

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Křivky vzniklé valením jedné křivky po druhé

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 19. května 2016

Vojtěch Ouda

Poděkování

Chtěl bych poděkovat RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D. za rady, vstřícnost a ochotu při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Abstrakt

Bakalářská práce se věnuje křivkám, které vznikají valením jedné křivky po druhé. V úvodu jsou informace o kinematické geometrii a vysvětlení pojmu pevná a hybná polodie. V další části se práce věnuje některým obecným vlastnostem a umožňuje parametrizovat obecně některé speciální případy křivek, které vznikají valením. V další části jsou uvedeny příklady těchto křivek a některé jejich vlastnosti.

Klíčová slova

Valení křivek, trajektorie pohybu, pevná polodie, hybná polodie, kinematická geometrie.

Abstract

Bachelor thesis deals with curves, which are forming by rolling curve along the another – roulette. In the beginning are information about kinematic geometry and explanation of fixed and moving polode. Next part is about some general properties and parametrization special roulettes. In the next part are specific examples of roulettes and some properties of this curves.

Key words

Roulette, rolling curves, trajectory of the motion, fixed polode, moving polode, kinematic geometry.

Obsah

1	Úvod	1
2	Přehled studované problematiky	2
3	Kinematická geometrie v rovině	4
4	Přehled značení	9
5	Parametrizace křivek vzniklých valením	10
5.1	Křivky parametrizované obloukem	10
5.2	Křivky vyjádřené polárně	14
6	Křivky vzniklé valením	18
6.1	Cykloida, epicykloida, hypocykloida, evolventa	18
6.2	Valení kružnice po parabole	21
6.3	Valení paraboly po parabole – Dioklova kisoída	23
6.3.1	Vznik Dioklovy kisoídy kruhovou inverzí	25
6.4	Řetězovka	26
6.4.1	Odvození rovnice řetězovky	26
6.4.2	Valení paraboly po přímce	28
6.5	Elipsa po přímce – eliptická řetězovka	32
6.6	Elipsa po elipse	35
6.7	Přímka po řetězovce	36
6.8	Logaritmická spirála po přímce	39
6.9	Archimédova spirála po parabole	41
6.10	Hyperbolická spirála po exponenciele	42
6.11	Přehled	44
7	Závěr	45

1 Úvod

Tématem bakalářské práce je valení křivek, které je součástí kinematické geometrie. Ta se věnuje pohybu geometrických objektů a zkoumá trajektorie jednotlivých bodů. Práce se zabývá nejen jednotlivými případy vzniku křivek valením, ale uvádí i některé obecné poznatky.

Díky vypracování řešerše na toto téma byly nalezeny některé dokumenty věnující se dané problematice. Ty se ve většině případů omezovaly na vznik rovnic těchto křivek a některé jejich vlastnosti. Konkrétní aplikace byly uvedeny spíše u některých známějších křivek (např. cyklické křivky).

Kapitola *Kinematická geometrie v rovině* se věnuje základním pojmům, které jsou čerpány z [1], [2], a uvádí některé věty, díky nimž jsme schopni nadefinovat samotné valení a dále s tímto pojmem pracovat. Kapitola *Parametrizace křivek vzniklých valením* se věnuje dvěma různým pohledům na problematiku – buďto chceme najít předpis pro parametrizaci křivky vzniklé valením (máme-li zajištěny některé vlastnosti) [3] nebo chceme zjistit, po jaké křivce musíme jinou křivku valit, abychom jako výslednou křivku dostali přímku [4]. V mnoha případech ale tyto poznatky využít nelze – některým takovým se věnuje kapitola *Křivky vzniklé valením* a uvádí konkrétní příklady křivek, jež vznikají valením. V této kapitole jsou také ukázány poznatky z předešlé kapitoly na konkrétních křivkách.

Pomocí softwaru dynamické geometrie *GeoGebra* byly vytvořeny ke všem křivkám, kterým se práce věnuje, ukázky odvalování a vzniku výsledné křivky. Pro úpravy výrazů byl použit program *Wolfram Mathematica 10*.

2 Přehled studované problematiky

Při vypracování rešerše byly nalezeny některé prameny věnující se valení křivek. Některé z nich jsou zde uvedeny.

- WALKER, Gordon. The General Theory of Roulettes. *National Mathematics Magazine*. 1937, 12(1), 21-26. DOI: 10.2307/3028504. ISSN 15395588. Dostupné také z: <<http://www.jstor.org/stable/3028504?origin=crossref>>

Hlavní myšlenka tohoto článku se věnuje kapitola 5.1 a hovoří o vzniku předpisu pro trajektorii pohybu valení, přičemž hybná i pevná křivka je parametrizovaná obloukem.

- PLESKOT, Antonín. Jistá příbuznost křivek související s teorií křivek valících se. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [online]. 1932, (4), 137 - 145 [cit. 2016-04-19]. ISSN 1802-114X (printed edition, 1872-1950). Dostupné z: <<http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/121317>>

Hlavní myšlenka článku je zpracovaná v kapitole 5.2 a hovoří o vzniku takové trajektorie bodu, aby jí byla přímka (resp. osa x).

- FRED KUCZMARSKI. Roads and Wheels, Roulettes and Pedals. *The American Mathematical Monthly* [online]. 2011, **118**(6), 479-496 [cit. 2016-05-11]. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.118.06.479. ISSN 00029890. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.06.479>>

Tento článek pojednává o vzniku trajektorie pohybu valením některých křivek po ose x nebo naopak jako v [4] takovým křivkám, kdy valením vzniká přímka (osa x).

- SÁNCHEZ-REYES, Javier. The Catenary as Roulette. *The College Mathematics Journal* [online]. 2012, **43**(3), 216-219 [cit. 2016-05-11]. DOI: 10.4169/college.math.j.43.3.216. ISSN 07468342. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/info/10.4169/college.math.j.43.3.216>>

Jiný způsob odvození řetězovky jako křivky, která vzniká valením, než je uvedeno v této bakalářské práci.

- ATHUKORALLAGE, Bhagya, Thanuja PARAGODA a Magdalena TODA. *Roulettes of conics, Delaunay surfaces and applications* [online]. 2013, , 1-24 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: <<https://www.researchgate.net/>>

publication/267037823_Roulettes_of_conics_Delaunay_surfaces_and_applications>

Tento článek se věnuje především plochám (a jejich vlastnostem), které vzniknou rotací křivek vzniklých valením kuželosečky po přímce, přičemž bod tvořící křivku je ohnisko. V textu je i vyjádření těchto křivek parametricky nebo diferenciální rovnicí.

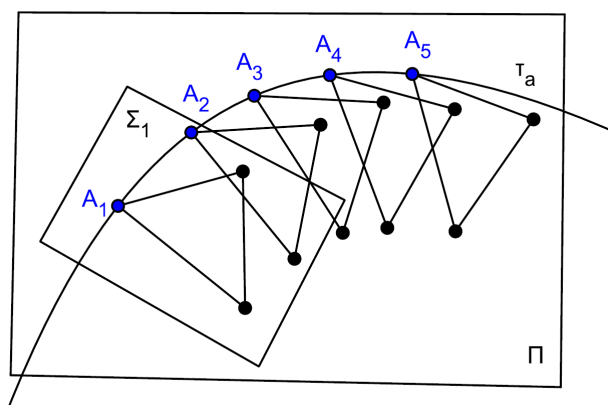
- BENDITO, Enrique, Mark J. BOWICK a Agustin MEDINA. Delaunay Surfaces. *J. Geom. Symmetry Phys.* [online]. 2014, **33**, 27-45 [cit. 2016-05-03]. Dostupné z: <<https://arxiv.org/abs/1305.5681>>

Podobně jako předchozí článek, jen se více věnuje odvozením parametrizace křivek, také zkoumá plochy, které z těchto křivek vzniknou.

3 Kinematická geometrie v rovině

Valení (odvalování, kotálení) křivek je součástí kinematické geometrie, proto zde budou uvedeny některé její základy, které jsou využity v této práci. Informace o kinematické geometrii jsou čerpány z [1], [2].

Kinematická geometrie v rovině se věnuje geometrickým vlastnostem útvarů, které vznikají při pohybu neproměnné rovinné soustavy. Neproměnná rovinná soustava (dále jen soustava) je množina všech geometrických útvarů, která se jako neproměnný celek pohybuje, tedy jednotlivé útvary v soustavě vůči sobě nemění svoji polohu. Pohybuje-li se soustava po pevné rovině, pak její body opisují v rovině křivky, tzv. *trajektorie pohybu*. Na obrázku 3.1 je zobrazena trajektorie pohybu bodu A pohybující se soustavy Σ s několika polohami soustavy.



Obrázek 3.1: Trajektorie bodu (převzato z [2])

Z neproměnnosti pohybující se soustavy Σ plyne, že při dané poloze Σ_1 v pevné rovině Π je další poloha Σ_2 jednoznačně určena, známe-li přemístěnou polohu A_2B_2 libovolné úsečky A_1B_1 soustavy Σ_1 . To platí pro každou polohu soustavy Σ , tedy platí následující věta:

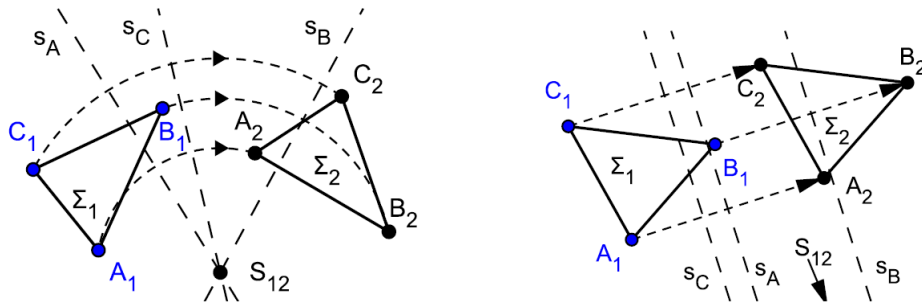
Věta 1 *Pohyb neproměnné rovinné soustavy Σ je určen, jsou-li dány trajektorie τ_A, τ_B jejích bodů A, B .*

Trajektorii dalších bodů soustavy určíme na základně neproměnnosti soustavy.

Pro dvě polohy pohybující se soustavy Σ platí následující věta.

Věta 2 Jsou-li Σ_1, Σ_2 dvě různé polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ , existuje vždy otočení nebo posunutí, které přemístí soustavu z polohy Σ_1 do polohy Σ_2 .

Obrázek 3.2 ilustruje otočení a posunutí soustavy Σ z polohy Σ_1 do polohy Σ_2 . Přímký s_A, s_B, s_C jsou osy úseček A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Osy se protínají ve středu otáčení S_{12} .



Obrázek 3.2: Otočení a posunutí (převzato z [2])

Věta 2 platí pro každé dvě různé polohy Σ_1, Σ_2 pohybující se soustavy Σ , tedy i pro polohy Σ_2 blízké se Σ_1 . Přibližuje-li se A_2 po trajektorii τ_A k bodu A_1 , pak i B_2 se přibližuje k B_1 po τ_B . Sečna A_1A_2 se tedy blíží tečně trajektorie τ_A v bodě A_1 a tedy i osa úsečky A_1A_2 se blíží normále trajektorie τ_A . Analogicky se sečna B_1B_2 blíží tečně trajektorie τ_B v bodě B_1 , osa úsečky B_1B_2 se blíží normále trajektorie τ_B . Společný bod S_{12} os s_A, s_B se pak blíží společnému bodu S_1 obou normál.

