím empirického vztahu (4.3).

$$R(t) = \frac{N_b}{N_0} = 1 - \frac{N_p}{N_0} \quad (4.3)$$

N_p – počet vadných výrobků za sledovaný interval 0 až t ,

N_0 – je počet výrobků zkoušeného souboru,

N_b – je počet bezvadných výrobků.

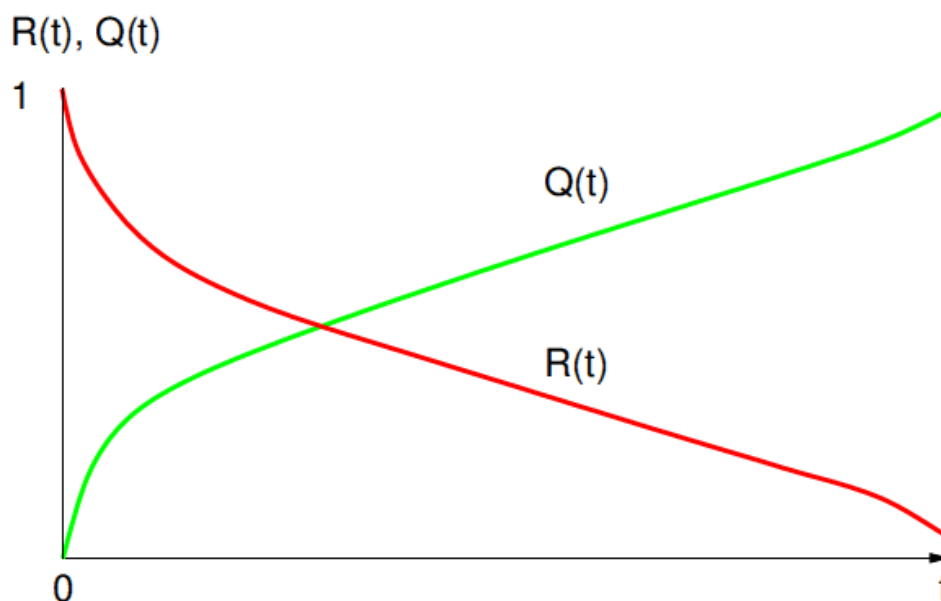
Pravděpodobnost poruchy $Q(t)$ udává pravděpodobnost, že v časovém intervalu $(0, t)$ nastane porucha objektu. Lze ji vyjádřit pomocí vztahu (4.4).

$$Q(t) = 1 - R(t) = P(X \leq t) = \int_0^t f(t)dt \quad (4.4)$$

Druhou možností je vyjádření pomocí empirického vztahu (4.5).

$$Q(t) = \frac{N_p}{N_0} \quad (4.5)$$

$R(t)$ je klesající funkce času, $Q(t)$ je naopak rostoucí funkce času. Obě veličiny jsou kladná reálná bezrozměrná čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a vzájemně se vylučují. [1] Zpravidla předpokládáme, že $R(0) = 1$, $R(\infty) = 0$. Z Obr. 6 je jasně patrné, že $R(t)$ s časem klesá, zatímco $Q(t)$ naopak s časem narůstá. V průsečíku obou funkcí (tzn. v určitém čase t) je pravděpodobnost bezporuchového provozu stejná jako pravděpodobnost poruchy (tj. 50 %).



Obr. 6 - Průběhy $R(t)$ a $Q(t)$ [28]

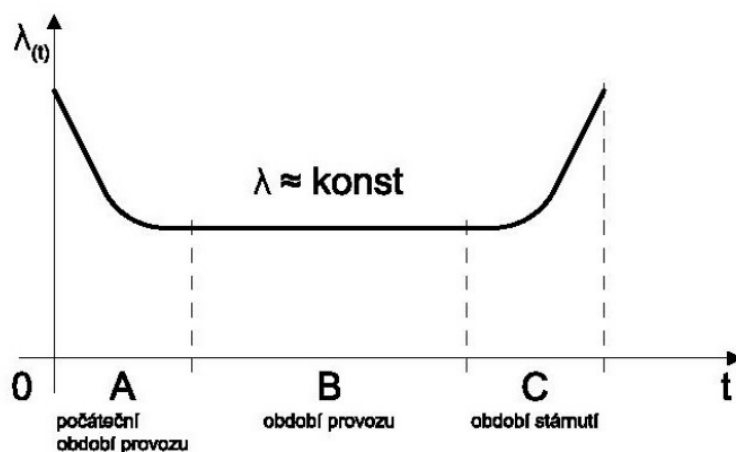
Hustota poruch $f(t)$ příslušná k distribuční funkci $Q(t)$ dána vztahem (4.6).

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \quad (4.6)$$

Intenzita poruch $\lambda(t)$ značí pravděpodobnost, že se objekt neporouchaný v čase t porouchá v malém časovém intervalu dt následujícím za časem t . Intenzita poruch patří v praxi k nejdůležitějším spolehlivostním ukazatelům. Lze ji popsat vztahem (4.7).

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - Q(t)} \quad (4.7)$$

Podle empirických poznatků má průběh $\lambda(t)$ tvar tzv. **vanové křivky**, která je znázorněna na Obr. 7. První relativně krátký úsek vanové křivky (A) představuje období zahořování a je charakteristický vysokou poruchovostí, která rychle klesá. Úsek B se vyznačuje ustáleným relativně nízkým výskytem poruch ($\lambda \approx konst$) a reprezentuje poměrně dlouhé časové období životnosti výrobku (zpravidla několik let). Závěrečná fáze dožití a materiálové únavy (C) je charakteristická prudkým nárůstem výskytu poruch výrobku. [1]



Obr. 7 – Vanová křivka [15]

Veličiny $f(t)$ a $\lambda(t)$ mají obvykle rozměr h^{-1} nebo rok^{-1} . Každá z těchto 4 základních veličin $R(t)$, $Q(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ popisuje bezporuchovost neopravovaného objektu a z každé z nich je možné odvodit 3 zbývající. Vzájemné převody udává následující tabulka. [15]

Tab. 1 – Vzájemné převody mezi jednotlivými ukazateli spolehlivosti [15]

	$R(t)$	$Q(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	$R(t)$	$1 - Q(t)$	$1 - \int_0^t f(t) dt$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]$
$Q(t)$	$1 - R(t)$	$Q(t)$	$\int_0^t f(t) dt$	$1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]$
$f(t)$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{dQ(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t) \cdot \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]$
$\lambda(t)$	$-\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$	$\frac{\frac{dQ(t)}{dt}}{1 - Q(t)}$	$\frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(t) dt}$	$\lambda(t)$

Střední doba bezporuchového provozu T_s – pro neobnovované objekty se také označuje jako střední doba do poruchy *MTTF* (Mean Time to Failure). Je rovna střední hodnotě provozní doby objektu, během níž nenastala žádná porucha. Je také definována jako střední (očekávaná) hodnota E náhodné veličiny, doby poruchy X . Je dána vztahem (4.8).

$$E(X) = T_s = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (4.8)$$

Gama-procentní život T_γ – doba, za kterou pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(T_\gamma)$ objektu dosáhne hodnoty γ . Je definován vztahem (4.9).

$$R(T_\gamma) = \gamma \quad (4.9)$$

Každý ukazatel spolehlivosti mění svou hodnotu v závislosti na velkém počtu vlivů. Například intenzitu poruch ovlivňuje především zatížení, teplota, mechanické namáhání, pracovní prostředí atd. [32]

4.2 Ukazatele spolehlivosti obnovovaných objektů

Obnovou objektu se rozumí přechod z poruchového do bezporuchového stavu prostřednictvím opravy. Při spolehlivostní analýze jsou dle [1] a [7] stěžejní zejména následující spolehlivostní ukazatele:

Střední doba mezi poruchami T_s – Někdy také označovaná jako MTBF (Mean time between failures). Obecně se stanoví jako aritmetický průměr všech naměřených dob bezporuchového provozu od skončení opravy do výskytu následující poruchy, kde t_p je kumulativní doba provozu (součet všech dob provozu za sledované období a n je počet výpadků způsobených poruchami). Střední dobu mezi poruchami popisuje vztah (4.10).

$$T_s = \frac{t_p}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{pi}}{n} \quad (4.10)$$

Intenzita poruch λ – převrácená hodnota střední doby mezi poruchami.

$$\lambda = \frac{1}{T_s} \quad (4.11)$$

Součinitel pohotovosti K_p – udává pravděpodobnost, že v čase t bude systém v provozuschopném stavu.

$$K_p = \frac{T_p(t)}{T_0(t) + T_p(t)} \quad (4.12)$$

T_p – doba bezporuchového provozu

T_0 – doba obnovy

Střední doba opravy T_0 – poměr celkové doby poruchových stavů t_0 ku celkovému počtu poruchových stavů n .

$$T_0 = \frac{t_0}{n} \quad (4.13)$$

Střední frekvence oprav μ – převrácená hodnota střední doby do opravy.

$$\mu = \frac{1}{T_0} \quad (4.14)$$

Součinitel prostoje K_n – poměr doby, kdy zařízení není v provozu k době celkové, pohybuje se v intervalu od 0 do 1.

$$K_n = 1 - K_p \quad (4.15)$$

Součinitel technického využití K_{tv} – je definován poměrem střední doby setrvání objektu v provozuschopném (bezporuchovém) stavu za určité, dostatečně dlouhé období, k celkové době používání za stejné období. T_u je kumulativní doba plánované údržby.

$$K_{tv} = \frac{T_p}{T_p + T_0 + T_u} \quad (4.16)$$

5 Pravděpodobnostní rozdělení používaná ve spolehlivosti v elektrotechnice

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je pravidlo, kterým každému jevu popisovanému touto veličinou, přiřazujeme určitou pravděpodobnost. Porovnáváme průběh např. poruchovosti s některým standardním rozdělením a určujeme parametry rozdělení. Nalezené (zvolené) rozdělení umožňuje dopočítat všechny potřebné charakteristiky včetně dalších stavů (bezporuchovost atd.). [1]

5.1 Rozdělení diskrétních náhodných veličin

Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení, pokud nabývá pouze diskrétních hodnot. Funkce P , která je definována vztahem $P(x) = P(X = x)$, $x \in R$, se nazývá pravděpodobnostní funkce. [34] Mezi rozdělení diskrétních náhodných veličin používaných ve spolehlivosti elektrotechnických zařízení patří rozdělení: binomické, Poissonovo, geometrické a hypergeometrické. Pomocí těchto rozdělení se často modelují různé případy náhodného výběru z nějaké zkoumané množiny prvků. Nejčastěji se ptáme na pravděpodobnost nalezení vadných výrobků z jejich testovaného souboru.

5.1.1 Binomické rozdělení (Bernoulliho)

Pomocí binomického rozdělení lze modelovat chování četností prvků majících určitou vlastnost v prostém náhodném výběru nebo variabilitu počtu nezávislých experimentů, které skončily specifikovaným výsledkem. [2] Provede-li se n nezávislých pokusů, přičemž se pravděpodobnost P výskytu sledovaného jevu (vadný výrobek, průraz izolace) nemění, řídí se pravděpodobnost $P(x)$ binomickým rozdělením. [7] Pravděpodobnostní funkci binomického rozdělení lze vyjádřit vztahem (5.1).

$$P(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \quad (5.1)$$

n – počet pokusů

m – počet příznivých výsledků

p – pravděpodobnost výskytu jevu

Střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny lze určit ze vztahů (5.2) a (5.3):

$$E(X) = n \cdot p \quad (5.2)$$

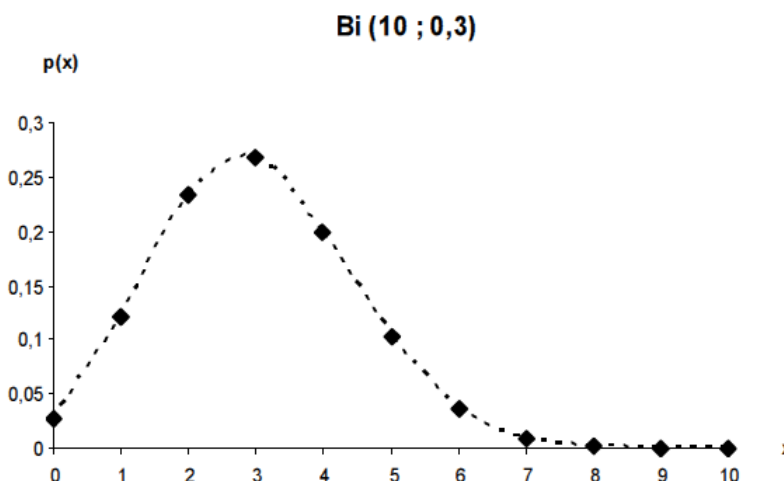
$$D(X) = n \cdot p(1 - p) \quad (5.3)$$

Pro velký počet pokusů ($n > 30$) a malou pravděpodobnost výskytu sledovaného jevu v jednotlivých pokusech ($p < 0,1$) se binomické rozdělení se aproximuje rozdělením Poissonovým. Aproximace vychází z předpokladu, že $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ a že $n \cdot p$ je konečné číslo. Položíme-li pak $n \cdot p = \lambda$, je možno pravděpodobnostní funkci vyjádřit vztahem (5.4). Střední hodnota je v tomto případě rovna rozptylu náhodné veličiny a je vyjádřena vztahem (5.5). [1]

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (5.4)$$

$$E(X) = D(X) = \lambda \quad (5.5)$$

Průběh pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení ukazuje Obr. 8.



Obr. 8 - Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení [33]

Příklad použití:

Průměrná zmetkovitost výrobků je 1%, náhodně vybereme 100 výrobků, které pak vrátíme zpět bez ohledu na to, jestli byl v pořádku nebo nikoliv. Jaká je pravděpodobnost, že budou nejvýše 2 vadné?

$$Bi(n; p) = (100; 0,01), \quad m = 0, 1, 2$$

Postupným dosazováním do vztahu (5.1) dostaneme:

$$P(0) = \binom{100}{0} \cdot 0,01^0 \cdot (1 - 0,01)^{100-0} = 0,366$$

$$P(1) = \binom{100}{1} \cdot 0,01^1 \cdot (1 - 0,01)^{100-1} = 0,3697$$

$$P(2) = \binom{100}{2} \cdot 0,01^2 \cdot (1 - 0,01)^{100-2} = 0,185$$

$$P = P(0) + P(1) + P(2) = \mathbf{0,92}$$

5.1.2 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení udává pravděpodobnost výskytu m poruch v intervalu $(0, t)$ v případě, že doby mezi jednotlivými poruchami jsou nezávislé náhodné veličiny s konstantní intenzitou poruch (počet vadných výrobků velké série, kdy pravděpodobnost vyrobení vadného výrobku je malá).

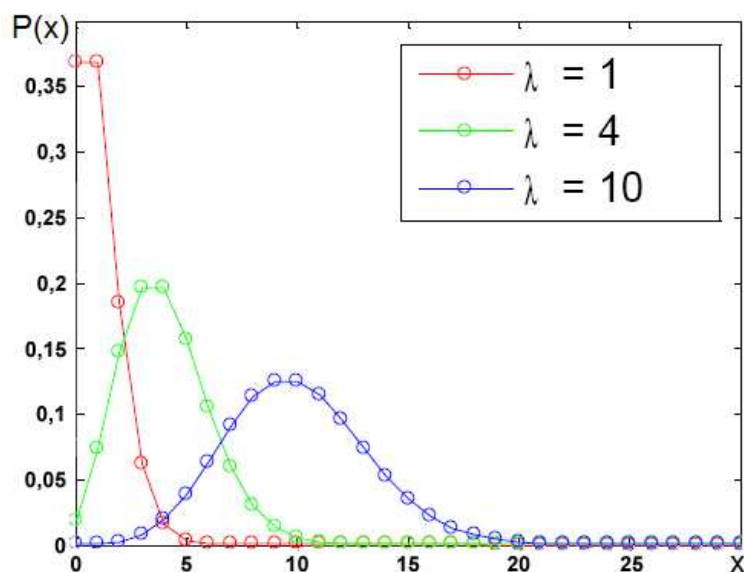
Používá se pro popis výskytu izolovaných jevů na pozadí času, délky, množství apod. Počet výskytů v měrné jednotce musí být předem udán. Pravděpodobnost současného vzniku dvou událostí v jednom intervalu je nulová. [1] Pro pravděpodobnostní funkci, střední hodnotu a rozptyl platí stejné vztahy, jako v případě aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým.

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (5.6)$$

$$E(X) = D(X) = n \cdot p = \lambda \quad (5.7)$$

x – počet sledovaných jevů (poruch)

λ – střední počet výskytů jevů v dané jednotce míry (parametr rozdělení)



Obr. 9 - Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení pro různé λ [34]

Příklad použití:

Televizor má za 10 000 hodin chodu v průměru 10 poruch. Určete pravděpodobnost poruchy za 200 hodin chodu.

Počet poruch za 200 hodin λ stanovíme: $\lambda = \frac{10}{10000} \cdot 200 = 0,2$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu získáme dosazením do vztahu (5.6): $P(0) = \frac{0,2^0}{0!} \cdot e^{-0,2} = 0,8187$

Pravděpodobnost poruchy vypočteme jako jev opačný (viz vztah (1.5)): $P = 1 - P(0) = 1 - 0,8187 = \mathbf{0,1813}$

[12]

5.1.3 Geometrické rozdělení

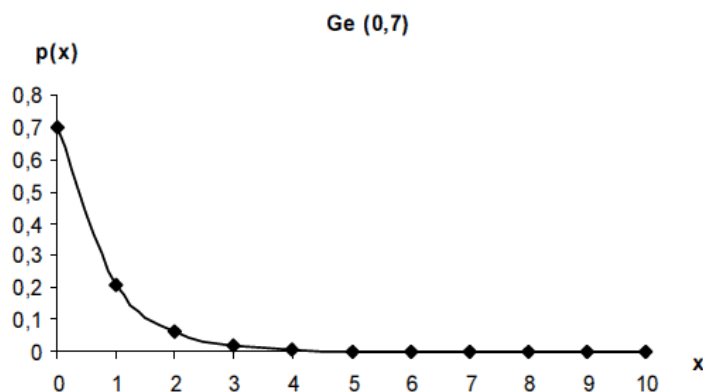
Geometrické rozdělení je zvláštním případem negativně binomického rozdělení (viz Obr. 10). Jedná se o model pravděpodobnostního chování náhodné veličiny X , která představuje počet neúspěchů, předcházejících n -tý úspěch v nekonečné sérii nezávislých pokusů, kdy pravděpodobnost úspěchu každého nezávislého pokusu je právě p . [1], [15] Pravděpodobnostní funkce je popsána vztahem (5.8), pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny platí vztahy (5.9) a (5.10):

$$P(X) = q^{n-1} \cdot p = p \cdot (1 - p)^{n-1} \quad (5.8)$$

$$E(X) = \frac{1 - p}{p} \quad (5.9)$$

$$D(X) = \frac{1 - p}{p^2} \quad (5.10)$$

Pomocí geometrického rozdělení lze modelovat např. počet výrobků, které musíme otestovat, než bude nalezen první vadný atd.



Obr. 10 - Pravděpodobnostní funkce geometrického rozdělení [33]

Příklad použití:

Náhodně testujeme výrobky. Pravděpodobnost, že výrobek je vadný, je 0,1. Jaká je pravděpodobnost, že 10. testovaný výrobek bude první vadný?

