Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami

Plzeň 2016 **Karolína Netrvalová**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 29. července 2016

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za odborné vedení, ochotu, trpělivost a čas, který mi věnoval na mnoha konzultacích. Moc si toho vážím.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá Fučíkovým spektrem okrajových úloh pro diferenciální rovnice druhého řádu. Nejprve řešíme úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami. V další části studujeme úlohu s nelokální okrajovou podmínkou. Hlavní výsledky práce se týkají úlohy, která je ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \quad \int\limits_p^\pi u(x)\,dx = 0, \quad 0 \le p < \pi. \end{cases}$$

Zaměříme se hlavně na strukturu Fučíkova spektra této úlohy. Poslední část je pak věnována numerické konstrukci Fučíkova spektra.

Klíčová slova: Fučíkovo spektrum, okrajová úloha, nelokální okrajová úloha

Abstract

This Bachelor Thesis deals with the Fučík spectrum of boundary value problems for second order differential equations. First we solve Dirichlet boundary value problem. In the next part we focus on nonlocal boundary value problem. Main results of this Thesis concern the nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \quad \int\limits_p^\pi u(x)\,dx = 0, \quad 0 \le p < \pi. \end{cases}$$

We focus mainly on the structure of Fučík spectrum of this problem. The last part is dedicated to numerical costruciton of the Fučík spectrum.

Keywords: the Fučík Spectrum, the boundary value problem, the nonlocal boundary value problem

Obsah

Úvod **2**

1 Lineární úloha s Dirichletovými okrajovými podmínkami **3**

2 Po částech lineární úloha s Dirichletovými okrajovými podmínkami **7**

3 Po částech lineární úloha s nelokální okrajovou podmínkou **12**

4 Po částech lineární úloha se zobecněnou nelokální okrajovou podmínkou **18**
4.1 Popis Fučíkova spektra pro $p = \frac{\pi}{2}$ 18
4.2 Popis Fučíkova spektra pro $0 < p < \pi$ 29
4.3 Numerická aproximace Fučíkova spektra 32

Závěr **34**

Úvod

Tato bakalářské práce je zaměřena na studium úlohy, která je ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, \quad x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0, \quad \int\limits_p^\pi u(x)\,dx = 0, \quad 0 \le p < \pi. \end{cases} \tag{$*$}$$

Naším cílem bude nalézt všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ takové, pro které má úloha $(*)$ netriviální řešení. V každé kapitole se budeme věnovat okrajové úloze pro diferenciální rovnici druhého řádu. V první kapitole začneme tou nejjednodušší – lineární úlohou s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Najdeme její vlastní čísla a jim odpovídající vlastní funkce.

V druhé kapitole budeme opět studovat úlohou s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Tato úloha však již nebude lineární, nýbrž po částech lineární. Definujeme si pojem Fučíkovo spektrum a pro danou úlohu také Fučíkovo spektrum sestrojíme.

Ve třetí kapitole vyměníme jednu Dirichletovu okrajovou podmínku za podmínku v integrálním tvaru. Popis Fučíkova spektra pro tuto úlohu v prvním kvadrantu roviny $\mathbb{R}^2$ je uveden v článku [3]. Oproti tomuto článku uvedeme popis Fučíkova spektra na celé rovině $\mathbb{R}^2$.

Úlohy v kapitolách 1, 2 a 3 byly prostudovány již dříve. Ve čtvrté kapitole se však věnujeme dosud neprostudované úloze $(*)$. Pro volbu parametru $p = 0$ je úloha $(*)$ úlohou uváděnou v kapitole 3. Pro jednoduchost si ukážeme konstrukci Fučíkova spektra pro úlohu $(*)$ pouze pro hodnotu parametru $p = \frac{\pi}{2}$. Pro $p = \frac{\pi}{2}$ je totiž počet parametrických analytických předpisů pro Fučíkovy větve nejmenší. Pokud bychom si chtěli nechat vypočítat počet těchto předpisů pro jiná p, můžeme využít algoritmus, který je popisován v druhé části této kapitoly. Protože sestavení analytického popisu Fučíkova spektra je časově náročné, uvádíme na závěr této kapitoly algoritmus, který dokáže numericky sestrojit libovolnou část Fučíkova spektra pro úlohu $(*)$.

Kapitola 1

Lineární úloha s Dirichletovými okrajovými podmínkami

V této kapitole uvažujme lineární Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr. Řešením úlohy (1.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^2(0,\pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle)$, která splňuje diferenciální rovnici v úloze (1.1) pro každé $x \in (0, \pi)$ a zároveň splňuje homogenní Dirichletovy okrajové podmínky úlohy (1.1). Nyní hledejme takové hodnoty parametru λ, pro které má úloha (1.1) netriviální řešení.

Lemma 1.1. *Úloha* (1.1) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda = \lambda_l$, *kde* $\lambda_l := l^2$, $l \in \mathbb{N}$ *a jim odpovídající řešení jsou ve tvaru* $u_l(x) = c \sin \sqrt{\lambda_l} x$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Důkaz. Řešení diferenciální rovnice v úloze (1.1) hledáme ve tvaru $u(x) = \mathrm{e}^{px}$, $p \in \mathbb{C}$. Tento předpokládaný tvar řešení dosadíme do diferenciální rovnice v úloze (1.1) a dostáváme

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{px})'' + \lambda (\mathrm{e}^{px}) &= 0, \\ p^2 \mathrm{e}^{px} + \lambda \mathrm{e}^{px} &= 0, \\ \left(p^2 + \lambda\right) \mathrm{e}^{px} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rovnici (1.2) můžeme splnit jenom tehdy, pokud

$$p^2 + \lambda = 0. \tag{1.3}$$

Nyní budeme postupně hledat kořeny rovnice (1.3) pro jednotlivé případy, kdy $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ a $\lambda = 0$. (Rovnice (1.3) se nazývá charakteristická rovnice lineární diferenciální rovnice v úloze (1.1).)

1. Pro $\lambda > 0$ má rovnice (1.3) komplexně sdružené kořeny ve tvaru $p_1 = \mathrm{i}\sqrt{\lambda}$ a $p_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\lambda}$. Lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice v úloze (1.1) jsou tedy funkce $\cos \sqrt{\lambda} x$ a $\sin \sqrt{\lambda} x$ (viz [8], 10.17. Lemma, str. 98), které tvoří fundamentální systém. Protože obecné řešení diferenciální rovnice je tvořeno lineární kombinací prvků fundamentálního systému, má obecné řešení diferenciální rovnice v úloze (1.1) tvar

   $$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

   Připomeňme si, že okrajové podmínky úlohy (1.1) jsou ve tvaru

   $$u(0) = 0, \tag{1.5}$$
   $$u(\pi) = 0. \tag{1.6}$$

Dosadíme-li obecné řešení (1.4) do podmínek (1.5) a (1.6), dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 &= 0, & (1.7)\\ c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) &= 0. & (1.8) \end{aligned}$$

Z rovnice (1.7) vyplývá, že konstanta $c_1 = 0$. Dosadíme-li konstantu c_1 do rovnice (1.8), dostaneme $c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$. Protože hledáme netriviální řešení úlohy (1.1), požadujeme, aby konstanta $c_2 \neq 0$. Proto

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0,\\ \sqrt{\lambda}\pi &= l\pi,\ l \in \mathbb{N},\\ \lambda &= l^2. \end{aligned}$$

Pro hodnoty $\lambda = \lambda_l = l^2$ má úloha (1.1) netriviální řešení

$$u_l(x) = c_2 \sin lx,\ c_2 \neq 0.$$

2. Pro $\lambda < 0$ dostáváme kořeny rovnice (1.3) ve tvaru $p_1 = \sqrt{-\lambda}$ a $p_2 = -\sqrt{-\lambda}$. Fundamentální systém je tedy tvořen funkcemi $\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}$ a $\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$ (viz [8], 10.12. Lemma, str. 96) a obecné řešení diferenciální rovnice v úloze (1.1) má tvar

$$u(x) = c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Dosadíme-li obecné řešení (1.9) do podmínek (1.5) a (1.6), dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 &= 0, & (1.10)\\ c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi} &= 0. & (1.11) \end{aligned}$$

Z rovnice (1.10) si vyjádříme konstantu c_2:

$$c_2 = -c_1. \quad (1.12)$$

Dosadíme ji do rovnice (1.11) a dostaneme

$$c_1\left(\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0. \quad (1.13)$$

Funkce hyperbolický sinus je definována jako

$$\sinh x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Pomocí definice (1.14) dostaneme rovnici (1.13) ve tvaru

$$2c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0. \quad (1.15)$$

Rovnici (1.15) můžeme splnit jenom tehdy, pokud konstanta $c_1 = 0$. Ze vztahu (1.12) potom vyplývá, že i konstanta $c_2 = 0$. A tak pro záporné hodnoty parametru λ má úloha (1.1) pouze triviální řešení $u(x) \equiv 0$.

3. Pro $\lambda = 0$ dostáváme diferenciální rovnici v úloze (1.1) ve tvaru

$$u''(x) = 0.$$

Přímou integrací získáme její obecné řešení

$$u(x) = c_1 x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Dosadíme-li obecné řešení (1.16) do podmínek (1.5) a (1.6), dostaneme soustavu dvou rovnic

$$c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \tag{1.17}$$
$$c_1 \cdot \pi + c_2 = 0. \tag{1.18}$$

Z rovnice (1.17) vyplývá, že konstanta $c_2 = 0$. Rovnice (1.18) bude tedy ve tvaru $c_1 = 0$. A tak pro nulovou hodnotu parametru λ má úloha (1.1) pouze triviální řešení $u(x) \equiv 0$.

■

Čísla $\lambda \in \mathbb{R}$, pro která má úloha (1.1) netriviální řešení, budeme nazývat vlastní čísla úlohy (1.1). A jim odpovídající netriviální řešení budeme nazývat vlastní funkce úlohy (1.1). Pro úlohu (1.1) máme celou posloupnost vlastních čísel

$$(\lambda_l) = \left(l^2\right) = (1, 4, 9, 16, ...)\,.$$

Posloupnost vlastních funkcí úlohy (1.1) příslušející vlastním číslům λ_l je potom dána ve tvaru

$$(v_l(x)) = (\sin lx) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, ...)\,.$$

Diferenciální rovnice v úloze (1.1) je autonomní, tzn. nevystupuje v ní nikde nezávisle proměnná x explicitně. Je-li tedy funkce $u = u(x)$, definovaná pro $x \in (0, \pi)$, netriviálním řešením diferenciální rovnice v úloze (1.1) na intervalu $(0, \pi)$, potom funkce $y(x) = u(x - r),\ r \in \mathbb{R}$, definovaná pro $x \in (r, \pi + r)$, je netriviálním řešením diferenciální rovnice v úloze (1.1) na intervalu $(r, \pi + r)$. A funkce $z(x) = u(s \cdot x),\ s \in \mathbb{R}^+$, definovaná pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{s}\right)$, je netriviálním řešením diferenciální rovnice v úloze (1.1) na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{s}\right)$. Ukažme si to v důkazu následujícího lemmatu.

Uvažujme lineární Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in (a, b)\,, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr, $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$.

Lemma 1.2. *Vlastní čísla úlohy* (1.19) *jsou ve tvaru*

$$\lambda_l = \left(\frac{l\pi}{b-a}\right)^2,\ l \in \mathbb{N}$$

a jim odpovídjící vlastní funkce jsou dány vztahem $u_l(x) = c \sin \sqrt{\lambda_l}(x - a),\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Důkaz. Okrajová úloha

$$\begin{cases} y''(t) + \widetilde{\lambda} y(t) = 0, & t \in (0, \pi)\,, \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

s parametrem $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ odpovídá úloze (1.1), jen jsme použili jiné značení pro funkci u, proměnnou x a parametr λ. Z lemmatu 1.1 víme, že vlastní čísla úlohy (1.20) jsou ve tvaru

$$\widetilde{\lambda}_l = l^2,\ l \in \mathbb{N} \tag{1.21}$$

a jim odpovídající vlastní funkce jsou dány vztahem

$$y_l(t) = c \sin \sqrt{\widetilde{\lambda}_l} t,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \tag{1.22}$$

Nyní úlohu (1.20) transformujeme na úlohu (1.19) a pomocí této transformace určíme vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (1.19). Budeme používat vztah pro transformaci funkce y

$$y(t) = u\left(\frac{b-a}{\pi} \cdot t + a\right), \tag{1.23}$$

vztah pro transformaci nezávislé proměnné t

$$t = \frac{\pi}{b-a}(x-a) \tag{1.24}$$

a vztah pro transformaci parametru $\widetilde{\lambda}$

$$\widetilde{\lambda} = \lambda \cdot \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2. \tag{1.25}$$

Do diferenciální rovnice v úloze (1.20) dosadíme za y z transformačního vztahu (1.23), čímž dostaneme

$$u''\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right)\cdot\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 + \widetilde{\lambda}\cdot u\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right) = 0. \tag{1.26}$$

Po přenásobení rovnice (1.26) výrazem $(\pi/(b-a))^2$ obdržíme

$$u''\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right) + \widetilde{\lambda}\cdot\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2\cdot u\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right) = 0. \tag{1.27}$$

Nyní můžeme rovnici (1.27) přepsat do tvaru diferenciální rovnice v úloze (1.19):

$$u''(x) + \lambda\cdot u(x) = 0,$$

kde

$$x = \frac{b-a}{\pi}\cdot t + a \tag{1.28}$$

a

$$\lambda = \widetilde{\lambda}\cdot\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2. \tag{1.29}$$

Dosadíme-li do rovnice (1.29) za $\widetilde{\lambda}$ vlastní čísla $\widetilde{\lambda}_l = l^2$ úlohy (1.20), získáme vlastní čísla úlohy (1.19)

$$\lambda_l = \left(\frac{l\pi}{b-a}\right)^2.$$

Dosadíme-li do vztahu (1.22) za y z transformačního vztahu (1.23) a za $\widetilde{\lambda}$ z transformačního vztahu (1.25), potom dostaneme

$$\begin{aligned} u_l\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right) &= c\sin\left(\sqrt{\lambda_l\cdot\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2}\cdot t\right), \\ u_l\left(\frac{b-a}{\pi}\cdot t + a\right) &= c\sin\left(\sqrt{\lambda_l}\cdot\frac{b-a}{\pi}\cdot t\right). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Pomocí vztahu (1.28) můžeme vztah (1.30) napsat ve tvaru

$$u_l(x) = c\sin\left(\sqrt{\lambda_l}(x-a)\right). \tag{1.31}$$

Vztah (1.31) představuje předpis pro vlastní funkce úlohy (1.19). ■

Kapitola 2

Po částech lineární úloha s Dirichletovými okrajovými podmínkami

V této kapitole uvažujme úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ a $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$. Řešením úlohy (2.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^2(0,\pi) \cap C(\langle 0,\pi\rangle)$, která splňuje diferenciální rovnici v úloze (2.1) pro každé $x \in (0,\pi)$ a zároveň splňuje homogenní Dirichletovy okrajové podmínky úlohy (2.1). Nyní budeme hledat všechny dvojice $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ takové, pro které má úloha (2.1) netriviální řešení.