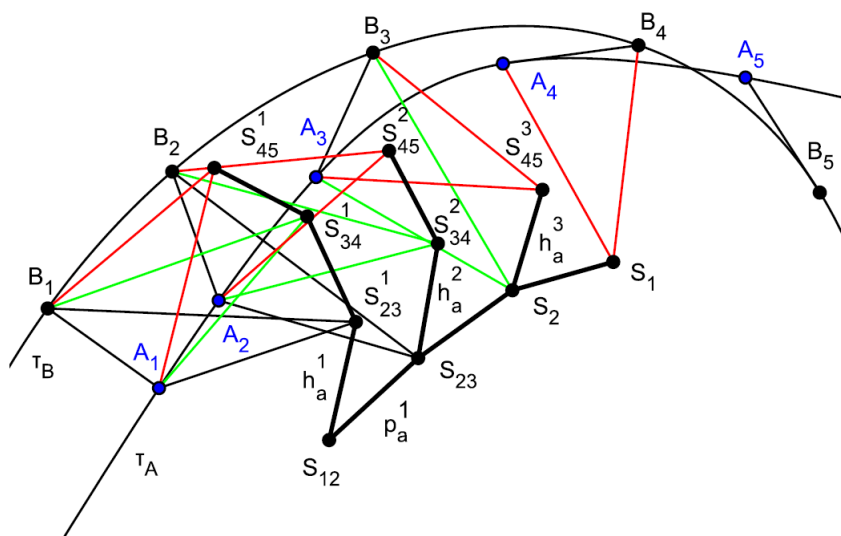
Věta 3 V každé poloze Σ_1 pohybující se neproměnné soustavy Σ procházejí normály trajektorií pevným (vlastním nebo nevlastním) bodem S_1 .

Definice 1 Bod S_1 se nazývá okamžitý střed otáčení nebo okamžitý pól (příslušný poloze Σ_1 pohybující se soustavy Σ).

Nyní předpokládejme pohyb různý od rotace a translace (pohyb složený z rotací a translací), který je dán trajektoriemi τ_A, τ_B bodů A, B neproměnné

rovinné soustavy Σ . Ke každé posloupnosti poloh $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ pohybující se soustavy Σ lze jednoznačně sestavit posloupnost bodů $S_{12}, S_{23}, S_{34}, \dots$, které jsou středy otáčení, které přemístí Σ_1 v Σ_2 o $\angle A_1 S_{12} A_2$, Σ_2 v Σ_3 o $\angle A_2 S_{12} A_3$, \dots . Body $S_{12}, S_{23}, S_{34}, \dots$ tvoří vrcholy lomené čáry, kterou označíme p_a .

Sestrojíme body $S_{23}^1, S_{34}^1, S_{45}^1, \dots$ tak, aby se po aplikaci jednotlivých otáčení postupně staly středy otáčení $S_{23}, S_{34}, S_{45}, \dots$. K $\Delta A_2 B_2 S_{23}$ sestrojíme přímo shodný $\Delta A_1 B_1 S_{23}^1$ a najdeme tak S_{23}^1 . Podobně k $\Delta A_3 B_3 S_{34}$ najdeme přímo shodný $\Delta A_1 B_1 S_{34}^1$ atd. Body $S_{12}^1 = S_{12}, S_{23}^1, S_{34}^1, \dots$ jsou vrcholy lomené čáry h_a^1 . Z konstrukce vyplývá $|S_{12}^1 S_{23}^1| = |S_{12} S_{23}|, |S_{23}^1 S_{34}^1| = |S_{23} S_{34}|, \dots$. Otočení polohy Σ_1 okolo S_{12} o úhel $\angle A_1 S_{12} A_2$ do polohy Σ_2 přemístí h_a^1 do h_a^2 , která je shodná s h_a^1 , ale otočená o úhel $\angle A_1 S_{12} A_2$ okolo S_{12} . Podobně se h_a^2 otočí do h_a^3 atd. Tato konstrukce je ilustrována na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Konstrukce poloh h_a^1, h_a^2, h_a^3 (převzato z [2])

Tedy postupné otáčení poloh Σ_1 do Σ_2, Σ_2 do Σ_3, \dots lze nahradit pohybem lomené čáry h_a po lomené čáře p_a . V limitním případě, tedy když přejdeme k okamžitým středům otáčení, lomené čáry p_a, h_a přejdou v křivky p, h .

Definice 2 Množina všech okamžitých středů otáčení pohybující se nepro-měnné soustavy Σ se nazývá pevná polodie p .

Definice 3 Množina všech bodů neproměnné rovinné soustavy Σ , které se při jejím pohybu stanou okamžitými středy otáčení, se nazývá hybná polodie h .

Následující věty hovoří o vlastnostech obou polodií.

Věta 4 V každé poloze Σ_1 pohybující se neproměnné soustavy Σ se příslušná poloha h_1 hybné polodie h dotýká pevné polodie p v v okamžitém středu otáčení S_1 .

Věta 5 Necht' Σ_1, Σ_2 jsou dvě různé polohy soustavy Σ a h_1, h_2 jsou příslušné polohy hybné polodie h , které se dotýkají pevné polodie p v okamžitých pólech S_1, S_2 . Označme $S_2^1 \in h_1$ bod, který se stane okamžitým pólem S_2 (přejde-li Σ_1 v Σ_2). Potom oblouk $\widehat{S_1 S_2^1}$ na pevné polodii je roven oblouku $\widehat{S_1 S_2^1}$ na hybné polodii měřené v poloze h_1 .

Pohyb křivky h po křivce p popsany ve větách 4, 5 se nazývá valení (odvalování, kotálení) hybné polodie h po pevné polodii p . Dále v tomto textu je pro označení hybné polodie použit název *hybná křivka*, pro označení pevné polodie pak *pevná křivka*.

Poznámka Byly zde uvedeny pouze některé základy kinematické geometrie nezbytné k definování pojmu *valení křivek*. Více (včetně důkazů jednotlivých vět) viz např. [1, str. 242 – 248].

Definujme navíc pojem *tečný úhel*, neboť je v této práci několikrát použit.

Definice 4 *Tečný úhel ϕ je úhel, který svírá kladný směr osy x a tečna křivky. Pro tečný úhel křivky vyjádřené parametricky platí:*

$$\frac{(x'(t), y'(t))}{|x'(t), y'(t)|} = (\cos(\phi), \sin(\phi)) \Rightarrow \operatorname{tg}(\phi) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (3.1)$$

Tečný úhel ψ křivky vyjádřené polárně $r = r(\varphi)$ je úhel, který svírá průvodič s tečnou. Je vyjádřen jako:

$$\frac{(r'(\varphi), r(\varphi))}{|r'(\varphi), r(\varphi)|} = (\cos(\psi), \sin(\psi)) \Rightarrow \operatorname{tg}(\psi) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}. \quad (3.2)$$

Navíc smysl těchto úhlů ϕ a ψ je stejný. Je-li $\varphi = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, potom průvodič splyne s osou x , tedy x -ová souřadnice je rovna $x = r$ a zároveň ze vztahů pro převod kartézských souřadnic do polárních plyne $y' = r$. Potom jsou vztahy (3.1) a (3.2) totožné.

4 Přehled značení

Křivka	velkým tučným	např. \mathbf{G} , \mathbf{F}
Přímka	malým tučným	např. \mathbf{t} , \mathbf{n}
Bod	velkou kurzívou	např. S , O
Vektor	malým tučným nebo s šipkou	např. \mathbf{u} , \overrightarrow{AB}
Velikost vektoru/úsečky	ve svislých čarách	např. $ \mathbf{u} $, $ PQ $
Vzdálenost 2 bodů po křivce	stříška nad body	např. \widehat{OT} , \widehat{PQ}

Tabulka 4.1: Přehled značení

5 Parametrizace křivek vzniklých valením

Tato kapitola je věnována některým způsobům parametrizace křivek vzniklých valením. Bohužel obecný způsob parametrizace všech křivek takto vzniklých neexistuje, můžeme ale získat algoritmy pro specifické případy.

5.1 Křivky parametrizované obloukem

Problematikou parametrizace křivek vzniklých valením se zabývá článek *The General Theory of Roulettes* od Gordona Walkera [3], z něhož je čerpána hlavní myšlenka pro následující odvození výsledné křivky. V něm se pojednává o vzniku parametrizace těchto křivek obecným postupem, jsou-li křivky parametrizovány obloukem.

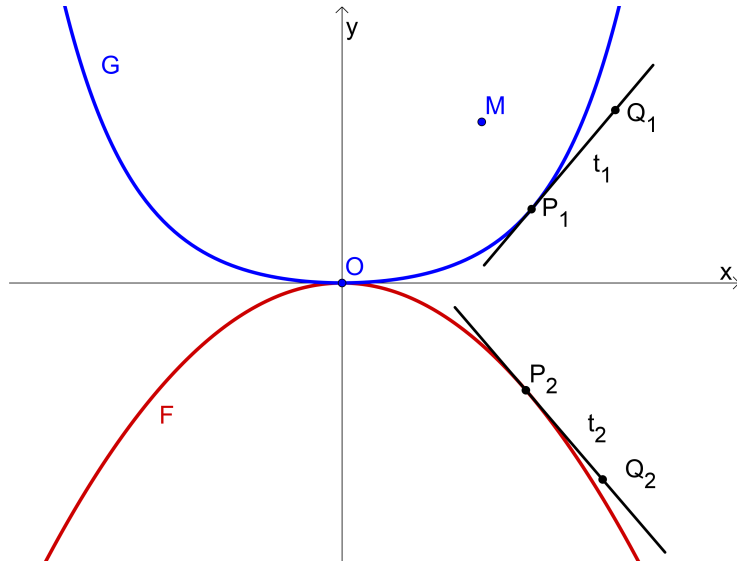
Mějme hybnou křivku $\mathbf{G}(s) = (g_1, g_2)$, která je parametrizovaná obloukem:

$$\begin{aligned} x &= g_1(s), & (g_1'(s))^2 + (g_2'(s))^2 &= 1 \\ y &= g_2(s), & g_1(0) = g_2(0) = g_2'(0) = 0, & \quad g_1'(0) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

a libovolný bod $M = [p, q]$. Hybná křivka (5.1) spolu s bodem M tvoří neproměnnou rovinnou soustavu. Hybná křivka se valí po pevné křivce $\mathbf{F}(s) = (f_1, f_2)$. Budeme zjišťovat trajektorii bodu M . Pro pevnou křivku $\mathbf{F}(s)$ také platí, že je parametrizována obloukem:

$$\begin{aligned} x &= f_1(s), & (f_1'(s))^2 + (f_2'(s))^2 &= 1 \\ y &= f_2(s), & f_1(0) = f_2(0) = f_2'(0) = 0, & \quad f_1'(0) \neq 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Na obrázku 5.1 je zobrazena výchozí poloha hybné křivky \mathbf{G} , bodu M a pevné křivky \mathbf{F} . Dále je zobrazena tečna \mathbf{t}_1 v bodě P_1 hybné křivky (resp. tečna \mathbf{t}_2 v P_2 pevné křivky). Body Q_1 a Q_2 jsou na příslušných tečnách $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ ve vzdálenosti 1 od příslušných bodů P_1, P_2 .



Obrázek 5.1: Výchozí poloha pro valení křivky \mathbf{G} po \mathbf{F}

Vzdálenost \widehat{OP}_1 počátku O a bodu P_1 na křivce \mathbf{G} je shodná se vzdáleností \widehat{OP}_2 mezi počátkem O a bodem P_2 na \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \widehat{OP}_1 &= \int_0^s \sqrt{(g'_1(s))^2 + (g'_2(s))^2} ds = \\ &= \widehat{OP}_2 = \int_0^s \sqrt{(f'_1(s))^2 + (f'_2(s))^2} ds = s. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pro přehlednost nyní uvažujme zkrácený zápis funkcí $g_1 = g_1(s)$, $g_2 = g_2(s)$, $f_1 = f_1(s)$, $f_2 = f_2(s)$.

Rovnice tečen \mathbf{t}_1 v P_1 a \mathbf{t}_2 v P_2 :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{G} + u\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{F} + v\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Pro $u = 1$ na tečně \mathbf{t}_1 definujme bod $Q_1 = (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2)$. Pro délku úsečky $|P_1Q_1|$ platí:

$$|P_1Q_1| = \sqrt{(g_1 + g'_1 - g_1)^2 + (g_2 + g'_2 - g_2)^2} = \sqrt{(g'_1)^2 + (g'_2)^2} = 1. \quad (5.6)$$

Analogicky pro $v = 1$ na tečně \mathbf{t}_2 definujeme bod $Q_2 = (f_1 + f'_1, f_2 + f'_2)$. Potom $|P_2Q_2| = 1$.