Dosazením do vztahu (5.8) dostaneme hledanou pravděpodobnost:

$$P(10) = 0,1 \cdot (0,9)^{10-1} = \mathbf{0,038}$$

5.1.4 Hypergeometrické rozdělení

Hypergeometrické rozdělení náhodné veličiny představuje rozdělení, kdy je při opakování náhodného pokusu výskyt sledovaného jevu závislý na výsledcích pokusů předcházejících. Typickým představitelem je výběr prvků bez vracení. [1] Značí se $H(N, M, n)$ a platí pro něj: $0 < M < N; 0 < n \leq N; n, N, M \in \mathbb{N}$

Pravděpodobnostní funkci (viz Obr. 11) popisuje vztah (5.11).

$$P(X) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (5.11)$$

N – celkový počet prvků souboru

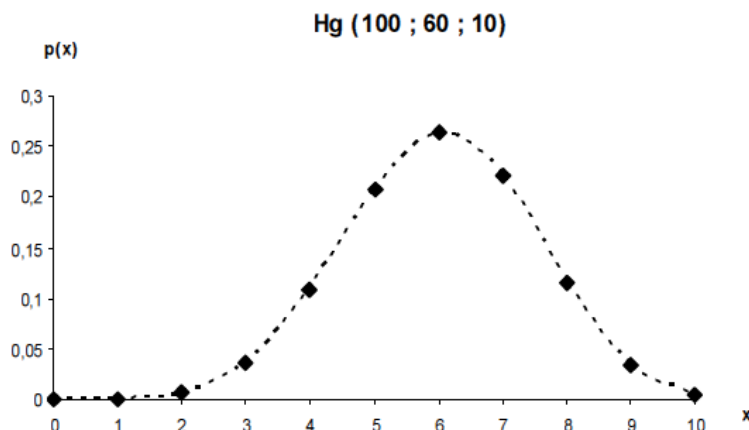
M – počet prvků souboru, které mají sledovanou vlastnost

n – počet prvků vybraných z tohoto souboru bez vracení

Střední hodnota náhodné veličiny je vyjádřena vztahem (5.12), pro rozptyl platí vztah (5.13):

$$E(X) = \frac{n \cdot M}{N} \quad (5.12)$$

$$D(X) = \frac{n \cdot M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N - n}{N - 1} \quad (5.13)$$



Obr. 11 - Pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení [33]

Příklad použití:

Mezi 100 výrobky je 20 zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že náhodným výběrem 10 výrobků odhalíme 3 vadné výrobky?

$$H(N, M, n) = H(100, 20, 10), \quad x = 3$$

Dosažením do vztahu (5.11) dostaneme hledanou pravděpodobnost:

$$P(3) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{100-20}{10-3}}{\binom{100}{10}} = 0,209$$

5.2 Rozdělení spojitých náhodných veličin

Náhodná veličina X má spojitě rozdělení, jestliže existuje funkce f taková, že pro distribuční funkci F náhodné veličiny X platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in R \quad (5.14)$$

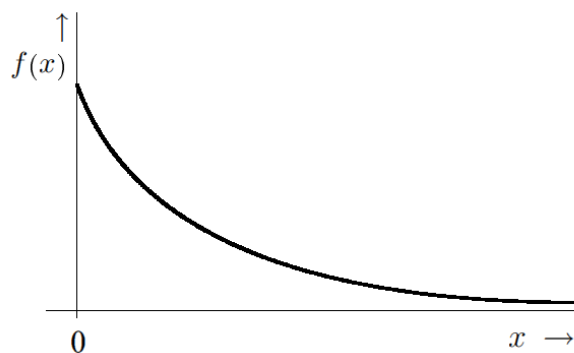
Funkci f nazýváme hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X . [34]

Mezi rozdělení spojitých náhodných veličin používaných ve spolehlivosti elektrotechnických zařízení patří rozdělení: exponenciální, normální, logaritnicko-normální, Weibullovo a Rayleighovo. Spojitá rozdělení náhodné veličiny se v technické praxi často

používají k modelování a odhadu životnosti různých zařízení, kdy náhodnou veličinou bývá intenzita poruch λ .

5.2.1 Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení spojité náhodné proměnné je určeno jedním parametrem λ a nejlépe vystihuje rozdělení doby života zařízení, u kterých dochází k poruše zcela náhodně a náhle bez zjevného předchozího opotřebení, což odpovídá střední části vanové křivky (období normálního provozu zařízení). Toto období je charakteristické konstantní intenzitou poruch. To znamená, že objekt je vystaven jen vnějším náhodným poruchám a že k postupným poruchám nedochází nebo že těmto poruchám u složitých opravovaných objektů průběžně předcházíme preventivní údržbou. Exponenciální rozdělení je v oboru spolehlivosti velmi často využíváno. Průběh hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení ukazuje *Obr. 12.* [7]



Obr. 12 – Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení [7]

Pro exponenciální rozdělení platí následující vztahy:

$$\text{Intenzita poruch:} \quad \lambda(t) = \lambda \quad (5.15)$$

$$\text{Hustota pravděpodobnosti:} \quad f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (5.16)$$

$$\text{Pravděpodobnost bezporuchového provozu:} \quad R(t) = e^{-\lambda t} \quad (5.17)$$

$$\text{Pravděpodobnost poruchy:} \quad Q(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (5.18)$$

$$\text{Střední hodnota náhodné veličiny:} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (5.19)$$

$$\text{Rozptyl náhodné veličiny:} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (5.20)$$

Příklad použití:

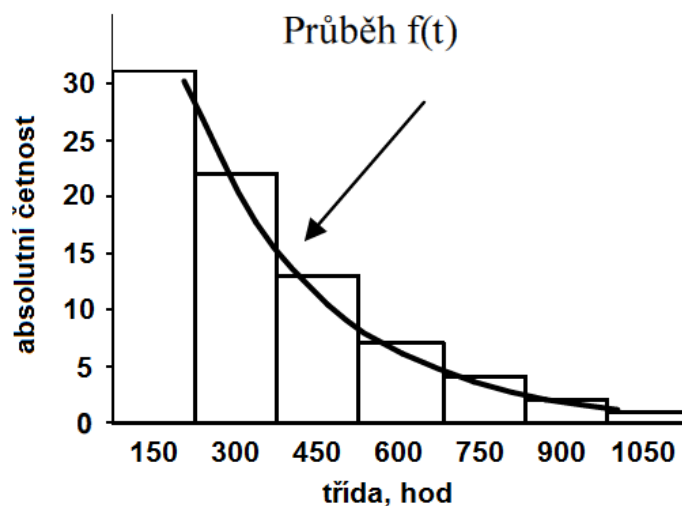
Sledujeme dobu do poruchy žárovek do světlometů vozidel. Za sledované období se vyskytlo 80 poruch, akumulovaný pracovní čas žárovek činil $T_{ak} = 22500$ hod. Údaje jsou zpracovány v Tab. 2. Stanovte střední dobu do poruchy a dále 10% kvantil doby do poruchy. [1]

Tab. 2 – Údaje o době do poruchy žárovek do světlometů vozidel

Třída	Doba do poruchy [hod]	Absolutní četnost	Akumulovaný pracovní čas T_p [hod]
1	150	31	22500
2	300	22	
3	450	13	
4	600	7	
5	750	4	
6	900	2	
7	1050	1	
		Σ 80 poruch	

Odhad střední doby do poruchy žárovek spočítáme podle vztahu (4.10):

$$T_s = \frac{T_p}{n} = \frac{22500}{80} = 281 \text{ [hod]}$$



Obr. 13 – Porovnání empirických dat (histogram četnosti) s teoretickým modelem

Intenzitu poruch λ vyjádříme podle vztahu (4.11):

$$\lambda = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{281} = 3,56 \cdot 10^{-3} \text{ [hod}^{-1}\text{]}$$

Pravděpodobnost poruchy popisuje distribuční funkce podle vztahu (5.18):

$$F(t) = Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Úpravami vyjádříme čas t :

$$t = \frac{-\ln(1 - F(t))}{\lambda} \quad (5.21)$$

Dosažením hodnoty $F(t) = 0,1$ do vztahu (5.21) získáme hledaný 10% kvantil:

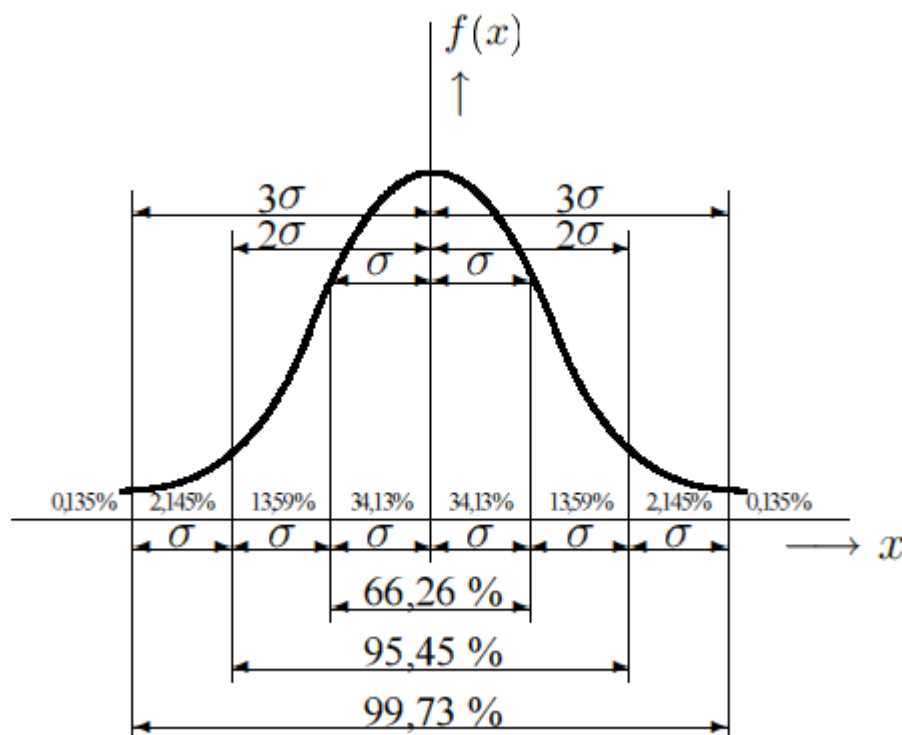
$$t_{0,1} = \frac{-\ln(1 - F(t))}{\lambda} = \frac{-\ln(1 - 0,1)}{3,56 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{29,6} \text{ [hod]}$$

10% pravděpodobnost poruchy žárovky světlometu bude dosažena po 29,6 hodinách provozu, tj. kvantil $t_{0,1} \doteq 30 \text{ hod}$.

5.2.2 Normální rozdělení

Normální rozdělení představuje rozdělení náhodných veličin, na které působí veliký počet malých nezávislých faktorů, z nichž žádný nepřevažuje. Normální rozdělení popisuje náhodné proměnné, jejichž hodnoty jsou souměrně seskupeny okolo střední hodnoty μ . Čím více se hodnoty náhodné proměnné odchyľují od střední hodnoty, tím jsou méně pravděpodobné.

Normální rozdělení se označuje $N(\mu, \sigma^2)$, je tedy dvouparametrové. Prvním parametrem je střední hodnota μ , která nabývá hodnot $(-\infty, \infty)$, druhým je rozptyl náhodné veličiny $\sigma^2 > 0$. Parametr σ určuje šířku pásma, ve kterém se náhodné veličiny x vyskytují s pravděpodobností 68,268 %. Jedná se o tzv. pravidlo 1σ . Obdobně se používají také pravidla 2σ a 3σ (viz *Obr. 14*). [7]



Obr. 14 – Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení [7]

Pro normální rozdělení platí následující vztahy:

Hustota pravděpodobnosti:
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.22)$$

Střední hodnota náhodné veličiny:
$$E(X) = \mu \quad (5.23)$$

Rozptyl náhodné veličiny:
$$D(X) = \sigma \quad (5.24)$$

Normované normální rozdělení

Speciálním případem normálního rozdělení je tzv. normované normální rozdělení. Tento tvar normálního rozdělení je symetrický kolem střední hodnoty $\mu = 0$ s rozptylem $\sigma^2 = 1$, tedy $N(0,1)$. Důležité je toto rozdělení zejména z toho důvodu, že jeho hodnoty jsou tabelovány.

Pro normované normální rozdělení platí následující vztahy:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (5.25)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (5.26)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z f(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad (5.27)$$

Kde $\Phi(z)$ je distribuční funkce normovaného rozdělení. Pro účely spolehlivosti se pracuje s $t \geq 0$, proto charakteristiky bezporuchovosti vyjadřujeme pro tzv. **useknuté normální rozdělení** (viz *Obr. 15*), které je vhodné pro aproximaci charakteristik bezporuchovosti v období dožívání výrobku (poslední část vanové křivky). Odpovídá mnoha chybovým mechanismům jako např. koroze, šíření trhlin, chyby vznikající chemickými procesy atd. [28]

Pro useknuté normální rozdělení platí:

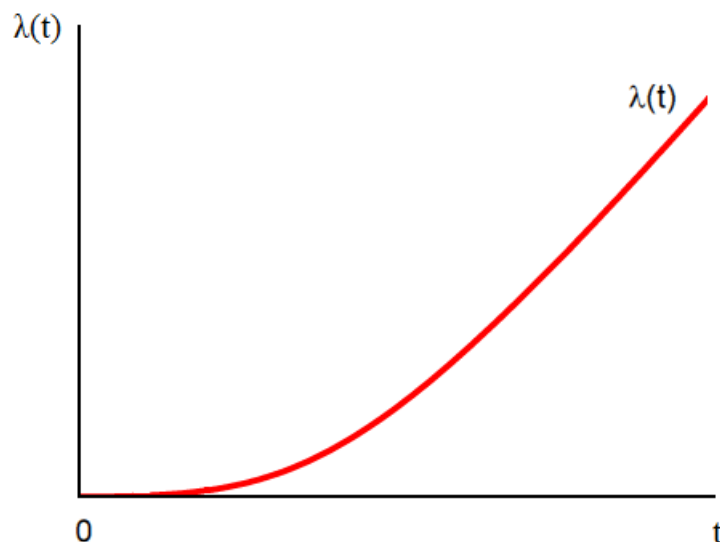
$$\text{Hustota pravděpodobnosti:} \quad f(t) = \frac{f_n\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\sigma\phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)} \quad (5.28)$$

$$\text{Intenzita poruch:} \quad \lambda(t) = \frac{f_n\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\sigma\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.29)$$

$$\text{Pravděpodobnost bezporuchového provozu:} \quad R(t) = \frac{\phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.30)$$

$$\text{Pravděpodobnost poruchy:} \quad Q(t) = 1 - \frac{\phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.31)$$

$$\text{Pravděpodobnost poruchy:} \quad T_s = \mu + \sigma \frac{f_n\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{2\phi\left(\frac{\mu}{\sigma} - 1\right)} \quad (5.32)$$



Obr. 15 – Useknuté normální rozdělení aproximuje průběh $\lambda(t)$ v poslední části vanové křivky

Příklad použití:

Životnost elektrické baterie, měřená v hodinách, má normální rozdělení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Kolik procent baterií má životnost větší než 320 hodin?

$$N(\mu, \sigma^2) = N(300, 35^2)$$

$$P(X > 320) = 1 - F_N\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 1 - F_N\left(\frac{320 - 300}{35}\right) = 1 - F_N(0,57)$$

Číslo 0,57 dle tabulky normálního rozdělení [14] odpovídá funkční hodnota 0,71566.

$$P(X > 320) = 1 - 0,71566 = \mathbf{0,28434}$$

5.2.3 Logaritmicko-normální rozdělení

Logaritmicko-normální rozdělení má stejné parametry jako normální rozdělení a značí se $LN(\mu, \sigma^2)$, ale liší se od něj tím, že se jím neřídí sledovaná náhodná proměnná X , ale její přirozený logaritmus $\ln X$. Vzniká při velkém počtu nezávislých vlivů, jejichž účinky se navzájem násobí. [7] Pro hustotu pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozdělení platí vztah:

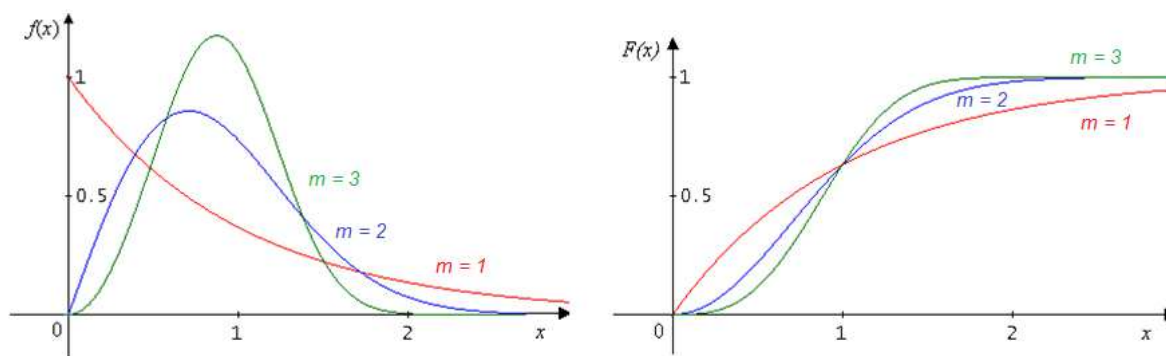
$$f(t) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.33)$$

5.2.4 Weibullovo rozdělení

Toto rozdělení se používá se při modelování spolehlivostních vlastností součástek a systémů s nekonstantní intenzitou poruch. Často se používá pro modelování života technických zařízení. Je vhodné pro vyjádření mechanického opotřebení a únavu materiálu, např. mezní vlastnosti ocelí (pevnost, pružnost), pevnost vláken, průrazné napětí izolantů, dobu životnosti elektronických součástek atd. [7] Jedná se o tříparametrové rozdělení $W(\eta, m, \gamma)$, kde η je parametr měřítka, m značí parametr tvaru grafu a γ symbolizuje parametr polohy. Distribuční funkce tříparametrového rozdělení Weibullova rozdělení je definována vztahem (5.34).

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{m-1} \cdot e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^m} \quad (5.34)$$

Změnou parametru měřítka η dochází ke změně měřítka na časové ose (např. hodiny, měsíce, cykly, atd.), avšak nikoliv ke skutečné změně aktuálního tvaru rozdělení. Zjednodušeně lze říci, že parametr měřítka určuje "roztáženost" rozdělení. [29] Dále udává dobu, při které dojde k poruše u 63,2 % výrobků (tedy 36,8 % výrobků se neporouchá). Tato skutečnost je vyznačena na *Obr. 16* průsečíkem distribučních funkcí pro různé parametry m . Tento průsečík je také někdy nazýván Weibullovým charakteristickým životem. [29] Bez ohledu na aktuální tvar rozdělení se 63,2% populace se porouchá v čase $t = h + g$ (čas měřený od $t = g$).



Obr. 16 - Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti (vlevo) a distribuční funkce (vpravo) pro shodné parametry $a = 1$ a různé parametry m [17]

Parametr m nabývá typicky hodnot 0.5 až 8.0 a ovlivňuje tvar (průběh) funkce hustoty pravděpodobnosti. [29] Weibullovo rozdělení proto může v závislosti na hodnotě parametru m aproximovat i jiná užitečná rozdělení. Pro $m = 1$ přechází v exponenciální rozdělení, pro

$m = 2$ v Rayleighovo rozdělení (viz obr. 16), pro $m = 2,5$ aproximuje logaritnicko-normální a pro $m = 3,5$ normální rozdělení. [29]

Parametr polohy γ udává minimální hodnotu náhodné veličiny t (tj. minimální dobu, po jejíž uplynutí může nastat porucha). [29] Třetí parametr je pro účely spolehlivosti často nulový a přechází se tak v rozdělení dvouparametrové $W(a, m)$, kde $a = \eta^m$. [28] Distribuční funkci pak lze vyjádřit následovně:

$$f(t) = \frac{m}{a} \cdot t^{m-1} \cdot e^{-\frac{t^m}{a}} \quad (5.35)$$

Pro spolehlivostní ukazatele platí:

$$\lambda(t) = \frac{m}{a} \cdot t^{m-1} \quad (5.36)$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{a}} \quad (5.37)$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\frac{t^m}{a}} \quad (5.38)$$

$$E(X) = a^{\frac{1}{m}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \quad (5.39)$$

$$D(X) = a^{\frac{2}{m}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right] \quad (5.40)$$

Kde Γ je tabelovaná gama funkce. [28], [30]

Velmi dobře se pomocí tohoto rozdělení aproximují všechny části vanové křivky. Podle hodnoty parametru m rozdělení modeluje životnost zařízení, u něhož se pravděpodobnost poruchy s časem zvětšuje ($m > 1$), nemění ($m = 1$) nebo zmenšuje ($m < 1$).