Definice 2.1. Fučíkovo spektrum pro úlohu (2.1) je množina

$$\Sigma := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{ úloha (2.1) má netriviální řešení}\}.$$

Podmnožiny Fučíkova spektra pro úlohu (2.1) definujme následujícím způsobem:

$$P_m^+ := \{(\alpha,\beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (2.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0,\pi) \text{ a } u'(0) > 0\},$$

$$P_m^- := \{(\alpha,\beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (2.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0,\pi) \text{ a } u'(0) < 0\},$$

kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Množiny P_m^+ a P_m^- budeme nazývat Fučíkovými větvemi.

Definice 2.2. Nechť funkce u je netriviálním řešením úlohy (2.1). Potom funkci u nad intervalem (x_1, x_2), kde $x_1,\ x_2$ jsou po sobě jdoucí nulové body funkce u, budeme nazývat půlvlnou. Pokud funkce u nabývá nad intervalem (x_1, x_2) kladných hodnot, potom funkci u nad tímto intervalem budeme nazývat kladnou půlvlnou. Pokud naopak funkce u nabývá nad intervalem (x_1, x_2) záporných hodnot, budeme funkci u nad tímto intervalem nazývat zápornou půlvlnou.

Lemma 2.1. *Fučíkovo spektrum pro úlohu* (2.1) *je dáno jako*

$$\Sigma = \bigcup_{m=0}^{+\infty} P_m, \text{ kde } P_m := P_m^+ \cup P_m^-.$$

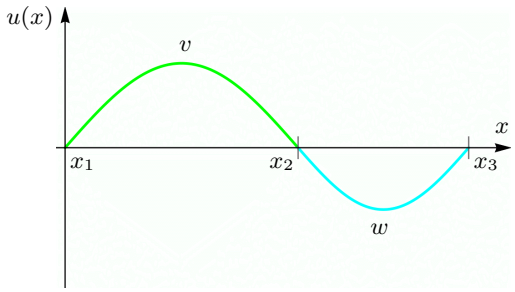
Jednotlivé Fučíkovy větve $P_m^{\pm}$ mají tvar:

$$
\begin{aligned}
P_0^+ &= \{(1,\beta) : \beta \in \mathbb{R}\}, \\
P_0^- &= \{(\alpha,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \\
P_{2n-1}^+ = P_{2n-1}^- &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1\right\}, \\
P_{2n}^+ &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1\right\}, \\
P_{2n}^- &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n+1}{\sqrt{\beta}} = 1\right\},
\end{aligned}
$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Pro $\alpha = \beta = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, přechází úloha (2.1) v úlohu (1.1). Vlastní čísla úlohy (1.1) potom určují body $(\lambda_l, \lambda_l) \in \Sigma,\ l \in \mathbb{N}$.

Diferenciální rovnice v úloze (2.1) je autonomní. Je-li tedy funkce $u = u(x)$, definovaná pro $x \in (0,\pi)$, netriviálním řešením diferenciální rovnice v úloze (2.1) na intervalu $(0,\pi)$, potom funkce $y(x) = u(x-r),\ r \in \mathbb{R}$, definovaná pro $x \in (r, \pi + r)$, je netriviálním řešením diferenciální rovnice v úloze (2.1) na intervalu $(r, \pi + r)$. Pokud u je nad intervalem (a,b) kladnou (zápornou) půlvlnou, potom u je řešením Dirichletovy okrajové úlohy (1.19) na intervalu (a,b) s hodnotou parametru $\lambda = \alpha$ $(\lambda = \beta)$.



Obrázek 2.1: Kladná a záporná půlvlna netriviálního řešení úlohy (2.1).

Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in (0,\pi)$ jsou tři po sobě jdoucí nulové body netriviálního řešení u úlohy (2.1). Dále nechť u je kladnou půlvlnou nad intervalem (x_1, x_2), potom platí

$$u^-(x) = 0,\ u^+(x) = u(x),\ x \in (x_1, x_2).$$

Řešíme tedy úlohu ve tvaru

$$
\begin{cases}
v''(x) + \alpha v(x) = 0, & x \in (x_1, x_2), \\
v(x_1) = v(x_2) = 0,
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr a požadujeme, aby $v(x) > 0$ pro $x \in (x_1, x_2)$. Úloha (2.2) odpovídá úloze (1.19). Z lemmatu 1.2 víme, že kladná půlvlna je ve tvaru

$$v(x) = A \sin \sqrt{\alpha}(x - x_1),\ A > 0, \tag{2.3}$$

kde

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{x_2 - x_1}\right)^2 \tag{2.4}$$

je prvním vlastním číslem úlohy (2.2).

Dále nechť u je zápornou půlvlnou nad intervalem (x_2, x_3), potom platí

$$u^+(x) = 0,\ -u^-(x) = u(x),\ x \in (x_2, x_3).$$

Řešíme tedy úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} w''(x) + \beta w(x) = 0, & x \in (x_2, x_3), \\ w(x_2) = w(x_3) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

kde $\beta \in \mathbb{R}$ je parametr a požadujeme, aby $w(x) < 0$ pro $x \in (x_2, x_3)$. Úloha (2.5) opět odpovídá úloze (1.19). Z lemmatu 1.2 víme, že záporná půlvlna je ve tvaru

$$w(x) = B \sin \sqrt{\beta}(x - x_2),\ B < 0, \tag{2.6}$$

kde

$$\beta = \left(\frac{\pi}{x_3 - x_2} \right)^2 \tag{2.7}$$

je prvním vlastním číslem úlohy (2.5). Ilustraci kladné a záporné půlvlny netriviálního řešení úlohy (2.1) uvádíme na obrázku 2.1.

Pouze netriviální řešení odpovídající první dvojici Fučíkových větví $P_0^{\pm}$ znaménko nemění na intervalu $(0, \pi)$ – tvoří ho pouze kladná (záporná) půlvlna. Netriviální řešení odpovídající ostatním Fučíkovým větvím znaménko na intervalu $(0, \pi)$ již mění, skládají se z kladných a záporných půlvln. Bodem napojení kladné půlvlny v a záporné půlvlny w je bod x_2. Z okrajových podmínek úlohy (2.2) a úlohy (2.5) víme, že platí $v(x_2) = w(x_2) = 0$. Funkce v a w ale obecně nemají v bodě x_2 stejné derivace. My však požadujeme rovnost prvních i druhých derivací v bodě x_2, abychom dostali hladké řešení. Je tedy nutné, aby platilo

$$v'(x_2) = w'(x_2) \tag{2.8}$$

a

$$v''(x_2) = w''(x_2). \tag{2.9}$$

Dosadíme-li do vztahu (2.8) za v ze vztahu (2.3) a za w ze vztahu (2.6), dostaneme

$$A\sqrt{\alpha} \cdot \cos \sqrt{\alpha}(x_2 - x_1) \quad = \quad B\sqrt{\beta}. \tag{2.10}$$

Po dosazení do vztahu (2.10) za α ze vztahu (2.4) a za β ze vztahu (2.7) obdržíme

$$\begin{aligned} A\frac{\pi}{x_2 - x_1} \cdot \cos \frac{\pi}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) &= B\frac{\pi}{x_3 - x_2}, \\ A\frac{\pi}{x_2 - x_1} \cdot (-1) &= B\frac{\pi}{x_3 - x_2}, \\ -\frac{A}{x_2 - x_1} &= \frac{B}{x_3 - x_2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pokud si nyní zvolíme konkrétní hodnotu konstanty A, vztah (2.11) nám jednoznačně určí hodnotu konstanty B. Na příklad pro $A = 1$, bude

$$B = -\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}.$$

Nyní se přesvědčme, zda vztah (2.9) platí. Pokud do něj dosadíme za v ze vztahu (2.3) a za w ze vztahu (2.6), dostaneme

$$-A\alpha \sin \sqrt{\alpha}(x_2 - x_1) = 0. \tag{2.12}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (2.12) za α ze vztahu (2.4), vidíme, že vztah (2.9) platí.

Ze vztahu (2.4) můžeme určit vzdálenost mezi krajními nulovými body kladné půlvlny

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.$$

Podobně ze vztahu (2.7) můžeme určit vzdálenost mezi krajními nulovými body záporné půlvlny

$$x_3 - x_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

Konkrétní předpisy Fučíkových větví $P_m^{\pm}$ pak dostaneme podle počtu kladných a záporných půlvln, pomocí kterých sestavíme netriviální řešení u. Pro n kladných a n záporných půlvln dostáváme předpis

$$\frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

pro $(n+1)$ kladných a n záporných půlvln dostáváme předpis

$$\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

a pro n kladných a $(n+1)$ záporných půlvln dostáváme předpis

$$\frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

■

Na níže uvedeném obrázku 2.2 je znázorněna struktura Fučíkova spektra pro úlohu (2.1). Na tomto obrázku na Fučíkově větvi P_1^+ je vyznačen bod M, kterému odpovídá netriviální řešení u, jehož průběh vidíme na obrázku 2.3. Na Fučíkově větvi P_2^+ je vyznačen bod N, kterému odpovídá netriviální řešení u, jehož průběh vidíme na obrázku 2.4.

Na závěr této kapitoly si uvedeme lemma, které říká, že Fučíkovy větve $P_m^{\pm}$ jsou symetrické podle diagonály $\alpha = \beta$.

Lemma 2.2. *Jestliže $(\alpha, \beta) \in \Sigma$, potom také $(\beta, \alpha) \in \Sigma$.*

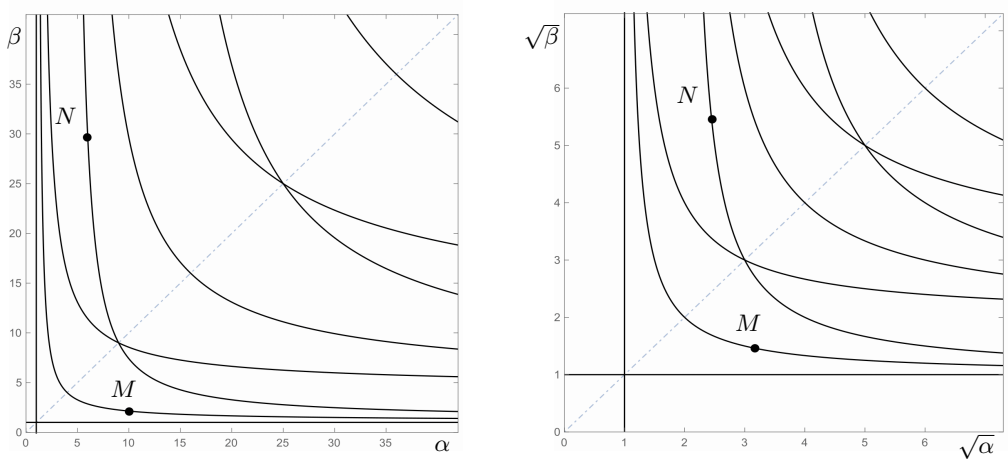
Důkaz. Nechť $(\alpha, \beta) \in \Sigma$. Potom dvojici (α, β) přísluší funkce u, která je netriviálním řešením úlohy (2.1). Označme $\hat{u} := -u$. Potom platí $\hat{u}^+ = u^-$ a $\hat{u}^- = u^+$. Diferenciální rovnici v úloze (2.1) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$-\hat{u}'' + \alpha\hat{u}^- - \beta\hat{u}^+ = 0. \tag{2.13}$$

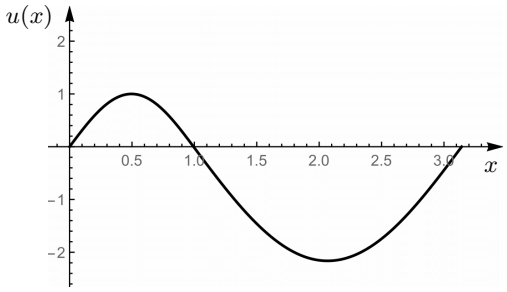
Vynásobením obou stran rovnice (2.13) číslem (-1) dostaneme

$$\hat{u}'' + \beta\hat{u}^+ - \alpha\hat{u}^- = 0,$$

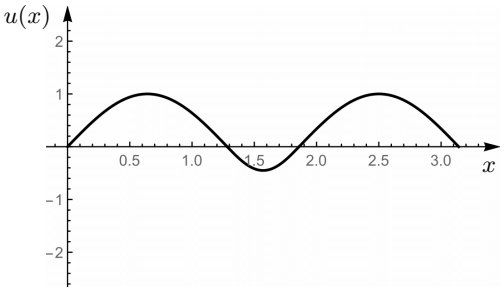
z čehož plyne, že $(\beta, \alpha) \in \Sigma$, neboť $\hat{u}$ je řešením diferenciální rovnice v úloze (2.1) a zároveň splňuje i homogenní Dirichletovy okrajové podmínky úlohy (2.1). ■



Obrázek 2.2: Fučíkovo spektrum Σ pro úlohu (2.1).