Tedy $\widehat{OP_1} = \widehat{OP_2} = s$ a $|P_1Q_1| = |P_2Q_2| = 1$. Je-li bod P_1 bodem dotyku křivek při valení hybné křivky \mathbf{H} po pevné křivce \mathbf{P} , potom se P_1 nachází v bodě P_2 a tedy i bod Q_1 v bodě Q_2 .

Bod M se v čase s odvalí do polohy, kterou označíme M' . Protože každou polohu soustavy můžeme vyjádřit posunutím a otočením (věta 2), existuje vektor posunutí (h, k) a otočení pomocí matice rotace \mathbf{R} , které posunou a otočí hybnou křivku tak, aby $P_1 = P_2, Q_1 = Q_2$.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Máme-li bod o souřadnicích (\bar{x}, \bar{y}) , potom po transformaci posunutí a otočení nabývají souřadnic (x, y) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= h + a\bar{x} - b\bar{y} \\ y &= k + b\bar{x} + a\bar{y} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Jestliže pomocí této transformace přemístíme libovolný bod P_1 do bodu P_2 , můžeme pro každý bod na \mathbf{F} psát:

$$f_1 = h + ag_1 - bg_2, \quad (5.10)$$

$$f_2 = k + bg_1 + ag_2. \quad (5.11)$$

Analogicky pro body $Q_1 = Q_2$:

$$f_1 + f_1' = h + a(g_1 + g_1') - b(g_2 + g_2'), \quad (5.12)$$

$$f_2 + f_2' = k + b(g_1 + g_1') + a(g_2 + g_2'). \quad (5.13)$$

Tedy tečna \mathbf{t}_1 v bodě P_1 křivky \mathbf{G} padne na tečnu \mathbf{t}_2 v bodě P_2 křivky \mathbf{F} . Z rovnic (5.10) a (5.11) vyjádříme h, k :

$$h = f_1 - ag_1 + bg_2, \quad (5.14)$$

$$k = f_2 - bg_1 - ag_2. \quad (5.15)$$

Derivací f_1, f_2 ze vztahů (5.10), (5.11) získáme následující vztahy:

$$f_1' = ag_1' - bg_2', \quad (5.16)$$

$$f_2' = bg_1' + ag_2'. \quad (5.17)$$

Ze vztahů (5.16), (5.17) a s využitím předpokladů parametrizace obloukem vyjádříme a, b :

$$a = f_1'g_1' + f_2'g_2', \quad (5.18)$$

$$b = f_2'g_1' - f_1'g_2'. \quad (5.19)$$

Dosadíme-li h, k z rovnic (5.14), (5.15) do transformačních rovnic (5.9), dostáváme:

$$\begin{aligned} x &= a(\bar{x} - g_1) - b(\bar{y} - g_2) + f_1, \\ y &= b(\bar{x} - g_1) + a(\bar{y} - g_2) + f_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dosazením za a, b z rovnic (5.18), (5.19) a za \bar{x}, \bar{y} souřadnice bodu $M = [p, q]$ do (5.20) dostáváme:

$$x = (f_1'g_1' + f_2'g_2')(p - g_1) + (f_1'g_2' - f_2'g_1')(q - g_2) + f_1, \quad (5.21)$$

$$y = (f_2'g_1' - f_1'g_2')(p - g_1) + (f_1'g_1' + f_2'g_2')(q - g_2) + f_2. \quad (5.22)$$

Dostali jsme předpis pro křivku vzniklou valením hybné křivky $\mathbf{G}(s) = (g_1, g_2)$ po pevné křivce $\mathbf{F}(s) = (f_1, f_2)$, kde bod tvořící trajektorii pohybu je $M = [p, q]$. Tento předpis je využit např. v kapitole 6.7.

5.2 Křivky vyjádřené polárně

Tato kapitola je inspirována článkem [4] a pojednává o hledání takové křivky, po níž se bude valit křivka zadaná v polárních souřadnicích, přičemž pól hybné křivky bude opisovat osu x .

Předpokládejme křivku \mathbf{G} zadanou polárně s pólem O :

$$r = r(\varphi). \quad (5.23)$$

K této křivce přidružíme křivku \mathbf{F} v kartézských souřadnicích se středem O tak, že k libovolnému bodu $T(r, \varphi)$ křivky \mathbf{G} přiřadíme bod $T'(x, y)$ křivky \mathbf{F} podle následujících vztahů:

$$\begin{aligned} x &= -\int r d\varphi, \\ y &= r. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Integrační konstantu v rovnici (5.24) neuvažujeme, neboť by křivka byla pouze posunutá ve směru osy x , ale měla by stejný tvar. Pro křivky \mathbf{G} , \mathbf{F} platí následující vlastnosti:

- (a) Délka oblouku mezi dvěma body A, B křivky \mathbf{G} je shodná s délkou oblouku mezi body A', B' křivky \mathbf{F} , které odpovídají bodům A, B podle vztahu (5.24).
- (b) Úhel, který svírá průvodič bodu T s tečnou v bodě T křivky \mathbf{G} je shodný s úhlem mezi tečnou křivky \mathbf{F} s osou y v bodě T' , který odpovídá bodu T podle (5.24).

Nyní ukážeme platnost tvrzení (a), (b). Délka oblouku l_1 polárně zadané křivky \mathbf{G} mezi body $A(r_0, \varphi_0)$ a $B(r, \varphi)$ je

$$l_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi. \quad (5.25)$$

Ze vztahu (5.24) můžeme vyjádřit r z první rovnice jako $r = -\frac{dx}{s\varphi}$, tedy dosazením do druhé $y = -\frac{dx}{s\varphi}$. Potom pro délku oblouku l_2 parametrické křivky \mathbf{F} mezi body A', B' , které odpovídají bodům A, B můžeme psát:

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} d\phi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(y(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} d\phi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Tedy délka oblouků l_1, l_2 je shodná, čímž je dokázáno tvrzení (a).

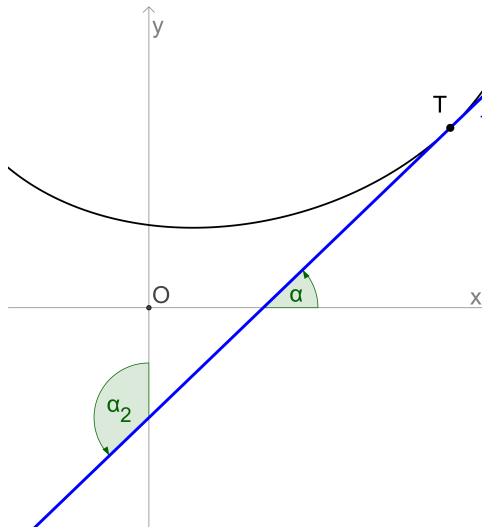
Nyní hledíme úhel α_1 mezi průvodičem a tečnou v bodě T na křivce \mathbf{G} . To je tečný úhel v polárních souřadnicích a z definice (4) platí:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} \quad (5.27)$$

Pro zjištění úhlu α_2 , který svírá osa y s tečnou křivky \mathbf{F} v bodě T' , který odpovídá bodu T , využijeme vztah pro tečný úhel v kartézských souřadnicích. Chceme-li zachovat smysl jako u tečného úhlu (tedy matematicky kladně), který je na obrázku 5.2 označen jako α , pro úhel α_2 musí podle obrázku 5.2 platit:

$$\frac{(y'(\varphi), -x'(\varphi))}{|y'(\varphi), -x'(\varphi)|} = (\cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2))$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha_2) = \frac{-x'(\varphi)}{y'(\varphi)} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}. \quad (5.28)$$

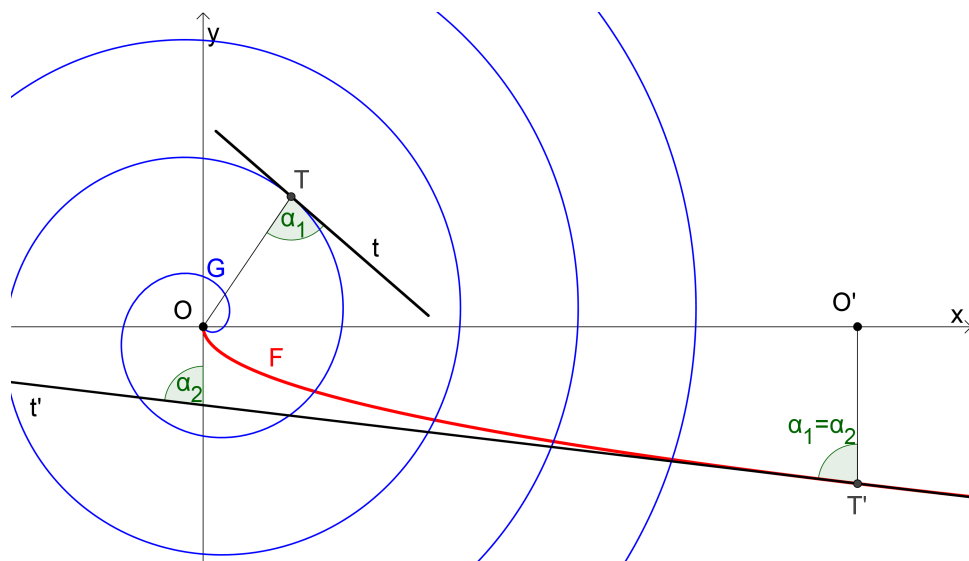


Obrázek 5.2: Souvislost tečného úhlu α s úhlem mezi tečnou a osou y

Dostáváme $\alpha_1 = \alpha_2$, tudíž jsme dokázali (b). Navíc víme (z definice 4), že smysl tečného úhlu pro kartézské souřadnice je stejný jako smysl tečného úhlu pro polární souřadnice. Tedy i α_2 je stejného smyslu jako α_1 .

Můžeme tedy křivku \mathbf{G} otočit a posunout tak, aby body T a T' i tečny v těchto bodech splynuly, tedy křivky se v bodě $T = T'$ dotýkají. Protože úhel mezi průvodičem a tečnou v bodě T (který po transformaci přejde do T') křivky \mathbf{G} je shodný s úhlem v bodě T' mezi tečnou a osou y (tedy i mezi touto tečnou a rovnoběžkou s osou y v tomto bodě). Protože ze vztahu (5.24) $r = y$, potom bod O' , který značí pól otočené a posunuté křivky \mathbf{G} , nutně leží na ose x . Toto platí pro každý bod na křivce \mathbf{G} , navíc vzdálenosti mezi každou dvojicí odpovídajících si bodů podle vztahu (5.24) jsou shodné (podle bodu (a)). To odpovídá situaci, kdy se křivka \mathbf{G} valí po křivce \mathbf{F} .

Obrázek 5.3 ilustruje výše popsanou situaci, kde křivka \mathbf{G} ve výchozí poloze je Archimédova spirála, křivka \mathbf{F} je část paraboly. Pro přehlednost v obrázku není zobrazena odvalená spirála, jen její pól O' .



Obrázek 5.3: Valení křivky **G** po **F**

Tedy valí-li se křivka **G** po křivce **F**, která vznikne užitím vztahů (5.24), potom se pól **O** křivky **G** pohybuje po ose x .

Tento postup je použitý např. v kapitole 6.9 nebo 6.10.

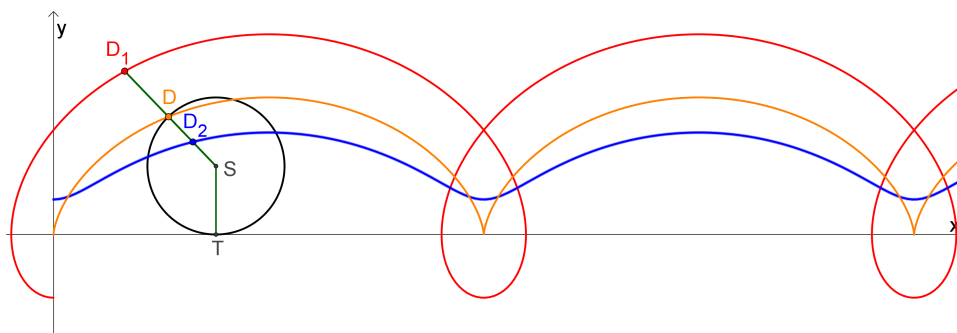
6 Křivky vzniklé valením

Tato kapitola je věnována konkrétním křivkám, které vznikají valením. Jsou zde uvedeny různé způsoby vzniku parametrizace; v některých případech bylo možno použít některé poznatky z kapitoly 5.