[18]

Příklad použití:

Weibullovo rozdělení s parametry $m = 0,2$ a $\lambda = 250$ hodin modeluje životnost elektronické součástky. S jakou pravděpodobností vydrží elektronická součástka funkční po dobu 900 hodin? [10]

Úlohu lze řešit pomocí programu MS EXCEL. Pomocí funkce WEIBULL.DIST hledáme hodnotu distribuční funkce pro 900.

= WEIBULL.DIST(x;a;β;kumulativní)

= WEIBULL.DIST(900;0,2;250;1)

Výsledkem je $F(900) = 0,725$. Hledaná pravděpodobnost je dána pravděpodobností jevu opačného, tedy $F(X > 900) = 1 - 0,725 = \mathbf{0,275}$.

5.2.5 Rayleighovo rozdělení

Toto rozdělení se používá pro modelování postupné degradace komponenty, kdy intenzita poruch roste lineárně v čase. [18] Je speciálním případem Weibullova rozdělení pro $m = 2$. Závislost λ je lineární a rozdělení je určeno pouze jedním parametrem k . Pro Rayleighovo rozdělení platí:

$$f(t) = kte^{-\frac{k \cdot t^2}{2}} \quad (5.41)$$

$$\lambda(t) = kt \quad (5.42)$$

$$R(t) = e^{-\frac{k \cdot t^2}{2}} \quad (5.43)$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\frac{k \cdot t^2}{2}} \quad (5.44)$$

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \quad (5.45)$$

$$D(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{k} \quad (5.46)$$

Příklad použití:

Analýza laboratorních testů 150 výrobků ukázala lineární růst intenzity poruch v čase (hodinách) $\lambda(t) = 0,5 \cdot 10^{-8} t$. Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu zařízení po jednom roce (tj. 8760 hod.)?

$$k = 0,5 \cdot 10^{-8}, t = 8760$$

Dosazením do vztahu (5.43) získáme hledanou pravděpodobnost bezporuchového provozu.

$$R(1 \text{ rok}) = e^{-\frac{0,5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = \mathbf{0,8254}$$

Shrnutí

Rozdělení náhodné veličiny společně s teorií pravděpodobnosti a statistiky jsou základními nástroji pro teorii spolehlivosti. S jejich využitím počítáme jednotlivé spolehlivostní a další ukazatele objektů.

6 Spolehlivostní modely

Pro hodnocení spolehlivosti systému a posouzení, jakým způsobem každý z dílčích prvků přispívá k jeho celkové nespolehlivosti, se sestavují spolehlivostní modely. Spolehlivostní model systému je reprezentací jeho fyzické struktury v obvykle grafické nebo matematické formě, která umožňuje provést číselný výpočet spolehlivostních ukazatelů. Tyto výpočty se zpravidla provádějí v období návrhu daného výrobku.

Pokud jsou známy spolehlivostní charakteristiky tvořících prvků, jsou rozdíly ve způsobu stanovení charakteristik bezporuchovosti soustavy určeny tím, zda jde o sériovou, paralelní nebo smíšenou soustavu. Základní číselnou charakteristikou je pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy a pravděpodobnost poruchy, popř. charakteristiky odvozené. [1]

6.1 Sériové systémy

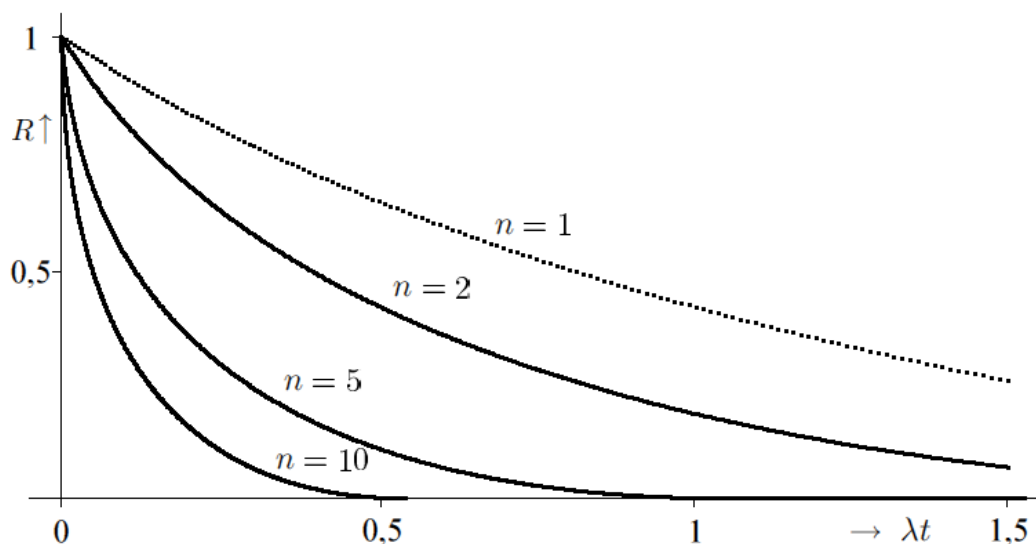
Pravděpodobnost bezporuchového provozu sériové soustavy $R(t)$ je dána součinem dílčích pravděpodobností $R_i(t)$ všech n prvků soustavy. Jinými slovy jde o průnik nezávislých jevů (pravděpodobností bezporuchového provozu jednotlivých prvků). Protože jde o součin čísel menších než jedna, je výsledná R soustavy vždy horší než R jejího nejméně spolehlivého prvku. Blokové schéma sériové soustavy je zachyceno na *Obr. 17*. Nevýhodou tohoto spojení prvků je, že funkčnost soustavy je podmíněna funkčností všech jejích prvků. S rostoucím počtem prvků se navíc celková R soustavy snižuje. Tuto skutečnost znázorňuje *Obr. 18*. Porucha kteréhokoliv z prvků způsobí nefunkčnost celého systému.[1]



Obr. 17 – Blokové schéma sériové soustavy [1]

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu sériové soustavy platí vztah (6.1).

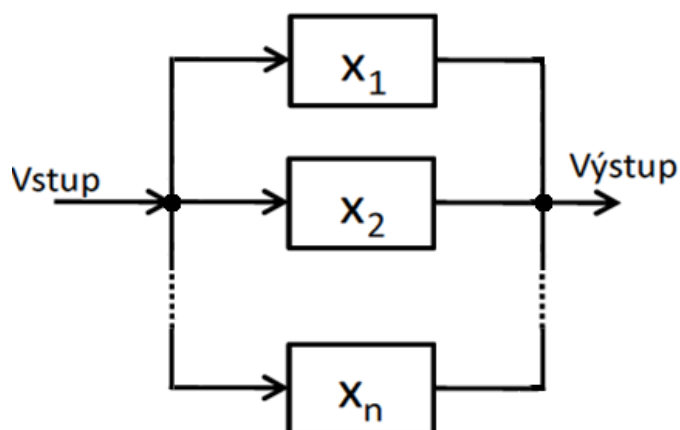
$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (6.1)$$



Obr. 18 - Se vzrůstajícím počtem prvků klesá R sériového systému [7]

6.2 Paralelní systémy

U paralelního spojení prvků (viz Obr. 19) jsou všechny prvky z hlediska vzniku poruch navzájem nezávislé. Pravděpodobnost poruchy paralelní soustavy $Q(t)$ v době provozu t je rovna součinu dílčích pravděpodobností poruch jednotlivých n prvků $Q_i(t)$. Na rozdíl od sériového spojení je výsledná R soustavy vždy lepší než R nejméně spolehlivého prvku. S rostoucím počtem prvků se R celého systému zvyšuje, což je znázorněno na Obr. 20. Paralelně spojené prvky plní funkci vzájemné zálohy (jsou v systému redundantní), proto nefunkčnost celého systému způsobí pouze porucha všech prvků současně, což je velmi málo pravděpodobné. [1]



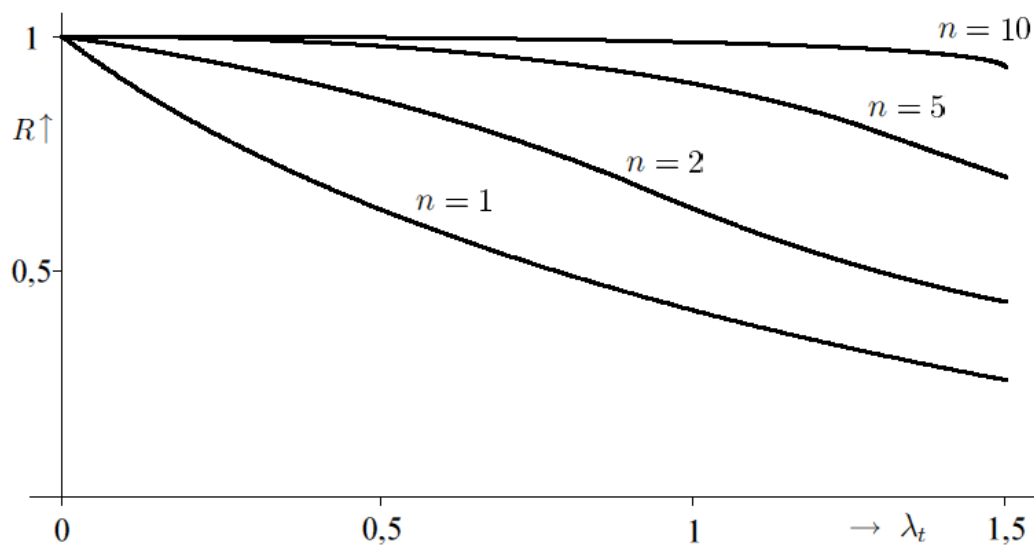
Obr. 19 - Blokové schéma paralelní soustavy [1]

Pro pravděpodobnost poruchy celého systému platí vztah (6.2):

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^n Q_i(t) \quad (6.2)$$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému je vyjádřena vztahem (6.3):

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \quad (6.3)$$



Obr. 20 - Se vzrůstajícím počtem prvků vzrůstá Q paralelního systému [7]

6.3 Sério-paralelní systémy

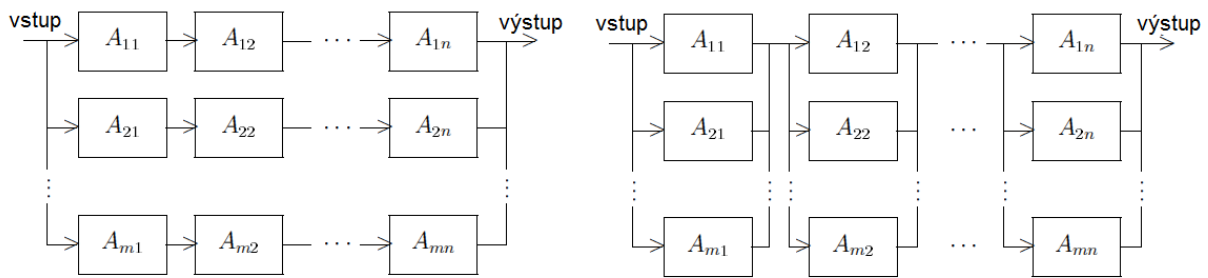
Paralelně sériový spolehlivostní model představuje paralelní spojení sériových podsystemů a jeho pravděpodobnost bezporuchového provozu je vyjádřena vztahem (6.4).

$$R_{ps}(t) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n R_{ij}) \quad (6.4)$$

Sériově paralelní spolehlivostní model je tvořen sériovým spojením paralelních podsystemů. Pravděpodobnost bezporuchového provozu tohoto systému popisuje vztah (6.5).

$$R_{sp}(t) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - \prod_{i=1}^m R_{ij}) \quad (6.5)$$

Zapojení obou sério-parallelních systémů ukazuje *Obr. 21*.



Obr. 21 – Schéma zapojení paralelně sériového (vlevo) a sériově paralelního spolehlivostního modelu (vpravo) [7]

Všechny zmíněné spolehlivostní modely se využívají při spolehlivostní analýze systémů pro výpočet jejich spolehlivostních parametrů.

7 Spolehlivostní analýza systémů

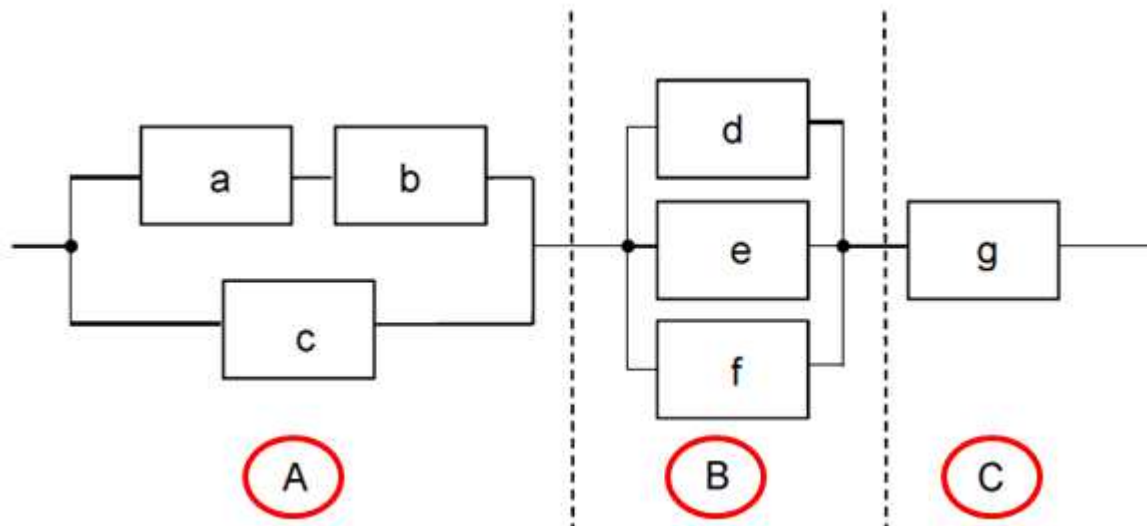
Spolehlivostní analýza systémů se provádí zejména v období návrhu zařízení a cílem je stanovit tzv. projektovanou spolehlivost výrobku. Pro výpočet spolehlivosti systému je nejprve nutné určit spolehlivostní blokové schéma systému, nastavit počáteční podmínky (zadané parametry). Dále je nutné si uvědomit, jestli se jedná o dvoustavový (funguje, nefunguje) či vícestavový model (funguje, částečně funguje, ... nefunguje). V neposlední řadě je také třeba zohlednit, jestli je předmětem našeho zkoumání obnovovaný či neobnovovaný systém. [1]

Ve stručnosti zmíníme nejpoužívanější metody výpočtů. Pokud vycházíme ze spolehlivostního blokového schématu, můžeme ke stanovení spolehlivosti systému využít metody řešení sériového, paralelního nebo sério-paralelního zapojení prvků. U některých spolehlivostních schémat je však vhodné použít metodu rozkladu, metodu cest či metoda řezů.

V případě, že nejsme schopni určit blokové schéma, můžeme použít ke stanovení spolehlivosti systému metodu seznamu (množina vzájemně odlišných stavů), metodu stromu poruch nebo strom událostí. V neposlední řadě máme možnost využít grafické a matematické modely Markovových procesů. [1]

7.1 Metoda postupného zjednodušování spolehlivostního schématu

Tuto metodu používáme pro řešení sérioparalelních spolehlivostních modelů. Spolehlivostní schéma si rozdělíme na několik jednodušších částí (subsystémů), které pak řešíme samostatně jako sériovou, paralelní či sério-paralelní kombinaci prvků. Původní systém tak zjednodušíme na spojení těchto subsystémů, které potom řešíme obdobným způsobem. Cílem metody je redukce n bloků systému na jediný blok s výslednou spolehlivostí systému. Řešení spolehlivostního schématu touto metodou si demonstrujeme na následujícím příkladu dle *Obr. 22*. Pro jednoduchost předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu každého dílčího prvku $p = R = 0,9$, ovšem obecně může být tato hodnota pro každý prvek různá.



Obr. 22 - Schéma zapojení sérioparalelního systému [1]

Schéma si rozdělíme na tři subsystémy A, B a C. Celková spolehlivost systému pak bude dána sériovým spojením těchto tří subsystémů $R = R_A \cdot R_B \cdot R_C$. Jelikož se jedná o sériové spojení, počítáme s pravděpodobnostmi bezporuchového provozu R . V případě paralelní kombinace prvků musíme počítat s pravděpodobností poruchy Q , kterou získáme ze vztahu $Q = 1 - R$. Obdobně také platí $R = 1 - Q$.

Dle těchto pravidel tedy spočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu subsystému A:

$$R_{ab} = p \cdot p = p^2$$

$$Q_{ab} = 1 - R_{ab} = 1 - p^2$$

$$Q_A = Q_{ab} \cdot Q_c = (1 - p^2) \cdot (1 - p)$$

$$R_A = 1 - Q_A = 1 - [(1 - p^2) \cdot (1 - p)] = 1 - [(1 - p - p^2 + p^3)] = p + p^2 - p^3$$

Obdobným postupem pokračujeme u subsystému B:

$$Q_B = (1 - p)^3$$

$$R_B = 1 - Q_B = 1 - (1 - p)^3 = 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) = 3p - p^2 + p^3$$

Subsystém C obsahuje pouze jediný prvek:

$$R_C = p$$

Nakonec spočítáme celkovou R soustavy:

$$R = R_A \cdot R_B \cdot R_C = (p - p^2 - p^3) \cdot (3p - p^2 + p^3) \cdot p = 3p^3 - 5p^5 + 4p^6 - p^7$$

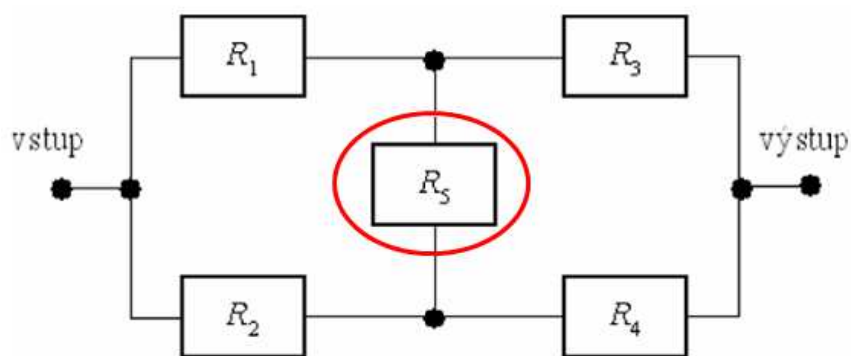
Po dosazení $p = 0,9$ do výsledného vztahu dostáváme konkrétní pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy:

$$\underline{\underline{R = 0,882}}$$

Soustavy, jejichž strukturu nelze převést na sérioparalelní kombinaci, musíme řešit některým obecnějším postupem.

7.2 Metoda rozkladu

Předpokladem pro použití metody rozkladu jsou vzájemně nezávislé poruchy dílčích prvků systému. Typickým systémem, který nemá sérioparalelní strukturu, je např. systém, jehož spolehlivostní schéma je v můstkovém zapojení (viz Obr. 23).