Obrázek 2.3: Netriviální řešení u úlohy (2.1), které odpovídá bodu M (viz obrázek 2.2).



Obrázek 2.4: Netriviální řešení u úlohy (2.1), které odpovídá bodu N (viz obrázek 2.2).

Kapitola 3

Po částech lineární úloha s nelokální okrajovou podmínkou

Uvažujme úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0, \ \int\limits_0^\pi u(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

kde $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ a $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$. Řešením úlohy (3.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^2(0,\pi) \cap C(\langle 0,\pi\rangle)$, která splňuje diferenciální rovnici v úloze (3.1) pro každé $x \in (0,\pi)$ a zároveň splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku a integrální podmínku v úloze (3.1). Nyní budeme hledat všechny dvojice $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ takové, pro které má úloha (3.1) netriviální řešení.

Úloha (3.1) byla již dříve předmětem zkoumání v článku [3], kde byl podán popis Fučíkova spektra pro úlohu (3.1) v prvním kvadrantu roviny $\mathbb{R}^2$. V této kapitole mimo jiné rozšíříme tento popis i na druhý a čtvrtý kvadrant.

Poznámka 3.1. (viz [9], str. 135) Mějme na intervalu $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ spojitou funkci $y = f(x)$. Když $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, potom integrál

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

představuje obsah obrazce (tzv. křivočarého lichoběžníku) ohraničeného grafem funkce f, osou x a rovnoběžkami s osou y vedenými body $a,\ b$. Když $f(x) \leq 0$ na $\langle a,b\rangle$, potom obsah příslušného křivočarého lichoběžníku je dán vzorcem

$$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Pokud tedy funkci u rozdělíme na kladnou a zápornou část, potom obsah plochy, kterou vymezuje kladná část, bude

$$S_1 = \int\limits_0^\pi u^+(x)\,dx$$

a obsah plochy, kterou vymezuje záporná část, bude

$$S_2 = \int\limits_0^\pi u^-(x)\,dx.$$

Definice 3.1. Fučíkovo spektrum pro úlohu (3.1) je množina

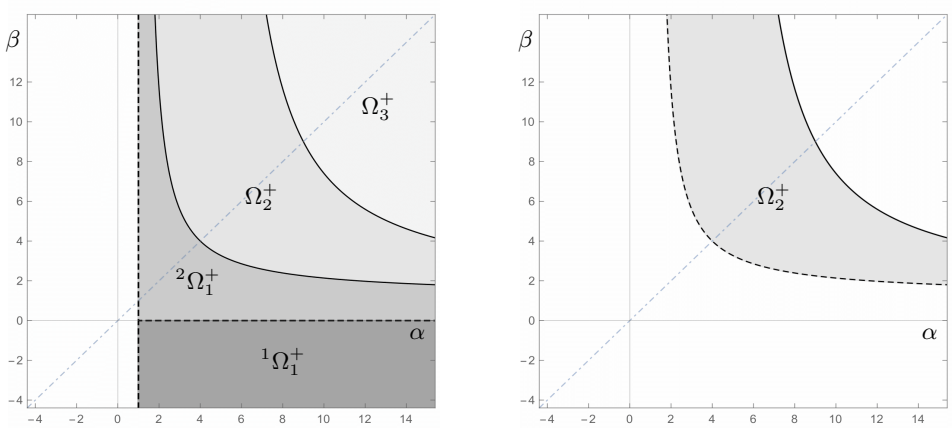
$$\Sigma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{ úloha (3.1) má netriviální řešení}\}.$$

Podmnožiny Fučíkova spektra pro úlohu (3.1) definujme následujícím způsobem:

$$R_m^+ := \{(\alpha, \beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (3.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0, \pi) \text{ a } u'(0) > 0\},$$

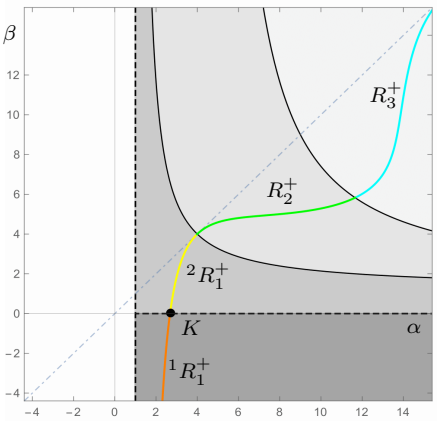
$$R_m^- := \{(\alpha, \beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (3.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0, \pi) \text{ a } u'(0) < 0\},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Množiny R_m^+ a R_m^- budeme nazývat Fučíkovými větvemi.



(a) Regiony Ω_n^+

(b) Hranice regionu Ω_2^+



(c) Větve R_m^+

Obrázek 3.1: Na obrázku 3.1(a) jsou různými odstíny šedé barvy vyznačeny regiony ${}^1\Omega_1^+$, ${}^2\Omega_1^+$, Ω_2^+ a Ω_3^+. Jednotlivé regiony jsou odděleny větvemi P_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (2.1) (černé křivky). Protože se hranice jednotlivých regionů překrývají, je na obrázku 3.1(b) vyznačen pouze region Ω_2^+ s hranicí $\partial\Omega_2^+$. Na obrázku 3.1(c) je navíc větev Fučíkova spektra pro úlohu (3.1), která se skládá z větve ${}^1R_1^+ \subset {}^1\Omega_1^+$ (oranžová křivka), větve ${}^2R_1^+ \subset {}^2\Omega_1^+$ (žlutá křivka), větve $R_2^+ \subset \Omega_2^+$ (zelená křivka), větve $R_3^+ \subset \Omega_3^+$ (azurová křivka) a bodu K.

Mezi Fučíkovým spektrem pro úlohu (3.1) a Fučíkovým spektrem pro úlohu (2.1) je určitá vazba. Ukážeme, že větve $R_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (3.1) lze popsat na jednotlivých regionech, jejichž hranice jsou určeny větvemi $P_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (2.1). Definujme si nyní množiny tvořící tyto regiony.

Region $\Omega_1^+ := {}^1\Omega_1^+ \cup {}^2\Omega_1^+$, kde

$$
\begin{aligned}
{}^1\Omega_1^+ &:= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : \quad \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \},\\
{}^2\Omega_1^+ &:= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \quad \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \leq \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{1}{\sqrt{\beta}} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Ostatní regiony definujeme jako

$$
\begin{aligned}
\Omega_{2n}^+ &:= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \quad \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} \Big\},\\
\Omega_{2n+1}^+ &:= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \quad \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n+1}{\sqrt{\beta}} \Big\},\\
\Omega_n^- &:= \big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \quad (\beta,\alpha) \in \Omega_n^+ \big\},
\end{aligned}
$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$
\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^+ = \big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha > 1, \ \beta \neq 0\big\}, \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^- = \big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ \beta > 1, \ \alpha \neq 0\big\}.
$$

Na výše uvedeném obrázku 3.1 jsou znázorněny některé regiony Ω_n^+.

Lemma 3.1. *Fučíkovo spektrum pro úlohu* (3.1) *je dáno jako*

$$
\Sigma = \bigcup_{m=1}^{+\infty} R_m, \text{ kde } R_m := R_m^+ \cup R_m^-.
$$

Fučíkova větev $R_1^+ = {}^1R_1^+ \cup K \cup {}^2R_1^+$, *kde* $K := \Big(\big(\frac{\pi+2}{\pi}\big)^2, 0\Big)$ *je bod napojení větví* ${}^1R_1^+$ *a* ${}^2R_1^+$, *přičemž*

$$
\begin{aligned}
{}^1R_1^+ &:= \Big\{(\alpha,\beta) \in {}^1\Omega_1^+ : \quad \tfrac{2}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\Big(1 - \cosh\Big[\pi\sqrt{-\beta}\Big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big]\Big) = 0\Big\},\\
{}^2R_1^+ &:= \Big\{(\alpha,\beta) \in {}^2\Omega_1^+ : \quad \tfrac{2}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\Big(1 - \cos\Big[\pi\sqrt{\beta}\Big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big]\Big) = 0\Big\}.
\end{aligned}
$$

Ostatní Fučíkovy větve $R_m^{\pm}$ *mají tvar*

$$
\begin{aligned}
R_{2n}^+ &= \Big\{(\alpha,\beta) \in \Omega_{2n}^+ : \quad \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{2n\sqrt{\alpha}}{\beta} + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big(1 - \cos\Big[\pi\sqrt{\alpha}\Big(1 - \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{n}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big]\Big) = 0\Big\},\\
R_{2n+1}^+ &= \Big\{(\alpha,\beta) \in \Omega_{2n+1}^+ : \quad \tfrac{2n+2}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{2n\sqrt{\alpha}}{\beta} - \tfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\Big(1 - \cos\Big[\pi\sqrt{\beta}\Big(1 - \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{n}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big]\Big) = 0\Big\},
\end{aligned}
$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

$$
R_m^- = \big\{(\alpha,\beta) \in \Omega_n^- : \quad (\beta,\alpha) \in R_m^+\big\},
$$

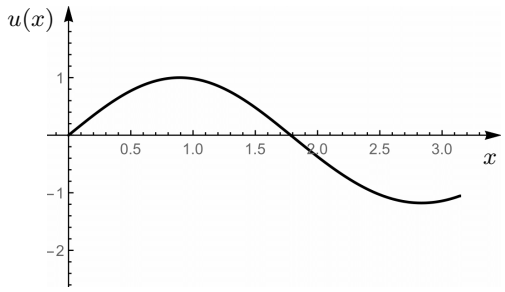
kde $m \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Netriviální řešení u úlohy (3.1) musí splňovat Dirichletovu okrajovou podmínku $u(0) = 0$.

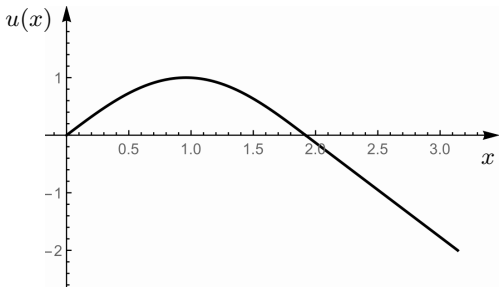
Navíc je potřeba, aby u splňovalo i podmínku, která je v integrálním tvaru

$$\int_0^\pi u(x)\,dx = 0. \tag{3.2}$$

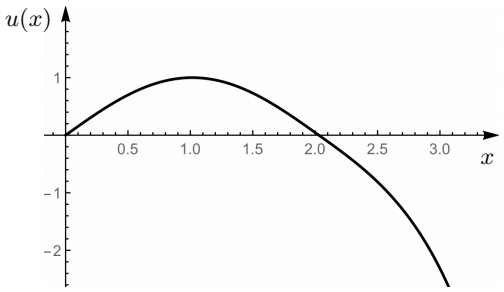
Z důkazu lemmatu 2.1 víme, že řešení u úlohy (3.1) budeme hledat po částech. Podívejme se, jak bude vypadat tvar řešení u, pro které platí $u'(0) > 0$ a které má na intervalu $(0, \pi)$ pouze jeden nulový bod x_0. Uvažujme tři případy, kdy $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$, $\alpha > 0 \wedge \beta = 0$ a $\alpha > 0 \wedge \beta < 0$.



Obrázek 3.2: Netriviální řešení u vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$.



Obrázek 3.3: Netriviální řešení u vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta = 0$.



Obrázek 3.4: Netriviální řešení u vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta < 0$.

1. Předpokládejme, že $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$. Protože u tvoří nad intervalem $(0, x_0)$ kladnou půlvlnu, řešíme na tomto intervalu Dirichletovu okrajovou úlohu (2.2). Řešení této úlohy je ve tvaru (viz (2.3))

   $$v(x) = A \sin \sqrt{\alpha} x,\ A > 0. \tag{3.3}$$

   Dále nechť u nabývá pouze záporných hodnot nad intervalem (x_0, π) a zároveň platí $u(x_0) = 0$. Budeme tedy řešit počáteční úlohu

   $$\begin{cases} w''(x) + \beta w(x) = 0, & x \in (x_0, \pi), \\ w(x_0) = 0,\ w'(x_0) < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

   Všechna řešení úlohy (3.4) mají tvar

   $$w(x) = B \sin \sqrt{\beta}\,(x - x_0),\ B < 0.$$

   Netriviální řešení vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$ uvádíme na obrázku 3.2.

2. Předpokládejme, že $\alpha > 0 \wedge \beta = 0$. Na intervalu $(0, x_0)$ je řešení u dáno vztahem (3.3) (viz bod 1). Opět předpokládejme, že nad intervalem (x_0, π) nabývá u pouze záporných hodnot. Na tomto intervalu tedy opět řešíme počáteční úlohu (3.4) pro $\beta = 0$. Všechna řešení této úlohy mají tvar

   $$w(x) = B(x - x_0),\ B < 0.$$

Netriviální řešení vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta = 0$ uvádíme na obrázku 3.3.