6.1 Cykloida, epicykloida, hypocykloida, evolventa

Mezi nejznámější křivky, které vznikají valením, patří např. cykloida, epicykloida, hypocykloida nebo evolventa kružnice. Vzhledem k tomu, že materiálů popisujících vznik parametrizace těchto křivek je mnoho, budou zde uvedeny bez odvození.

Cykloida je křivka, která vznikne odvalováním kružnice po přímce, kde bod tvořící trajektorii pohybu je bod, který leží na kružnici. Když bod tvořící trajektorii pohybu je vně kružnice, mluvíme o prodloužené cykloidě, je-li tento bod uvnitř kružnice, výsledná křivka se nazývá zkrácená cykloida. Cykloidu můžeme najít např. v architektuře (mostní oblouky), nebo její část je brachistochronou – křivkou nejkratšího spádu. Brachistochrona je křivka, po jejíž trajektorii se dostane hmotný bod působením homogenního gravitačního pole z jednoho bodu do druhého za nejkratší možný čas (více v [6]).



Obrázek 6.1: Prodloužená cykloida (červená), zkrácená cykloida (modrá), prostá cykloida (oranžová)

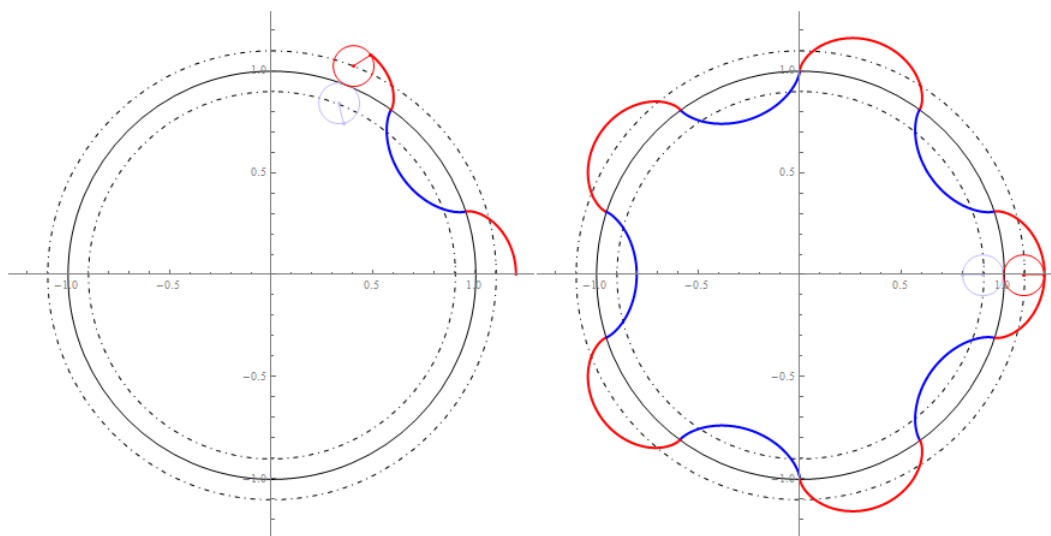
Parametrická rovnice (prodloužené, zkrácené) cykloidy je následující:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} rt - d \sin t \\ r - d \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

kde r je poloměr kružnice, d je vzdálenost bodu tvořícího trajektorii pohybu od středu kružnice.

Epicykloida a hypocykloida jsou křivky, které vznikají odvalováním dvou kružnic. Epicykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu kružnice, která se odvaluje vně po obvodu jiné kružnice. Naopak hypocykloida vzniká jako trajektorie bodu kružnice, která se odvaluje po vnitřním obvodu jiné kružnice.

Tyto křivky se využívají v mechanice, kde některá ozubená kola mají tvar těchto cyklických křivek. Vznik a výsledný tvar je zobrazen na obrázku 6.2. Takto vzniklá cykloidální kola se používají například pro převodovky nebo v Rootsově dmychadle¹. Výhodou cykloidálního ozubení je menší opotřebení. Hypocykloidální pohyb pak můžeme najít např. i ve Wankelově motoru.



Obrázek 6.2: Cykloidální ozubení (převzato z [7])

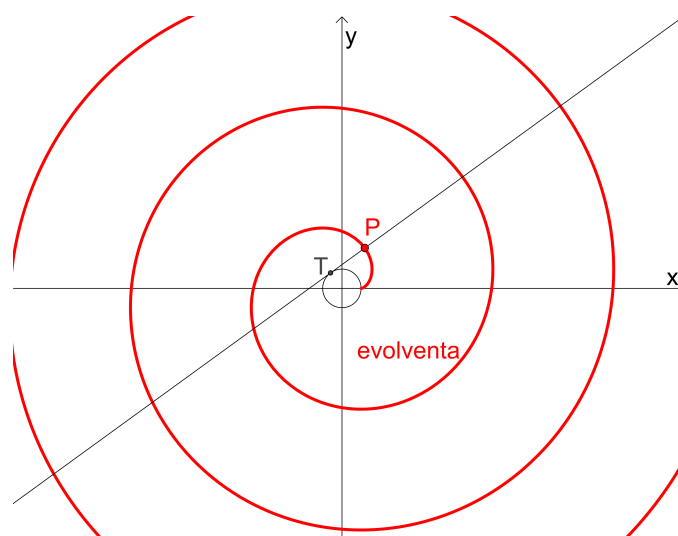
Označíme-li r jako poloměr hybné kružnice, R poloměr pevné kružnice, potom parametrické vyjádření epicykloidy \mathbf{E} a hypocykloidy \mathbf{H} je:

¹„Rootsova dmychadla se používají ke zpracování vysokých průtokových množství při potřebě malého tlakového rozdílu. Konkrétně se používají pro vytvoření vakua nebo při přepřívání spalovacích motorů.“ (Citováno z [8])

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} (R+r) \cos t - r \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ (R+r) \sin t - r \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} (R-r) \cos t + r \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ (R-r) \sin t - r \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Evolventa kružnice je křivka, která vzniká odvalováním přímky po kružnici. Evolventa má využití ve strojírenství – evolventní ozubení se používá ve většině ozubených kol, obrys boku zubu je tvořen částí evolventy.



Obrázek 6.3: Evolventa

Je-li r poloměr kružnice, po které se přímka odvaluje, pak rovnice evolventy je následující.

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} r(\cos t + t \sin t) \\ r(\sin t - t \cos t) \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad (6.4)$$

Poznámka Vznik těchto křivek je znázorněn v příložených souborech *cykloida.ggb*, *epicykloida.ggb*, *hypocykloida.ggb*, *evolventa.ggb*.

6.2 Valení kružnice po parabole

Uvažujme parametrizaci paraboly: $\mathbf{F}(t) = (at, t^2)^T$, $t \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$, a kružnici \mathbf{G} o poloměru r : $\mathbf{G}(t) = (-r \sin(t), r \cos(t) - r)^T$, $t > 0$. Bod, který bude tvořit trajektorii pohybu je bod A na kružnici \mathbf{G} , který je ve výchozí poloze před odvalením v počátku souřadnicového systému.

Při valení kružnice po parabole se střed S kružnice \mathbf{G} pohybuje po ekvidistantě paraboly ve vzdálenosti r . Pro jednotkový tečný vektor \mathbf{t} , respektive pro jednotkový normálový vektor \mathbf{n} paraboly platí:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{F}'(t)}{|\mathbf{F}'(t)|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \right)^T, \quad (6.5)$$

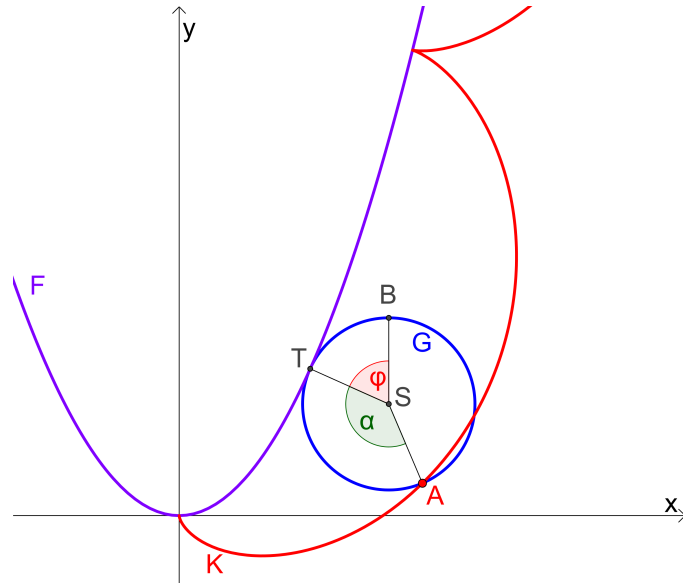
$$\mathbf{n}(t) = \left(\frac{2t}{\sqrt{a^2 + 4t^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \right)^T. \quad (6.6)$$

Mějme bod B , který vznikne jako průsečík přímky procházející středem odvalené kružnice S rovnoběžné s osou y a odvalené kružnice \mathbf{G} ; bod B má větší souřadnici y než střed S odvalené kružnice. Vektor $\overrightarrow{S\hat{A}}$ po odvalení svírá s jednotkovým vektorem $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{S\hat{B}}}{|\overrightarrow{S\hat{B}}|} = (0, 1)^T$ úhel $\varphi + \alpha$ (poznamenejme, že předpokládáme úhel $\varphi + \alpha \in (0, 2\pi)$, nikoli $(0, \pi)$ a to matematicky kladně od vektoru \mathbf{u} , viz obrázek 6.4). Protože odchylka φ úseček SB , ST , kde T je bod dotyku křivek, je $\varphi \in (0, \pi/2)$, můžeme psát:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{n}(t)| \cdot |\mathbf{u}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \right). \quad (6.7)$$

Úhel α je dán délkou l části paraboly mezi jejím vrcholem a bodem dotyku T . Této délce l odpovídá i odvalená vzdálenost na kružnici, pro níž platí $l = r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{r}$. Délka l je dána následujícím vztahem:

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^t |\mathbf{P}'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 + 4\tau^2} d\tau \\ &= \frac{2t\sqrt{a^2 + 4t^2} + a^2 \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4t^2} + 2t}{a} \right)}{4}. \end{aligned} \quad (6.8)$$



Obrázek 6.4: Valení kružnice po parabole

Celkem pro křivku vzniklou valením kružnice po parabole platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \mathbf{F}(t) + r \mathbf{n}(t) + (-r \sin(\varphi + \alpha), r \cos(\varphi + \alpha))^T \\ &= (x(t), y(t))^T, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= at + \frac{2rt}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \\ &- r \sin \left(\arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \right) + \frac{2t\sqrt{a^2 + 4t^2} + a^2 \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4t^2} + 2t}{a} \right)}{4r} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= t^2 - \frac{ar}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \\ &+ r \cos \left(\arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4t^2}} \right) + \frac{2t\sqrt{a^2 + 4t^2} + a^2 \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4t^2} + 2t}{a} \right)}{4r} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Poznámka Valení kružnice po parabole a vznik výsledné křivky je znázorněn v souboru *kruznice_po_parabole.ggb*.

6.3 Valení paraboly po parabole – Dioklova kisoida

Budeme předpokládat valení dvou shodných parabol $\mathbf{G}(t) = (2at, at^2)^T$ a $\mathbf{F}(t) = (2at, -at^2)^T$, $a > 0, t \in \mathbb{R}$, kde bod tvořící křivku bude vrchol O' hybné paraboly \mathbf{G} . Parametr a určuje vzdálenost mezi vrcholem paraboly a jejím ohniskem. Pro parametrizaci takto vzniklé křivky využijeme některých vlastností paraboly a úlohu převedeme na parametrizaci Dioklovy kisoidy.