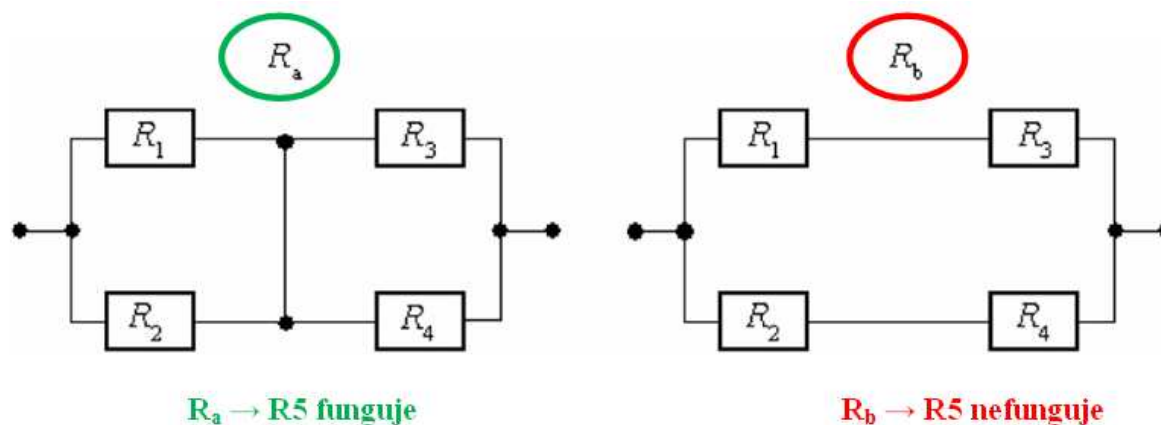


Obr. 23 - Schéma zapojení [1]

Tento příklad budeme na rozdíl od předchozího řešit obecně pro různé R jednotlivých prvků systému. Nejprve v systému zvolíme klíčový prvek, kterým prochází nejvíce spojení vstupu na výstup. V našem případě zvolíme prvek R_5 . Bezporuchový stav klíčového prvku označíme R_a , poruchový stav R_b . Rozklad výchozího systému na dva podsystemy provádíme pomocí následujícího vztahu s podmíněnými pravděpodobnostmi:

$$R = R_5 \cdot R_a + (1 - R_5) \cdot R_b \quad (7.1)$$

Jinými slovy R_a značí celkovou pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy za předpokladu, že je prvek R_5 funkční. Analogicky R_b značí celkovou pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy za předpokladu, že prvek R_5 není funkční, což je ve vzorci symbolizováno pravděpodobností poruchy Q_5 , kterou lze vyjádřit jako $1 - R_5$. Graficky jsou obě možné situace znázorněny na Obr. 24.



Obr. 24 – Situace pro funkční a nefunkční klíčový prvek

Spočítáme R_a systému za předpokladu, že klíčový prvek R_5 funguje:

$$R_a = [1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2)] \cdot [1 - (1 - R_3) \cdot (1 - R_4)]$$

Následně spočítáme R_b systému za předpokladu, že klíčový prvek R_5 nefunguje:

$$R_b = [1 - (1 - R_1 R_3) \cdot (1 - R_2 R_4)]$$

Obě spočítané pravděpodobnosti R_a a R_b dosadíme do vztahu (7.1), čímž získáme celkovou R systému:

$$R = R_5 \cdot R_a + Q_5 \cdot R_b = R_5 \cdot R_a + (1 - R_5) \cdot R_b$$

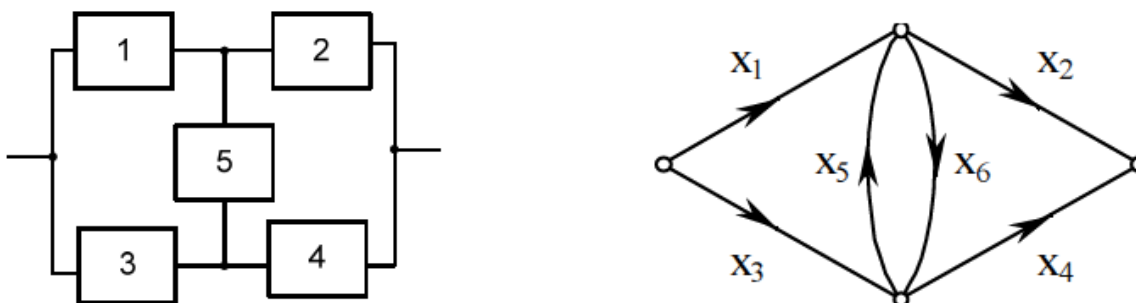
Dosazením konkrétních (obecně různých) hodnot za jednotlivé R_1 až R_5 dílčích prvků soustavy bychom získali konkrétní pravděpodobnost bezporuchového provozu celé soustavy.

7.3 Metoda cest

Další možnou metodou, jakou lze řešit komplikovanější soustavy, je metoda cest. Spojení mezi vstupem a výstupem vyjádřené v hranách se nazývá orientované spojení. Aby existovala orientovaná cesta, musí orientované spojení procházet každým uzlem grafu nejvýše jednou. Minimální orientované spojení obsahuje minimální počet hran. Odstraněním hrany dojde k přerušení cesty. Tento princip je nastíněn na Obr. 25, kde k danému blokovému schématu systému existují 4 orientované cesty ($x_1, x_2; x_3, x_4; x_1, x_6, x_4$ a x_3, x_5, x_2) a 6 orientovaných spojení (4 výše zmíněné orientované cesty + $x_1, x_6, x_5, x_2; x_3, x_5, x_6, x_4$). [1]

Systém je v provozu, pokud existuje alespoň jedna orientovaná cesta – pokud fungují prvky jedné cesty. Při použití metody cest se počítá s pravděpodobností bezporuchového

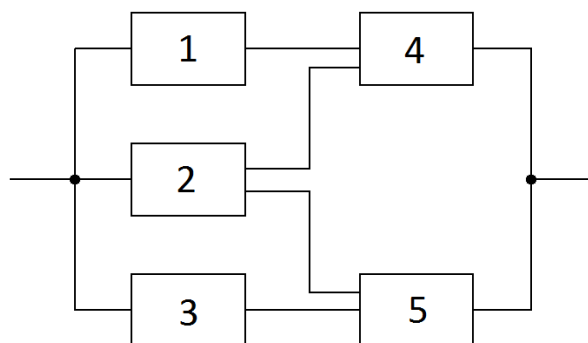
provozu R . Protože počítáme s velkými čísly, je nutné nalézt vždy všechny cesty, abychom dospěli k co nejpřesnějšímu výsledku. Výhodou je poměrně snadné nalézání orientovaných cest a také dobrá algoritmizace na počítači. Nevýhodou je, že není možné provádět odhad výsledku. [1]



Obr. 25 – Blokové schéma systému a jeho orientované cesty a orientovaná spojení [1]

Příklad:

Stanovte pravděpodobnost bezporuchového provozu systému znázorněného na Obr. 26.



Obr. 26 – Blokové schéma systému

Hledáme postupně jednotlivé orientované cesty ze vstupu na výstup. Následně z nich sestavujeme dvojice, potom trojice až nakonec dospějeme k jediné čtveřici cest (viz Tab. 3).

Tab. 3 – Orientované cesty systému z Obr. 26

Jednotlivé cesty	Dvojice cest	Trojice cest	Čtveřice cest
1: 14 → R ² 2: 24 → R ² 3: 25 → R ² 4: 35 → R ²	12: 124 → R ³ 13: 1245 → R ⁴ 14: 1345 → R ⁴ 23: 245 → R ³ 24: 2345 → R ⁴ 34: 235 → R ³	123: 1245 → R ⁴ 124: 12345 → R ⁵ 234: 2345 → R ⁴ 134: 12345 → R ⁵	1234: 12345 → R ⁵
4R ²	3R ³ + 4R ⁴	2R ⁴ + 2R ⁵	R ⁵

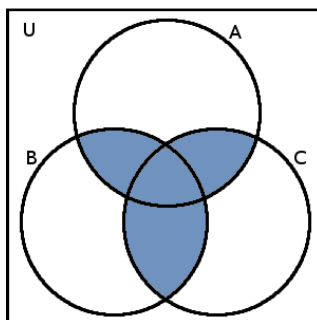
V posledním řádku tabulky provedeme součet jednotlivých pravděpodobností R, které potom sjednotíme v rámci celého řádku podle vztahu:

$$R_c = 4R^2 - (3R^3 + 4R^4) + (2R^4 + 2R^5) - R^5 \quad (7.2)$$

Za předpokladu, že R všech dílčích prvků v systému je rovna 0,9, dostaneme dosazením do vztahu (7.2) konkrétní celkovou R_c:

$$R_c = 0,98739$$

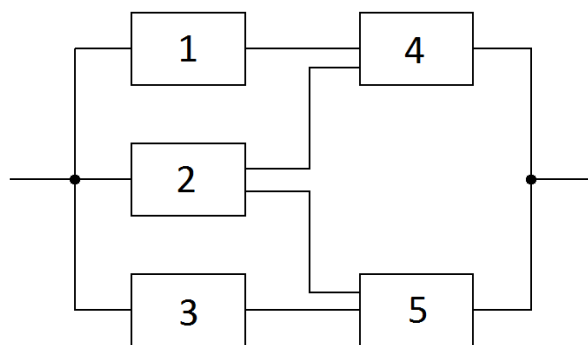
Při obecně vyšším počtu cest se nejedná při výpočtu celkové pravděpodobnosti o prostý součet, ale o sjednocení (viz Obr. 27). Prostý součet obsahuje několikrát stejnou oblast, kterou je potřeba odečíst, což je ve vztahu (7.2) realizováno střídáním znamének mínus a plus.



Obr. 27 – Operace sjednocení množin

7.4 Metoda řezů

Výhodou metody řezů je, že přímo specifikuje všechny možnosti poruch systému. Soubor prvků, jejichž současná porucha způsobí poruchu celého systému, nazýváme minimálním řezem. Jestliže je však jakýkoliv prvek tohoto souboru provozuschopný, systém nemá poruchu. Odstranění všech hran řezu má za následek přerušení všech drah mezi vstupním a výstupním uzlem. Pokud všechny hrany vyjmeme, neexistuje spojení mezi vstupem a výstupem. Minimální řez obsahuje minimální počet hran a je také duálním pojmem k pojmu cesta, podobně jako je řez duální pojem k pojmu orientované spojení. Při použití metody řezů se na rozdíl od metody cest počítá s pravděpodobností poruchy $Q(t)$. Výhodou je počítání s malými čísly, proto je možné provádět odhad výsledku. Metoda je také dobře programovatelná na samočinném počítači. Nevýhodou je obtížnější nalezení všech řezů. Pro lepší porovnání s metodou cest si metodu řezů budeme demonstrovat na shodném příkladu (viz Obr. 28). [1]



Obr. 28 - Blokové schéma systému

Hledáme minimální řezy systému, tedy minimální počet prvků, jejichž současná porucha způsobí poruchu celého systému. Následně obdobně jako u metody cest sestavujeme dvojice řezů, následně trojice až dojdeme k jediné čtveřici řezů (viz Tab. 4).

Tab. 4 – Minimální řezy systému z Obr. 28

Minimální řezy	Dvojice řezů	Trojice řezů	Čtveřice řezů
1: 45 → Q ²	12: 12345 → Q ⁵	123: 12345 → Q ⁵	1234: 12345 → Q ⁵
2: 123 → Q ³	13: 1245 → Q ⁴	124: 12345 → Q ⁵	
3: 125 → Q ³	14: 2345 → Q ⁴	234: 12345 → Q ⁵	
4: 234 → Q ³	23: 1234 → Q ⁴	134: 12345 → Q ⁵	
	24: 1234 → Q ⁴		
	34: 12345 → Q ⁵		
Q ² + 3Q ³	2Q ⁵ + 4Q ⁴	4Q ⁵	Q ⁵

V posledním řádku tabulky opět provedeme součet jednotlivých pravděpodobností Q, kterých potom v rámci celého řádku provedeme sjednocení podle vztahu (7.3).

$$Q_c = Q^2 + 3Q^3 - (2Q^5 + 4Q^4) + 4Q^5 - Q^5 = Q^2 + 3Q^3 - 4Q^4 - 3Q^5 \quad (7.3)$$

Za předpokladu, že R všech dílčích prvků v systému je rovna 0,9, tedy že jejich $Q = 0,1$, dostaneme dosazením do vztahu (7.3) konkrétní celkovou pravděpodobnost poruchy systému Q_c :

$$Q_c = \mathbf{0,01257}$$

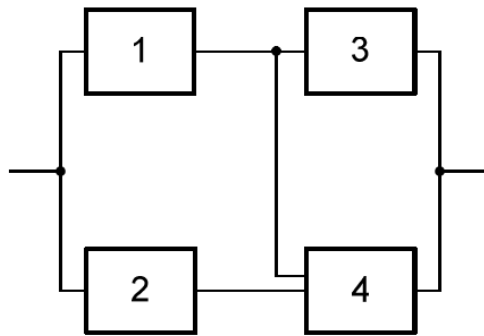
Celkovou pravděpodobnost bezporuchového provozu systému pak vyjádříme jako:

$$R_c = 1 - Q_c = \mathbf{0,98743}$$

Protože počítáme s malými čísly, lze provádět odhady výsledků. Už vyjádřením minimálních řezů $Q_I = Q^2 + 3Q^3$ a následným dosazením hodnoty $Q = 0,1$ dostaneme výsledek 0,013, který se jen minimálně liší od výsledného $Q_c = 0,01257$, protože dvojice, trojice a čtveřice řezů dávají velmi malá čísla.

7.5 Metoda seznamu

Tato metoda pracuje s Booleovou algebrou. Principem je sestavení seznamu všech možných logických stavů systému. Příznivý stav (prvek funguje) označujeme *logickou 1* a současně ho vyjádříme pomocí pravděpodobnosti bezporuchového provozu R . Nepříznivý (prvek nefunguje) označíme *logickou 0* a vyjádříme prostřednictvím pravděpodobnosti poruchy Q . Ze sestaveného seznamu pak určíme součet stavů, kdy systém pracuje (případně nepracuje). Klademe si pak otázku, jestli systém jako celek při dané logické kombinaci funguje či nikoliv, resp. jestli existuje nějaké funkční spojení mezi vstupem a výstupem systému. Z tabulky (viz Tab. 5) vybereme jen ty řádky (případy), kdy systém jako celek funguje. Vypočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu pro každý takto vybraný řádek a získané hodnoty nakonec sečteme, čímž dostaneme výslednou pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Ukážeme si to na následujícím příkladu podle Obr. 29.



Obr. 29 - Blokové schéma systému

$$R = 0,9 \quad Q = 1 - R$$

4 prvky, 2 stavy (funguje, nefunguje) $\rightarrow 2^4$ možností

Příznivé $\rightarrow R = \Sigma$ pravděpodobností všech příznivých jevů (stav provozu)

Nepříznivé $\rightarrow Q = \Sigma$ pravděpodobností všech nepříznivých jevů (stav poruchy)

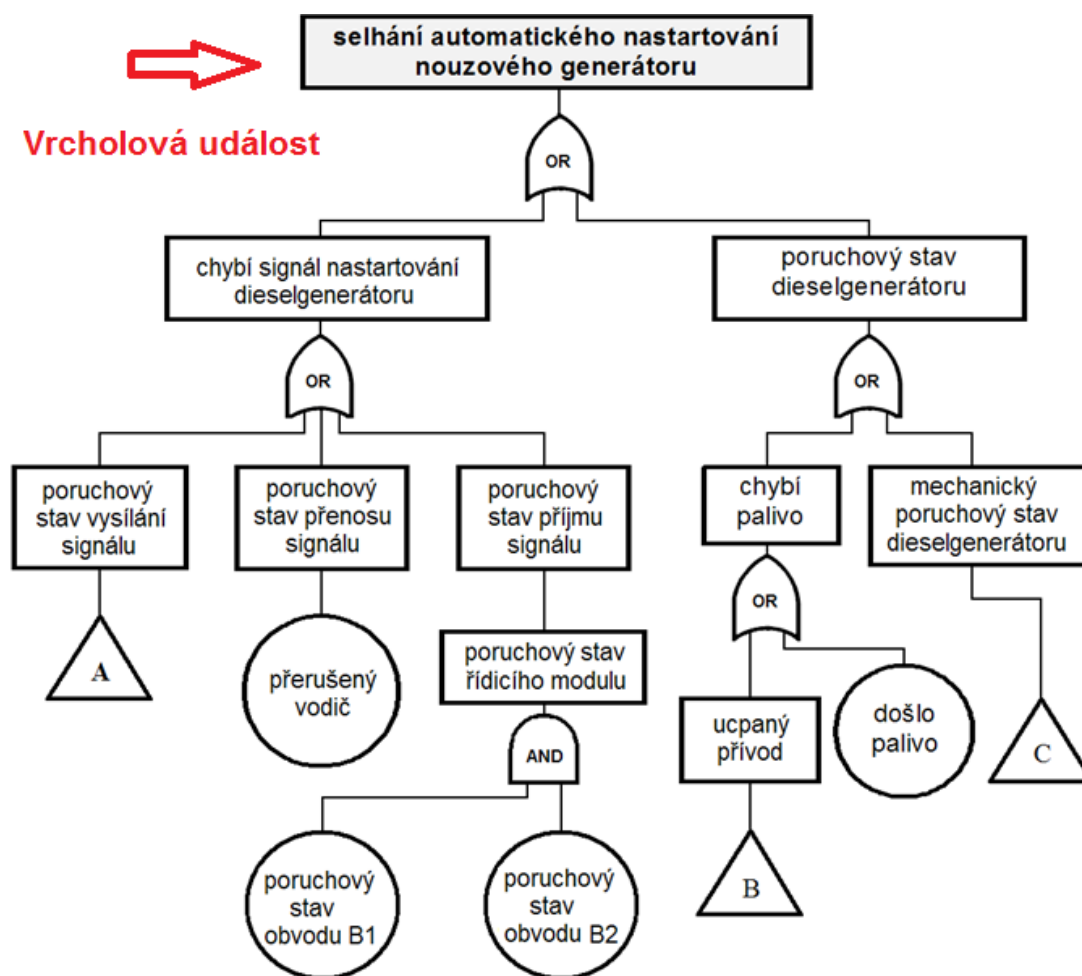
Tab. 5 – kombinace všech možných stavů systému (viz Obr. 29)

	1	2	3	4	funguje systém?	
1	0	0	0	0	ne	$Q^4 = (1-R)^4$
2	0	0	0	1	ne	$R \cdot Q^3 = R \cdot (1-R)^3$
3	0	0	1	0	ne	$R \cdot Q^3 = R \cdot (1-R)^3$
4	0	0	1	1	ne	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2$
5	0	1	0	0	ne	$R \cdot Q^3 = R \cdot (1-R)^3$
6	0	1	0	1	ano	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2 = 0,0081$
7	0	1	1	0	ne	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2$
8	0	1	1	1	ano	$R^3 \cdot Q = R^3 \cdot (1-R) = 0,0729$
9	1	0	0	0	ne	$R \cdot Q^3 = R \cdot (1-R)^3$
10	1	0	0	1	ano	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2 = 0,0081$
11	1	0	1	0	ano	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2 = 0,0081$
12	1	0	1	1	ano	$R^3 \cdot Q = R^3 \cdot (1-R) = 0,0729$
13	1	1	0	0	ne	$R^2 \cdot Q^2 = R^2 \cdot (1-R)^2$
14	1	1	0	1	ano	$R^3 \cdot Q = R^3 \cdot (1-R) = 0,0729$
15	1	1	1	0	ano	$R^3 \cdot Q = R^3 \cdot (1-R) = 0,0729$
16	1	1	1	1	ano	$R^4 = R^4 = 0,6561$
						0,972

Celková pravděpodobnost bezporuchového provozu systému je 0,972, resp. 97,2 %.

7.6 Metoda stromu poruch

Jedná se o deduktivní analýzu systému, to znamená, že vycházíme od nějaké vrcholové události a snažíme se objasnit její příčiny tím, že vytváříme strom zobrazující způsob, jak jednotlivé součásti ovlivňují celý systém. Logické diagramy znázorňují logické vztahy mezi vrcholovou událostí a příčinami vzniku této události. Posuzují se příčiny vzniku poruchového stavu, hledají se odpovědi na otázky: Co? Kde? Kdy? Proč? [1] Příklad stromu poruch je uveden na Obr. 30.