3. Předpokládejme, že $\alpha > 0 \wedge \beta < 0$. Na intervalu $(0, x_0)$ je řešení u dáno vztahem (3.3) (viz bod 1). Opět předpokládejme, že nad intervalem (x_0, π) nabývá u pouze záporných hodnot. Na tomto intervalu tedy opět řešíme počáteční úlohu (3.4) pro $\beta < 0$. Všechna řešení této úlohy mají tvar

$$w(x) = B \sinh\left(\sqrt{-\beta}\,(x - x_0)\right),\ B < 0.$$

Netriviální řešení vyhovující podmínce $\alpha > 0 \wedge \beta < 0$ uvádíme na obrázku 3.4.

Nyní si ukažme konstrukci Fučíkovy větve ${}^2R_1^+$. Předpokládáme, že dvojice $(\alpha, \beta) \in R_1^+$, $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$. Tedy předpokládáme, že netriviální řešení u úlohy (3.1) má na intervalu $(0, \pi)$ právě jeden nulový bod x_0 a $u'(0) > 0$. Je zřejmé, že pokud má být splněna podmínka (3.2), bude platit

$$\int_0^{x_0} v(x)\,dx + \int_{x_0}^{\pi} w(x)\,dx \quad = \quad 0. \tag{3.5}$$

Na intervalu $(0, x_0)$ je řešení u ve tvaru

$$v(x) = A \sin\sqrt{\alpha}x. \tag{3.6}$$

Do integrálu $\int_0^{x_0} v(x)\,dx$ dosadíme za v ze vztahu (3.6) a dostaneme

$$\int_0^{x_0} A \sin\sqrt{\alpha}x\,dx = \left[-\frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cos\sqrt{\alpha}x\right]_0^{x_0} = \frac{A}{\sqrt{\alpha}}\left(1 - \cos\sqrt{\alpha}x_0\right).$$

Na intervalu (x_0, π) má řešení u tvar

$$w(x) = B \sin\sqrt{\beta}(x - x_0). \tag{3.7}$$

Do integrálu $\int_{x_0}^{\pi} w(x)\,dx$ dosadíme za w ze vztahu (3.7) a dostaneme

$$\int_{x_0}^{\pi} B \sin\sqrt{\beta}(x - x_0)\,dx = \left[-\frac{B}{\sqrt{\beta}} \cos\sqrt{\beta}(x - x_0)\right]_{x_0}^{\pi} = \frac{B}{\sqrt{\beta}}\left(1 - \cos\sqrt{\beta}(\pi - x_0)\right).$$

Vraťme se k rovnici (3.5) a dosaďme do ní výše vypočtené hodnoty jednotlivých integrálů. Dostaneme

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\left(1 - \cos\sqrt{\alpha}x_0\right) + \frac{B}{\sqrt{\beta}}\left(1 - \cos\sqrt{\beta}(\pi - x_0)\right) = 0. \tag{3.8}$$

Hodnotu konstanty A si můžeme zvolit. Zvolme si tedy, že $A = 1$. Protože ale požadujeme hladkost celého řešení, je potřeba konstantu B určit. A to tak, aby platil vztah

$$v'(x_0) = w'(x_0). \tag{3.9}$$

Dosadíme-li do rovnice (3.9) za v ze vztahu (3.6) s volbou $A = 1$ a za w ze vztahu (3.7), dostáváme

$$\sqrt{\alpha} \cos\sqrt{\alpha}x_0 \quad = \quad B\sqrt{\beta} \tag{3.10}$$

Z důkazu lemmatu 2.1 víme, že vzdálenost mezi krajními nulovými body kladné půlvlny je

$$x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3.11}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (3.10) za x_0 ze vztahu (3.11), obdržíme

$$B = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}. \tag{3.12}$$

Vrátíme-li se k rovnici (3.8) a dosadíme do ní $A = 1$, za B ze vztahu (3.12) a za x_0 ze vztahu (3.11), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1-\cos\left[\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\right]\right)+\left(-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\cdot\left(1-\cos\sqrt{\beta}(\pi-\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})\right) &= 0, \\ \frac{2}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\left(1-\cos\left[\sqrt{\beta}(\pi-\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})\right]\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Předpokládali jsme, že bod x_0 je nulovým bodem řešení u na intervalu $(0,\pi)$. Pro bod x_0 tedy platí

$$\begin{aligned} x_0 &< \pi, \\ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} &< \pi. \end{aligned} \tag{3.14}$$

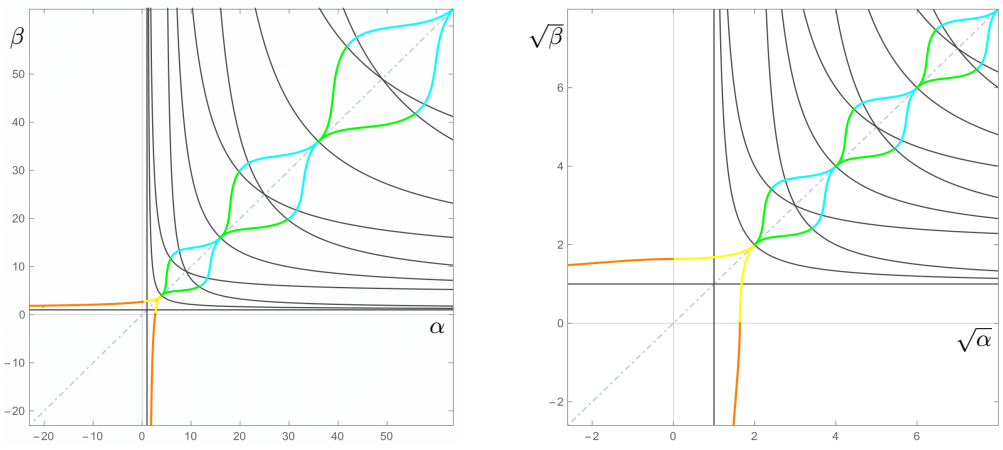
Podmínka (3.14) nám zajistí, že netriviální řešení u úlohy (3.1) má alespoň jeden nulový bod na intervalu $(0,\pi)$. My ale předpokládáme, že netriviální řešení u příslušející Fučíkově větvi ${}^2R_1^+$ má právě jeden nulový bod na intervalu $(0,\pi)$. Je tedy potřeba, aby zároveň byla splněna podmínka

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \geq \pi. \tag{3.15}$$

Z důkazu lemmatu 2.1 víme, že $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ odpovídá délce intervalu, nad kterým je kladná půlvlna. Dále víme, že $\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$ odpovídá délce intervalu, nad kterým je záporná půlvlna. A nakonec π je délka intervalu, na kterém je definována úloha (3.1).

Vztah (3.13) společně s nerovnostmi (3.14) a (3.15) popisují větev ${}^2R_1^+$. Ostatní Fučíkovy větve bychom konstruovali analogicky. Podobně bychom hledali i souřadnice bodu napojení větví ${}^1R_1^+$ a ${}^2R_1^+$. ■

Struktura Fučíkova spektra pro úlohu (3.1) je znázorněna na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Fučíkovo spektrum Σ pro úlohu (3.1).

Kapitola 4

Po částech lineární úloha se zobecněnou nelokální okrajovou podmínkou

V této kapitole uvažujme úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0, \ \int\limits_p^\pi u(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

kde $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$ a $p \in \langle 0, \pi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Řešením úlohy (4.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^2(0,\pi) \cap C(\langle 0,\pi\rangle)$, která splňuje diferenciální rovnici v úloze (4.1) pro každé $x \in (0,\pi)$ a zároveň splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku a integrální podmínku v úloze (4.1). Pro volbu parametru $p = 0$ je úloha (4.1) úlohou (3.1), která byla studována ve třetí kapitole.

Definice 4.1. Fučíkovo spektrum pro úlohu (4.1) je množina

$$\Sigma := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{ úloha (4.1) má netriviální řešení}\}.$$

Podmnožiny Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) definujme následovně:

$$S_m^+ := \{(\alpha,\beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (4.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0,\pi) \text{ a } u'(0) > 0\},$$

$$S_m^- := \{(\alpha,\beta) \in \Sigma : \text{netriviální řešení } u \text{ úlohy (4.1) má právě } m \text{ nulových bodů na intervalu } (0,\pi) \text{ a } u'(0) < 0\},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Množiny S_m^+ a S_m^- budeme nazývat Fučíkovými větvemi.

4.1 Popis Fučíkova spektra pro $p = \frac{\pi}{2}$

Ukažme si konstrukci Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) pro hodnotu parametru $p = \frac{\pi}{2}$. Budeme tedy hledat všechny dvojice $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ takové, pro které má úloha

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0, \ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi u(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

netriviální řešení.

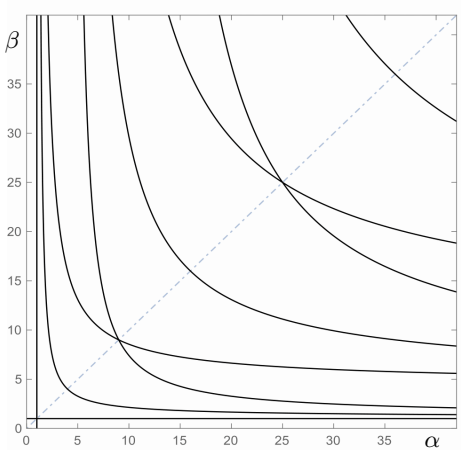
Mezi Fučíkovým spektrem pro úlohu (4.2) a Fučíkovými spektry pro úlohy

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

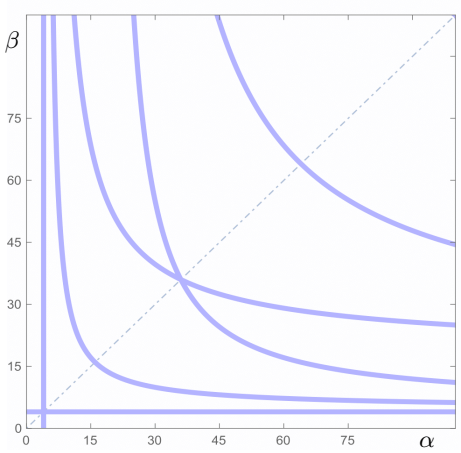
a

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

je určitá vazba. (Úloha (4.3) je úlohou (2.1), která je studována ve druhé kapitole.) Ukážeme, že větve $S_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.2) lze popsat na jednotlivých regionech jejichž hranice jsou určeny větvemi $P_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.3) a větvemi $T_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.4). Předpisy pro jednotlivé větve Fučíkových spekter úloh (4.3) a (4.4) jsou uvedeny v následujících poznámkách.



Obrázek 4.1: Fučíkovo spektrum Σ pro úlohu (4.3).



Obrázek 4.2: Fučíkovo spektrum Σ pro úlohu (4.4).

Poznámka 4.1. Fučíkovo spektrum pro úlohu (4.3) je určeno sjednocením Fučíkových větví $P_m^{\pm}$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} P_0^+ &= \{(1, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}, \\ P_0^- &= \{(\alpha, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \\ P_{2n-1}^+ = P_{2n-1}^- &= \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1\right\}, \\ P_{2n}^+ &= \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1\right\}, \\ P_{2n}^- &= \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n+1}{\sqrt{\beta}} = 1\right\}, \end{aligned}$$

kde n $\in \mathbb{N}$.

Poznámka 4.2. Fučíkovo spektrum pro úlohu (4.4) je určeno sjednocením Fučíkových větví $T_m^{\pm}$

($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}
T_0^+ &= \{(4,\beta) : \beta \in \mathbb{R}\}, \\
T_0^- &= \{(\alpha,4) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \\
T_{2n-1}^+ = T_{2n-1}^- &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}\right\}, \\
T_{2n}^+ &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}\right\}, \\
T_{2n}^- &= \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n+1}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}\right\},
\end{aligned}$$

kde n $\in \mathbb{N}$.

Struktura Fučíkova spektra pro úlohu (4.3) je znázorněna na obrázku 4.1, struktura Fučíkova spektra pro úlohu (4.4) je znázorněna na obrázku 4.2. Nyní si definujme množiny tvořící regiony, na kterých získáme předpisy pro větve S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.2).