Bod F_1 , tedy ohnisko paraboly \mathbf{G} před odvalením, leží na řídicí přímce \mathbf{f} paraboly \mathbf{F} a naopak ohnisko F pevné paraboly \mathbf{F} leží na řídicí přímce \mathbf{g} paraboly \mathbf{G} před odvalením (obrázek 6.5). Vzdálenost ohniska od řídicí přímky je $2a$.

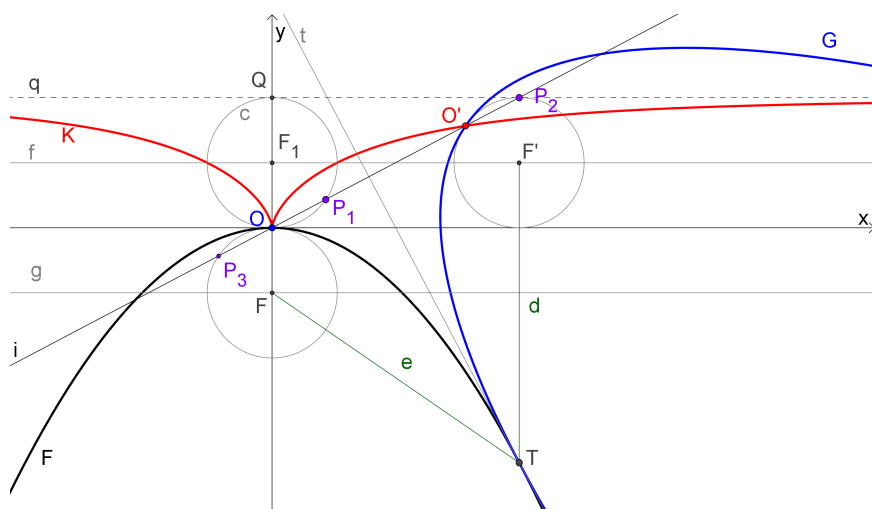
Při odvalování dvou shodných parabol mají tyto paraboly bod dotyku T . Délka křivky mezi vrcholem obou parabol a bodem T je stejná, paraboly jsou osově souměrné podle tečny \mathbf{t} v bodě T . Pro bod T navíc platí $|TF| = |T\mathbf{f}| = |TF'|$. Z těchto vlastností plyne, že ohnisko F' hybné paraboly se pohybuje po řídicí přímce \mathbf{f} pevné paraboly (obrázek 6.5).

V ohnisku F' odvalené paraboly, v ohnisku F pevné paraboly, i v bodě F_1 (ohnisku \mathbf{G} hybné paraboly v původní poloze před odvalením) sestrojíme kružnici o poloměru a . Dále vrcholem O paraboly \mathbf{F} a vrcholem O' odvalené paraboly \mathbf{G} vedeme přímku \mathbf{i} . Ta protne každou z kružnic v dalším bodě, které označíme P_1, P_2 a P_3 podle obrázku 6.5. Z vlastností osově souměrnosti vyplývá, že se bod P_2 bude posouvat po přímce \mathbf{q} a tedy $|OO'| = |P_1P_2|$. Původní křivku tak můžeme konstruovat jako Dioklovu kisoidu (kisoida viz [9]), která je daná kružnicí \mathbf{c} a její tečnou \mathbf{q} (rovnoběžka s řídicí přímkou pevné paraboly).

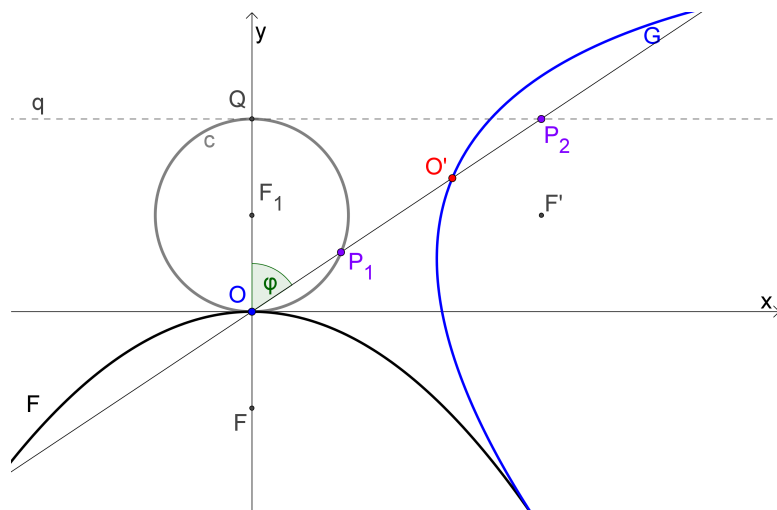
Podle obrázku 6.6:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|OP_1|}{2a} \Rightarrow |OP_1| = 2a \cos \varphi, \\ \cos \varphi &= \frac{2a}{|OP_2|} \Rightarrow |OP_2| = \frac{2a}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |OP_2| - |OP_1| &= |P_1P_2| = |OO'| = \frac{2a}{\cos \varphi} - 2a \cos \varphi \\ &= 2a \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = r. \end{aligned} \tag{6.12}$$



Obrázek 6.5: Konstrukce kisoidy



Obrázek 6.6: Odvození kisoidy

Dostali jsme závislost vzdálenosti r na úhlu φ , tedy polární souřadnice. Uvažujeme $r \geq 0$, $a \geq 0$, tedy $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tato křivka v polárních souřadnicích se nachází v 1. a 4. kvadrantu. Pro převod z polárních souřadnic do kartézských a zároveň pro otočení do 1. a 2. kvadrantu se stejnou polohou jako na obrázku 6.5 použijeme následující vztahy:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \varphi, \\y &= r \cos \varphi.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Parametrizace křivky vzniklé valením paraboly po parabole je po dosažení:

$$\mathbf{K}(\varphi) = (2a \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi, 2a \sin^2 \varphi)^T, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).\tag{6.14}$$

Použijeme-li substituci $t = \operatorname{tg} \varphi$, potom:

$$\mathbf{K}(t) = \left(2a \frac{t^3}{1+t^2}, 2a \frac{t^2}{1+t^2}\right)^T, \quad t \in \mathbb{R}.\tag{6.15}$$

Poznámka Vznik Dioklovy kisoidy valením dvou parabol je znázorněn v souboru *kisoida.ggb*

6.3.1 Vznik Dioklovy kisoidy kruhovou inverzí

Dioklova kisoida může také vzniknout kruhovou inverzí paraboly, kde střed kružnice inverze leží ve vrcholu paraboly. Využijeme-li vztah (6.12), můžeme aplikovat kruhovou inverzi, tedy převrácenou hodnotu r , předpokládáme-li poloměr základní kružnice kruhové inverze jednotkový. Chceme-li získat křivku $r_2 = r_2(\varphi)$, která vznikne kruhovou inverzí křivky $r = r(\varphi)$, potom $r_2(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$.

$$\begin{aligned}r &= 2a \sin \varphi \tan \varphi \\ \Rightarrow r_2 &= \frac{1}{2a \sin \varphi \tan \varphi}\end{aligned}\tag{6.16}$$

Pro převod z polárních souřadnic opět použijeme vztah (6.13). Parametrické vyjádření potom je:

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= \frac{1}{2a \operatorname{tg} \varphi}, \\y(\varphi) &= \frac{1}{2a \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\tag{6.17}$$

Použitím substituce $t = \frac{1}{2a \operatorname{tg} \varphi}$ získáváme

$$\begin{aligned}x(t) &= t, \\y(t) &= 2a t^2, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{6.18}$$

tedy parabolu. Protože kruhovou inverzí Dioklovy kisoidy vznikne parabola, kruhovou inverzí paraboly vzniká Dioklova kisoida.

6.4 Řetězovka

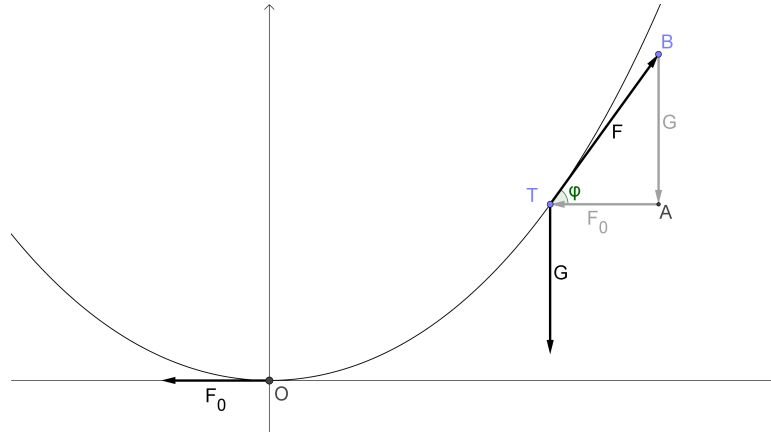
Řetězovka je křivka, kterou vytvoří homogenní pevné vlákno, které je na svých koncích zavěšeno v homogenním gravitačním poli. Řetězovka vzniká také valením paraboly po přímce, přičemž bod, který tvoří křivku, je ohnisko paraboly.

6.4.1 Odvození rovnice řetězovky

Nejprve odvodíme řetězovku z fyzikálních vlastností. Čerpáno z [10].

Budeme předpokládat dokonale ohebné vlákno zavěšené v homogenním gravitačním poli. Nejnižší bod vlákna umístíme do počátku souřadnicového systému a znázorníme síly, které na vlákno působí (obrázek 6.7).

Síla G je tíhová, která znázorňuje tíhu lana mezi počátkem O a bodem T . F je síla, která působí ve směru tečny k hledané křivce, F_0 síla, která působí



Obrázek 6.7: Odvození řetězovky

v počátku O proti F (F_0 má zřejmě také směr tečny v bodě O). Z rovnováhy sil plyne $G + F + F_0 = 0 \Rightarrow G + F = -F_0$.

Z rovnosti sil plyne vztah $\operatorname{tg} \varphi = \frac{G}{F_0}$. Je-li vlákno homogenní, zdefinujeme hustotu vlákna ρ , která udává hmotnost vlákna na jednotku délky. Potom můžeme psát $G = \rho g s$, kde g je gravitační zrychlení a s udává délku vlákna mezi počátkem O a bodem T . Předpokládejme, že křivku, která vznikne prověšením vlákna, můžeme explicitně zapsat jako závislost $y = y(x)$. Potom pro délku s :

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\xi))^2} d\xi. \quad (6.19)$$

Tangens úhlu, který svírá tečna křivky v bodě T s osou x je roven první derivaci v bodě T :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G}{F_0} = y'(x) = \frac{\rho g}{F_0} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\xi))^2} d\xi. \quad (6.20)$$

Označíme $\alpha = \frac{\rho g}{F_0}$ a rovnici zderivujeme:

$$y''(x) = \alpha \sqrt{1 + (y'(x))^2}. \quad (6.21)$$

Tuto diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} d(y') &= \int \alpha dx \\
\operatorname{arcsinh} y' &= \alpha x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
y' &= \sinh(\alpha x + C) \\
y &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + C) + K, \quad K \in \mathbb{R} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Vztah (6.22) je rovnice řetězovky.

6.4.2 Valení paraboly po přímce

Nyní odvodíme řetězovku jako křivku, která vznikne valením.

Budeme uvažovat parametrické vyjádření paraboly \mathbf{G} , kde a je vzdálenost mezi vrcholem a ohniskem paraboly.

$$\mathbf{G}(t) = (x(t), y(t))^T = (2at, at^2)^T, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.23)$$

Tato parabola se bude valit po ose x a bod tvořící trajektorii pohybu bude ohnisko F .