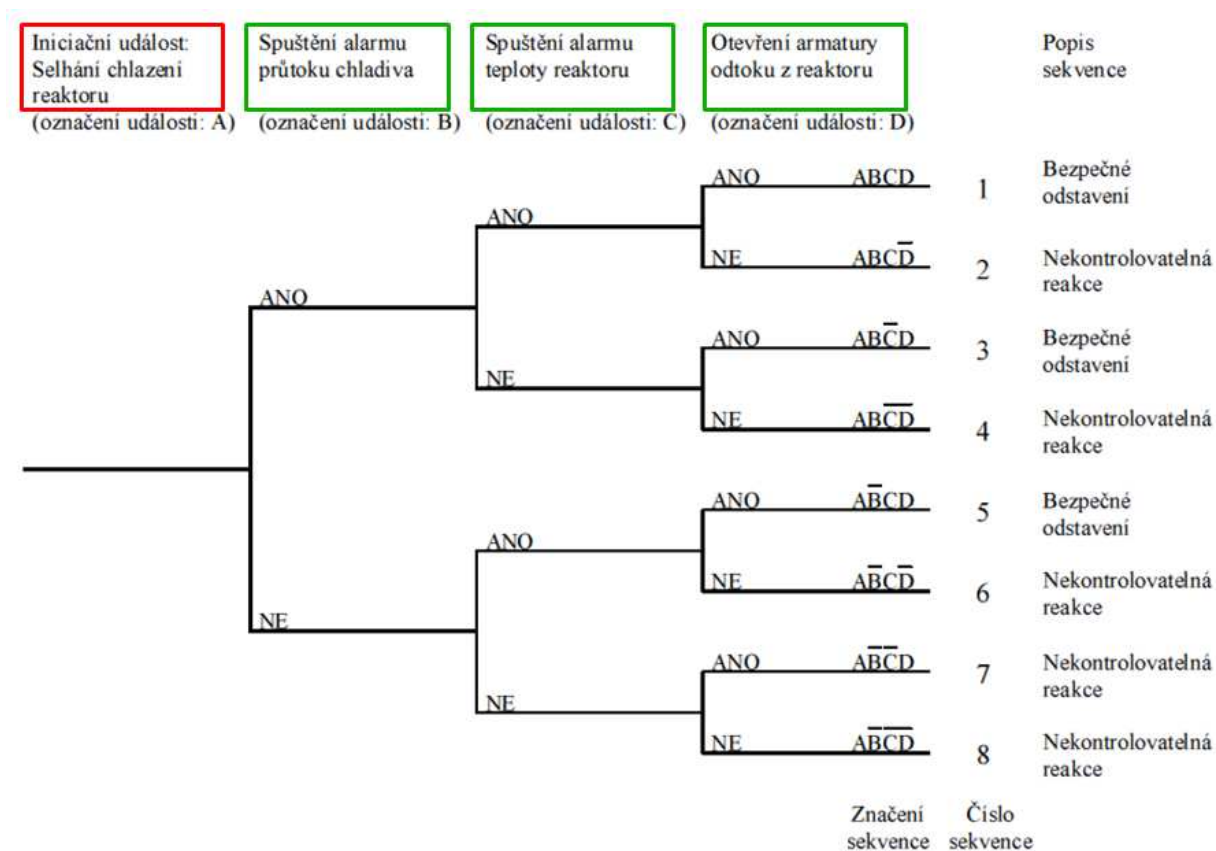


Obr. 30 - Příklad struktury stromu poruch

7.7 Metoda stromu událostí

Jedná se o induktivní analýzu systému. Cílem je vizuální zobrazení všech událostí, které mohou v systému nastat. Analýza začíná s tzv. iniciační událostí a rozvětňuje se na všechny možné následky této události. Sekvenci událostí zahrnují jak úspěchy, tak i selhání jednotlivých složek systému (používá se k analýze a zmírňování rizik). Rozvíjené sekvence

událostí vedou k různým konečným stavům systému. [1] Příklad struktury stromu událostí je uveden na Obr. 31.



Obr. 31 - Příklad struktury stromu událostí

7.8 Markovovy modely

Markovy modely jsou funkce dvou náhodných proměnných, stavu systému a doby (případně jiné veličiny, v závislosti na které stav sledujeme). Obě náhodné proměnné mohou být jak spojité, tak diskrétní. Tomu pak odpovídají 4 druhy modelů. Jestliže budeme stejně jako dosud uvažovat úplné poruchy prvků, bude proměnná udávající stav soustavy diskrétní, čímž se počet modelů zredukuje na dva. Model s diskrétními stavy a diskrétním časem se nazývá Markovův řetězec, model s diskrétními stavy a spojitým časem je znám jako Markovův proces. Markovovy modely jsou definovány množinou pravděpodobností přechodu z výchozího stavu do nějakého následujícího stavu. Charakteristickou vlastností Markovova procesu je to, že pravděpodobnost přechodu z výchozího stavu závisí pouze na těchto dvou stavech a je zcela nezávislá na všech minulých stavech, kterými proces prošel. Markovovy

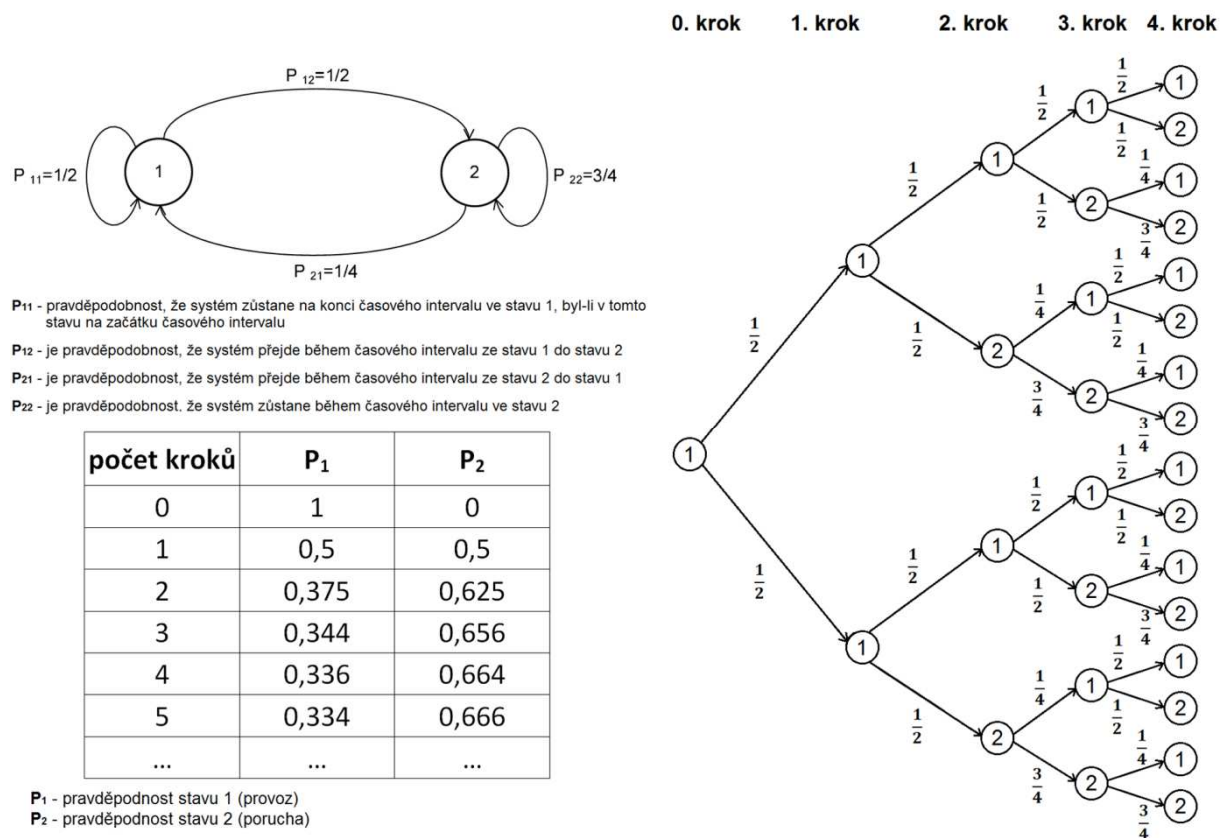
modely lze reprezentovat orientovaným grafem, kde uzly reprezentují jednotlivé stavy systému a orientované hrany ohodnocují pravděpodobnosti přechodů mezi nimi. [15]

7.8.1 Markovovy řetězce

Markovův řetězec je model s diskretním časem a diskretními stavy. Je popsán pomocí přechodové matice pravděpodobností P (viz (7.4)). Podmínkou je, že součet prvků v každém řádku této matice musí být roven jedné. [1]

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Princip Markovova řetězce si můžeme vysvětlit následovně. Uvažujme dvoustavový systém podle Obr. 32. Základní vlastností Markovova řetězce je to, že pravděpodobnost, že se systém nachází na konci časového intervalu v určitém stavu (např. 1) závisí pouze na tom, v jakém stavu se systém nacházel na začátku časového intervalu (1 nebo 2) a nikoliv na minulé historii systému. [15]



Obr. 32 – Diagram přechodů, tabulka pravděpodobností stavů a strom stavů

Sledování přechodného děje pomocí stromu stavů znázorněného na *Obr. 32* je se vzrůstajícím počtem kroků pracné a nepřehledné. Proto je výhodnější použít výše zmíněnou přechodovou pravděpodobnostní matici (7.4), do které dosadíme pravděpodobnosti jednotlivých přechodů.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Pokud víme, že proces začal stavem i , pak pravděpodobnost, že se systém nachází ve stavu j po n krocích je rovna prvku $P_{ij}^{(n)}$ n -té mocniny matice $[P]$, tj. matice $[P]^n$. Začne-li proces pravděpodobnostním vektorem $P(0)$, pak pravděpodobnostní vektor po n krocích $P(n)$ je dán vztahem (7.5). [15]

$$P(n) = P(0)[P]^n \quad (7.5)$$

Začne-li proces stavem 1, počáteční pravděpodobnostní vektor tedy bude:

$$P(0) = [P_1, P_2]_0 = [1, 0]$$

Např. pravděpodobnostní vektor po 2 krocích $P(2)$ bude:

$$P(2) = P(0) \cdot P^2 = [1, 0] \cdot P^2 = [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix} = [3/8, 5/8] = [0,375; 0,625]$$

Porovnáním s hodnotami pravděpodobností pro druhý krok v tabulce na *Obr. 32* si můžeme ověřit, že výsledek je v obou případech stejný. [15]

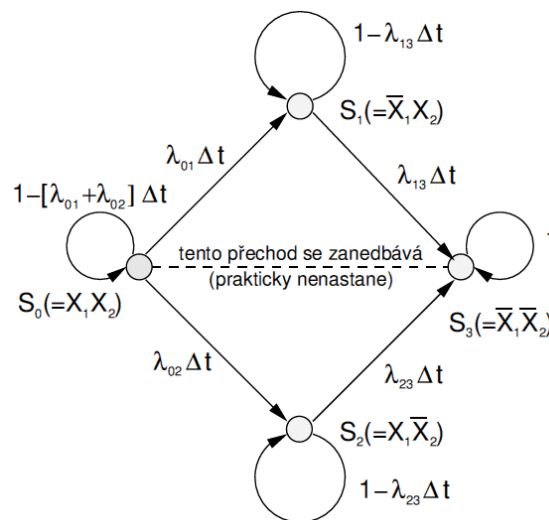
7.8.2 Markovovy procesy

Model se spojitým časem a diskrétními stavy se nazývá Markovův proces. Proces se popisuje maticí intenzit poruch λ (viz (7.6)), která se sestavuje na základě možných stavů soustavy nebo orientovaného grafu (přechody mezi jednotlivými stavy). Řádky odpovídají výchozím stavům v čase t , sloupce následujícím stavům v čase $t+\Delta t$. Matice se sestavuje na základě možných stavů soustavy nebo na základě orientovaného grafu. Podmínkou je, že součet prvků v každém řádku této matice musí být roven nule. [1]

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \cdots & \lambda_{0n} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n0} & \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Soustava Markovových stavových rovnic popisuje pravděpodobnosti přechodů z počátečních stavů do konečných. Rovnice se sestavují za předpokladu, že pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do jiného během časového intervalu Δt je rovna součinu $\lambda_i(t)\Delta t$, kde $\lambda_i(t)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu mezi dvěma stavy. Dále se předpokládá, že pravděpodobnost více než jednoho přechodu během Δt je téměř nulová a zanedbává se. [31]

Princip řešení Markovova procesu si stručně naznačíme v následujícím příkladu. Řešme Markovův proces pro dva neobnovované prvky X_1 a X_2 na základě orientovaného grafu na Obr. 33.



Obr. 33 – Orientovaný graf soustavy dvou neobnovovaných prvků X_1 a X_2 [31]

Na základě orientovaného grafu (Obr. 33) a dosazením do (7.6) sestavíme matici intenzit. Doplníme jednotlivé intenzity pravděpodobnosti přechodů ($\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$). Jiné přechody nastat nemůžou, proto na ostatní pozice v matici kromě hlavní diagonály doplníme nuly. Zbývající prvky doplníme s ohledem na podmínku nulového součtu prvků v každém řádku matice λ .

$$\lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) & \lambda_{01} & \lambda_{02} & 0 \\ 0 & -\lambda_{03} & 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & -\lambda_{23} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Následně řešíme soustavu diferenciálních rovnic, kterou můžeme maticově zapsat jako:

$$\dot{P}(t) = P(t) \cdot \lambda \quad (7.7)$$

kde $\dot{P}(t)$ je vektor derivací, $P(t)$ je vektor pravděpodobností v čase t a λ je matice intenzit.

Řešením této soustavy diferenciálních rovnic dojdeme k těmto výsledkům:

$$P_{S_0}(t) = e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{02})t}$$

$$P_{S_1}(t) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{13}} [e^{-\lambda_{13}t} - e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{02})t}]$$

$$P_{S_2}(t) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{13}} [e^{-\lambda_{23}t} - e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{02})t}]$$

$$P_{S_3}(t) = 1 - [P_{S_0}(t) + P_{S_1}(t) + P_{S_2}(t)]$$

P_{S_0} až P_{S_3} jsou pravděpodobnosti jednotlivých stavů S_0 až S_3 .

Princip obecnosti Markovova modelu spočívá v tom, že pravděpodobnosti stavů S_0 , S_1 , S_2 a S_3 jsou vypočteny nezávisle na struktuře soustavy. Platí pro všechny možné konfigurace soustav ze dvou neopravitelných prvků. [31]

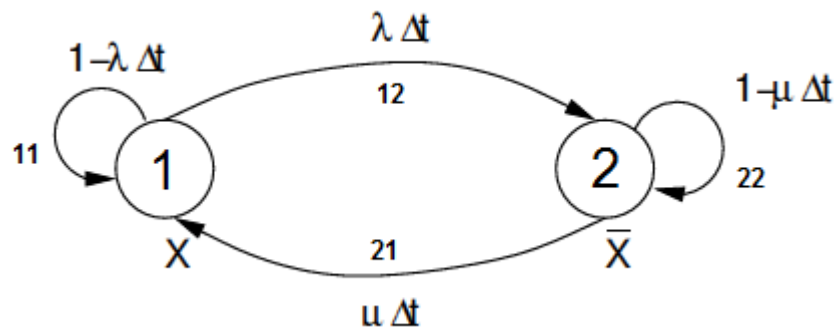
Markovovy modely lze využít i pro vícestavové systémy. Jejich složitost závisí na celkovém počtu stavů soustavy - m stavů vede na m diferenciálních rovnic 1. řádu. Obecně pro n prvků s k stavy platí vztah (7.8).

$$m = k^n \quad (7.8)$$

Počet rovnic velmi rychle narůstá, proto se někdy používá zjednodušení v podobě sloučení některých stavů - rozlišení pouze stavů se shodným počtem porouchaných prvků. Např. pro n prvků se dvěma stavy se $m = 2^n$ redukuje na $m = n - 1$. [31]

7.8.3 Markovovy modely pro opravované systémy

Markovovy modely lze použít také pro opravované systémy. V tomto případě je ale nutné zavést také přechody odpovídající opravám (intenzita oprav μ), čímž dojde také k modifikaci prvků matice intenzit. Předvedeme si to na konkrétním příkladu. Na *Obr. 34* je orientovaný graf pro soustavu s jedním opravovaným prvkem s konstantní intenzitou poruch λ a intenzitou oprav μ . [31]



Obr. 34 - Orientovaný graf soustavy s jedním opravovaným prvkem s konstantní intenzitou poruch λ a intenzitou oprav μ [31]

Matici intenzit λ sestavíme opět na základě orientovaného diagramu (Obr. 34). Dosazením do maticového vztahu (7.7) sestavíme soustavu diferenciálních rovnic v maticové podobě (7.9). Následně vyjádříme pravděpodobnosti obou stavů pomocí vztahů (7.10) a (7.11).

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$\dot{P}_{S_0}(t) = -\lambda P_{S_0}(t) + \mu P_{S_1}(t) \quad (7.10)$$

$$\dot{P}_{S_1}(t) = \lambda P_{S_0}(t) - \mu P_{S_1}(t) \quad (7.11)$$

Soustavu těchto dvou diferenciálních rovnic řešíme s ohledem na počáteční podmínky (7.12) a (7.13).

$$\dot{P}_{S_0}(0) = 1 \quad (7.12)$$

$$\dot{P}_{S_1}(0) = 0 \quad (7.13)$$

Řešením soustavy dojdeme k následujícím výsledkům:

$$P_{S_0}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} \quad (7.14)$$

$$P_{S_1}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} \quad (7.15)$$

$P_{S_0}(t)$ udává pravděpodobnost, že soustava je v čase t bezporuchovém stavu, tj. součinitel pohotovosti $K_p(t)$. [31] Pro jeho ustálenou hodnotu platí:

$$P_{S_0}(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = K_p \quad (7.16)$$

$P_{S_1}(t)$ naopak udává pravděpodobnost poruchy v čase t , tj. součinitel prostoje $K_n(t)$. [1] Pro jeho ustálenou hodnotu platí:

$$P_{S_1}(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = K_n = 1 - K_p \quad (7.17)$$

V průběhu činnosti zařízení se střídá čas provozu (stav 0) se střední dobou trvání $m = \frac{1}{\lambda}$ (tj. střední doba do poruchy) a čas opravy (stav 1) se střední dobou trvání $r = \frac{1}{\mu}$ (tj. střední doba do opravy). [1] Nyní můžeme stanovit střední dobu mezi poruchami.

$$T = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = m + r \quad (7.18)$$

Definice této doby byla již dříve uvedena v kapitole 4.2 a je také vyjádřena vztahem (4.10).

8 Měření spolehlivostních parametrů

Spolehlivostní parametry společně s dalšími sledovanými veličinami měříme v období provozu zařízení. Vstupním předpokladem pro správné analyzování a vyhodnocení naměřených dat je kvalita měření. Musíme také vzít v úvahu parametry okolního prostředí (a ty zaznamenat a uvést společně s výsledky měření) a vliv samotné měřicí metody na zkoumaný objekt (třída přesnosti, ovlivnění stavu objektu atd.). Pokud je to možné, je vhodné provést opakovaná měření za pokud možno stejných podmínek a získané výsledky zprůměrovat. Další možností je pokusit se vysledovat jisté závislosti mezi měřenými daty a ty dále zpracovat statistickými metodami (regrese atd.) pro dosažení přesnějších výsledků.

Pokud pracujeme s rozsáhlými soubory stejných prvků, je často nemožné měřit každý prvek zvlášť. Výhodnější je vybrat jen určitý reprezentativní vzorek (náhodně nebo na základě zkušeností) a na tom provést měření. Pomocí metod statistiky a teorie pravděpodobnosti pak lze relativně přesně odhadnout vlastnosti celého souboru prvků.

8.1 Náhodný výběr

Matematická statistika se zabývá zkoumáním výsledků zkoušek a experimentů, které mají charakter hromadných náhodných jevů, a vyvozuje z nich obecné zákonitosti. Využití nachází zejména v případech, kdy je potřeba číselně hodnotit celky sestávající z mnoha jednotek a kdy z různých důvodů (ekonomických, časových) lze prozkoumat jen jejich malou vybranou část. Statistické metody jsou teoretickým základem zkušebnictví spolehlivosti. [7]

Množina hodnot náhodné proměnné s daným rozdělením pravděpodobnosti, z níž vybíráme pozorovatelné hodnoty této proměnné, se nazývá **základní soubor**. Množinu prvků, které mají ze sledovaného hlediska společné znaky nebo vlastnosti nazýváme **souborem**. [7]

Náhodný výběr z takového souboru je definován jako konečný výběr n hodnot ze základního souboru náhodné proměnné nebo náhodných výsledků realizovaných pokusů, které byly vybrány nezávisle na sobě nebo které se opakují za stejných podmínek tak, že všechny hodnoty mají stejnou možnost výběru. [7] Náhodný výběr by měl podávat úplnou představu o základním souboru - reprezentativní výběr.