Region $\Omega_1^+ := {}^1\Omega_1^+ \cup {}^2\Omega_1^+$, kde

$${}^1\Omega_1^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : \ \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \ \},$$

$${}^2\Omega_1^+ := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \leq \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{1}{\sqrt{\beta}}\right\}.$$

Regiony $\Omega_{4n-2}^+ := {}^1\Omega_{4n-2}^+ \cup {}^2\Omega_{4n-2}^+$, kde

$$\begin{aligned}
{}^1\Omega_{4n-2}^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ & \tfrac{2n-1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n-1}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n-1}{\sqrt{\beta}}, \\
& \tfrac{n-1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n-1}{\sqrt{\beta}} \leq \tfrac{1}{2} < \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n-1}{\sqrt{\beta}} \Big\}, \\
{}^2\Omega_{4n-2}^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ & \tfrac{2n-1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n-1}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n-1}{\sqrt{\beta}}, \\
& \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n-1}{\sqrt{\beta}} \leq \tfrac{1}{2} < \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} \Big\},
\end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Ostatní regiony definujeme jako

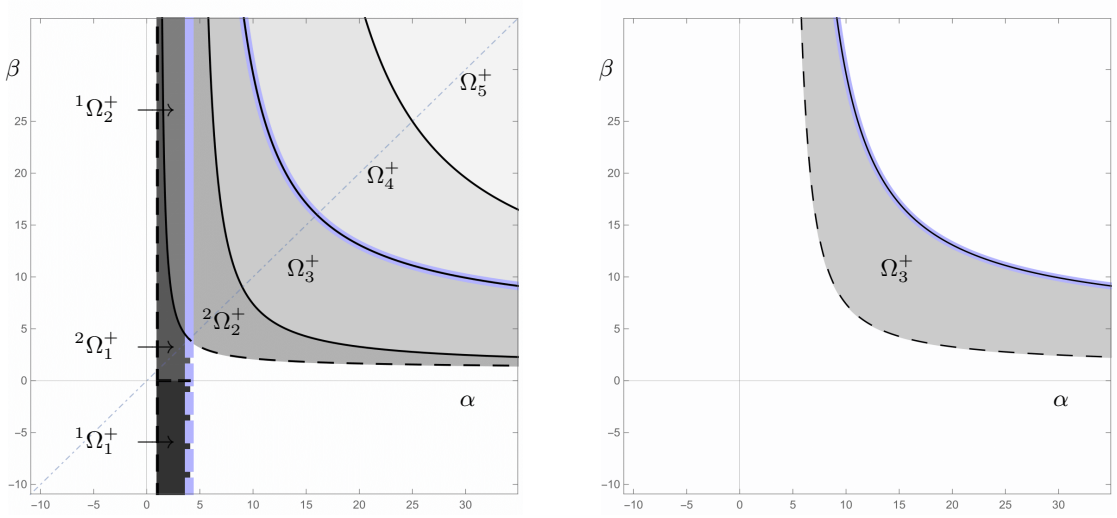
$$\begin{aligned}
\Omega_{4n-1}^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ & \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n-1}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n}{\sqrt{\beta}}, \\
& \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n-1}{\sqrt{\beta}} < \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} \Big\}, \\
\Omega_{4n}^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ & \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{2n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n}{\sqrt{\beta}}, \\
& \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} < \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} \Big\}, \\
\Omega_{4n+1}^+ := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ & \tfrac{2n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \tfrac{2n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{2n+1}{\sqrt{\beta}}, \\
& \tfrac{n}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} < \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{n+1}{\sqrt{\alpha}} + \tfrac{n}{\sqrt{\beta}} \Big\},
\end{aligned}$$

$$\Omega_n^- := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \quad (\beta,\alpha) \in \ \Omega_n^+\right\},$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Sjednocením všech výše definovaných regionů dostaneme region, na kterém lze popsat celé Fučíkovo spektrum pro úlohu (4.2). Platí

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^{\pm} = ((1;+\infty) \times (1;+\infty)) \cup \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < \alpha < 4, \ \beta \neq 0\right\} \cup \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < \beta < 4, \ \alpha \neq 0\right\}.$$

Na níže uvedeném obrázku 4.3 jsou znázorněny regiony ${}^1\Omega_1^+$, ${}^2\Omega_1^+$, ${}^1\Omega_2^+$, ${}^2\Omega_2^+$, Ω_3^+, Ω_4^+ a Ω_5^+.



(a) Regiony Ω_n^+ (b) Hranice regionu Ω_3^+

Obrázek 4.3: Na obrázku 4.3(a) jsou různými odstíny šedé barvy vyznačeny regiony $^1\Omega_1^+$, $^2\Omega_1^+$, $^1\Omega_2^+$, $^2\Omega_2^+$, Ω_3^+, Ω_4^+ a Ω_5^+ . Jednotlivé regiony jsou odděleny větvemi P_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.3) (černé křivky) a větvemi T_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.4) (světle modré křivky). Protože se hranice jednotlivých regionů překrývají, je na obrázku 4.3(b) vyznačen pouze region Ω_3^+ s hranicí $\partial\Omega_3^+$.

Věta 4.1. *Fučíkovo spektrum pro úlohu* (4.2) *je dáno jako*

$$\Sigma = \bigcup_{m=1}^{+\infty} S_m, \text{ kde } S_m := S_m^+ \cup S_m^-.$$

Fučíkova větev $S_1^+ = {}^1S_1^+ \cup M \cup {}^2S_1^+$, *kde* $M := (\tilde{\alpha}, 0)$ *je bod napojení větví* ${}^1S_1^+$ *a* ${}^2S_1^+$,

$\tilde{\alpha} > 1$ *je řešení rovnice* $2 + 2\cos\left[\sqrt{\tilde{\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2}\right] - \pi^2\left(\sqrt{\tilde{\alpha}} - 1\right)^2 = 0$ *a*

$$^1S_1^+ := \left\{(\alpha,\beta) \in {}^1\Omega_1^+ : \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}\right]\right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\left(1 - \cosh\left[\pi\sqrt{-\beta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\right) = 0\right\},$$

$$^2S_1^+ := \left\{(\alpha,\beta) \in {}^2\Omega_1^+ : \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}\right]\right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\left(1 - \cos\left[\pi\sqrt{\beta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\right) = 0\right\}.$$

Fučíkovy větve $S_{4n-2}^+ = {}^1S_{4n-2}^+ \cup {}^2S_{4n-2}^+$, *kde*

$$^1S_{4n-2}^+ := \left\{(\alpha,\beta) \in {}^1\Omega_{4n-2}^+ : \frac{2n}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2n\sqrt{\alpha}}{\beta} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\left[\pi\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{\sqrt{\beta}}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\left[\pi\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{2n-1}{\sqrt{\beta}}\right)\right] = 0\right\},$$

$$^2S_{4n-2}^+ := \left\{(\alpha,\beta) \in {}^2\Omega_{4n-2}^+ : \frac{2n-1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{(2n-1)\sqrt{\alpha}}{\beta} + (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\cos\left[\pi\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\left[\pi\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{2n-1}{\sqrt{\beta}}\right)\right] = 0\right\},$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Ostatní Fučíkovy větve $S_m^\pm$ *mají tvar*

$$S_{4n-1}^+ = \left\{(\alpha,\beta) \in \Omega_{4n-1}^+ : \frac{2n}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2n\sqrt{\alpha}}{\beta} + (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\cos\left[\pi\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\cos\left[\pi\sqrt{\beta}\left(1 - \frac{2n}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] = 0\right\},$$

$$S^+_{4n} = \Big\{(\alpha,\beta)\in\Omega^+_{4n}: \quad \tfrac{2n}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{2n\sqrt{\alpha}}{\beta} + (-1)^n\cdot\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\Big[\pi\sqrt{\alpha}\Big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{n}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big] - \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\Big[\pi\sqrt{\alpha}\Big(1-\tfrac{2n}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big]=0\Big\},$$

$$S^+_{4n+1} = \Big\{(\alpha,\beta)\in\Omega^+_{4n+1}: \quad \tfrac{2n+1}{\sqrt{\alpha}} - \tfrac{(2n+1)\sqrt{\alpha}}{\beta} + (-1)^n\cdot\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\Big[\pi\sqrt{\alpha}\Big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{n}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big] + \tfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\cos\Big[\pi\sqrt{\beta}\Big(1-\tfrac{2n+1}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big]=0\Big\},$$

kde $n\in\mathbb{N}$.

$$S^-_m = \Big\{(\alpha,\beta)\in\Omega^-_n: \quad (\beta,\alpha)\in S^+_m\Big\},$$

kde $m\in\mathbb{N}$.

Důkaz. Netriviální řešení u úlohy (4.2) musí splňovat Dirichletovu okrajovou podmínku $u(0)=0$. Navíc je potřeba, aby netriviální řešení u úlohy (4.2) splňovalo i podmínku, která je v integrálním tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x)\,dx = 0. \tag{4.5}$$

Při konstrukci jednotlivých Fučíkových větví $S^\pm_m$ úlohy (4.2) budeme postupovat podobně jako při konstrukci Fučíkových větví $R^\pm_m$ úlohy (3.1). Pro popis Fučíkových větví $S^\pm_m$ jsou ale nutné další omezující podmínky, které budou obsahovat parametr p. Tyto podmínky rozhodnou o rozložení nulových bodů netriviálních řešení u příslušejících jednotlivým Fučíkovým větvím $S^\pm_m$. Nyní se podívejme na možné rozložení nulových bodů některých netriviálních řešení u, pro která platí $u'(0)>0$. Uvažujme pouze případy, kdy $\alpha>0\wedge\beta>0$.

1. Uvažujme netriviální řešení u, které nemá na intervalu $(0,\pi)$ žádný nulový bod. Potom by $u(x)>0$, a proto by $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x)\,dx>0$ (viz [9], Věta 7.7, str. 129). Integrální podmínka (4.5) by tedy nebyla splněna.
2. Uvažujme netriviální řešení u, které má na intervalu $(0,\pi)$ právě jeden nulový bod x_0. V tomto případě bude nutně $p=\frac{\pi}{2}<x_0$. Pokud by $p=\frac{\pi}{2}\geq x_0$, potom by u bylo záporné na intervalu $\big(\frac{\pi}{2},\pi\big)$, a proto by $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x)\,dx<0$. Integrální podmínka (4.5) by tedy nebyla splněna.
3. Uvažujme netriviální řešení u, které má na intervalu $(0,\pi)$ právě dva nulové body x_0 a x_1, které splňují $0<x_0<x_1<\pi$. V tomto případě bude nutně $p=\frac{\pi}{2}<x_1$. Pokud by $p=\frac{\pi}{2}\geq x_1$, potom by u bylo kladné na intervalu $\big(\frac{\pi}{2},\pi\big)$, a proto by $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x)\,dx>0$ (viz [9], Věta 7.7, str. 129). Integrální podmínka (4.5) by tedy nebyla splněna.

   Pokud $p=\frac{\pi}{2}<x_0<x_1$ nebo pokud $x_0<p=\frac{\pi}{2}<x_1$, potom integrální podmínka může být splněna. Jednotlivá možná rozložení nulových bodů daného netriviálního řešení u nám pomáhají určit větve $T^\pm_m$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.4). Větve $P^\pm_m$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.3) od sebe oddělují Fučíkovy větve $S^\pm_m$, kterým odpovídají netriviální řešení u s různým počtem nulových bodů na intervalu $(0,\pi)$. Fučíkova větev S^+_2 bude ležet mezi větvemi P^+_1 a P^+_2. A zároveň ji bude protínat Fučíkova větev $T^+_0=\{(4,\beta):\beta\in\mathbb{R}\}$. Fučíkova větev S^+_2 bude tedy zřejmě určena sjednocením dvou částí, z nichž jedna bude popsána pro $\alpha<4$ a druhá bude popsána pro $\alpha\geq 4$. Označme tedy ${}^1S^+_2 := S^+_2\cap\big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\ \alpha<4\big\}$, ${}^2S^+_2 := S^+_2\cap\big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\ \alpha\geq 4\big\}$. Potom zřejmě $S^+_2 = {}^1S^+_2\cup{}^2S^+_2$. Navíc pro $(\alpha,\beta)\in{}^1S^+_2$ platí

$$\begin{aligned}\alpha &< 4,\\ \sqrt{\alpha} &< 2,\end{aligned}$$

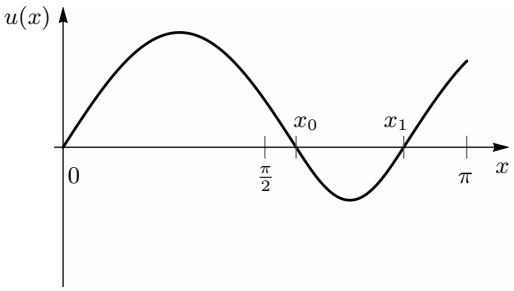
tj.

$$p = \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = x_0.$$

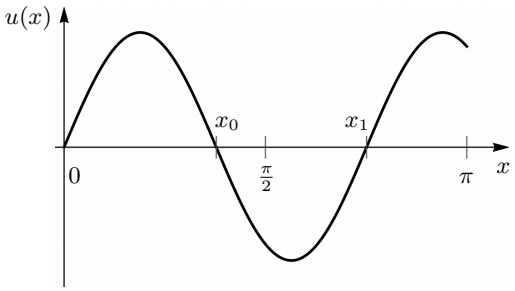
Dále pro $(\alpha, \beta) \in {}^2S_2^+$ máme

$$p = \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = x_0. \tag{4.6}$$

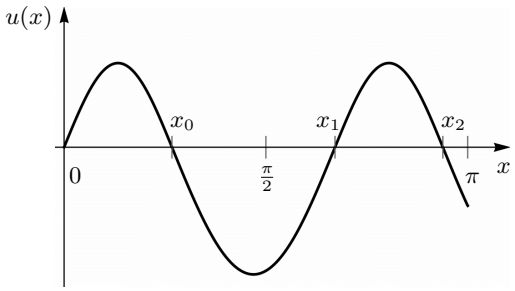
Netriviální řešení u úlohy (4.2) příslušná Fučíkovým větvím ${}^1S_2^+$ a ${}^2S_2^+$ jsou znázorněna na obrázcích 4.4 a 4.5.



Obrázek 4.4: Netriviální řešení u úlohy (4.2) příslušné Fučíkově větvi ${}^1S_2^+$.



Obrázek 4.5: Netriviální řešení u úlohy (4.2) příslušné Fučíkově větvi ${}^2S_2^+$.



Obrázek 4.6: Netriviální řešení u úlohy (4.2) příslušné Fučíkově větvi S_3^+.

4. Nyní uvažujme netriviální řešení u, které přísluší Fučíkově větvi S_3^+. Toto řešení má na intervalu $(0, \pi)$ právě tři nulové body x_0, x_1 a x_2, které splňují $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \pi$. Potom zřejmě pro $(\alpha, \beta) \in S_3^+$ platí

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \geq \pi \tag{4.7}$$

a zároveň

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} < \pi. \tag{4.8}$$

Pokud obě strany nerovnosti (4.7) vynásobíme číslem $(1/2)$, dostaneme

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \geq \frac{\pi}{2}. \tag{4.9}$$

Protože $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = x_1$ a $\frac{\pi}{2} = p$, můžeme nerovnost (4.9) přepsat na tvar

$$p \leq x_1.$$

Vraťme se k nerovnosti (4.8). Dosadíme-li do ní za výraz $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$ z nerovnosti (4.9), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} &< \pi, \\ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Protože $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = x_0$ a $\frac{\pi}{2} = p$, můžeme nerovnost (4.10) přepsat na tvar

$$p > x_0.$$

Zjistili jsme tedy, že pokud $(\alpha, \beta) \in S_3^+$, potom

$$x_0 < p \leq x_1,$$

což značí

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} < \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}},$$

tj.