Určíme délku l oblouku paraboly:

$$l(t) = \int_0^t |\mathbf{G}'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{4a^2 + 4a^2\tau^2} d\tau = a \left(t\sqrt{t^2 + 1} + \operatorname{arcsinh}(t) \right). \quad (6.24)$$

Dále využijeme matici rotace:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

kde φ je úhel mezi původní parabolou \mathbf{G} a již odvalenou parabolou \mathbf{G}' (obrázek 6.8). Tento úhel je shodný s tečným úhlem (úhel mezi tečnou a osou x), který je podle definice 4:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right). \quad (6.26)$$

Po dosazení a úpravě dostáváme matici rotace pro odvalenou parabolu:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} & \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \\ -\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} & \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Celkem pro parametrizaci řetězovky $\mathbf{C}(t)$:

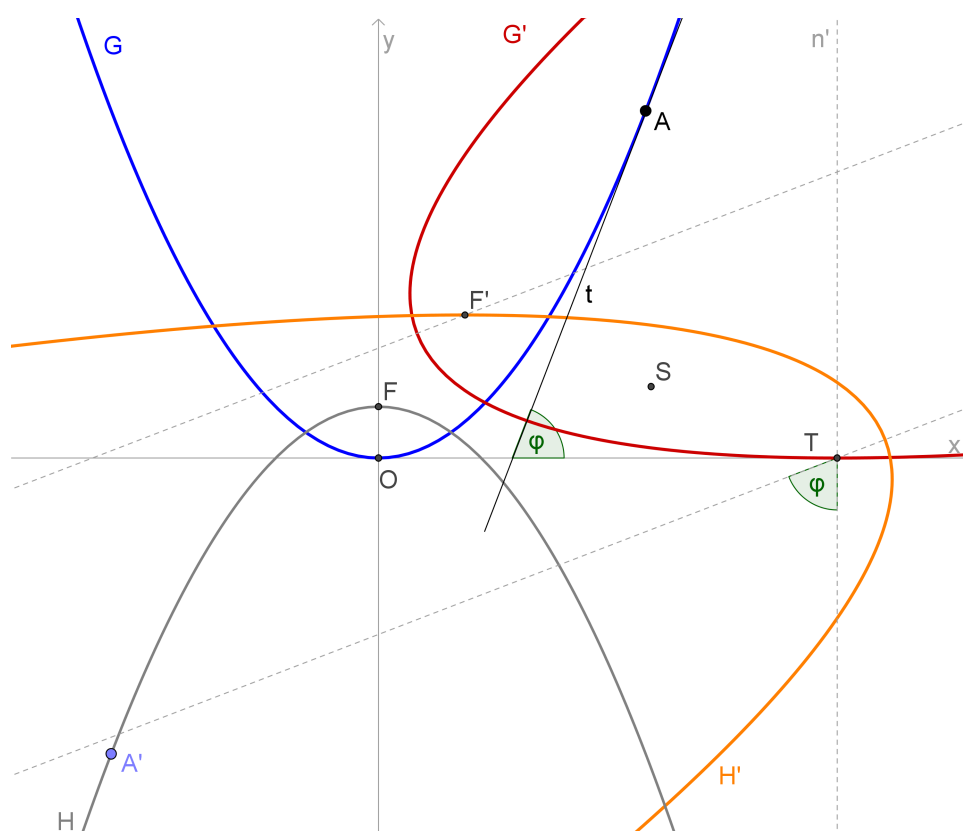
$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} l(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \operatorname{arcsinh}(t) \\ a\sqrt{t^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Tento postup dokumentuji na obrázku 6.8, kde je modrou barvou zobrazena parabola ve výchozí pozici \mathbf{G} a červenou barvou odvalená parabola \mathbf{G}' , která má ohnisko F' a bod dotyku T s osou x . Vytvoříme-li shodnou parabolu \mathbf{H}' , jejíž osa je rovnoběžná s osou paraboly \mathbf{G}' , a bod T je její ohnisko a prochází bodem F' (takovou parabolu můžeme sestavit středovou souměrností podle středu S úsečky $F'T$), potom je zřejmé, že řetězovku můžeme parametrizovat pomocí paraboly \mathbf{H}' , kde bod, který tvoří trajektorii pohybu, je bod F' .

Na obrázku je znázorněno, jak vznikne parametrizace této křivky (rovnice (6.28)). Parabola $(0 - x(t), a - y(t))^T$ je na obrázku 6.8 označena jako \mathbf{H} . Rotace vyjádřená maticí \mathbf{M} tuto parabolu otočí a vektor $(l(t), 0)^T$ posune ve směru osy x – tedy parabola označena \mathbf{H}' . Bod F' je tedy obraz bodu A . Potom bod F' tvořící trajektorii pohybu je nejen ohnisko odvalené paraboly \mathbf{G}' ale i převrácený, posunutý a otočený bod A původní paraboly \mathbf{G} .

Použijeme-li substituci $a \operatorname{arcsinh}(t) = p$, tedy z toho vyjádříme $t = \sinh(p/a)$, a dosazením do vztahu (6.23):

$$\begin{aligned} c_1(p) &= p, \\ c_2(p) &= a \sqrt{\sinh^2 \left(\frac{p}{a} \right) + 1} = a \cosh \left(\frac{p}{a} \right). \end{aligned}$$

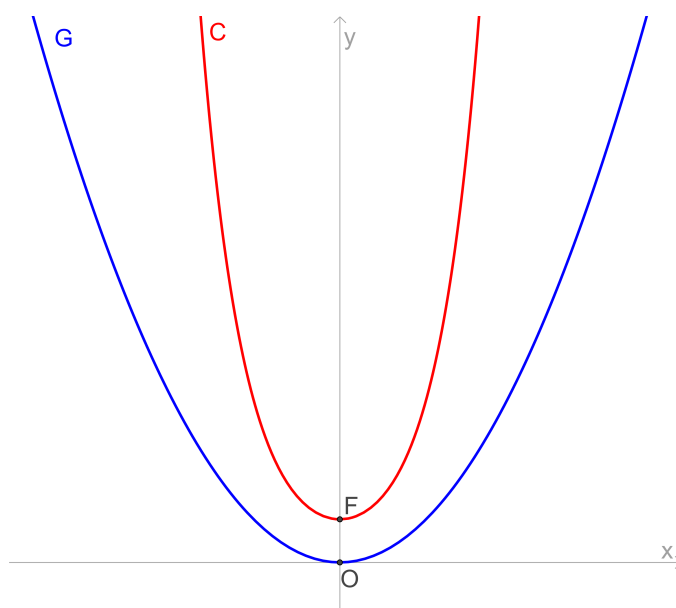


Obrázek 6.8: Odvození řetězovky

$$\mathbf{C}(p) = \begin{pmatrix} p \\ a \cosh\left(\frac{p}{a}\right) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R} \quad (6.29)$$

Z parametrizace (6.29) lze snadno určit i explicitní tvar

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (6.30)$$



Obrázek 6.9: Řetězovka s parabolou

Poznámka Vztahy (6.30) a (6.22) jsou pro $\alpha = 1/a$, $C = K = 0$ totožné, valením paraboly po přímce opravdu vznikne řetězovka.

Poznámka Vznik řetězovky valením je znázorněn v souboru *retezovka.ggb*, výpočet tečného úhlu a vztahu (6.28) s vykreslením výsledné křivky s původní parabolou v souboru *retezovka.nb*.

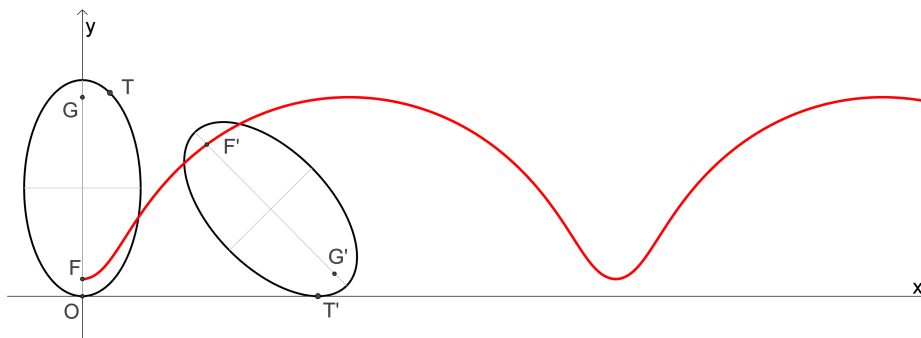
6.5 Elipsa po přímce – eliptická řetězovka

Křivku, která vznikne odvalováním elipsy po přímce, kde tvořící bod je ohnisko elipsy, nazýváme eliptická řetězovka.

Předpokládáme elipsu danou parametricky:

$$\mathbf{G}(t) = (b \sin(t), -a \cos(t) + a)^T, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.31)$$

kde $a > 0$ je délka hlavní poloosy, $b > 0$ délka vedlejší poloosy (tedy $a > b$). Elipsa se bude odvalovat po ose x jako je naznačeno na obrázku 6.10.



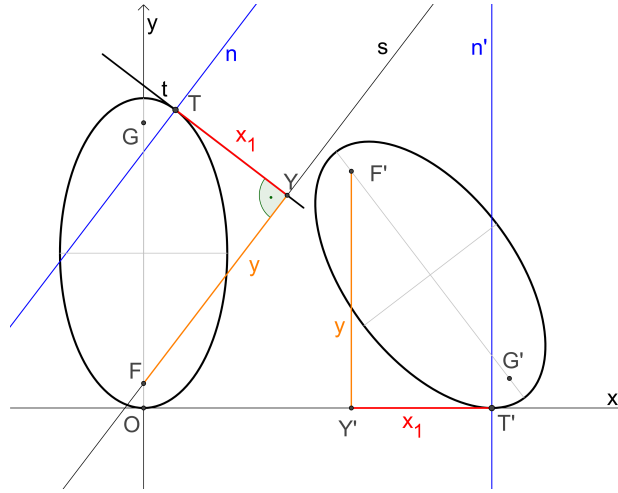
Obrázek 6.10: Eliptická řetězovka

Z obrázku 6.11 je zřejmé, že $|F'T'| = |FT|$, kde T je bod na elipse ve výchozí poloze v nějakém čase t_0 ; T' je bod dotyku odvalené elipsy s osou x v čase t_0 a platí, že odvalená délka na elipse $\widehat{OT} = |OT'|$, kde O je počátek souřadnicového systému.

Tedy souřadnice y bodu F' v čase t_0 je rovna vzdálenosti ohniska F' a tečny odvalené elipsy v bodě T' , to ale odpovídá vzdálenosti tečny \mathbf{t} v bodě T od ohniska F elipsy ve výchozí poloze. Ohnisko F má souřadnice $F = [F_1, F_2] = [0, a - e]$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ je excentricita elipsy. Tečný vektor má tvar $\mathbf{G}'(t) = (b \cos(t), a \sin(t))^T$, tečna \mathbf{t} v bodě t_0 má předpis:

$$\mathbf{t}(u) = \mathbf{G}(t_0) + u \mathbf{G}'(t_0) = \begin{pmatrix} b \sin(t_0) + u b \cos(t_0) \\ -a \cos(t_0) + a + u a \sin(t_0) \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (6.32)$$

Bodem F sestrojíme přímku \mathbf{s} , která je kolmá na tečnu \mathbf{t} , průsečík $\mathbf{s} \cap \mathbf{t}$ označíme Y . Potom vzdálenost $|YF|$ je rovna souřadnici y bodu F' v čase t_0 .



Obrázek 6.11: Eliptická řetězovka - odvození

$$\mathbf{s}(v) = F + v \begin{pmatrix} a \sin(t_0) \\ -b \cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v a \sin(t_0) \\ a - e - v b \cos(t_0) \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R} \quad (6.33)$$

Nyní položením $\mathbf{t}(u) = \mathbf{s}(v)$, vyřešením soustavy rovnic pro u, v a dosazením u do vztahu (6.32) nebo v do vztahu (6.33) získáme souřadnice bodu $Y = [Y_1, Y_2]$.