Samotný náhodný výběr lze provádět několika způsoby a na základě různých kritérií. Tyto jednotlivé způsoby výběru popisuje kombinatorika.

8.1.1 Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru prvků z daného souboru. V podstatě nám říká, kolika různými způsoby můžeme provést náhodný výběr ze zkoumaného souboru. Za předpokladu, že prvky souboru mají různé vlastnosti, můžeme se např. ptát, kolika různými způsoby lze vybrat k -tice prvků, které budou splňovat nějakou podmínku. V závislosti na uspořádanosti výběru rozlišujeme uspořádaný výběr (variace) a neuspořádaný výběr (kombinace). Dále se rozlišují výběry s opakováním (tj. vybrané prvky se vrací do původní množiny) a výběry bez opakování (tj. vybrané prvky se do původní množiny nevracejí). V praxi se častěji setkáváme s výběry bez opakování - destruktivní testy jako např. tažnost trubky - lze testovat pouze jednou, pro další test je zapotřebí použít nový vzorek. [20] Přehled základních kombinatorických pravidel je uveden v následující tabulce.

Tab. 6 – Přehled základních kombinatorických pravidel

	bez opakování	s opakováním
Variace (záleží na pořadí)	$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V(k, n) = n^k$
Permutace ($k = n$) (záleží na pořadí)	$P(n) = n! = k!$	$P(n_1 \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
Kombinace (nezáleží na pořadí)	$C(k, n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$	$C(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$

n – počet prvků

k – množina z n

Příklad použití:

Ve skladu je 10 výrobků, mezi nimiž jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků, aby:

- a) žádný nebyl vadný Tzn. vybrat 5 dobrých výrobků ze 7 dobrých. $C = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$
- b) byl právě 1 vadný Tzn. vybrat 4 dobré ze 7 dobrých a 1 vadný z 3 vadných. $C = \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{1} = 105$
- c) nejvýše 1 vadný Stejný jako případ b), ale přičteme případ a). $C = \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{1} + \binom{7}{5} = 126$
- d) alespoň 1 vadný Tzn. výběr všech 5 výrobků mínus opačný případ (všechny dobré). $C = \binom{10}{5} - \binom{7}{5} = 231$

8.2 Odhady parametrů zákona rozdělení

Informace o spolehlivostních a dalších charakteristikách výrobků získáváme v praxi z konečného počtu pozorovaných jevů náhodné proměnné (dlouhodobým sběrem dat získaných měřeními), které tvoří náhodný výběr s empirickou charakteristikou (na základě zkušeností). Záznamy o průběhu zkoušek spolehlivosti výrobků nebo záznamy o provozu zařízení poskytují základní údaje, které se dále zpracovávají statistickými metodami. Z takto získaných empirických charakteristik tvoříme odhad teoretické charakteristiky (model, který dobře reprezentuje zjištěná data). [1], [15]

Cílem je určení modelů pravděpodobnosti rozdělení poruch, testování platnosti zákonů rozdělení poruch, výpočet odhadů parametrů daného zákona rozdělení nebo také střední doby bezporuchového provozu, rozptylu atd. [1]

Možnosti výpočtů jsou omezeny především množstvím výchozích údajů, které máme k dispozici. Pro odhad hodnoty parametrů se nejčastěji používá metoda největší věrohodnosti nebo metoda nejmenších čtverců. [15]

Rozeznáváme parametrickou a neparametrickou metodu odhadu charakteristik spolehlivosti. **Parametrická metoda** předpokládá znalost určitého tvaru distribuční funkce $F(t)$, která je určena hodnotou jednoho nebo více parametrů příslušného rozdělení. Parametry se vypočítají z n pozorovaných jevů. Z výsledků n pozorování se vypočte bodový odhad parametrů teoretického modelu. Tento odhad se pak dosadí do vzorce pro jednotlivé ukazatele spolehlivosti a získá se bodový odhad příslušného ukazatele. Bodový odhad funkcí pozorovaných hodnot sledované náhodné veličiny a proto zatížen chybou, jejíž velikost klesá s větším rozsahem náhodného výběru (počet pozorování, délka minulé doby provozu). [15]

V případě **neparametrické metody** se nepředpokládá žádný konkrétní typ rozdělení pravděpodobnosti sledované náhodné veličiny X , ale bodový odhad určitých ukazatelů spolehlivosti se vypočte přímo z výsledku a pozorování náhodné veličiny X . [15]

8.2.1 Bodové odhady

Bodové odhady jsou charakteristické tím, že jsou vyjádřeny jednou hodnotou parametru příslušné charakteristiky. Hodnotu parametru rozdělení základního souboru tedy odhadujeme jediným číslem vypočteným z výběru (odhad parametru pomocí statistiky). Toto číslo poté považujeme za hledanou hodnotu neznámého parametru rozdělení. Bodový odhad parametru

ale neříká nic o tom, jak blízko leží skutečné hodnoty parametrů. Často je potřeba zjistit oblast, ve které se skutečný parametr s velkou pravděpodobností nachází. K tomu slouží intervalové odhady. [1]

8.2.2 Intervalové odhady (intervaly spolehlivosti)

Intervaly spolehlivosti (známé také jako konfidenční intervaly) jsou vyjádřeny intervalem hodnot (rozmezí kolem bodového odhadu), který se zvolenou pravděpodobností pokryje teoretickou hodnotu uvažované charakteristiky. Toto rozmezí nelze určit s naprostou jistotou, šířka intervalu by musela být nekonečná. Mluvíme tedy o intervalu, ve kterém s vysokou, předem zadanou pravděpodobností $(1 - \alpha)$, leží hodnota hledaného parametru. Jako hranice mezi „je velmi nepravděpodobné“ a „ne tak velmi nepravděpodobné“ se používá hraniční hodnota - **hladina významnosti α** (doplňk do jedné udává průměrné procento neúspěšných odhadů $\alpha = 1 - p$). Hodnota $1 - \alpha$ se nazývá **koeficient spolehlivosti** a intervaly, které odvodíme pro zvolené α nazýváme $(1-\alpha)100\%$ -ní intervaly spolehlivosti. [1]

Intervaly spolehlivosti mohou být oboustranné nebo jednostranné, které pak dělíme na pravostranné nebo levostranné.

Oboustranné intervaly vymezují dvěma konečnými limitami $\langle L_{\min}, L_{\max} \rangle$ rozmezí, v němž parametr pravděpodobně leží. [21]

Jednostranné intervaly mají konečnou limitu pouze z jedné strany, na druhé straně jsou neomezené (jdou do plus nebo minus nekonečna). [21]

Levostranný interval (jednostranný se spodní limitou), tj. $\langle L_{\min}, \infty \rangle$, používáme, pokud nás zajímá pouze spodní hodnota parametru, např. sledujeme překročení minimálního povoleného limitu nějaké veličiny a nezajímá nás horní obsah, který reálně jistě neporoste až do nekonečna. [21]

Pravostranný interval (jednostranný s horní limitou), tj. $\langle -\infty, L_{\max} \rangle$, použijeme v opačném případě, kdy např. kontrolujeme maximální povolený limit určité veličiny. [21]

8.3 Analýza dat

Výsledkem diagnostického šetření je množina naměřených dat, která je nutno vhodným způsobem zpracovat. Statistika je vhodným nástrojem pro získání informací z numerických dat, protože je nutné uvažovat náhodný charakter naměřených hodnot. Účelem průzkumové analýzy je odhalit zvláštnosti v datech a ověřit předpoklady pro jejich následné statistické zpracování. Úkolem je zhodnotit správnost měření vyloučením hrubých chyb a získat tak co nejpřesnější hodnoty parametrů sledované vlastnosti. Z chování určitých vybraných prvků z tohoto souboru pak vyvozujeme chování celého souboru. Jak již bylo zmíněno dříve, rozlišujeme výběr s vrácením a bez vrácení a dále z omezeného a neomezeného počtu prvků. [1]

8.3.1 Chyby měření

Cílem experimentu je zjištění správné a dostatečně přesné hodnoty hledané veličiny. Správností výsledku rozumíme, že soubor experimentálních hodnot je rozptýlen v blízkosti skutečné hodnoty. Přesnost pak hovoří o velikosti rozptýlení získaných experimentálních hodnot při opakování experimentu. Výsledek každého měření je vždy zatížen nějakou chybou. Rozlišujeme chyby hrubé, systematické a náhodné. [6]

Chyby hrubé vznikají z různých nejčastěji z jednorázových příčin, které výrazně ovlivní nebo zcela znehodnotí výsledek experimentu (chyba obsluhy atd.) a je třeba se jich vyvarovat. Chyby systematické pravidelně zatěžují výsledek měření a jsou způsobeny např. chybnou kalibrací přístroje nebo nedodržením laboratorních podmínek (teploty atd.). Chyby náhodné jsou způsobeny nepředvídatelnými vlivy a nelze se jim vyhnout. [6]

Protože je každý experiment zatížen chybou, je nezbytné měření opakovat. Při opakování nezískáme vždy stejnou hodnotu, ale hodnoty odlišné v důsledku náhodných chyb. Při posuzování experimentálních dat vycházíme z představy, že signál měřené veličiny je zatížen náhodnou chybou (šumem). Úkolem statistiky je najít vhodný model popisující chování šumu a odhadnout tak správnou hodnotu signálu. V tomto bodě pak nastává setkání experimentálního měření s matematickou statistikou a pravděpodobností. [6]

8.3.1.1 Nejistoty měření

Nejistota měření charakterizuje rozsah naměřených hodnot okolo výsledku měření. Kromě samotného výsledku měření se týká i měřicích přístrojů, hodnot použitých konstant, korekcí atd. Základem určování nejistot měření je statistický přístup. Předpokládá se určité

pravděpodobnostní rozdělení popisující pravděpodobnost, s jakou se v nejistotou daném intervalu může nacházet skutečná hodnota. Mírou nejistoty měření je směrodatná odchylka udávané veličiny. Takto vyjádřená nejistota se označuje jako **standardní nejistota** představující rozsah hodnot okolo naměřené hodnoty. Rozlišujeme standardní nejistoty typu A a typu B. [31]

Standardní nejistota typu A

Tato nejistota je způsobena změnami náhodného charakteru, jejichž příčiny se považují za nepředvídatelné a všeobecně neznámé. Stanovují se statistickou analýzou z opakovaných měření stejné hodnoty měřené veličiny za stále stejných podmínek. Nejistoty tohoto typu se zmenšují se zvětšujícím se počtem opakovaných měření. Předpokládá se existence náhodných chyb s normálním rozdělením. [31]

Standardní nejistota typu B

Příčiny těchto nejistot jsou známy a odhadnutelné (např. chyba měřicího přístroje), jejich určování však nemusí být vždy jednoduché. Jejich identifikaci a základní hodnocení provádí experimentátor. U složitých měřicích zařízení a při zvýšeném požadavku na přesnost se musí provést podrobný rozbor chyb vyžadující značné zkušenosti. Tyto nejistoty pocházejí z různých zdrojů a výsledná nejistota typu B je dána jejich sumací, přitom nezávisí na počtu opakovaných měření. [31]

Kombinovaná standardní nejistota

Kombinovaná standardní nejistota je tvořena součtem standardních nejistot typu A a B a udává interval, ve kterém se s poměrně velkou pravděpodobností může vyskytovat skutečná hodnota měřené veličiny. V praxi je tento typ nejistoty upřednostňován. [31]

Rozšířená standardní nejistota

Rozšířená standardní nejistota se zavádí se v případě malého počtu měření, kdy je třeba zajistit větší pravděpodobnost správného výsledku. [31]

Určení rozšířené standardní nejistoty typu A při přímém měření

Odhad měřené hodnoty veličiny X určíme výběrovým průměrem z naměřených hodnot x_i podle vztahu:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (8.1)$$

Výběrový odhad rozptylu naměřených hodnot stanovíme podle vztahu:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (8.2)$$

Odmocninou výběrového rozptylu získáme výběrovou směrodatnou odchylku $s(x_i)$ charakterizující rozptýlení naměřených hodnot kolem výběrového průměru:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (8.3)$$

Směrodatnou odchylku výběrových průměrů pak zvolíme za standardní nejistotu typu A:

$$u_A = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} \quad (8.4)$$

Je-li počet opakovaných měření menší než 10 a nelze učinit kvalifikovaný odhad na základě zkušenosti, určíme nejistotu typu A pomocí koeficientu rozšíření k_s (viz Tab. 7):

$$u_A = k_s \cdot s(\bar{x}) \quad (8.5)$$

Tab. 7 - Závislost koeficientu rozšíření k_s na počtu měření:

Počet měření n	9	8	7	6	5	4	3	2
Koeficient k_s	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

[31]

8.3.2 Základní předpoklady o datech

Před samotnou analýzou je nutné vyšetřit platnost základních předpokladů (normalitu, nezávislost, homogenitu a minimální velikost výběru). V případě nesplnění těchto předpokladů se k reprezentaci statistického souboru využívají tzv. robustní parametry, které se vyznačují malou citlivostí výsledků na hrubé chyby ve vstupních datech. [22]

Normalita výběru

Klasická analýza dat vychází z předpokladu normality výběrového rozdělení, což je klíčové pro správné vyhodnocení naměřených dat. Odchylka může být způsobena vybočujícími hodnotami. Testy se provádí na základě kombinace šikmosti a špičatosti (viz kapitola 2.2.3).

K nesplnění předpokladu normality výběru dochází buď v důsledku jiného než normálního rozdělení dat nebo přítomnosti vybočujících hodnot v datech. U jednorozměrných výběrů lze vybočující hodnoty většinou poměrně snadno identifikovat na základě vhodného zobrazení (viz kapitola 8.3.3). [1]

Nezávislost prvků výběru

Důležitým předpokladem kvalitních měření je vzájemná nezávislost jednotlivých výsledků. Závislost měření zvyšuje riziko nepřesnosti odhadů a obvykle je způsobena:

- a) nestabilitou měřicího zařízení, nebo změnou stavu měřicího zařízení;
- b) nekonstantností podmínek měření;
- c) zanedbáním faktorů významně ovlivňujících výsledek měření (vlhkost, teplota, nečistota);
- d) nesprávným, nenáhodným výběrem vzorků k měření.

V případě skokových změn těchto faktorů vzniká tzv. heterogenní výběr, čímž dochází ke zvýšení rozptylu oproti homogennímu výběru. [1]

Minimální velikost výběru

Dalším klíčovým kritériem je minimální velikost výběru. Rozsah výběru (n) ovlivňuje přesnost odhadů parametrů polohy a rozptýlení. Rozptyly těchto odhadů jsou funkcí n^{-1} . S rostoucí četností výběru také dochází k zúžení intervalů spolehlivosti. Naopak u velmi malých výběrů dochází k tomu, že šířka intervalu spolehlivosti je více ovlivněna hodnotou velikosti výběru než samotnou variabilitou dat. V případě nedostatečného rozsahu výběru je třeba provést dodatečná měření nebo použít techniky vhodné pro malé výběry. Čím je rozptýlenost dat menší, tím méně jich je zapotřebí ke zjištění dostatečné přesnosti odhadu. [1]

Homogenita výběru

Homogenní výběr je charakterizován tím, že všechny jeho prvky x_i pocházejí ze stejného rozdělení s konstantním rozptylem. K nehomogenitě naměřených dat dochází při výrazné nestejnomyšlnosti měřených vlastností vzorků nebo při náhlých změnách podmínek měření. Další příčinou nehomogenity může být přítomnost vybočujících hodnot, což jsou údaje, které se do souboru mohly dostat v důsledku hrubých chyb měření, zápisu atd. V případě zjištění vybočujících hodnot je třeba nejprve na základě logické analýzy zvážit, zda se nejedná o zešikmené rozdělení. Body, které se mohou jevit vybočující pro symetrické

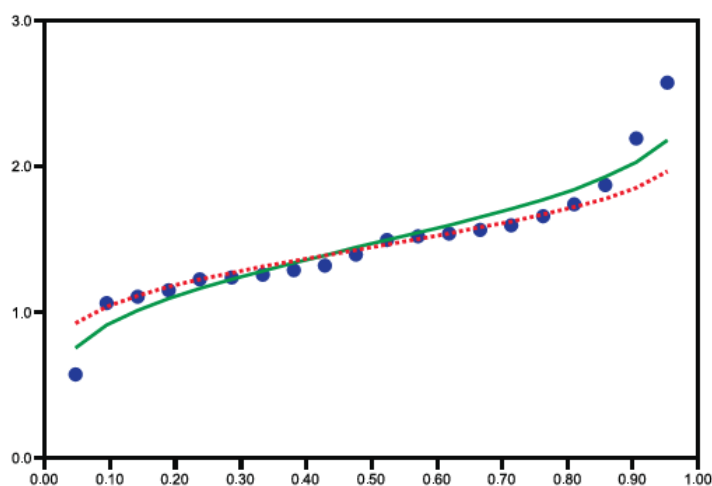
(speciálně normální) rozdělení, mohou být naopak přijatelné pro zešikmená rozdělení. Odlehlá měření lze vyřadit z dalšího zpracování, nesmí však dojít ke značnému snížení rozsahu souboru (ztrátě informací). V takovém případě je nutné doplnění novými experimentálními daty. [1]

8.3.3 Grafická identifikace statistických zvláštností dat

Pro průzkumovou analýzu se používají zejména grafické metody, které umožňují komplexní posouzení statistických zvláštností dat, zjednodušení jejich popisu, identifikaci typu rozdělení výběru, konstrukci empirického rozdělení výběru a zlepšení rozdělení dat. Využívá se především robustních kvantilových charakteristik, histogramu, krabicového grafu apod.