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.11}$$

Jak jsme již na začátku tohoto bodu zmínili

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} < \pi \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}},$$

tj.

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} < 1 \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.12}$$

Nerovnosti (4.11) a (4.12) určují region Ω_3^+, na kterém je Fučíkova větev S_3^+ popisována. Netriviální řešení u úlohy (4.2) příslušné Fučíkově větvi S_3^+ je znázorněno na obrázku 4.6.

Nyní si ukážeme konstrukci Fučíkovy větve ${}^1S_2^+$, které odpovídá netriviální řešení u úlohy (4.2) s právě dvěma nulovými body na intervalu $(0, \pi)$, pro které platí $p < x_0 < x_1$. Předpokládejme, že dvojice $(\alpha, \beta) \in {}^1S_2^+$ a že $u'(0) > 0$. Je zřejmé, že v tomto případě můžeme integrální podmínku (4.5) rozepsat do tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x_0} v_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} w(x)\,dx + \int_{x_1}^{\pi} v_2(x)\,dx = 0, \tag{4.13}$$

kde $v_1(x) = A \sin \sqrt{\alpha} x$ $(A > 0)$ je předpokládaný tvar netriviálního řešení u na intervalu $(0, x_0)$,

$$w(x) = B \sin \sqrt{\beta}(x - x_0),\ B < 0, \tag{4.14}$$

je předpokládaný tvar netriviálního řešení u na intervalu (x_0, x_1) a

$$v_2(x) = C \sin \sqrt{\alpha}(x - x_1),\ C > 0, \tag{4.15}$$

je předpokládaný tvar netriviálního řešení u na intervalu (x_1, π). (Tyto tvary známe již z důkazu lemmatu 3.1.) Rovnici (4.13) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x_0} A \sin \sqrt{\alpha} x\,dx + \int_{x_0}^{x_1} B \sin \sqrt{\beta}(x - x_0)\,dx + \int_{x_1}^{\pi} C \sin \sqrt{\alpha}(x - x_1)\,dx = 0. \tag{4.16}$$

Do rovnice (4.16) dosadíme za nulové body x_0 a x_1 ze vztahů (viz důkaz lemmatu 2.1)

$$x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \tag{4.17}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.18}$$

Rovnice (4.16) bude potom ve tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} A \sin\sqrt{\alpha}x\,dx + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} B \sin\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})\,dx + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}}^{\pi} C \sin\sqrt{\alpha}(x - \left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right))\,dx = 0. \tag{4.19}$$

Po provedení integrace v (4.19) dostáváme

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\left(\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2\cdot\frac{B}{\sqrt{\beta}} + \frac{C}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\sqrt{\alpha}\left(\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right)\right) = 0. \tag{4.20}$$

Hodnotu konstanty $A > 0$ si můžeme zvolit. Protože ale požadujeme hladkost celého řešení, je potřeba konstantu B určit. Pokud zvolíme $A = 1$, bude pro konstantu B platit vztah (viz důkaz lemmatu 3.1)

$$B = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.21}$$

Konstantu C určíme ze vztahu

$$w'(x_1) = {v_2}'(x_1), \tag{4.22}$$

neboť požadujeme hladkost řešení i ve druhém bodu napojení x_1. Dosadíme-li do rovnice (4.22) za w ze vztahu (4.14) a za v_2 ze vztahu (4.15), dostaneme

$$B\sqrt{\beta}\cos\sqrt{\beta}(x_1 - x_0) = C\sqrt{\alpha}. \tag{4.23}$$

Nyní dosaďme do rovnice (4.23) za B ze vztahu (4.21), za x_1 ze vztahu (4.18) a za x_0 ze vztahu (4.17). Dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\beta}\cos\sqrt{\beta}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\right) &= C\sqrt{\alpha}, \\ -\sqrt{\alpha}\cos\pi &= C\sqrt{\alpha}, \\ \sqrt{\alpha} &= C\sqrt{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Po přenásobení rovnice (4.24) výrazem $1/\sqrt{\alpha}$ dostáváme

$$C = 1. \tag{4.25}$$

Vraťme se k rovnici (4.20). Dosadíme-li do ní $C = 1$ (viz rovnost (4.25)), $A = 1$ (zvoleno) a za B ze vztahu (4.21), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\left(\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 + \cos\sqrt{\alpha}\left(\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right)\right) &= 0, \\ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos\sqrt{\alpha}\left(\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Protože předpokládáme, že netriviální řešení u příslušné Fučíkově větvi ${}^1S_2^+$ má právě dva nulové body, je nutné, aby byly splněny následující podmínky (viz důkaz lemmatu 3.1)

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} < \pi \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.27}$$

Zároveň jsme při rozepisování integrální podmínky (4.5) předpokládali, že bude platit $p < x_0$, tj.

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}. \tag{4.28}$$

Vztah (4.26) společně s nerovnostmi (4.27) a (4.28) popisují Fučíkovu větev ${}^1S_2^+$. Ostatní Fučíkovy větve bychom konstruovali analogicky.

Nyní se blíže podívejme na případ, kdy $(\alpha, \beta) \in S_1^+$ pro $\beta = 0$. Netriviální řešení u má v tomto případě právě jeden nulový bod x_0 na intervalu $(0, \pi)$. Na intervalu $(0, x_0)$ bude netriviální řešení u ve tvaru

$$v(x) = A \sin \sqrt{\alpha} x, \ A > 0, \tag{4.29}$$

a na intervalu (x_0, π) bude ve tvaru

$$w(x) = B(x - x_0), \ B < 0, \tag{4.30}$$

(viz důkaz lemmatu 3.1). Opět je potřeba, aby řešení u splňovalo integrální podmínku (4.5). Můžeme ji rozepsat do tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x_0} v(x)\,dx + \int_{x_0}^{\pi} w(x)\,dx = 0. \tag{4.31}$$

Pokud do rovnice (4.31) dosadíme za v ze vztahu (4.29) a za w ze vztahu (4.30), dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x_0} A \sin \sqrt{\alpha} x\,dx + \int_{x_0}^{\pi} B(x - x_0)\,dx = 0. \tag{4.32}$$

Po dosazení za x_0 ze vztahu (4.17) bude rovnice (4.32) ve tvaru

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} A \sin \sqrt{\alpha} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^{\pi} B(x - \frac{\pi}{\alpha})\,dx = 0. \tag{4.33}$$

Po provedení integrace v (4.33) dostáváme

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} + \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right) + \frac{B\pi^2}{2} - \frac{B\pi^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{B\pi^2}{2\alpha} = 0. \tag{4.34}$$

Konstantu $A > 0$ zvolme $A = 1$. Konstantu B pak určíme ze vztahu

$$v'(x_0) = w'(x_0), \tag{4.35}$$

protože požadujeme hladkost celého řešení. Dosadíme-li do rovnice (4.35) za v ze vztahu (4.29) a za w ze vztahu (4.30), dostaneme

$$A\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} x_0 = B. \tag{4.36}$$

Nyní dosaďme do rovnice (4.36) $A = 1$ a za x_0 ze vztahu (4.17), obdržíme

$$B = -\sqrt{\alpha}. \tag{4.37}$$

Vraťme se k rovnici (4.34) a dosaďme do ní $A = 1$ a za B ze vztahu (4.37), dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{\alpha}\pi^2}{2} + \frac{\sqrt{\alpha}\pi^2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\sqrt{\alpha}\pi^2}{2\alpha} = 0. \tag{4.38}$$

Po přenásobení rovnice (4.38) výrazem $2\sqrt{\alpha}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2+2\cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)-\alpha\pi^2-\pi^2+2\sqrt{\alpha}\pi^2 &= 0, \\ 2+2\cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)-\pi^2\left(\alpha+1-2\sqrt{\alpha}\right) &= 0, \\ 2+2\cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)-\pi^2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Nulový bod x_0 netriviálního řešení u leží v intervalu $(0,\pi)$, splňuje tedy podmínku

$$x_0 < \pi. \tag{4.40}$$

Pokud dosadíme do podmínky (4.40) za x_0 ze vztahu (4.17), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} &< \pi, \\ \sqrt{\alpha} &> 1, \\ \alpha &> 1. \end{aligned}$$

Definujme funkci f pomocí levé strany rovnice (4.39)

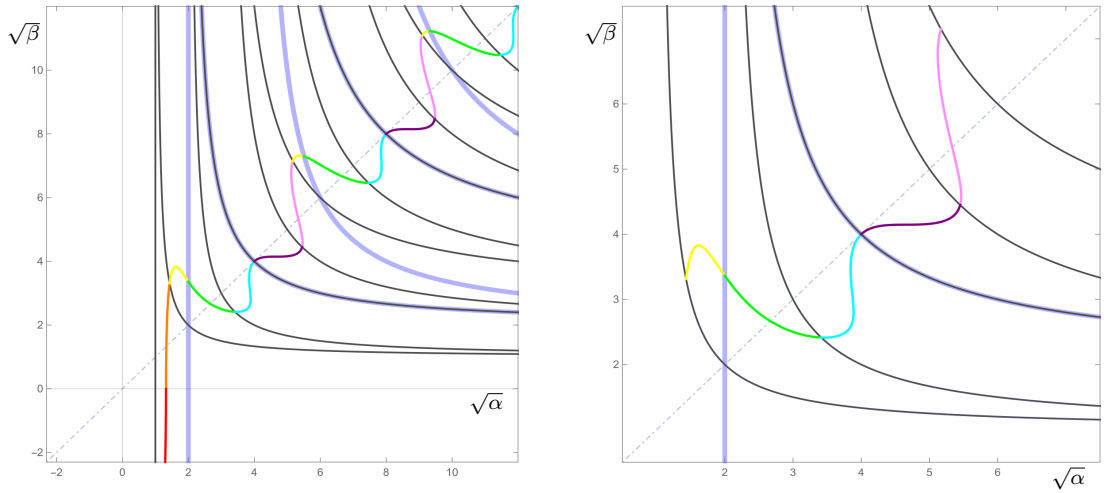
$$f(\alpha) := 2+2\cos\left(\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)-\pi^2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)^2, \quad D(f) := \langle 1;+\infty\rangle.$$

Funkce f je spojitá na svém definičním oboru. Navíc

$$f(1)=2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(\alpha) = -\infty,$$

tj. bude existovat alespoň jeden kořen $\tilde{\alpha}$ rovnice $f(\alpha)=0$. Přibližná hodnota $\tilde{\alpha}$ je $\tilde{\alpha} \doteq 1.75$. Bodem napojení Fučíkových větví ${}^1S_1^+$ a ${}^2S_1^+$ bude tedy bod $(\tilde{\alpha},0)$. ■

Struktura Fučíkova spektra pro úlohu (4.2) je znázorněna na níže uvedeném obrázku 4.8.



Obrázek 4.7: Na levém obrázku je část Fučíkova spektra pro úlohu (4.2), která je určena sjednocením Fučíkových větví S_m^+. A na pravém obrázku je znázorněna množina Ψ_1^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.2).

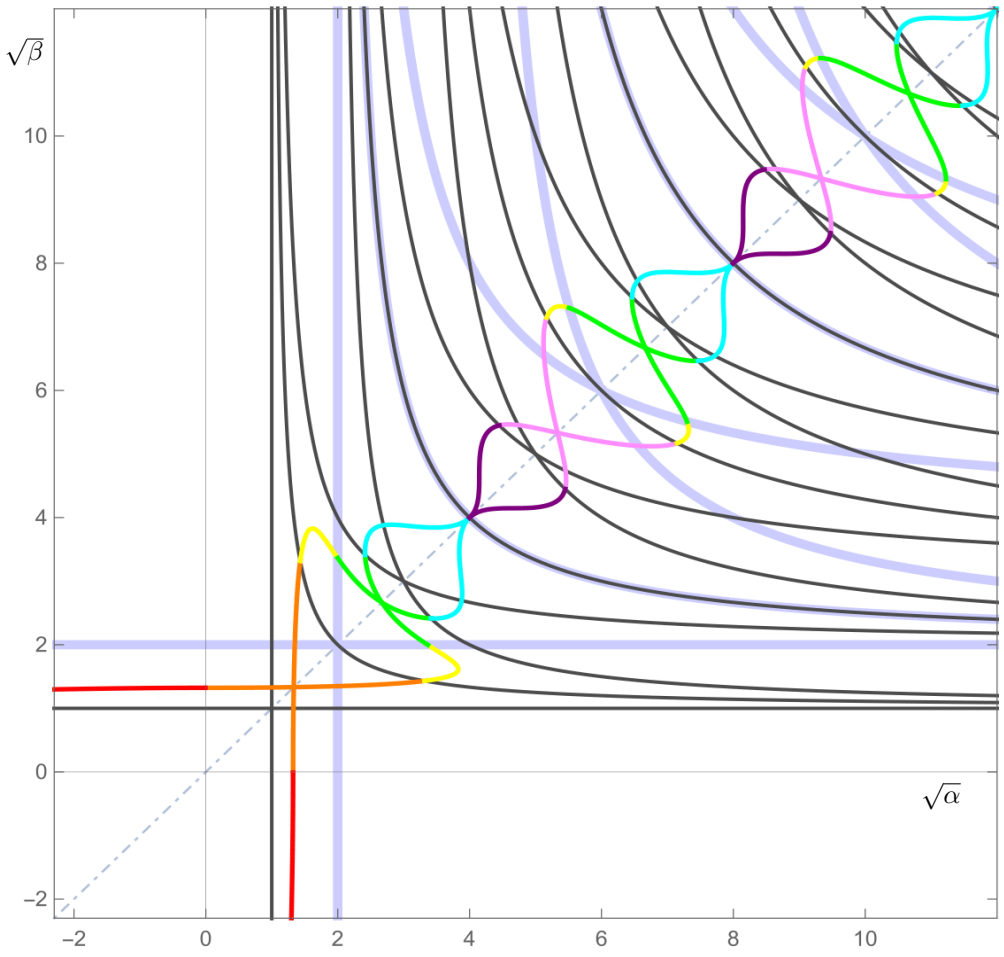
Poznámka 4.3. Na závěr této podkapitoly si všimněme, že Fučíkovo spektrum úlohy (4.2) lze také vyjádřit jako

$$\Sigma = S_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Psi_n \right),$$

$$\text{kde} \quad S_1 := S_1^+ \cup S_2^+ \quad \text{a} \quad \Psi_n := {\Psi_n}^+ \cup {\Psi_n}^-,$$
$$\Psi_n^+ := S_{4n-2}^+ \cup S_{4n-1}^+ \cup S_{4n}^+ \cup S_{4n+1}^+,$$
$$\Psi_n^- := S_{4n-2}^- \cup S_{4n-1}^- \cup S_{4n}^- \cup S_{4n+1}^-.$$

Množina Ψ_{n+1} tvoří jistý blok Fučíkových větví, který je určitým způsobem blízký svému předchůdci Ψ_n.