Potom pro souřadnici $y = |Y'F'| = |YF|$ v čase t_0 platí:

$$y = |YF| = \sqrt{(Y_1^2 - F_1^2) + (Y_2^2 - F_2^2)} = b \sqrt{\frac{a - e \cos(t_0)}{a + e \cos(t_0)}}. \quad (6.34)$$

Pro určení souřadnice x bodu F' potřebujeme délku oblouku l elipsy (ten nanese na osu x , tedy $|OT'| = l$) a vzdálenost normály \mathbf{n}' odvalené elipsy v bodě T' od ohniska F' (resp. vzdálenost mezi ohniskem F a normálou \mathbf{n} elipsy ve výchozí poloze v bodě T). Zřejmě tuto vzdálenost najdeme i mezi bodem T a bodem Y . Tuto vzdálenost označme $x_1 = |TY|$. Obrázek 6.11 ilustruje, že souřadnice x ohniska F' odvalené elipsy je rovna $x = l - x_1$ v případě, že $t_0 \in (0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$; je-li $t_0 \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, potom $x = l + x_1$.

Pro oblouk l elipsy \mathbf{G} platí vztah:

$$l = \int_0^{t_0} |\mathbf{G}'(\tau)| d\tau = \int_0^{t_0} \sqrt{(b \cos(\tau))^2 + (a \sin(\tau))^2} d\tau. \quad (6.35)$$

Vzdálenost x_1 spočteme jako vzdálenost bodů T, Y :

$$x_1 = |TY| = e \sqrt{\sin^2(t_0) \frac{a - e \cos(t_0)}{a + e \cos(t_0)}}. \quad (6.36)$$

Jestliže ve vztahu (6.36) vytkneme před odmocninu $\sin(t_0)$, potom hodnota x_1 bude mít znaménko závislé na hodnotě t_0 tak, že jestliže $t_0 \in (0, \pi) + 2k\pi \Rightarrow x_1 > 0$; jestliže $t_0 \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi \Rightarrow x_1 < 0$, kde $k \in \mathbb{N}$. Tedy následující vztah platí vždy:

$$x = l - x_1$$

$$x = \int_0^{t_0} \sqrt{(b \cos(\tau))^2 + (a \sin(\tau))^2} d\tau - e \sin(t_0) \sqrt{\frac{a - e \cos(t_0)}{a + e \cos(t_0)}}. \quad (6.37)$$

Protože získané souřadnice bodu $F = [x, y]$ odvalené elipsy platí pro všechny hodnoty $t_0 \in \mathbb{R}$, eliptická řetězovka \mathbf{E} má parametrické vyjádření $\mathbf{E}(t) = (x(t), y(t))^T$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \sqrt{(b \cos(\tau))^2 + (a \sin(\tau))^2} d\tau - e \sin(t) \sqrt{\frac{a - e \cos(t)}{a + e \cos(t)}}, \\ y(t) &= b \sqrt{\frac{a - e \cos(t)}{a + e \cos(t)}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poznámka Protože integrál, který udává délku oblouku elipsy (vztah (6.35)) neumíme analyticky vyjádřit, v parametrických rovnicích se tohoto integrálu nezbavíme. Pro vykreslení této křivky v softwaru integrál počítáme numericky.

pozici a shodnosti obou elips víme, že odvalená elipsa \mathbf{E}' je osově souměrná k \mathbf{E} podle tečny \mathbf{t} v bodě T . Ohniska F' a G' jsou tedy také osově souměrné k F , G podle této tečny. Zároveň F' leží na přímce GT , G' leží na přímce FT , neboť tečna púlí vnější úhly průvodičů, tedy $\alpha = \beta$, navíc $|FT| = |F'T|$.

Víme, že $|GT| + |FT| = 2a \Rightarrow |GT| + |F'T| = |GF'| = 2a$, tedy je-li bod tvořící křivku ohnisko F' , vzniká kružnice se středem v bodě G a poloměrem $2a$.

Řídící kružnice se využívá pro konstrukci tečny k elipse (např. známe-li pouze směr tečny nebo bod mimo elipsu, kterým prochází.)

Poznámka Vznik řídící kružnice valením dvou elips je zobrazen v souboru *elipsa_po_elipse.ggb*.

6.7 Přímka po řetězovce

Chceme-li najít takovou křivku, aby valením přímky po této křivce vznikla přímka, využijeme poznatky kapitoly 5.2.

Nejprve nalezneme polární rovnici přímky. Budeme předpokládat přímku $y = a$, kde $a > 0$, trajektorii pohybu bude tvořit pól přímky. Polární rovnice přímky je

$$r = \frac{a}{\sin(\varphi)}. \quad (6.38)$$

Nyní využijeme vztahy (5.24). Navíc víme, že přímka leží pouze v 1. a 2. kvadrantu, tedy $\varphi \in (0, \pi)$. Pak po úpravě získáváme následující vztahy:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= - \int r d\varphi = -a \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), \\ y(\varphi) &= r = \frac{a}{\sin(\varphi)}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Užitím substituce $t = -a \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$, vyjádřením φ a dosazením do vztahu (6.39) dostáváme po úpravě následující vztahy:

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= a \cosh \left(\frac{t}{a} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Parametrické rovnice (6.40) vyjadřují řetězovku (např. podle vztahu (6.29)). Tedy valením přímky po řetězovce, kde bod tvořící trajektorii pohybu je ve vzdálenosti a (pól polárně vyjádřené přímky) od hybné přímky, vzniká podle kapitoly 5.2 opět přímka.

Poznámka Výpočty a vykreslení jsou v souboru *primka_po_retezovce1.nb*.

Chceme-li naopak využít kapitolu 5.1, abychom určili, jakou křivku dostaneme, budeme-li valit přímku po řetězovce, postup bude následující.

Musíme najít parametrizaci obloukem řetězovky \mathbf{F} . Nejprve využijeme rovnici řetězovky (6.29) a řetězovku posuneme ve směru osy y tak, aby procházela počátkem.

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.41)$$

Pro délku s oblouku řetězovky platí:

$$s = \int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau = a \sinh \left(\frac{t}{a} \right), \quad (6.42)$$

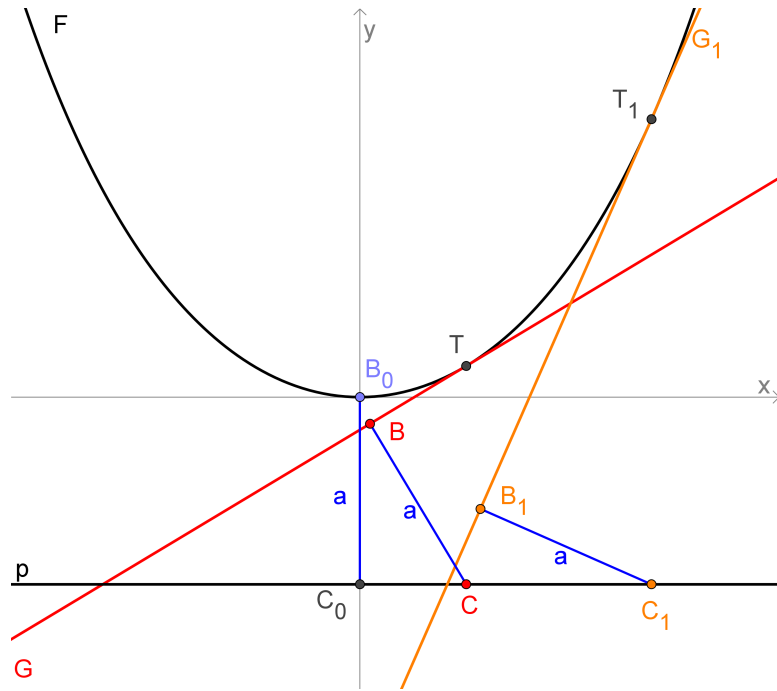
z tohoto vztahu vyjádříme t :

$$t = a \operatorname{arcsinh} \left(\frac{s}{a} \right). \quad (6.43)$$

Řetězovka $\mathbf{F}(s)$ a přímka $\mathbf{G}(s)$ parametrizovány obloukem:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \operatorname{arcsinh} \left(\frac{s}{a} \right) \\ a \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{s}{a} \right) \right) - a \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (6.45)$$



Obrázek 6.13: Valení přímky po řetězovce (naznačené 2 polohy přímky)

Předpoklady (5.1), (5.2) pro hybnou i pevnou křivku jsou splněny, můžeme tedy použít postup z kapitoly 5.1.

Bude-li bod tvořící trajektorii pohybu $[p, q] = [0, -a]$. Potom podle (5.22) můžeme psát:

$$\begin{aligned} x &= (f'_1 g'_1 + f'_2 g'_2)(p - g_1) + (f'_1 g'_2 - f'_2 g'_1)(q - g_2) + f_1 \\ &= a \operatorname{arcsinh} \left(\frac{s}{a} \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

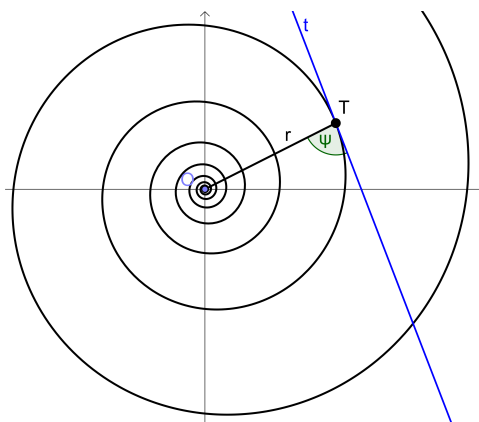
$$\begin{aligned} y &= (f'_2 g'_1 - f'_1 g'_2)(p - g_1) + (f'_1 g'_1 + f'_2 g'_2)(q - g_2) + f_2 \\ &= -a. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Tedy podle obou postupů v kapitolách 5.1, 5.2 jsme zjistili, že valením přímky po řetězovce opravdu vzniká přímka, je-li bod tvořící trajektorii pohybu ve vzdálenosti a od hybné přímky jako na obrázku 6.13.

Poznámka Výpočty a vykreslení jsou v souborech *primka_po_retezovce.nb* (využívá kapitolu 5.1), *primka_po_retezovce1.nb* (využívá kapitolu 5.2). Valení je zobrazeno v souboru *primka_po_retezovce.ggb*.

6.8 Logaritmická spirála po přímce

Budeme předpokládat valení logaritmické spirály vyjádřené v polárních souřadnicích $r = a e^{b\varphi}$ (kde $a > 0, b > 0$ jsou parametry) po ose x . Pro určení křivky, kterou tvoří pól spirály po odvalování po přímce, budeme potřebovat délku l na spirále od pólu O k bodu T a tečný úhel ψ , který svírá tečna s průvodičem (spojnice počátku s bodem na spirále). Pól spirály je v $r = 0$, tedy $\varphi = -\infty$. Pro délku l v polárních souřadnicích platí následující vztah:



Obrázek 6.14: Logaritmická spirála

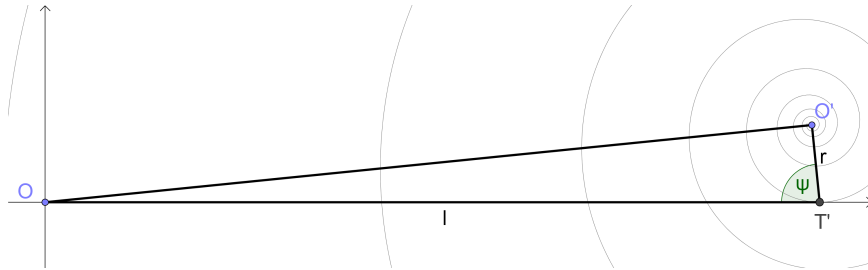
$$\begin{aligned}
 l &= \int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi = a \sqrt{1 + b^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{b\phi} d\phi \\
 &= a \sqrt{1 + b^2} \frac{e^{b\varphi}}{b} = r \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b}.
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Pro tečný úhel v polárních souřadnicích (podle definice 4) platí:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = \frac{a e^{b\varphi}}{a b e^{b\varphi}} = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad \psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{b} \right). \quad (6.49)$$

Protože tečný úhel je závislý pouze na parametru b , je pro tuto spirálu v každém bodě konstantní.