Kvantilový graf

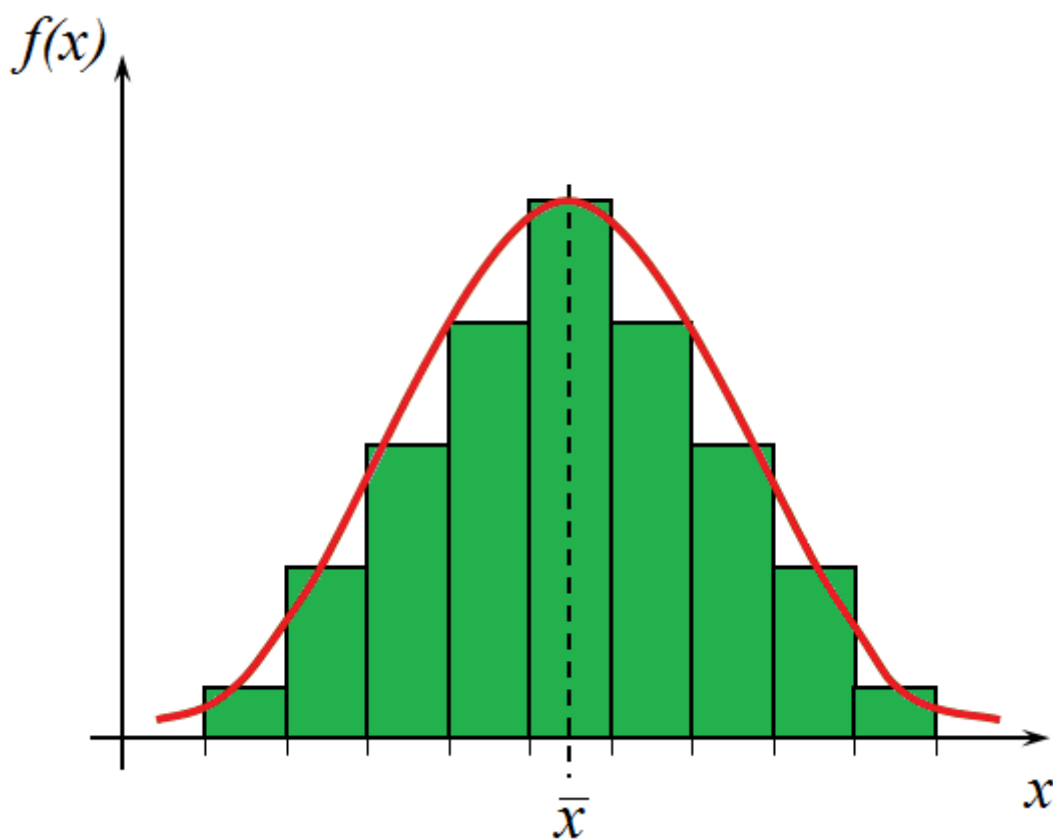
Kvantilový graf je vhodný zejména pro sledování lokálního chování dat pro malé a středně velké výběry. Umožňuje přehledně znázornit data a snadněji rozlišit tvar rozdělení (symetrický, zešikmený k vyšším nebo nižším hodnotám). Dále lze identifikovat lokální koncentrace dat nebo vybočující data. Ke snadnějšímu porovnání s normálním rozdělením se do tohoto grafu zakreslují i kvantilové funkce normálního rozdělení. Ukázku kvantilového grafu znázorňuje *Obr. 35*. Plná čára odpovídá robustním odhadům, přerušovaná funkce s klasickým průměrem a rozptylem. [1]



Obr. 35 - Kvantilový graf [6]

Histogram

Histogram představuje intervalové zobrazení četnosti zkoumaného znaku a zároveň slouží k názornému zobrazení struktury naměřených dat. V histogramu vynášíme na osu x hodnoty x_i seskupené do stejně širokých intervalů, na osu y pak četnost hodnot v daném intervalu. Výsledkem je pak jakýsi sloupcový graf. Hraniční body vrcholů sloupců bývají někdy spojeny do polygonu, kterému pak říkáme polygon četností. Histogram slouží k posouzení hustoty pravděpodobnosti rozdělení (např. šikmosti), proto se do něj někdy vynáší i hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení, jak ukazuje *Obr. 36*. [6]



Obr. 36 – Histogram s vyznačením distribuční funkce normálního rozdělení (červená křivka)

Počet intervalů m se volí buď empiricky v intervalu 5 až 20 nebo na základě vztahu (8.6) [6]

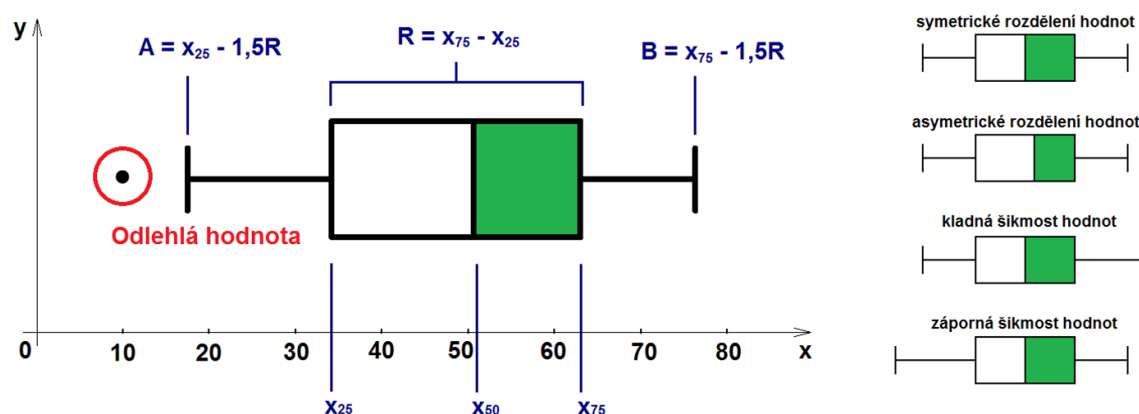
$$m = 1 + 3,3 \log n \quad (8.6)$$

Šířku intervalu h pak stanovíme jako podíl variačního rozpětí ku celkovému počtu intervalů.

$$h = \frac{R}{m} = \frac{x_{max} - x_{min}}{m} \quad (8.7)$$

Krabicový graf

Krabicový diagram se používá pro přehlednou informaci o datech - poloze, variabilitě i případném asymetrickém rozložení hodnot zkoumaného statistického souboru (viz *Obr. 37*). Vertikální úsečkou je vyznačen medián. Pokud se nachází uprostřed krabicového grafu, jedná se o rozdělení symetrické. Krajiní hodnoty boxu jsou tvořeny dolním a horním kvantilem. Délka boxu je rovna variačnímu mezikvartilovému rozpětí (stupeň variability souboru) $R = x_{0,75} - x_{0,25}$. Body, které se nacházejí ve větší vzdálenosti než $1,5 \cdot R$ od mediánu, jsou zobrazeny v podobě koleček a představují možná odlehlá pozorování. [1], [6]



Obr. 37 – Krabicový diagram (vlevo) a jeho možné stavy pro různé parametry rozdělení (vpravo)

Někdy také chceme zjistit, jestli mezi měřenými veličinami existuje nějaká závislost a pokud ano, tak jaká. Na tyto otázky podávají grafické metody zobrazení experimentálně zjištěných dat jen omezené odpovědi spíše orientačního charakteru. Chceme-li tyto údaje zjistit s větší přesností, nabízí se použití dalších statistických nástrojů, jakými jsou regresní a korelační analýza.

9 Měření závislostí mezi veličinami

Mezi statistickými znaky mohou existovat určité souvislosti. Objevování a popisování závislosti statistických znaků patří mezi nejdůležitější úkoly statistiky. Regrese a korelace jsou statistické metody pro stanovení typu a míry závislosti mezi dvěma veličinami. Typ i sílu závislosti pro náhodný výběr rozsahu n lze orientačně posoudit z bodového grafu, v němž je každá dvojice dat (x, y) graficky znázorněna jedním bodem. Základním úkolem regresní analýzy je nalezení vhodné teoretické regresní funkce k vystižení sledované závislosti vyjádřené jednotlivými body grafu. Korelační analýza navazuje na regresní analýzu, jejím hlavním úkolem je měření tzv. těsnosti zkoumané statistické závislosti. Těsností se rozumí síla (míra) závislosti dvou náhodných veličin. [23], [24]

9.1 Regresní analýza

Cílem regresní analýzy je proložit určitou množinu n bodů hladkou matematickou křivkou (přímkou atd.). Při výběru regresní funkce se řídíme metodou nejmenších čtverců, tedy hledáme funkci, která leží nejbližší hodnotám námi zadaných dat. Následně analyzujeme statistické vlastnosti přímky vybrané touto metodou. Podle typu prokládané křivky rozlišujeme regresi polynomicou, exponenciální, logaritmickou, hyperbolickou. U polynomické regrese dochází k aproximaci hodnot polynomem k -tého stupně (regrese lineární, kvadratická atd.). Volba daného typu regresní funkce se odvíjí od toho, jaký výsledek (průběh) v souladu s teoretickými předpoklady od naměřených dat očekáváme (lineární, exponenciální atd.). Měření by také neměla být příliš zkreslena vybočujícími hodnotami. Nejznámější regresní metodou je lineární regrese.

Lineární regresi lze použít, je-li závislost veličiny y na x lineární. Nezávisle proměnnou veličinu označujeme X (řídící) a závisle proměnnou Y (řízená). Jestliže provedeme n měření, získáme postupně n dvojic (x_i, y_i) , které lze zobrazit jako jednotlivé body grafu. Proložení bodů v grafu provádíme regresní přímkou tak, aby součet druhých mocnin odchylek jednotlivých bodů od přímky byl minimální (metoda nejmenších čtverců). Regresní přímka je popsána rovnicí (9.1).

$$y = a + bx \quad (9.1)$$

Kde:

a, b – regresní koeficienty,

a – posun na ose y (místo kde regresní přímka protíná svislou osu),

b – sklon regresní přímky.

Koeficienty a , b stanovíme ze vztahů (9.2) a (9.3):

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x} \quad (9.2)$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (9.3)$$

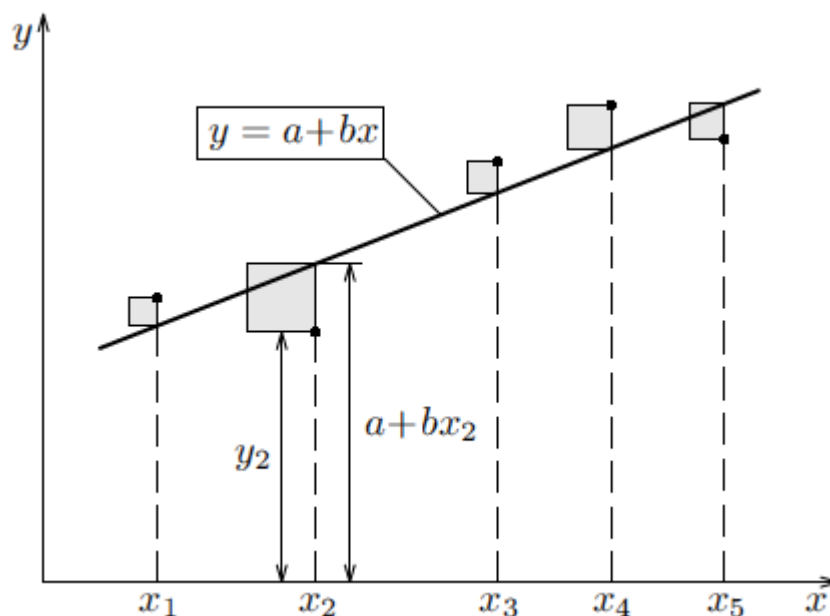
Důležitým ukazatelem je také tzv. koeficient determinace r^2 definovaný vztahem (9.4), který nabývá hodnot 0 až 1 a udává, jakou míru rozptylu sledované závislé proměnné se podařilo regresi vysvětlit. Větší hodnoty znamenají větší úspěšnost regrese.

$$r^2 = \frac{b^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum (a + bx_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (9.4)$$

[24], [25]

Metoda nejmenších čtverců

Tato metoda vychází z principu minimalizace součtu rozdílů druhých mocnin skutečných a získaných hodnot. Cílem je nalézt takovou funkci $y = a + bx$ (resp. její koeficienty a , b), aby součet druhých mocnin svislých odchylek bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \dots [x_n, y_n]$ od grafu funkce byl co nejmenší (viz Obr. 38). Tento součet závisí na koeficientech a , b , které získáme právě z minimalizace tohoto součtu.



Obr. 38 - Naznačení principu metody nejmenších čtverců [26]

Příklad použití lineární regrese

Byla změřena závislost odporu měděného vodiče na teplotě. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce (Tab. 8). Změřené hodnoty vykazují přibližně lineární závislost. Použijte lineární regresi k proložení grafu hodnot regresní přímkou a stanovte regresní koeficienty a koeficient determinace.

Tab. 8 – Změřená závislost odporu měděného vodiče na teplotě [26]

t[°C]	0	8,3	12,9	21,7	33	47,8	57,2	63,4	74,6	86,7
R [Ω]	52	53,1	54,1	56,3	58,8	61,7	63,6	65	67,6	69,8

Koeficienty a , b a r^2 stanovíme početně ze vztahů (9.2), (9.3) a (9.4) s tím, že položíme $x = t$ a $y = R$. Pro lepší přehlednost výpočtu si vytvoříme následující pomocnou tabulku.

Tab. 9 – Pomocná tabulka pro výpočet regresních koeficientů

t[°C]	R [Ω]	t.R	t²	(t_i-t)²	(R_i-R)²
0	52	0	0	1645,114	67,24
8,3	53,1	440,73	68,89	1040,708	50,41
12,9	54,1	697,89	166,41	765,0756	37,21
21,7	56,3	1221,71	470,89	355,6996	15,21
33	58,8	1940,4	1089	57,1536	1,96
47,8	61,7	2949,26	2284,84	52,4176	2,25
57,2	63,6	3637,92	3271,84	276,8896	11,56
63,4	65	4121	4019,56	521,6656	23,04
74,6	67,6	5042,96	5565,16	1158,722	54,76
86,7	69,8	6051,66	7516,89	2128,9	92,16
Σ	405,6	602	26103,53	24453,48	8002,344
$\bar{\varnothing}$	40,56	60,2			

Potřebné hodnoty potom snadno dosadíme do zmiňovaných vzorců:

$$b = \frac{n \sum t_i R_i - \sum t_i \sum R_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 26103,53 - 405,6 \cdot 602}{10 \cdot 24453,48 - 405,6^2} = \frac{16864,1}{80023,44} \doteq \mathbf{0,2107}$$

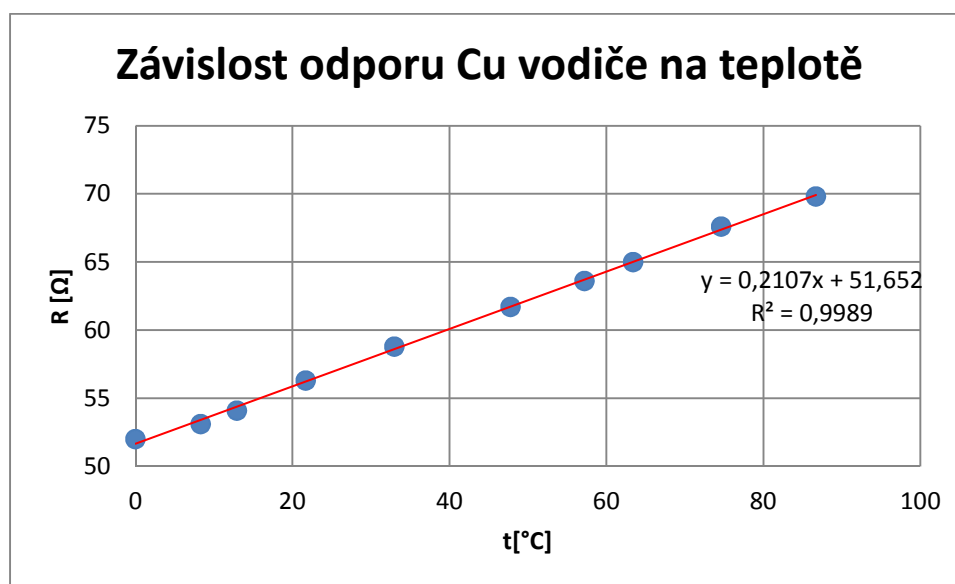
$$a = \frac{\sum R_i - b \sum t_i}{n} = \bar{R} - b \bar{t} = 60,2 - 0,21074 \cdot 40,56 \doteq \mathbf{51,652}$$

$$r^2 = \frac{b^2 \sum (t_i - \bar{t})^2}{\sum (R_i - \bar{R})^2} = \frac{0,2107^2 \cdot 8002,344}{355,8} = \frac{355,395}{355,8} \doteq \mathbf{0,9989}$$

Dosažením koeficientů a, b do rovnice regresní přímky (9.1) tedy dostaneme:

$$y = a + bx = 51,652 + 0,2107x$$

Vypočítané hodnoty koeficientů můžeme ověřit v programu MS EXCEL. Výpočet lineární regrese funkce jedné nezávisle proměnné provedeme tak, že zavedeme lineární trend v grafu funkce. Program umožňuje zobrazit regresní koeficienty i koeficient determinace (viz Obr. 39). Další možností, jak také získat hodnoty koeficientů, je použití maticového vzorce s funkcí LINREGRESE.



Obr. 39 – Proložení naměřených hodnot regresní přímkou v programu MS EXCEL

Jak je vidět na Obr. 39, hodnoty všech koeficientů jsou shodné s vypočítanými, provedené výpočty tedy byly správné. Z grafu je patrné, že měření je zatíženo určitými chybami a vynesené body jsou podle jeho přesnosti více nebo méně rozptýleny okolo grafu regresní přímky, který skutečnou závislost popisuje. Body v grafu zobrazující výsledky měření leží v těsné blízkosti regresní přímky. Tomu odpovídá i hodnota koeficientu determinace (v počítačových výstupech se také často značí R^2), která činí $r^2 = 0,9989$, což je jen nepatrně menší číslo než 1. Měření tedy bylo poměrně přesné. Koeficienty $a = 0,2107$ a $b = 51,652$ charakterizují regresní přímku. V programu Matlab lze obdobně použít funkci $P = POLYFIT(X, Y, 1)$, kde poslední parametr 1 udává, že hledáme koeficienty polynomu prvního řádu.

Jak již bylo zmíněno dříve, v praxi se vedle lineární setkáváme i s dalšími typy regresí:

$$\text{logaritmická regrese:} \quad y = a + b \ln x \quad (9.5)$$

$$\text{exponenciální regrese:} \quad y = ae^{bx} \quad (9.6)$$

$$\text{mocninná regrese:} \quad y = ax^b \quad (9.7)$$

$$\text{polynomická regrese:} \quad y = b_0 + b_1x + \dots + b_r x^r \quad (9.8)$$

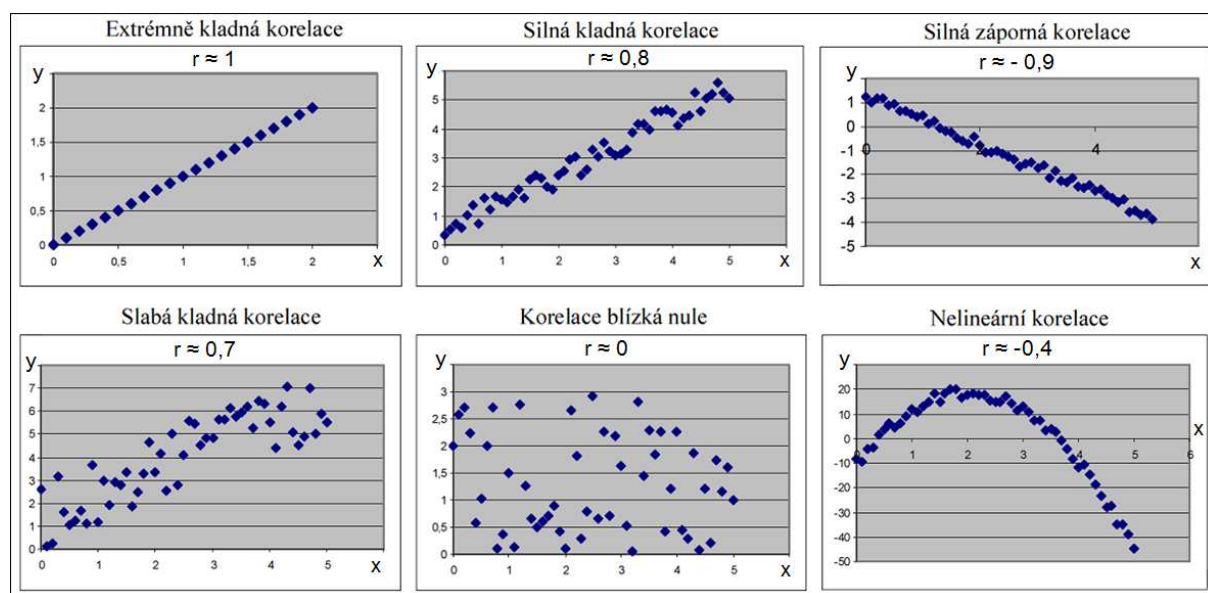
Vhodnou substitucí lze regresní funkce (9.5), (9.6) a (9.7) převést na funkce lineární. [26]

9.2 Korelační analýza

Cílem korelační analýzy je po provedení regresní analýzy zjistit těsnost statistické závislosti mezi statistickými znaky daného statistického souboru.

Korelace vyjadřuje vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami. Mění-li se jedna z nich, mění se korelativně i druhá a naopak. Existuje-li mezi dvěma procesy korelace, jsou na sobě pravděpodobně závislé. Samotná korelace však nedovoluje rozhodnout, zda je jeden z nich příčinou a druhý následkem. [27]

Ve statistice korelace značí vzájemný lineární vztah mezi znaky či veličinami x a y . Míru korelace pak vyjadřuje Pearsonův korelační koeficient r vyjádřený vztahem (9.9), který může nabývat hodnot od -1 až po $+1$. Vztah mezi znaky či veličinami x a y může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný pro $y = -kx$. Hodnota korelačního koeficientu -1 značí zcela nepřímou závislost (antikorelaci), tedy čím více se hodnoty v první skupině znaků zvětší, tím více se zmenší hodnoty v druhé skupině znaků (např. vztah mezi uplynulým a zbývajícím časem). Hodnota korelačního koeficientu $+1$ značí zcela přímou závislost (např. vztah mezi rychlostí bicyklu a frekvencí otáček kola bicyklu). Pokud je korelační koeficient roven 0 (nekorelovanost), pak mezi znaky není žádná statisticky zjistitelná lineární závislost (jsou tedy nezávislé). Na Obr. 40 je uvedeno několik případů různé míry korelace dvou veličin x a y . I při nulovém korelačním koeficientu na sobě přesto veličiny mohou záviset, tento však vztah nelze vyjádřit lineární funkcí. [27]



Obr. 40 – Korelace dvou veličin x a y pro různé korelační koeficienty r [13]

Koeficient korelace:
$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (9.9)$$

Někdy nemáme jasně určeno, která veličina je nezávislá a která závislá. Výsledkem lineární regrese X na Y není stejná regresní přímka jako regrese Y na X . Druhá mocnina korelačního koeficientu r^2 se nazývá stejně jako v případě regrese **koeficient determinace**, který lze chápat jako míru lineárního vztahu náhodných veličin X a Y bez ohledu na to, která veličina je závislá a která nezávislá – tento koeficient získaný z regrese i z korelace je v obou případech stejný. [24]

Hodnota koeficientu determinace z předchozího příkladu (*závislost odporu měděného vodiče na teplotě*) z předchozí kapitoly 9.1 byla $r^2 = 0,9989$. Určíme-li u předchozího příkladu hodnotu korelačního koeficientu příkazem CORREL v programu MS EXCEL, dostaneme hodnotu $r = 0,999428$. Hodnota koeficientu determinace potom bude odpovídat $r^2 = 0,999428^2 \doteq 0,9989$. Koeficienty determinace jsou tedy v obou případech shodné.

Ruční výpočet korelačního koeficientu si ukážeme na příkladu zatěžovací charakteristiky derivačního dynama, která je jen částečně lineární.

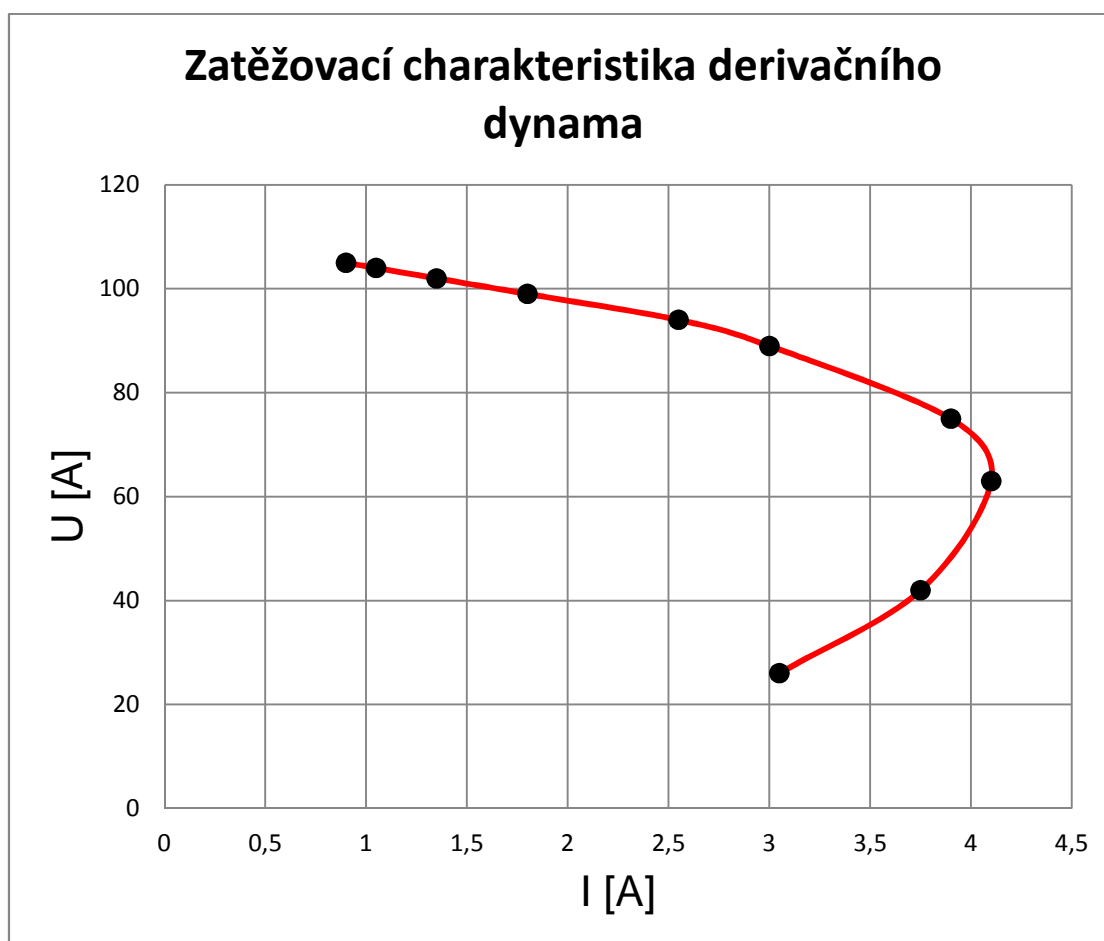
Příklad použití korelace:

Byla změřena zatěžovací charakteristika derivačního dynama. Určete míru závislosti mezi proudem a napětím, jejichž hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce:

Tab. 10 – Změřená zatěžovací charakteristika derivačního dynama

I [A]	0,9	1,05	1,35	1,8	2,55	3	3,9	4,1	3,75	3,05
U [V]	105	104	102	99	94	89	75	63	42	26

Jak je vidět na Obr. 41, zatěžovací charakteristika je přibližně lineární jen v určité části. Zaujímá nás, jak se tato skutečnost projeví na hodnotě korelačního koeficientu.



Obr. 41 - Zatěžovací charakteristika derivačního dynama

Koeficient korelace vypočítáme dosazením do vztahu (9.9) s tím, že položíme $x = I$, $y = U$. Pro přehlednost výpočtu si sestavíme následující pomocnou tabulku.

Tab. 11 - Pomocná tabulka pro výpočet korelačního koeficientu

$I[A]$	$U[V]$	$I_i - \bar{I}$	$U_i - \bar{U}$	$(I_i - \bar{I})(U_i - \bar{U})$	$(I_i - \bar{I})^2$	$(U_i - \bar{U})^2$
0,9	105	-1,65	25,1	-41,29	2,71	630,01
1,05	104	-1,50	24,1	-36,03	2,24	580,81
1,35	102	-1,20	22,1	-26,41	1,43	488,41
1,8	99	-0,75	19,1	-14,23	0,56	364,81
2,55	94	0,01	14,1	0,07	0,00	198,81
3	89	0,46	9,1	4,14	0,21	82,81
3,9	75	1,36	-4,9	-6,64	1,84	24,01
4,1	63	1,56	-16,9	-26,28	2,42	285,61
3,75	42	1,21	-37,9	-45,67	1,45	1436,41
3,05	26	0,51	-53,9	-27,22	0,26	2905,21
celkem				-219,56	13,09	6996,9

Průměrná hodnota proudu: $\bar{I} = 2,545 \text{ A}$

Průměrná hodnota napětí: $\bar{U} = 79,9 \text{ V}$

Dosazením do potřebných hodnot z Tab. 11 do vztahu (9.9) dostaneme:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})(U_i - \bar{U})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}} = \frac{-219,56}{\sqrt{13,09 \cdot 6996,9}} = -0,7255$$

$$r_{XY}^2 = (-0,7255)^2 = 0,52635$$

Hodnota korelačního koeficientu $r_{XY} = -0,7255$ značí zápornou korelaci, tedy že nízké hodnoty jedné proměnné odpovídají vysokým hodnotám druhé proměnné. Míru závislosti mezi změřeným napětím a proudem lze na základě hodnoty korelačního koeficientu označit jako středně silnou. Správnost výsledku můžeme ověřit v programu MS EXCEL pomocí funkcí CORREL nebo PEARSON. Obě vrací stejný výsledek $r_{XY} = -0,72541$, což odpovídá původní vypočítané hodnotě. Hodnota koeficientu determinace činí $r_{XY}^2 = 0,52635$, což ukazuje na částečnou lineární závislost.

Závěr

Metody statistického a pravděpodobnostního počtu nacházejí v elektrotechnice a obecně v celé řadě dalších technických oborů poměrně široké uplatnění. S náhodností či nejistotou se v technické praxi i běžném životě setkáváme neustále. Jedinou skutečně absolutní jistotou je, že nic není absolutně jisté. Náhodné veličiny jsou všudypřítomné a na jejich nezpochybnitelný vliv na výsledky měření nebo spolehlivost nejen elektrotechnických zařízení je třeba brát zřetel. Pomocí různých matematických, statistických a pravděpodobnostních nástrojů jsme schopni náhodnou proměnnou popsat a dále s ní pomocí těchto nástrojů pracovat. Jedná se zejména o různá pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny, prostřednictvím kterých můžeme modelovat např. životnost elektrických zařízení a porovnávat teoreticky vypočítané hodnoty s experimentálně zjištěnými daty. Pomocí teorie pravděpodobnosti jsme schopni vyjádřit míru jistoty, jak jsou naše výsledky přesné nebo že určité zařízení bude spolehlivě pracovat po stanovenou dobu. V technické praxi jsou podstatné číselné charakteristiky náhodné proměnné. Mírou naší nejistoty je v tomto případě rozptyl kolem střední hodnoty námi měřeného parametru. V našem zájmu je samozřejmě to, aby byl tento rozptyl, co by pásmo nejistoty, co možná nejmenší. Jinou možností je pokusit se předvídat určitý výsledek na základě empirických poznatků a pokusit se vysledovat jisté zákonitosti (provést bodové odhady a přiřadit průběh sledované veličiny určitému pravděpodobnostnímu rozdělení) a na základě toho provést odhad sledovaného parametru v určitém budoucím čase. I zde je ovšem určitá míra nejistoty, jejíž velikost závisí na spoustě faktorů plynoucích např. z chyb pozorovatele, měřících přístrojů a dalších náhodných a spolehlivě nepředvídatelných vlivů. V souvislosti se znalostmi tvarů konkrétních pravděpodobnostních rozdělení náhodné veličiny můžeme ale s poměrně velkou jistotou odhalit hrubé chyby v získaných datech posouzením jejich normality, homogenity nebo velikosti výběrového souboru (jestli má dostatečnou výpovědní hodnotu). Na základě grafických vyjádření sledované veličiny jsme schopni identifikovat statistické zvláštnosti a odlehlé hodnoty měření. Ty pak můžeme vyloučit z dalšího zpracování, případně je nahradit nově změřenými hodnotami. Takto prověřená data lze podrobit regresní a korelační analýze pro zjištění míry závislosti mezi sledovanými veličinami a pro dosažení přesnějších výsledků aproximací naměřených dat regresní křivkou, která dobře popisuje zjištěnou závislost mezi daty. Statistický a pravděpodobnostní počet tak nachází v oboru elektrotechniky a spolehlivosti široké možnosti uplatnění, a to zejména v oblasti stanovování, zjišťování a modelování spolehlivostních parametrů zařízení a v následném dalším zpracování těchto dat.

Použité zdroje

- [1] PROSR, Pavel. *Soubor přednášek předmětu KET/SEZ (Spolehlivost elektrotechnických zařízení)*, verze LS 2011, Západočeská univerzita v Plzni
- [2] HENDL, Jan. *Přehled statistických metod zpracování dat: analýza a metaanalýza dat*. Vyd. 2., opr. Praha: Portál, 2006, 583 s. ISBN 80-736-7123-9.
- [3] KOVÁŘÍK, Martin. *Aplikovaná statistika 2. seminář: Popisná statistika*. [online]. 16. 2. 2009 [cit. 2012-04-25]. Dostupné z: <<http://mates-kabe.wz.cz/APS/Seminare/2/2.Seminar.ppt>>
- [4] PICKOVÁ, Veronika. *FDD - statistika*. [online]. 13. 1. 2012 [cit. 2012-04-06]. Dostupné z: <<http://xuv.kfe.fjfi.cvut.cz/vyuka/fdd/112>>
- [5] Teorie pravděpodobnosti. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, last modified on 8. 3. 2012 [cit. 2012-03-15]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_pravděpodobnosti>
- [6] OTYEPKA, Michal; BANÁŠ, Pavel; OTYEPKOVÁ, Eva. *Základy zpracování dat*. [online]. 16. 2. 2007 [cit. 2012-04-07]. Dostupné z: <<http://fch.upol.cz/skripta/zzd/chemo/chemo.pdf>>
- [7] POLSTEROVÁ, Helena. *Spolehlivost v Elektrotechnice*. [online]. 2003 [cit. 2012-02-27]. Dostupné z: <http://www.umel.feec.vutbr.cz/VIT/images/pdf/studijni_materialy/bc/Spolehlivost_v_elektrotechnice_S.pdf>
- [8] VÍTEČKOVÁ, Miluše; PŘIDAL, Petr; KOUDELA, Tomáš. -- *Systémová analýza -- VŠB - TU Ostrava: Náhodná veličina*. [online]. 2006 [cit. 2012-04-02]. Dostupné z: <<http://books.fs.vsb.cz/SystAnal/texty/07.htm>>
- [9] Charakteristika náhodné veličiny. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, last modified on 30. 11. 2011 [cit. 2012-04-02]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Charakteristika_náhodné_veličiny>
- [10] KOŽÍŠEK, Jan; STIEBEROVÁ, Barbora. *Statistika v příkladech*. [online]. 2011 [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <http://www.dashofer.cz/download/ukazky/hes/Ucebnice_statistiky_2011_mail.pdf>

- [11] VOLENEC, Karel; HANUŠ, Josef; LÁZNÍČEK, Milan. *Využití statistických metod v medicíně (teorie informace pro aplikace VaV, vícerozměrné metody, atd.)*. [online]. 2011 [cit. 2012-04-29]. Dostupné z: <http://www.projekt-endoskopie.cz/attachment/Vyuziti_statistiky_v_medicine_skripta.pdf>
- [12] OTIPKA, Petr; ŠMAJSTRLA, Vladislav. *Základní typy rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - příklady*. [online]. 27. 2. 2012 [cit. 2012-04-05]. Dostupné z: <<http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP04/respr4.htm>>
- [13] KOHOUT, Václav. *Korelace*. [online]. 15. 4. 2004 [cit. 2012-05-02]. Dostupné z: <http://www.kmt.zcu.cz/person/Kohout/info_soubory/letnise/SS/stat15.pdf>
- [14] KSTP. *STATISTIKA: TABULKY*. [online]. 2006 [cit. 2012-04-23]. Dostupné z: <<http://statistika.vse.cz/download/materialy/tabulky.pdf>>
- [15] TŮMA, Jiří. *Spolehlivost v elektroenergetice*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2006, 291 s. ISBN 80-239-6483-6.
- [16] VÍTEČKOVÁ, Miluše; PŘIDAL, Petr; KOUDELA, Tomáš. -- *Systémová analýza -- VŠB - TU Ostrava: Normální rozdělení náhodné veličiny*. [online]. 2006 [cit. 2012-04-06]. Dostupné z: <<http://books.fs.vsb.cz/SystAnal/texty/10.htm>>
- [17] OTIPKA, Petr; ŠMAJSTRLA, Vladislav. *Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny*. [online]. 14. 10. 2009 [cit. 2012-04-03]. Dostupné z: <<http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP05/PRAV5.HTM>>
- [18] BISKUP, Roman. *Základy teorie pravděpodobnosti: Náhodná veličina - Vybraná spojitá rozdělení*. [online]. 12. 2. 2012 [cit. 2012-04-26]. Dostupné z: <<http://home.ef.jcu.cz/~birom/stat/prednasky/07four.pdf>>
- [19] Teorie spolehlivosti. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, last modified on 21. 12. 2011 [cit. 2012-03-15]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_spolehlivosti>
- [20] JAROŠOVÁ, Marta. *Kombinatorika*. [online]. 08. 2. 2010 [cit. 2012-04-06]. Dostupné z: <http://homel.vsb.cz/~dom033/predmety/statistika/ucebni_text/2kombinatorika.pdf>

- [21] SYNEK, Václav. *Statistická indukce - úvod a teorie odhadů*. [online]. 26. 10. 2007 [cit. 2012-04-23]. Dostupné z: <<http://fzp.ujep.cz/~synek/statistika/skripta/StatInd3.doc> >
- [22] KUKAL, Jaromír. *AUTOMATIZACE - Články - Robustnost*. [online]. září 2008 [cit. 2012-04-05]. Dostupné z: <<http://www.automatizace.cz/article.php?a=2285>>
- [23] KVASZOVÁ, Milena. *Měření závislostí (regrese, korelace)*. [online]. 22. 11. 2005 [cit. 2012-04-22]. Dostupné z: <http://is.vsfs.cz/el/6410/zima2005/BK_StB/Regresni_a_korelacni_analyza.pdf>
- [24] ZVÁROVÁ, Jana. *Měření závislosti*. [online]. 5. 1. 1999 [cit. 2012-04-22]. Dostupné z: <<http://new.euromise.org/czech/tajne/ucebnice/html/html/node13.html>>
- [25] PROJECT TEAM Západočeské univerzity v Plzni. *Studium závislostí náhodných veličin*. [online]. 07. 1. 2005 [cit. 2012-04-06]. Dostupné z: <<http://athena.zcu.cz/kurzy/spne/000/HTML/43/>>
- [26] ŠEDIVÝ, Přemysl. *Teplotní závislosti fyzikálních veličin*. [online]. 2012 [cit. 2012-04-21]. Dostupné z: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/teplota.pdf>>
- [27] HOLČÍK, Jiří. *Signály a lineární systémy: III. Korelace*. [online]. 2012 [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <<http://www.iba.muni.cz/esf/res/file/bimat-prednasky/signaly-a-linearni-systemy/SLS-03.pdf>>
- [28] FAIGL, Jan. *Charakteristiky spolehlivosti: 2. přednáška*. [online]. 2012 [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <<http://lynx1.felk.cvut.cz/spo/files/prednasky/slides/print-2x2/lecture02-print-2x2.pdf>>
- [29] NOVOTNÝ, Radovan. *Weibullovo rozdělení při analýzách bezporuchovosti*. [online]. 4. 3. 2002 [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <<http://www.elektrorevue.cz/clanky/02017/index.html>>
- [30] FAMFULÍK, Jan; KRZYŽANEK, Radek; MÍKOVÁ, Jana. *Vybrané zákony rozdělení používané ve spolehlivosti*. [online]. 3. 3. 2008 [cit. 2012-04-16]. Dostupné z: <<http://homel.vsb.cz/~krz011/3kapitola.pdf>>

- [31] PŘEUČIL, Libor. *Markovovy modely*. [online]. 2012 [cit. 2012-05-02]. Dostupné z: <<http://lynx1.felk.cvut.cz/spo/files/prednasky/pdf/lecture6-print.pdf>>
- [32] HUSÁK, Miroslav. *Spolehlivost systémů*. [online]. [cit. 2012-04-27]. Dostupné z: <http://www.micro.feld.cvut.cz/home/X34EZS/prednasky/12_Spolehlivost_systemu.pdf>
- [33] GLÜCKSMANNOVÁ, Radka. *Pravděpodobnostní modely kolem nás*. [online]. [cit. 2012-05-03]. České Budějovice, 2007. 70 s. Bakalářská práce na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Vedoucí diplomové práce Tomáš Mrkvička. Dostupné z: <<http://home.pf.jcu.cz/~mrkvicka/vyuka/Pmkn.pdf>>
- [34] PRŮCHA, Ladislav. *Typy rozdělení*. [online]. 1. 11. 2004 [cit. 2012-05-03]. Dostupné z: <<ftp://math.feld.cvut.cz/pub/prucha/m3c/predn/pravd/u6.pdf>>