Obraz množiny Ψ_1^+ je zakreslen na výše uvedeném obrázku 4.7.



Obrázek 4.8: Fučíkovo spektrum Σ pro úlohu (4.2). Jednotlivé větve $S_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.2) jsou odděleny větvemi $P_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.3) (tmavě šedé křivky) a větvemi $T_m^{\pm}$ Fučíkova spektra pro úlohu (4.4) (světle modré křivky).

4.2 Popis Fučíkova spektra pro $0 < p < \pi$

Na začátek této podkapitoly definujme množinu

$$\Psi_n^+ := S_{rn-c}^+ \cup S_{rn-c+1}^+ \cup ... \cup S_{r(n+1)-c-1}^+, \tag{4.41}$$

kde $n, r \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{Z}$. Množinu Ψ_n^+ budeme nazývat opakujícím se blokem Fučíkova spektra úlohy (4.1). Parametr r odpovídá počtu po sobě jdoucích Fučíkových větví S_m^+, které tvoří opakující se blok Fučíkova spektra úlohy (4.1). Parametr c odpovídá určitému posunu, který určí, kterou větví opakující se blok Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) začne. Je potřeba, aby konstanta c splňovala podmínku $c \leq r - 1$, která zajistí, že netriviální řešení u příslušná Fučíkovým větvím S_m^+, budou mít alespoň jeden nulový bod na intervalu $(0, \pi)$.

Poznámka 4.4. Pro hodnotu parametru $p = \frac{\pi}{2}$, je hodnota parametru $r = 4$ a hodnota parametru $c = 2$.

Nyní si popíšeme algoritmus, který nám vypočítá počet všech předpisů pro Fučíkovy větve S_m^+, které tvoří opakující se blok Fučíkova spektra pro úlohu (4.1). Označme tento počet písmenem s.

Příklad. Pro úlohu (4.2) bude platit $s = 5$, protože Fučíkovy větve S_{4n-1}^+, S_{4n}^+, S_{4n+1}^+ jsou popsány jedním předpisem a pro popis Fučíkovy větve S_{4n-2}^+ potřebujeme dva předpisy.

Přejděme k jednotlivým krokům algoritmu.

1. Jediným vstupním parametrem je hodnota parametru p. (Parametrem p rozumíme dolní mez integrálu, který tvoří integrální podmínku úlohy (4.1).) Hodnotu parametru p volíme jako libovolný k-násobek π, kde $k \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
2. Nejprve si vytvoříme posloupnosti vlastních čísel Dirichletových okrajových úloh

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.42}$$

a

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in (0, p), \\ u(0) = u(p) = 0, \end{cases} \tag{4.43}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr. Posloupnost vlastních čísel úlohy (4.42) označme jako (μ_i), posloupnost vlastních čísel úlohy (4.43) označme jako (ν_j). Z lemmatu 1.2 víme, že $\mu_i = i^2$, $i \in \mathbb{N}$ a $\nu_j = \left(\frac{j\pi}{p}\right)^2$, $j \in \mathbb{N}$.

Poznámka 4.5. Uvažujme úlohy

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.44}$$

a

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, p), \\ u(0) = u(p) = 0, \end{cases} \tag{4.45}$$

kde $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$ a $p \in (0, \pi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.44) procházejí na diagonále body (μ_i, μ_i), $i \in \mathbb{N}$, jejichž souřadnice jsou dány vlastními čísly úlohy (4.42). Stejně tak větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.45) procházejí na diagonále body (ν_j, ν_j), $j \in \mathbb{N}$, jejichž souřadnice jsou dány vlastními čísly úlohy (4.43). Díky vlastním číslům úloh (4.42) a (4.43) můžeme v blízkosti diagonály $\alpha = \beta$ sledovat vzájemnou polohu větví Fučíkových spekter úloh (4.44) a (4.45).

3. Hledáme i_1 a j_1, což jsou indexy nejmenších vlastních čísel, pro která platí $\mu_{i_1} = \nu_{j_1}$.

   Poznámka 4.6. Nyní je zřejmé, proč hodnotu parametru p volíme jako libovolný k-násobek π. Chceme-li najít vlastní čísla úloh (4.42) a (4.43), pro která platí, $\mu_i = \nu_j$, je potřeba, aby $\nu_j \in \mathbb{Q}$.

4. Hledáme i_2 a j_2, což jsou indexy druhých nejmenších vlastních čísel, pro která platí $\mu_{i_2} = \nu_{j_2}$.

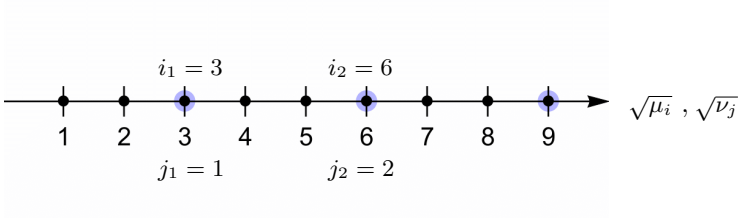
   Poznámka 4.7. Body (μ_{i_1}, μ_{i_1}) a (ν_{j_1}, ν_{j_1}) jsou totožné. Větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45), které těmito body procházejí, mají společný průsečík a mohou splývat. Stejně tak body (μ_{i_2}, μ_{i_2}) a (ν_{j_2}, ν_{j_2}) jsou totožné. A větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45), které těmito body procházejí, mají společný průsečík a mohou splývat.

5. Platí $(i_1 \ mod\ 2) = (i_2 \ mod\ 2) \wedge (j_1 \ mod\ 2) = (j_2 \ mod\ 2)$?

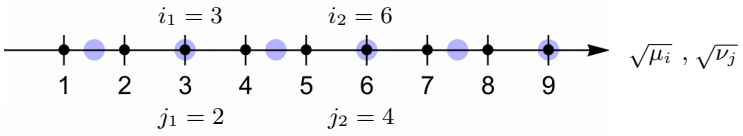
   (a) Pokud ano, vlastní čísla s indexy i_2, j_2 uzavírají opakující se blok větví Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) a můžeme pokračovat bodem 6.

   (b) Pokud ne, hledáme i_3 a j_3, což jsou indexy třetích nejmenších vlastních čísel, pro která platí $\mu_{i_3} = \nu_{j_3}$. Budeme předpokládat, že vlastní čísla s indexy i_3, j_3 již uzavírají opakující se blok větví Fučíkova spektra pro úlohu (4.1). Pokračujeme bodem 6.

   Poznámka 4.8. Z kapitoly 2 už víme, že body (μ_i, μ_i), pro které platí $i = 1, 3, 5, ...$, procházejí dvě větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.44). Body (μ_i, μ_i), pro které platí $i = 2, 4, 6, ...$, prochází jedna větev Fučíkova spektra pro úlohu (4.44). Stejně tak body (ν_j, ν_j), pro které platí $j = 1, 3, 5, ...$, procházejí dvě větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.45). A body (ν_j, ν_j), pro které platí $j = 2, 4, 6, ...$, prochází jedna větev Fučíkova spektra pro úlohu (4.45). Proto nás zajímá, zda mají vlastní čísla μ_{i_1}, μ_{i_2}, ν_{j_1}, ν_{j_2} sudé či liché indexy. Vzájemná poloha vlastních čísel úloh (4.42) a (4.43) je znázorněna na obrázcích 4.9 a 4.10.



Obrázek 4.9: Posloupnost (μ_i) je zobrazena pomocí černých bodů, posloupnost (ν_j) je zobrazena pomocí světle modrých bodů. (V úloze (4.43) uvažujeme $p = \frac{\pi}{3}$.)



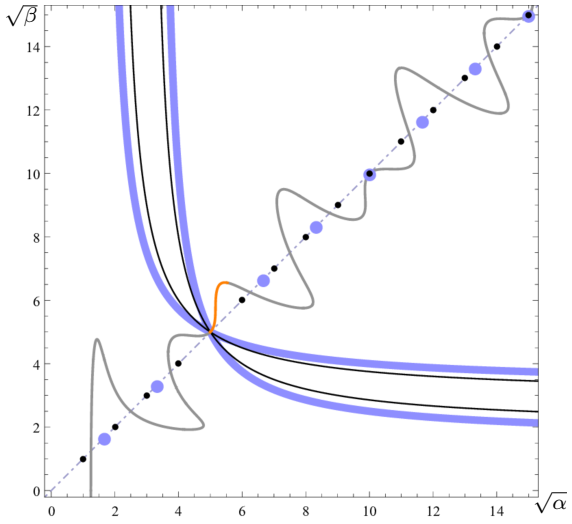
Obrázek 4.10: Posloupnost (μ_i) je zobrazena pomocí černých bodů, posloupnost (ν_j) je zobrazena pomocí světle modrých bodů. (V úloze (4.43) uvažujeme $p = \frac{2\pi}{3}$.)

6. Platí $(i_1 \ mod\ 2) = (j_1 \ mod\ 2)$?

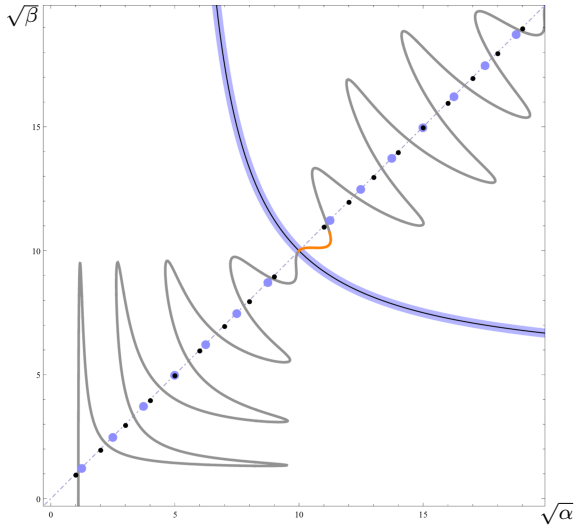
   (a) Pokud ano, znamená to, že bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ prochází čtyři (dvě) větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45). Situace, kdy bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$

prochází čtyři Fučíkovy větve, je zobrazena na obrázku 4.11(a). Mezi bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ a bodem $(\mu_{i_1+1}, \mu_{i_1+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_1+1}, \nu_{j_1+1})$) je větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která lze popsat jedním předpisem.

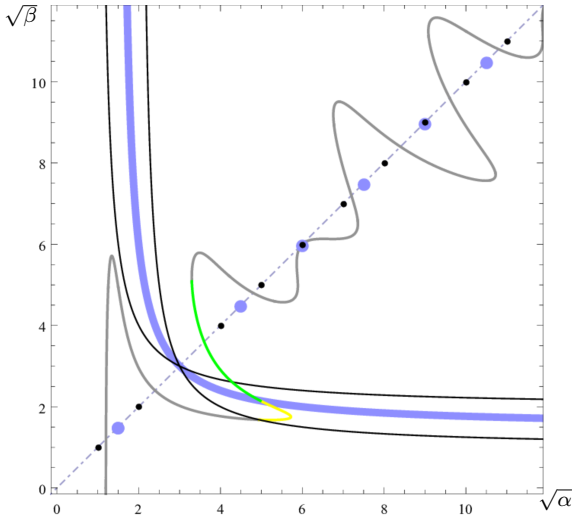
(b) Pokud ne, znamená to, že bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ prochází tři větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45). Tyto situace jsou vidět na obrázku 4.11(c) a na obrázku 4.11(d). Mezi bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ a bodem $(\mu_{i_1+1}, \mu_{i_1+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_1+1}, \nu_{j_1+1})$) je větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která je určena sjednocením dvou částí (platí $S_m^+ = {}^1S_m^+ \cup {}^2S_m^+$).



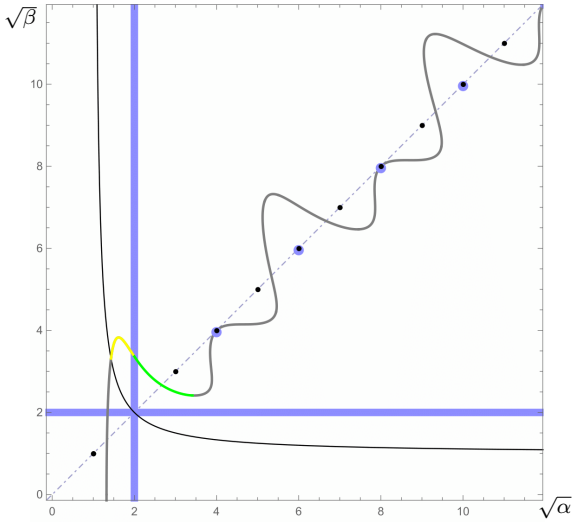
(a) Část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1). $\left(p = \frac{3\pi}{5}\right)$



(b) Část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1). $\left(p = \frac{4\pi}{5}\right)$



(c) Část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) $\left(p = \frac{2\pi}{3}\right)$



(d) Část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) $\left(p = \frac{\pi}{2}\right)$

Obrázek 4.11: Šedivá křivka zobrazuje část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1). Barevně vyznačené křivky (oranžová, žlutá a zelená) ukazují, z kolika částí je složena větev Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která leží mezi bodem $(\mu_i, \mu_i) = (\nu_j, \nu_j)$ a bodem (μ_{i+1}, μ_{i+1}). Černé křivky jsou větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.44) a modré křivky (přímky) jsou větve Fučíkova spektra pro úlohu (4.45). Posloupnost vlastních čísel úlohy (4.42) je zobrazena pomocí černých bodů, posloupnost vlastních čísel úlohy (4.43) je zobrazena pomocí modrých bodů.

7. Platí $(i_1 \ mod\ 2) = (i_2 \ mod\ 2) \wedge (j_1 \ mod\ 2) = (j_2 \ mod\ 2)$?
   (a) Pokud ano, pokračujme bodem 8.
   (b) Pokud ne, následuje otázka: Platí $(i_2 \ mod\ 2) = (j_2 \ mod\ 2)$?
      i. Pokud ano, znamená to, že bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ prochází čtyři (dvě) větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45). Situace, kdy bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ prochází dvě Fučíkovy větve, je zobrazena na obrázku 4.11(b). Mezi bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ a bodem $(\mu_{i_2+1}, \mu_{i_2+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_2+1}, \nu_{j_2+1})$) je větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která lze popsat jedním předpisem.
      ii. Pokud ne, znamená to, že bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ prochází tři větve Fučíkových spekter pro úlohy (4.44) a (4.45). Mezi bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ a bodem $(\mu_{i_2+1}, \mu_{i_2+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_2+1}, \nu_{j_2+1})$) je větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která je určena sjednocením dvou částí (platí $S_m^+ = {}^1S_m^+ \cup {}^2S_m^+$).
8. Platí $(i_1 \ mod\ 2) = (i_2 \ mod\ 2) \wedge (j_1 \ mod\ 2) = (j_2 \ mod\ 2)$?
   (a) Pokud ano, $s = (i_2 - i_1 - 1) + (j_2 - j_1 - 1)$ + počet částí, ze kterých je složena větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která leží mezi bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ a bodem $(\mu_{i_1+1}, \mu_{i_1+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_1+1}, \nu_{j_1+1})$) (viz bod 6).
   (b) Pokud ne, $s = (i_3 - i_1 - 2) + (j_3 - j_1 - 2)$ + počet částí, ze kterých je složena větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která leží mezi bodem $(\mu_{i_1}, \mu_{i_1}) = (\nu_{j_1}, \nu_{j_1})$ a bodem $(\mu_{i_1+1}, \mu_{i_1+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_1+1}, \nu_{j_1+1})$) (viz bod 6) + počet částí, ze kterých je složena větev S_m^+ Fučíkova spektra pro úlohu (4.1), která leží mezi bodem $(\mu_{i_2}, \mu_{i_2}) = (\nu_{j_2}, \nu_{j_2})$ a bodem $(\mu_{i_2+1}, \mu_{i_2+1})$ (případně bodem $(\nu_{j_2+1}, \nu_{j_2+1})$) (viz bod 7(b)).

4.3 Numerická aproximace Fučíkova spektra

Popišme si algoritmus, který numericky sestrojí libovolnou část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) v obdélníku $D := \langle \alpha_{min}, \alpha_{max} \rangle \times \langle \beta_{min}, \beta_{max} \rangle$, kde $\alpha_{min},\ \alpha_{max}, \beta_{min}, \beta_{max} \in \mathbb{R}$. Úlohu (4.1) převedeme na úlohu

$$\begin{cases} u''(x) + \hat{\alpha} u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0,\ \int\limits_p^\pi u(x)\, dx = 0, \end{cases} \tag{4.46}$$

kde $\hat{\alpha}$ je pevně zvolená hodnota parametru α z intervalu $\langle \alpha_{min}, \alpha_{max} \rangle$. Teď tedy hledáme takové hodnoty parametru β tvořící dvojice $(\hat{\alpha}, \beta) \in D$, pro které má úloha (4.46) netriviální řešení u. Úlohu (4.46) převedeme na počáteční úlohu

$$\begin{cases} u''(x) + \hat{\alpha} u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \tag{4.47}$$

Poznámka 4.9. Místo podmínky $u'(0) = 1$ bychom mohli zvolit i jakoukoliv jinou podmínku ve tvaru $u'(0) = l$, kde $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pokud totiž funkce u je netriviálním řešením úlohy (4.1), je i funkce u přenásobená libovolnou kladnou konstantou netriviálním řešením této úlohy. Pokud uvažujeme počáteční podmínku ve tvaru $u'(0) = z$, kde $z \in \mathbb{R}^-$, sestrojí nám tento algoritmus část Fučíkova spektra, které je určeno sjednocením větví S_m^-.

Stále hledáme netriviální řešení úlohy (4.1). Proto netriviální řešení u úlohy (4.47) musí splňovat i integrální podmínku

$$\int\limits_p^\pi u(x)\, dx = 0.$$

A proto hledáme nulové body funkce $F : \beta \to \int_p^\pi u(x)\,dx$. Tj., řešíme rovnici

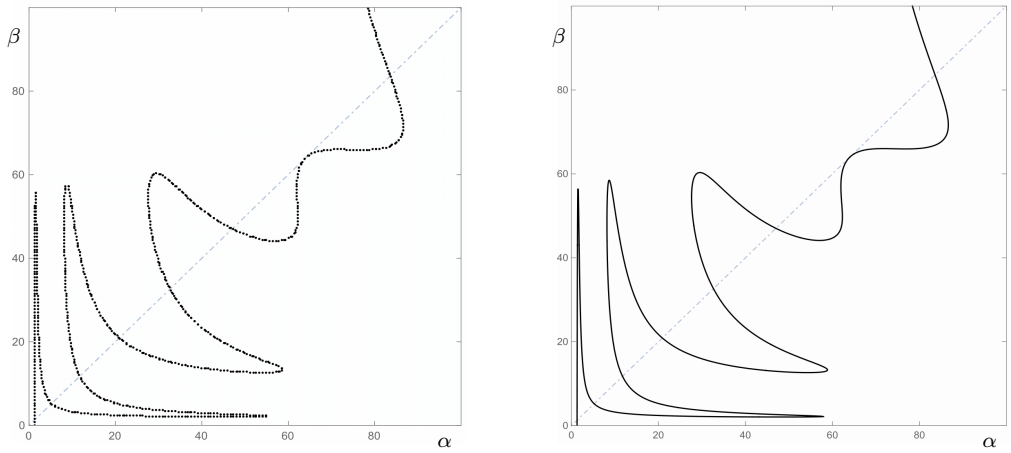
$$F(\beta) = 0. \tag{4.48}$$

Nyní si popišme samotný algoritmus.

1. Požadujeme tato vstupní data: $\hat{\alpha},\ \hat{\alpha} \in \langle \alpha_{min}, \alpha_{max} \rangle$, uspořádaný seznam hodnot parametru $\beta_k\ (k = 1, ..., r,\ r \in \mathbb{N})\,,\ \beta_k \in \langle \beta_{min}, \beta_{max} \rangle$, hodnotu parametru $p,\ p \in (0, \pi)$ a požadovanou přesnost $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$.
2. Pro každý bod $(\hat{\alpha}, \beta_k)$ najdeme funkci u, která je netriviálním řešením počáteční úlohy (4.47) a vypočteme $F(\beta_k)$.
3. Pokud $F(\beta_k) \cdot F(\beta_{k+1}) < 0$, potom $I = \langle \beta_k, \beta_{k+1} \rangle$ bude počátečním intervalem pro metodu bisekce.
4. Pomocí metody bisekce nalezneme β_0, což je aproximace kořene rovnice (4.48) s chybou menší než ε.
5. Bod $(\hat{\alpha}, \beta_0)$ je dobrou aproximací bodu Fučíkova spektra, a vykreslíme ho do grafu.

Nyní jsme si vykreslili část Fučíkova spektra ležící na přímce $\alpha = \hat{\alpha}$. Postupně budeme volit další hodnoty parametru α z intervalu $\langle \alpha_{min}, \alpha_{max} \rangle$, pro které provedeme výše popsaný algoritmus a to do té doby, dokud nám program nevygeneruje Fučíkovo spektrum v požadovaném rozsahu $\langle \alpha_{min}, \alpha_{max} \rangle \times \langle \beta_{min}, \beta_{max} \rangle$.

Abychom našli co nejvíce bodů Fučíkova spektra, celý algoritmus zopakujeme ještě jednou. Jen v úloze (4.46) nebude již parametr α pevně zvolen. Namísto toho si pevně zvolíme hodnotu parametru β z intervalu $\langle \beta_{min}, \beta_{max} \rangle$. Označme tuto hodnotu jako $\hat{\beta}$. Nakonec tedy budeme postupně vykreslovat body Fučíkova spektra ležící na přímkách $\beta = \hat{\beta}$. Obrázek 4.12 porovnává Fučíkovo spektrum sestrojené pomocí výše popsaného algoritmu s Fučíkovým spektrem sestrojeným pomocí programu Mathematica a příkazu ContourPlot.



Obrázek 4.12: Část Fučíkova spektra pro úlohu (4.1) pro hodnotu parametru $p = \frac{3\pi}{4}$. Vlevo sestrojené numericky, vpravo vytvořené pomocí programu Mathematica a příkazu ContourPlot.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo prozkoumat po částech lineární úlohu s nelokální okrajovou podmínkou

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \int\limits_0^\pi u(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{A}$$

a po částech lineární úlohu se zobecněnou nelokální okrajovou podmínkou

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \int\limits_p^\pi u(x)\,dx = 0, & 0 \le p < \pi. \end{cases} \tag{B}$$

Hledali jsme všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ takové, pro které mají úlohy (A) a (B) netriviální řešení. Motivací ke stanovení tohoto cíle byl článek [3]. Autorka v něm uvádí popis Fučíkova spektra pro úlohu (A). My jsme v této práci uvažovali úlohu (B), která je pro volbu parametru $p = 0$ úlohou (A).

V kapitole 1 jsme zkoumali lineární úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Odvodili jsme tvar vlastních čísel a jim odpovídajících vlastních funkcí. Na závěr této kapitoly jsme ukázali, že pokud známe vlastní čísla a jim odpovídající vlastní funkce na určitém intervalu, potom tvar vlastních čísel a jim odpovídajících vlastních funkcí na libovolném jiném intervalu získáme jednoduchou transformací.

V kapitole 2 jsme se zabývali po částech lineární úlohou s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Detailně jsme popsali, jak jsme získali analytický popis Fučíkova spektra pro tuto úlohu. Také jsme ukázali, že větve Fučíkova spektra této úlohy jsou symetrické dle diagonály $\alpha = \beta$.

V kapitole 3 jsme uvažovali úlohu (A). Popis Fučíkova spektra pro tuto úlohu v prvním kvadrantu roviny $\mathbb{R}^2$ je uveden v článku [3]. V této práci je uveden popis Fučíkova spektra na celé rovině $\mathbb{R}^2$. Celý postup analytického odvození Fučíkova spektra pro úlohu (A) jsme podrobně rozebrali.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu úlohy (B). V první části jsme zformulovali větu (4.1), která popisuje Fučíkovo spektrum pro úlohu (B) pro hodnotu parametru $p = \frac{\pi}{2}$. V druhé části jsme uvedli algoritmus, který vypočítá počet parametrických analytických předpisů pro Fučíkovy větve, které tvoří opakující se blok Fučíkova spektra pro úlohu (B). Tento počet ilustruje komplikovanost úlohy (B) pro různé hodnoty parametru p. V poslední části jsme uvedli algoritmus pro numerickou konstrukci Fučíkova spektra pro úlohu (B). Všechny výsledky v této kapitole jsou původní.

Literatura

[1] Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).

[2] Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).

[3] Sergejeva, N.: On nonlinear spectra for some nonlocal boundary value problems. Math. Model. Anal. 13 (1) (2008) 87–97.

[4] Štikonas, A.: The Sturm-Liouville problem with a nonlocal boundary condition. Lith. Math. J. 47, No. 3, 336-351 (2007); reprint from Liet. Mat. Rink. 47, No. 3, 410-428 (2007).

[5] Čiupaila, R.; Jesevičiūtė, Ž.; Sapagovas, M.: On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition. Nonlinear Anal., Model. Control 9, No. 2, 109-116 (2004).

[6] Pečiulytė, S.; Štikonienė, O.; Štikonas, A.: Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. Math. Model. Anal. 10, No. 4, 377-392 (2005).

[7] Pečiulytė, S.; Štikonas, A.: Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two-point boundary conditions. Nonlinear Anal., Model. Control 11, No. 1, 47-78 (2006).

[8] Nagy, J.: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, MVŠT, SNTL Praha, 120s. (1983).

[9] Drábek P., J.; Míka, S.: Matematická analýza I, ZČU Plzeň, 158s. (1999).