Bude-li se logaritmická spirála valit po ose x z výchozí pozice s pólem v počátku, odvalí se délka l na spirále mezi pólem O a bodem T na osu x . Odvalená spirála s pólem O' se tedy bude dotýkat osy x v bodě T' ve vzdálenosti l od počátku. Přímka $O'T'$ svírá s osou x tečný úhel ψ a velikost $|O'T'|$ je $r = a e^{b\varphi}$ (obrázek 6.15).



Obrázek 6.15: Odvalená logaritmická spirála

Pro souřadnice y, x bodu O' podle obrázku 6.15 platí:

$$\begin{aligned} y &= r \sin \psi = r \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{b} \right) = \frac{r}{\sqrt{1+b^2}}, \\ x &= l - r \cos \psi = l - r \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b} \frac{r}{\sqrt{1+b^2}}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Tedy $y = bx$. Při valení logaritmické spirály $r = a e^{b\varphi}$ po ose x , kde bod tvořící křivku, je pól spirály, vzniká přímka závislá pouze na parametru b .

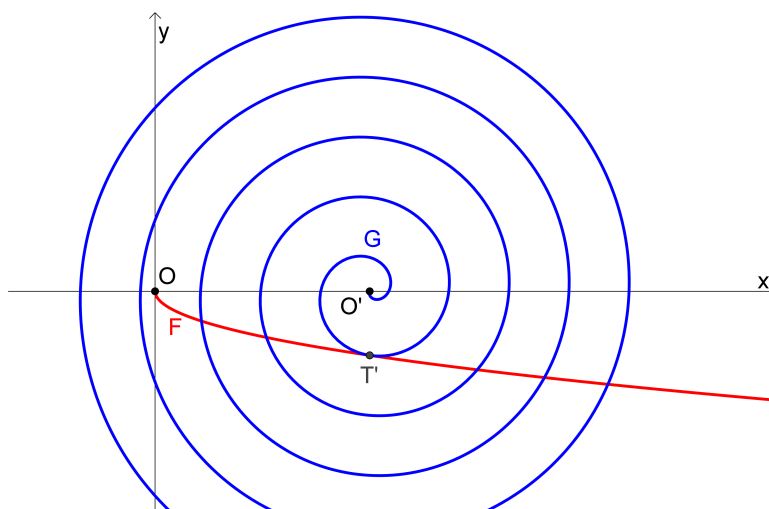
Poznámka Valení logaritmické spirály po přímce je zobrazeno v souboru *logaritmicka_spirala.ggb*.

6.9 Archimédova spirála po parabole

Uvažujeme Archimédovu spirálu vyjádřenou v polárních souřadnicích $r = a\varphi$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Budeme hledat takovou křivku, aby při valení Archimédovy spirály po této křivce vznikla přímka. Využijeme kapitolu 5.2, tedy bod tvořící přímku uvažujeme pól spirály.

Podle vztahu (5.24) platí:

$$\begin{aligned} x &= -\int r d\varphi = -a \int \varphi d\varphi = -\frac{a\varphi^2}{2}, \\ y &= r = a\varphi. \end{aligned} \tag{6.51}$$



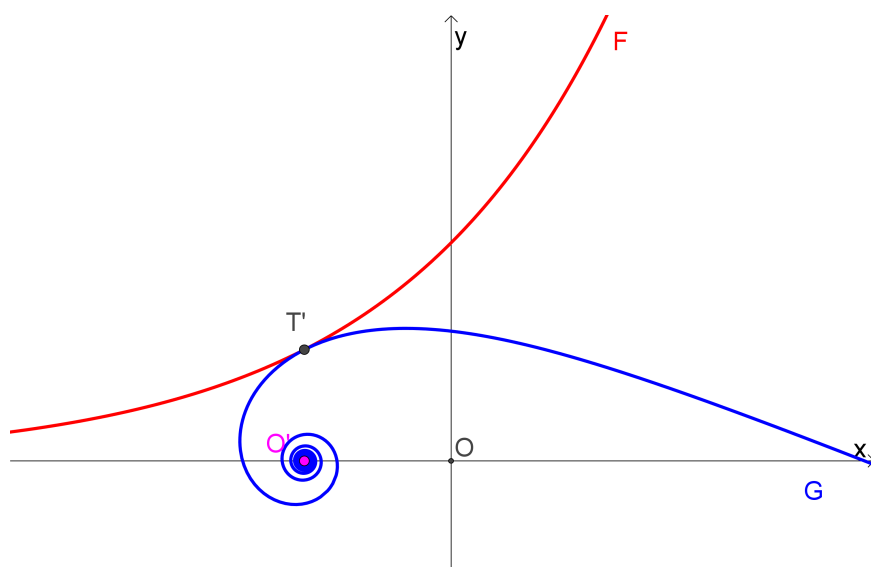
Obrázek 6.16: Valení Archimédovy spirály **G** po parabole **F**

Eliminací φ dostáváme $x = -\frac{y^2}{2a}$, tedy parabolu. Valením Archimédovy spirály po parabole, kde bod tvořící křivku je pól spirály, vzniká přímka. Pro pól spirály platí $r = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Dosazením do předpisu paraboly dostáváme $x = y = 0$, tedy při odvalování se pól spirály dotkne paraboly v jejím vrcholu.

Poznámka Valení Archimédovy spirály po parabole je zobrazeno v souboru *archimedova_spirala.ggb*.

6.10 Hyperbolická spirála po exponenciále

Chceme-li opět najít takovou křivku, aby po odvalení hyperbolické spirály po hledané křivce vznikla přímka (bod tvořící přímku bude opět pól spirály), použijeme opět kapitolu 5.2. Hyperbolická spirála je dána předpisem v polárních souřadnicích $r = \frac{a}{\varphi}$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Obrázek 6.17: Valení hyperbolické spirály **G** po exponenciále **F**

Podle vztahu (5.24) platí:

$$\begin{aligned} x &= - \int r d\varphi = -a \int \frac{1}{\varphi} d\varphi = -a \ln |\varphi|, \\ y &= r = \frac{a}{\varphi}. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Eliminací φ dostáváme $y = \pm a e^{\frac{x}{a}}$. Znaménko závisí na hodnotách φ . Je-li $\varphi > 0$, potom $y = a e^{\frac{x}{a}}$, je-li naopak $\varphi < 0$, potom $y = -a e^{\frac{x}{a}}$.

Tedy valením hyperbolické spirály po exponenciele vzniká přímka.

Poznámka Valení hyperbolické spirály po parabole je zobrazeno v souboru *hyperbolicka_spirala.ggb*.

6.11 Přehled

pevná křivka	hybná křivka	bod	výsledná křivka
přímka	kružnice	bod na kružnici	cykloida
přímka	kružnice	bod vně kružnice	prodloužená cykloida
přímka	kružnice	bod uvnitř kružnice	zkrácená cykloida
kružnice	kružnice vně pevné kružnice	bod na hybné kružnici	epicykloida
kružnice	kružnice uvnitř pevné kružnice	bod na hybné kružnici	hypocykloida
kružnice	přímka	bod na přímce	evolventa kružnice
parabola	kružnice	bod na kružnici	
parabola	parabola	vrchol	Dioklova kisoida
přímka	parabola	ohnisko paraboly	řetězovka
přímka	elipsa	ohnisko elipsy	eliptická řetězovka
elipsa	shodná elipsa	ohnisko	kružnice (řídící kružnice elipsy)
řetězovka	přímka	specifický bod mimo přímku	přímka
přímka	logaritmická spirála	pól spirály	přímka
exponenciála	hyperbolická spirála	pól spirály	přímka
parabola	Archimédova spirála	pól spirály	přímka

Tabulka 6.1: Přehled

7 Závěr

Práce se zabývá křivkami, které vznikají valením jedné křivky po druhé. Začátek práce se stručně věnuje některým textům, které byly na téma valení napsány. Dále, v kapitole o kinematické geometrii, se uvádí některé její základy, které jsou nezbytné pro pochopení pojmu valení. V další kapitole jsou tyto poznatky využity a je určen předpis pro některé speciální případy a může se tak usnadnit proces parametrizace některých křivek, které vznikají valením. Ačkoli jde o obecný postup, platí jen pro některé křivky se speciálními vlastnostmi, např. obě polodie musí být parametrizovány obloukem apod.

V další kapitole, která se věnuje konkrétním křivkám, jsou v některých případech uvedeny parametrizace pomocí vlastností hybných a pevných křivek, v některých s využitím předešlé kapitoly. Tedy je možno parametrizovat tyto křivky i bez znalosti obecných postupů, typickým příkladem je valení elipsy po přímce a vznik eliptické řetězovky – důvodem, proč nemůžeme tuto křivku parametrizovat pomocí zmíněné kapitoly, je nemožnost parametrizovat elipsu obloukem.

Výběr křivek do práce byl (většinou) takový, aby po výsledném valení hybné křivky po pevné vznikala další známá křivka. Takových křivek je samozřejmě mnohem více, zde jsou uvedeny ty nejznámější z nich.

Součástí této práce je zpracování všech uvedených křivek v softwaru dynamické geometrie *GeoGebra*, kde uživatel může změnou parametrů pohybovat s hybnou křivkou po pevné křivce a pozorovat tak odvalování a tvorbu výsledné trajektorie pohybu. V tomto programu jsou vytvořeny i obrázky, které jsou součástí tohoto textu.

Vzhledem k tomu, že českých textů věnujícím se tomuto tématu není mnoho, shledávám hlavní přínos práce právě v přiblížení problematiky českým čtenářům a uvedením několika poznatků v jednom textu. Pokračování práce by se mohlo věnovat dalším obecným vlastnostem nebo uvedením dalších konkrétních křivek.

Literatura

- [1] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1979. 303 s.
- [2] POLÁČEK, Pavel. *Cyklické křivky vyšších řádů*. Plzeň, 2011. Diplomová práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd.
- [3] WALKER, Gordon. The General Theory of Roulettes. *National Mathematics Magazine*. 1937, 12(1), 21-26. DOI: 10.2307/3028504. ISSN 15395588. Dostupné také z: <<http://www.jstor.org/stable/3028504?origin=crossref>>
- [4] PLESKOT, Antonín. Jistá příbuznost křivek související s teorií křivek valčících se. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [online]. 1932, (4), 137 - 145 [cit. 2016-04-19]. ISSN 1802-114X (printed edition, 1872-1950). Dostupné z: <<http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/121317>>
- [5] Roulette. *Wolfram Mathworld* [online]. [cit. 2016-05-15]. Dostupné z: <<http://mathworld.wolfram.com/Roulette.html>>
- [6] Brachistochrona. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-23]. Dostupné z: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona>>
- [7] MAHIEU, Erik. Cycloidal gears. *Wolfram Demonstrations Project* [online]. 2013 [cit. 2016-02-23]. Dostupné z: <<http://demonstrations.wolfram.com/CycloidalGears/>>
- [8] Rootsovo dmychadlo. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-23]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Rootsovo_dmychadlo>

- [9] Cissoid. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2016-05-13]. Dostupné z: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Cissoid>>
- [10] STIX, Roman. *Řetězovka*. Brno, 2013. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Petr Zemánek.
- [11] ATHUKORALLAGE, Bhagya, Thanuja PARAGODA a Magdalena TODA. *Roulettes of conics, Delaunay surfaces and applications* [online]. 2013, , 1-24 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/267037823_Roulettes_of_conics_Delaunay_surfaces_and_applications>
- [12] Cycloid. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2016-05-15]. Dostupné z: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>>
- [13] Epicycloid. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2016-05-15]. Dostupné z: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid>>
- [14] Hypocycloid. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2016-05-15]. Dostupné z: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid>>
- [15] Why does the focus of a rolling parabola trace a catenary? In: *Mathematics* [online]. [cit. 2016-02-23]. Dostupné z: <<http://math.stackexchange.com/questions/63025/why-does-the-focus-of-a-rolling-parabola-trace-a-catenary>>
- [16] Tangential angle. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2016-05-19]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tangential_angle>
- [17] KOPEJTKOVÁ, Michaela. *Kinematická geometrie*. Plzeň, 2008. Bakalářská práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd.