

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň, 2016

Antonín Dach

This page intentionally left blank.

Prohlášení

Tímto, já Antonín DACH, předkládám k posouzení a obhajobě bakalářskou práci, „Návrh, modelování a řízení mobilního robotu balancujícího na míči“, zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

- Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

Podpis:

V Plzni dne:

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Abstrakt

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

Bakalář kybernetiky

Návrh, modelování a řízení mobilního robota balancujícího na míči

Antonín DACH

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou řízení robota balancujícího na míči. Jedním z hlavních cílů je sestavení podrobného matematického modelu, který je ověřen simulací v programovém prostředí MATLAB/Simulink. Dalším cílem je sestavit optimální řízení, kde je nutné zvolit vhodnou metodu a otestovat ji na matematickém modelu. Dále je nutné vytvořit konkrétní algoritmus řízení. Funkčnost a vlastnosti navrženého řízení a matematického modelu jsou ověřeny simulací.

Klíčová slova: zpětnovazební algoritmus, matematický model, návrh robota, ballbot

This bachelor thesis deals with the problem of controlling ball balancing robot. One of the main goals is to create detailed mathematical model, which is then verified by simulation in numerical computing environment MATLAB/Simulink. Another goal is to design an optimal control algorithm where it is necessary to choose an appropriate algorithm and then test it on the mathematical model. Functionality and properties of the designed algorithm and control algorithm is tested via simulation.

Keywords: feedback control, mathematical and physical model, robot design, ballbot

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat Ing. Miroslavu FLÍDROVI, Ph.D. za mnoho užitečných rad ohledně návrhu řízení a svým rodičům za podporu při studiu. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Arnoldu Jágerovi za pomoc s 3D tiskem dílů a výběrem CAD softwaru.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Stav problému	1
1.2	Cíl práce	2
1.3	Struktura práce	2
2	Co je to ballbot?	3
2.1	Ballbot obecně	3
2.2	Návrh konstrukce ballbota	4
2.2.1	Mechanická konstrukce	4
2.2.2	Elektronika	6
3	Matematicko-fyzikální model ballbota	8
3.1	Silový rozbor inverzního kyvadla v rovině	9
3.1.1	Analýza sil působících na pohyblivý vozík	9
3.1.2	Analýza sil působících na kyvadlo	10
3.1.3	3D inverzní kyvadlo	11
3.2	Přechod z planárních modelů do kinematiky robota	12
3.2.1	Kinematika všesměrových kol	13
3.2.2	Kinematika míče	15
3.2.3	Posuvný pohyb míče	17
3.2.4	Posuvný pohyb robota s míčem	19
4	Návrh regulátoru	21
4.1	Linearizace matematického modelu	21
4.2	Návrh optimálního LQ regulátoru	24
4.3	Řízení motorů na požadovanou úhlovou rychlost kola	25
5	Simulační ověření	27
5.1	Blokového simulačního schéma	27
5.2	Ověření modelu	29
5.2.1	LQ regulátor	30
5.2.2	Regulace motoru	32
6	Závěr	34

A	Technické výkresy	35
A.1	Akrylátová deska	35
A.2	Držák motoru k desce	36
B	Odvození vztahů	37
B.1	Odvození rovnice kinematiky	37
B.2	Odvození závislosti mezi ω_w a $\vec{\omega}_b$	38
	Literatura	40

Kapitola 1

Úvod

1.1 Stav problému

Typicky se mobilní roboty pohybují na kolech a mají problém s otáčením na místě a manévrováním v malém prostoru. Pokud bude mobilní robot moc vysoký, vzniká zde riziko jeho převržení do stran při zbrklém manévrování. Proto začaly vznikat výzkumy zaměřené na roboty balancující na míči.

S pouhým jedním kontaktním bodem je robot balancující na míči nestabilní systém. A protože je robot inherentně nestabilní, musí být neustále stabilizován řídicím algoritmem. Velkou výhodou robota balancujícího na míči je jeho volnost při pohybu do stran nezávisle na své aktuální orientaci. Takovému robotu se jinak říká robot holonomický.

Prvního robota balancujícího na míči zkonstruovali v roce 2005 prof. Tom Lauerers, George Kantor a Ralph Hollis na Carnegie-Mellonově univerzitě v Pittsburghu v Pensylvánii [15]. Robot byl úmyslně sestaven v životní velikosti člověka a obdařen kamerovým systémem, aby se mohl lépe navigovat v lidském prostředí. O rok později se uměl robot pohybovat po trajektorii a dovedl udržet konstantní rychlost. Výzkum Hollinsova balancujícího robota pokračuje, dnes robot umí dynamicky měnit své těžiště pomocí mechanické ruky a interagovat s člověkem.

Dalším zajímavým příkladem balancujícího robota je výtvar studentů na ETH s názvem „Rezero“ [13] v roce 2010. Jejich hlavním cílem bylo dosažení velkých rychlostí při translačním pohybu a stability při velké deviaci od vzpřímené polohy. Na projektu se celkem účastnilo 10 studentů a díky nim dnes „Rezero“ umí spoustu komplikovaných pohybů jako například orbitální trajektorie kolem bodu či simulace rovnoměrně přímočarého pohybu objektu s variabilním třením.

V posledních deseti letech se začaly objevovat další varianty robotů balancujících na míči. I když jejich využití je potenciálně velké, jejich realizace se zatím odehrává v neprůmyslových odvětvích na akademické půdě a v zájmových dílnách.

1.2 Cíl práce

Hlavní motivací je osvojení si základního postupu návrhu a realizace projektu řízení od návrhu hardwarové konstrukce až po návrh řídicího algoritmu.

Tato bakalářská práce by měla pomoci při fyzické realizaci balancujícího robota na míči, návrhu matematického modelu a zpětnovazebního řízení.

Výsledkem práce je též simulační model s 3D vizualizací.

1.3 Struktura práce

Nejprve se práce bude zabývat obecným popisem problematiky robotů balancujících na míči.

Poté bude představen návrh konstrukce robota balancujícího na míči. Jako první bylo nutné navrhnout konstrukci robota v libovolném strojírenském prostředí. Volba padla na vývojového prostředí je **SolidWorks 2014**. Typickou vlastností strojírenských modelářských programů je parametrické modelování objektů. Pokud se mechanický díl neosvědčí, lze ho snadno přetvarovat pomocí změny parametrů.

Dále bude popsán matematicko-fyzikální model, který popisuje dynamické a kinematické vlastnosti robota. Model by měl přibližně odpovídat reálnému systému, aby po linearizaci byla chyba co možná nejmenší.

Po úspěšném vytvoření matematického modelu je nutné model linearizovat a navrhnout algoritmus řízení pro lineární systémy. Pro návrh modelu a jeho řízení bylo zvoleno vývojové výpočetní prostředí „**MATLAB**“ a jeho simulační nástroj „**Simulink**“.

Nástroj „**Simulink**“ obsahuje knihovny pro 3D vizualizaci, která umožní vizualizaci simulace, lze tím na první pohled odhalit zcela nefunkční návrh regulátoru či nevhodně zvolené parametry modelu.

Kapitola 2

Co je to ballbot?

2.1 Ballbot obecně

Jedná se o mobilní robot schopný všesměrového pohybu, který je umístěn na kouli. Robot má pouze jeden kontaktní bod se zemí a tím je implicitně nestabilní. Vzprámeným objektům s jedním kontaktním bodem říkáme obecně „*inverzní kyvadlo*“, které je v matematické podobě stabilní pouze pokud tvoří jeho těžiště a kontaktní bod normálu k povrchu a je ve stejném směru jako gravitační síla působící na těžiště. Předpis pro jednoduché matematické inverzní kyvadlo v rovině [8] je

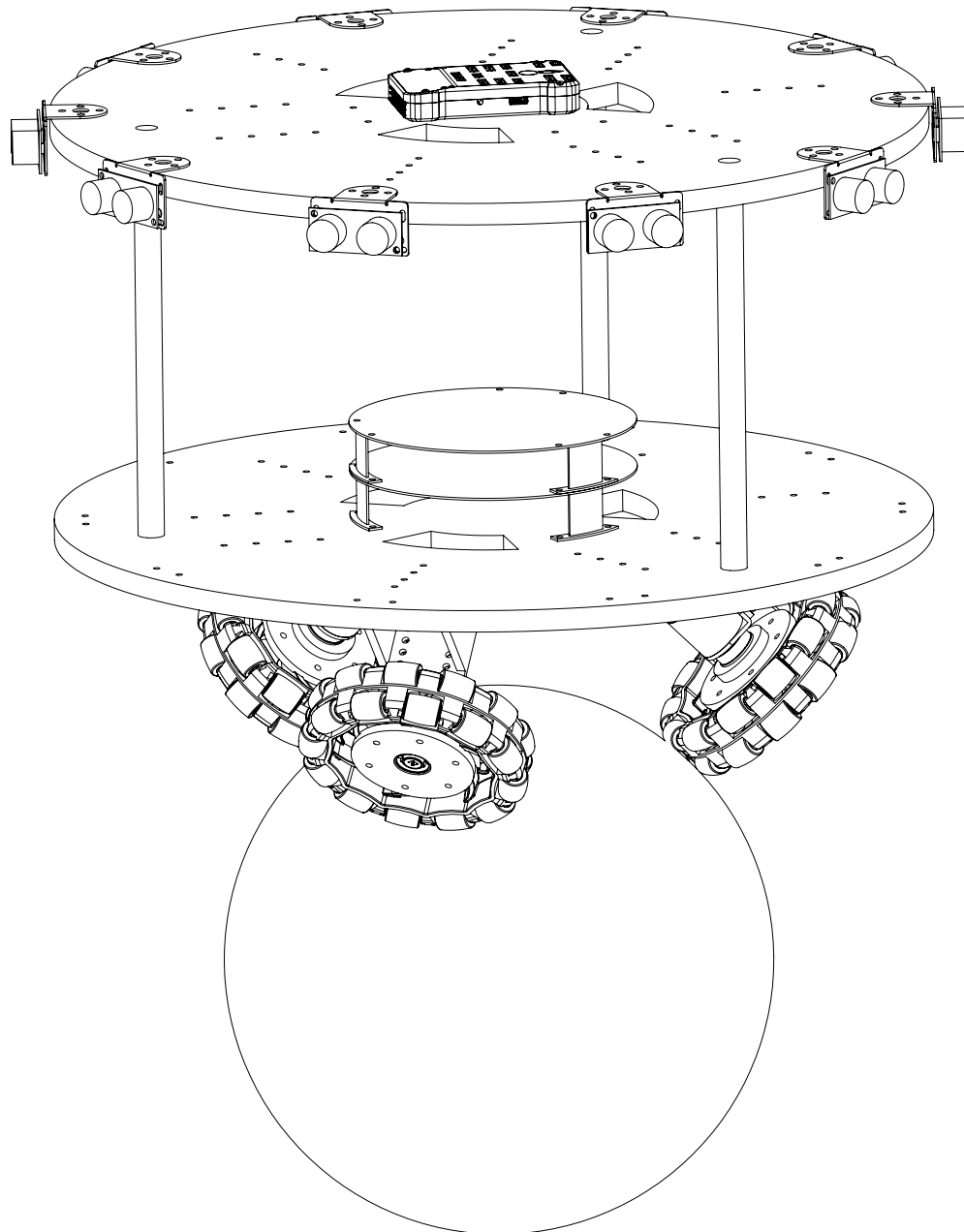
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta \quad (2.1)$$

Můžeme si například představit tužku postavenou ostrým hrotem na stůl. Pokud by byla tužka vychýlena o pouhou tisícinu úhlu od své osy, zřítela by se přibližně za 3 vteřiny. Protože rovnovážné polohy nelze fyzikálně dosáhnout, musí se inverzní kyvadla aktivně stabilizovat řízením.

Obdobně to platí pro ballbota, aktivní stabilizace se jej snaží dostat do určitého stavu a udržet ho v něm. Například pokud budeme po ballbotovi požadovat vzprámenou stabilní polohu, řízení se jí pokusí dosáhnout.

2.2 Návrh konstrukce ballbota

V této sekci se bude navrhovat mechanická konstrukce těla, rozložení motorů a pozice všesměrových kol. Bude uveden i krátký návod na zapojení elektronických částí.



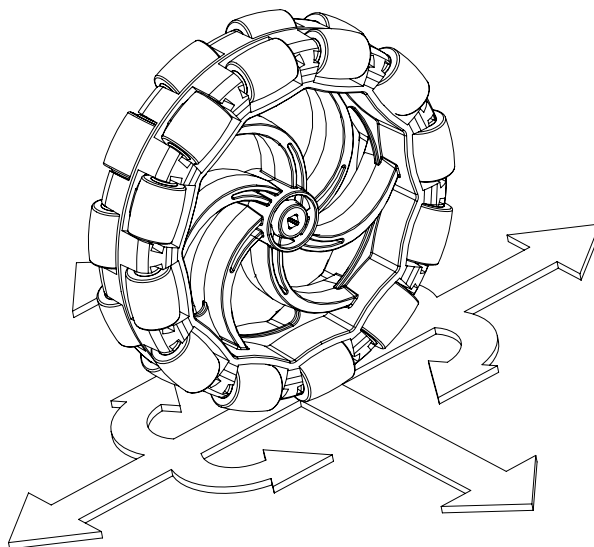
OBRÁZEK 2.1: Celkový prototyp robota balancujícího na míči

2.2.1 Mechanická konstrukce

Mechanická konstrukce by měla být dostatečně robustní, aby zbytečně nedocházelo ke zbytečnému posunu těžiště v konstrukci důsledkem deformace či vlastního kmitání konstrukce.

Tělo je ve tvaru válce a je složeno ze dvou polyakrylátových desek navržených v strojírenském softwaru **SolidWorks 2014**, viz A.1, spojených ocelovou šroubovací tyčí, tloušťky 1 [cm] utažené šroubovací matkou s podložkou M10. Deska je 1 [cm] vysoká s poloměrem 20 [cm].

Robot se na míči pohybuje pomocí vícesměrových kol, jejich hlavní charakteristikou jsou válečky po obvodu kola, které jsou připevněny kolmo na směr otáčení. Kolo tím získává větší svobodu při otáčení díky válečkům, které se mohou volně otáčet kolem své osy. Existuje více druhů vícesměrových kol.



OBRÁZEK 2.2: Vícesměrové kolo *Omniwheel*

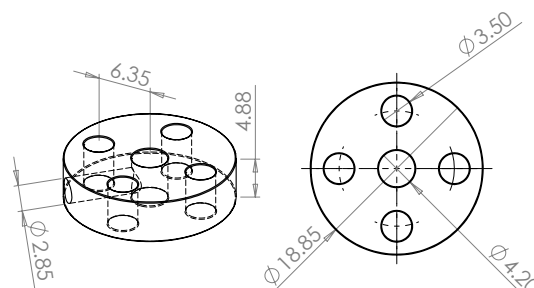
Vozidla s třemi až čtyřmi vícesměrovými koly mají vždy 3 stupně volnosti, 2 stupně volnosti pro pohyb v rovině a 1 pro rotaci kolem své vlastní osy. Velkou výhodou je schopnost pohybu ve všech směrech.

Další možná alternativa k vícesměrovým kolům jsou kola „*Mecanum*“, která se liší úhlem natočení válečků (45°) podél obvodu kola. Protože pohyb robota na míči není pohyb po rovině, bylo zvoleno klasické všesměrové kolo díky jednoduchosti a rovnoměrnému otáčení kolem osy kola a kontaktního bodu míče s kolem. Bylo zvoleno kolo od firmy VEX robotics 4" *Omni-Directional Wheel* [1].

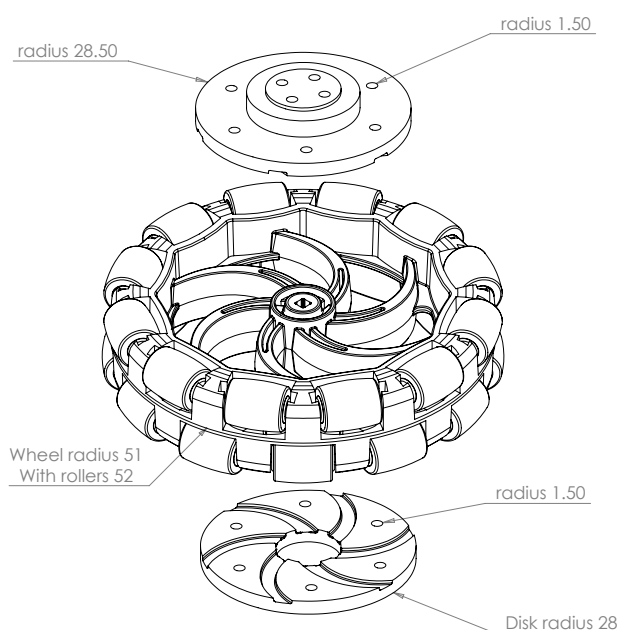
Pro pohon robota byl zvolen motor Pololu „Metal Gearmotor 25Dx54L mm HP with 48 CPR Encoder“. Jsou to silné motory s převodovkou. Je dobré mít při návrhu obvodu na zřeteli, že motor může odebírat vysoký proud až 6.5A. [9]. Motor je vybaven kvadrurním enkodérem, který měří úhlovou rychlost a bude využit při zpětnovazebním řízení motoru, viz 4.3.

Aby bylo možné uchytnit kolo k motorům, bylo nutné navrhnout nástavec, který by se dal přišroubovat na montážní náboj. Byl navržen plastový nástavec, určený pro tisk

na běžné 3D tiskárně, který uchytí všesměrové kolo a nechá jej připevnit na montážním náboji.



OBRÁZEK 2.3: Montážní náboj, [mm]



OBRÁZEK 2.4: Plastové úchyty, uchycující kolo k montážnímu náboji, [mm]

2.2.2 Elektronika

Tato sub sekce je pouze orientační a není zaručeno, že volba konkrétně zmíněných komponent je nejlepší možná. Budeme se zabývat volbou řídicí jednotky, obsluhou řadičů pomocí mikropočítače, regulátorem napětí *Step-down*, řadičem motorů a jejich celkovému zapojení.

Jako centrální řídicí jednotka byl zvolen modul autopilota pro pokročilé dálkové řízení modelů letadel **Pixhawk 3DR**. Modul obsahuje spoustu sensorů, které jsou potřebné pro snímání stavu. Pro potřeby řízení robotu použijí vestavěný gyroskop, akcelerometr a magnetometr.

- ST Micro 16-bit gyroskop
- ST Micro 14-bit akcelerometr + magnetometr
- MPU6000 akcelerometr + magnetometr

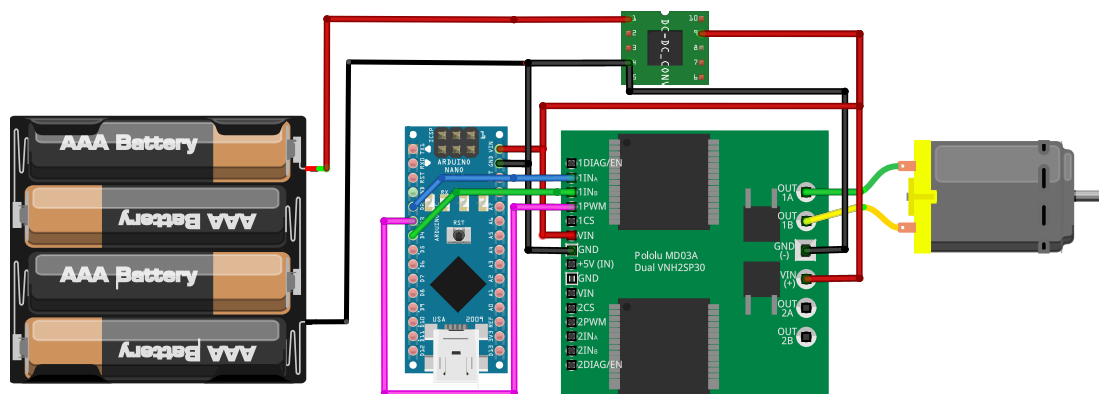
Řídící jednotka, viz 2.2.2, bude vysílat referenční hodnoty úhlové rychlosti pro jednotlivé motory, kde se mikrokontrolér bude starat o to, aby se tomu tak skutečně stalo. Problém byl tedy rozdělen na samostatné úlohy řízení systému a řízení motoru.

Vhodnou volbou se zdá být mikrokontrolér „Arduino Nano“ s taktem 16 MHz [4]. Komunikace mezi řídicí jednotkou a arduinem lze realizovat pomocí sériové sběrnice I^2C nebo SPI.

Elektronické komponenty robota vyžadují stabilní napětí $V_{logic} = 5V$. Napájecí baterie má obvykle vyšší napětí $V_{supply} = 12V$, proto využijí regulátor napětí, který je schopen udržet stabilní hodnotu napětí i při variabilní zátěži. Byl zvolen DC regulátor Pololu D15V70F5S3 [11], který je schopen vydat proud až $I_{deliver} = 7A$. Pro každý motor s řadičem zvlášť je třeba mít samostatně napěťový regulátor.

Aby se elektromotor mohl otáčet, musí jím procházet elektrický proud. Průchod proudu je ovlivněn změnou napětí, kterou realizuje řadič. Jako vhodný řadič motoru byl zvolen „VNH5019 Motor Driver Carrier“ [6]. Jedná se o jednoduchý H-můstek rozšířený o přepěťové ochrany.

Zde je uvedeno orientační schéma zapojení napájení, řadiče, Arduina a elektromotoru



OBRÁZEK 2.5: Návrh zapojení motorů řadiče, „vytvořeno v SW Fritzing“ [7]

Kapitola 3

Matematicko-fyzikální model ballbota

V této kapitole bude problém návrhu modelu balancujícího robota rozdělen na dvě části. První část se bude zabývat kinematikou a dynamikou inverzního kyvadla v rovině a na aproximaci prostorového inverzního kyvadla složením dvou rovinných, ortogonálních modelů. Druhá část se zaměří na přechod z kinematiky inverzního kyvadla do kinematiky robota.

Budeme uvažovat ideální podmínky při tvorbě matematického modelu:

- Nulové tření - V realitě vzniká tření mezi všesměrovými koly a míčem, dále mezi míčem a podlahou. Tato tření v modelu zanedbáváme.
- Nulový skluz - Povrch míče je nekluzký, konstrukce robota je navržena tak, aby byl skluz v kontaktním bodě s koly minimální. Válečky na všesměrovém kole jsou gumové, a proto by neměly podkluzovat. Dalším předpokladem je nulový skluz míče s podlahou. Pokud reálně vyvineme vysokou úhlovou rychlost na kolech, může dojít ke skluzu a model už nebude dostatečně odpovídat realitě.
- Nedochozí k deformacím - Míč ani konstrukce robota nepodléhá deformačním účinkům. Model uvažuje perfektní kouli.
- Pohyb v rovině - Míč se může pohybovat pouze v osách x a y .
- Ideální motor - Řadič motoru dokáže perfektně řídit točivý moment kol. Problematika řízení stejnosměrného motoru se bude řešit separátně v kapitole návrhu regulátoru 4.3. Výstup matematického modelu je požadovaná referenční úhlová rychlost motorů.

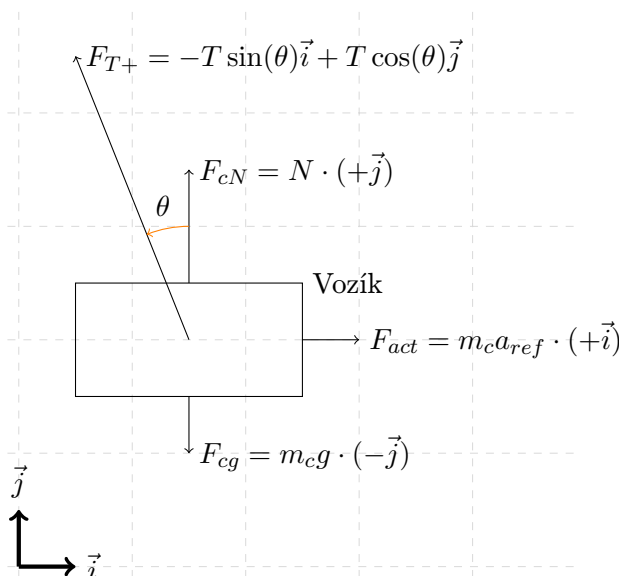
3.1 Silový rozbor inverzního kyvadla v rovině

Odvodíme rovnice dynamiky kyvadla na pohyblivém vozíku pomocí složeného pohybu dvou těles. K popisu pohybu využijeme dvourozměrné kartézské souřadnice x a y s bází tvořenou jednotkovými vektory $\vec{i} = [1 \ 0]^T$ a $\vec{j} = [0 \ 1]^T$. Bod se souřadnicí (x, y) v tomto prostoru lze reprezentovat polohovým vektorem \vec{r} , který si lze představit jako šipku v počátku $(0, 0)$ ukazující na bod v prostoru. Bod tedy reprezentuje vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.1.1 Analýza sil působících na pohyblivý vozík

Popíšeme síly působící pouze na pohyblivý vozík. Vozík se může pohybovat pouze v horizontálním směru.

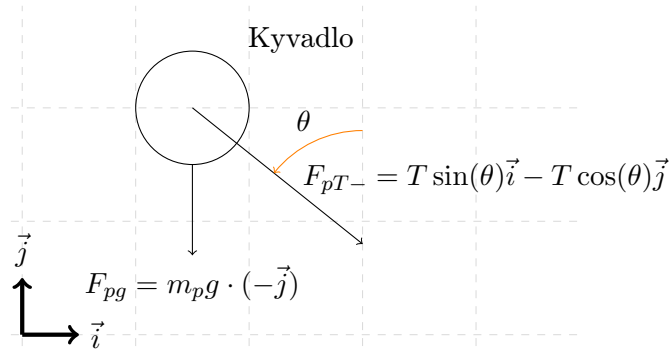
Gravitační síla F_{cg} působí vždy v záporném směru $(-\vec{j})$ dolů, normálová síla F_N tlačí v opačném směru $(+\vec{j})$ gravitační síly, dále na vozík působí budící síla $F_{act} = (m_p + m_c)a_{ref}$ v kladném směru $(+\vec{i})$, která bude stabilizovat celkovou soustavu inverzního kyvadla. Uvažujeme standardní tíhové zrychlení $g = 9.806 [m s^{-2}]$ působící na vozík o hmotnosti m_c . Silový účinek působící na vozík F_{T+} v kladném směru je závislý na úhlu vychýlení θ od vertikální polohy, velikost mechanického napětí označeném T .



OBRÁZEK 3.1: Analýza sil působících na pohyblivý vozík

3.1.2 Analýza sil působících na kyvadlo

Uvažujme kyvadlo, na které působí pouze gravitační síla F_{pg} a opačné mechanické napětí F_{T-} jako v případě pohyblivého vozíku, viz 3.1. Kyvadlo je těleso ve volném pádu s hmotností m_p a s tíhovým zrychlením $g = 9.806 \text{ [ms}^{-2}\text{]}$.



OBRÁZEK 3.2: Silový diagram kyvadla

Teď jsme schopni odvodit pohybové rovnice z 2. Newtonova zákona. Vozík se pohybuje pouze ve směru x , kde \vec{i} je jednotkový vektor osy x , proto se nemusíme zabývat silami F_N a F_{cg} .

$$\vec{i} : F_{acc} - T \sin(\theta) = m_c \ddot{x} \quad (3.1)$$

Kyvadlo se pohybuje v konstantní vzdálenosti L od vozíku.

$$\vec{i} : T \sin(\theta) = m_p a_{px} \quad (3.2)$$

$$\vec{j} : -T \cos(\theta) - m_p g = m_p a_{py} \quad (3.3)$$

Tyto rovnice jsou platné, avšak pro snazší modelování vyjádříme rovnice dynamiky jako pohybové rovnice závislé na stavech dráha x , rychlost \dot{x} , zrychlení \ddot{x} , úhel θ , úhlová rychlost $\dot{\theta}$ a úhlové zrychlení $\ddot{\theta}$

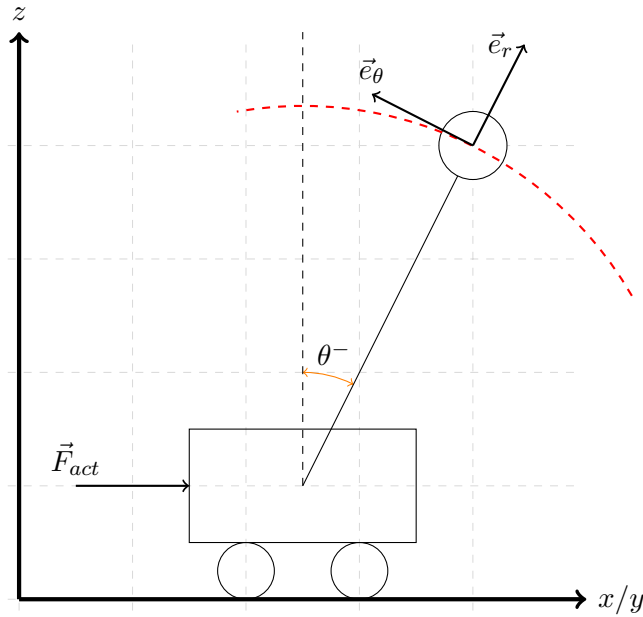
Vraťme se ke kinematice a ke vztahu relativního zrychlení, kde se celkové zrychlení kyvadla \tilde{a}_p dá vyjádřit jako součet zrychlení vozíku a zrychlení kyvadla relativně k vozíku. Z pohledu vozíku se kyvadlo pohybuje po kružnici s poloměrem L , kde \vec{e}_r je jednotkový vektor kolmý na tečnu kružnice a \vec{e}_θ je jednotkový vektor ve směru pohybu po kružnici.

$$\tilde{a}_p = \tilde{a}_c + \tilde{a}_{p/c} \quad (3.4)$$

$$\tilde{a}_p = \ddot{x}\vec{i} + [L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r]$$

Protože chceme vyjádřit pohyb v absolutních souřadnicích \vec{i} a \vec{j}

$$\vec{a}_p = \ddot{x}\vec{i} + L\ddot{\theta} \left[-\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} \right] - L\dot{\theta}^2 \left[-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \right] \quad (3.5)$$



OBRÁZEK 3.3: Silový a kinematický diagram kyvadla

Dosazením do pohybových rovnic (3.2) a (3.3)

$$\vec{i} : T \sin(\theta) = m_p \ddot{x} - m_p L \ddot{\theta} \cos(\theta) + m_p L \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (3.6)$$

$$\vec{j} : -T \cos(\theta) - m_p g = m_p L \ddot{\theta} \sin(\theta) - m_p L \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \quad (3.7)$$

Lze z rovnic (3.6) a (3.7) odstranit mechanické napětí T tím, že vynásobíme rovnici (3.6) $\cos(\theta)$ a přičteme k ní rovnici (3.7) vynásobenou $\sin(\theta)$

$$-m_p g \sin(\theta) = m_p \ddot{x} \cos(\theta) - m_p L \ddot{\theta} \quad (3.8)$$

Protože rovnice (3.8) obsahuje derivace dvou stavových složek, potřebujeme ještě jednu rovnici, kterou vhodně získáme z (3.1), kde za výraz $T \sin(\theta)$ dosadíme rovnici (3.6)

$$(m_p + m_c) a_{ref} + m_p L \ddot{\theta} \cos(\theta) - m_p L \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = (m_p + m_c) \ddot{x} \quad (3.9)$$

3.1.3 3D inverzní kyvadlo

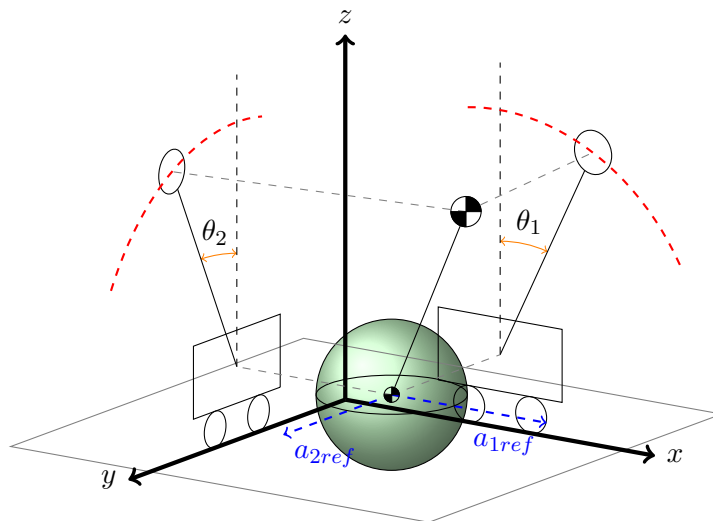
K modelování prostorového inverzního kyvadla využijeme zjednodušení vycházející z modelu inverzního kyvadla v rovině 3.1, protože kinematika a dynamika systému je

zjednodušena na dva kolmé planární modely inverzního kyvadla na pohyblivém vozíku, musíme vyjádřit vztahy mezi planárním a prostorovým modelem.

Planární modely kyvadla jsou na sebe kolmé v plochách XZ a YZ , kde aktuální poloha těžiště robota odpovídá aktuální poloze kyvadla a poloha míče odpovídá poloze vozíku v odpovídajících rovinách. Výchyly ramena kyvadla od osy vozíku θ_1 a θ_2 v planárních modelech reprezentují výchylku robota v odpovídající rovině planárního modelu. Analogicky to platí i pro všechny ostatní stavové proměnné modelu.

Zapišeme tedy pohybové rovnice inverzního kyvadla ve 3D

$$\begin{aligned}
 -m_p g \sin(\theta_1) &= m_p \ddot{x}_1 \cos(\theta_1) - m_p L \ddot{\theta}_1 \\
 (m_p + m_c) a_{1ref} + m_p L \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - m_p L \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) &= (m_p + m_c) \ddot{x}_1 \\
 -m_p g \sin(\theta_2) &= m_p \ddot{x}_2 \cos(\theta_2) - m_p L \ddot{\theta}_2 \\
 (m_p + m_c) a_{2ref} + m_p L \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - m_p L \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) &= (m_p + m_c) \ddot{x}_2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$



OBRÁZEK 3.4: Trojrozměrné kyvadlo

Úhel θ_1 a θ_2 lze přepočítat na úhel α vychýlení od osy z následujícím vztahem.

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2} \tag{3.11}$$

3.2 Přechod z planárních modelů do kinematiky robota

Tato sekce se bude zabývat kinematikou konstrukce. Cílem je získat úhlové rychlosti jednotlivých motorů z požadovaného referenčního pohybu inverzního kyvadla 3.1.3 aplikovaného na osách x a y . Tento přístup k rozboru kinematiky robota je inspirován studentskou prací na Lundské univerzitě [14].

3.2.1 Kinematika všesměrových kol

Uvažujme rovinný model. Jsou zde 4 soustavy, povrch S_0 , konstrukce S_1 , kolo S_2 a válečky S_3 . Uvažujme ideální váleček s osou otáčení kolmou na osu otáčení kola a tečnou ke kružnici s poloměrem \vec{r}_w kola. Pro zjednodušení je kontakt válečku s povrchem pouhým bodem C přesně pod středem kola A . Osa otáčení uvažujeme také rovnoběžnou s povrchem S_0 , viz 3.5. Jednotkové vektory \vec{i} a \vec{j} tvoří rovinu rovnoběžnou s povrchem S_0 . Střed kola A má souřadnice x a y a směrový vektor \vec{a} s úhlem α , protože předpokládáme osu otáčení rovnoběžnou s povrchem S_0 je komponenta z nulová.

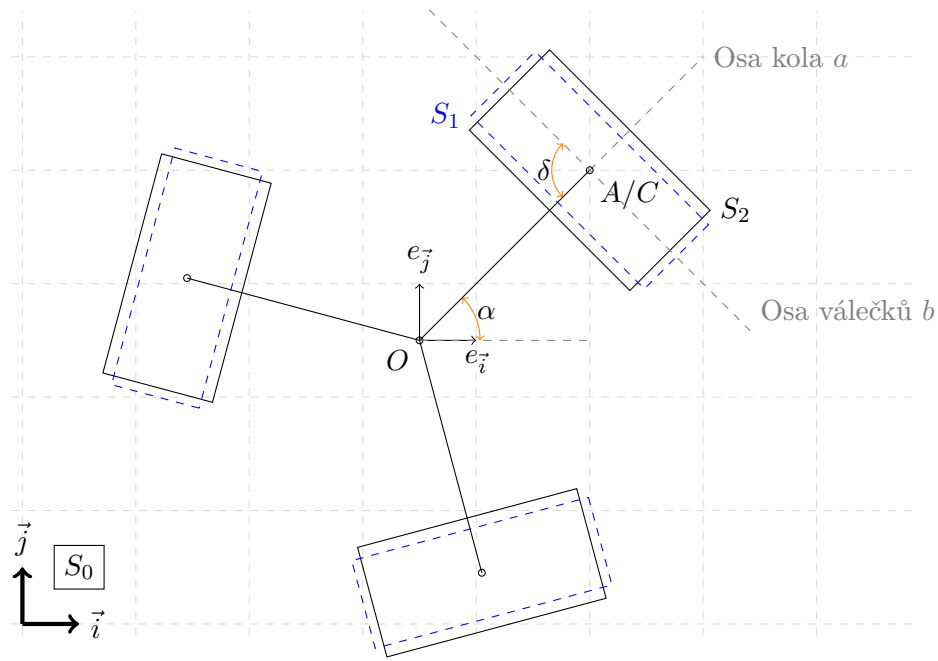
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Dále uvažujme směrový vektor osy válečku \vec{b} , který je v našem případě kolmý na osu otáčení kol a prochází středem kola A , tudíž spolu svírají úhel $\delta = 90^\circ$. Komponenta, odpovídající ose z je také nulová, protože předpokládáme, že váleček při kontaktu s povrchem má rovnoběžnou osu s povrchem S_0 .

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \delta) \\ \sin(\alpha + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Protože body A a C mají shodné souřadnice, můžeme při odvození zanedbat souřadnici z .

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$



OBRÁZEK 3.5: Geometrie kol

Obecně pro relativní rychlosti platí, že rychlost bodu p_1 relativně k bodu p_2 je ve vztahu $\vec{v}_{p_1/p_2} = \vec{v}_{p_1} - \vec{v}_{p_2}$ [10], dále pro třetí bod p_3 platí aditivní vztah relativních rychlostí $\vec{v}_{p_1/p_3} = \vec{v}_{p_1/p_2} + \vec{v}_{p_2/p_3}$.

Skalární úhlová rychlost ω_z je při pohybu konstrukce S_1 relativně k povrchu S_0 , složením rychlosti středu $\vec{v}_{O,1/0} = [v_x, v_y]^T$ a otáčivému pohybu středu kola relativně ke středu vozidla. Mějme na zřeteli, že úhlová rychlost ω_z vyvíjí rychlost na bod A jeho kolmou částí výsledné rychlosti $\vec{v}_{A,1/0}$, získáme vztah

$$\vec{v}_{A,1/0} = \begin{bmatrix} v_x - \omega_z a_y \\ v_y + \omega_z a_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Pohyb kola S_1 je relativně ke středu vozidla popsán rotací kola kolem své osy daný vektorem \vec{a} . ω_w je úhlová rychlost kolem vlastní osy a r_w je poloměr kola. Vektor rychlosti v kontaktním bodě C je tedy

$$\vec{v}_{A,2/1} = \omega_w r_w \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pohyb válečků S_3 relativně ke kolu S_2 je rotace kolem osy válečků danou vektorem \vec{b} s úhlovou rychlostí ω_{roll} , tj. váleček se otáčí kolem své osy b

$$\vec{v}_{A,3/2} = \omega_{roll} \begin{bmatrix} -b_y \\ b_x \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Předpokládáme, že pohyb válečků S_3 relativně k ploše S_0 je bez skluzu a tření, viz předpoklady stanovené na začátku kapitoly 3, takže vektor popisující rychlost je

$$\vec{v}_{A,3/0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Pro výslednou rychlost robota relativně k nehybné ploše S_0 sečteme všechny rychlosti a součet položíme rovno rychlosti $\vec{v}_{A,3/0}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A,3/0} &= \vec{v}_{A,1/0} + \vec{v}_{A,2/1} + \vec{v}_{A,3/2} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \vec{v}_{A,1/0} + \vec{v}_{A,2/1} + \vec{v}_{A,3/2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

získáme tedy dvě rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= v_x - \omega_z a_y - r_w \omega_w \sin \alpha - b_y \omega_{roll} \\ 0 &= v_y + \omega_z a_x + r_w \omega_w \cos \alpha + b_x \omega_{roll} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zbavíme se ω_{roll} a získáme diferenciální rovnici, viz příloha B.1.

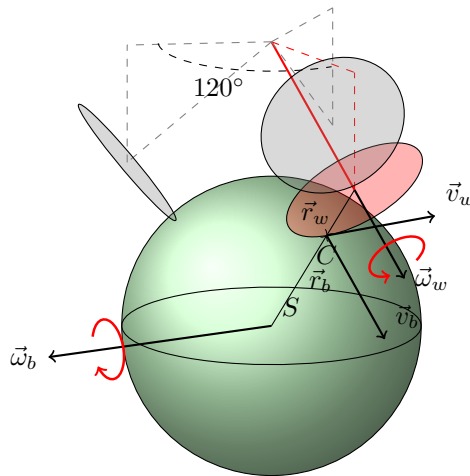
$$\omega_w = -\frac{1}{r \sin \delta} [\cos(\alpha + \delta)(v_x - \omega_z a_y) + \sin(\alpha + \delta)(v_y + \omega_z a_x)] \quad (3.21)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi úhlovou rychlostí kola \dot{u} a pohybem robota ve světových osách x, y a rotací kolem své osy ω_z . Pro jeho tři kola zapíšeme vztah následovně.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r \sin \delta} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \delta) & \sin(\alpha_1 + \delta) & a_{1i} \sin(\alpha) - a_{1j} \cos(\alpha_1 + \delta) \\ \cos(\alpha_2 + \delta) & \sin(\alpha_2 + \delta) & a_{2i} \sin(\alpha) - a_{2j} \cos(\alpha_2 + \delta) \\ \cos(\alpha_3 + \delta) & \sin(\alpha_3 + \delta) & a_{3i} \sin(\alpha) - a_{3j} \cos(\alpha_3 + \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.2.2 Kinematika míče

V této části se zaměřím na získání modelu, který vrátí ze vstupu požadované úhlové rychlosti míče ω_b požadované úhlové rychlosti jednotlivých všesměrových kol.



OBRÁZEK 3.6: Zobrazení vektorů rychlostí v kontaktním bodu kola s míčem

Uvažujme, že se míč volně otáčí kolem svého středu S , a že se kola vždy dotýkají míče a jsou perfektně kruhová. Zavedeme kartézské souřadnice X, Y, Z a zaměříme se na jedno kolo. Vektor \vec{r}_w je vektor ze středu kola na kontaktní bod C

Okamžitá rychlost \vec{v}_w v kontaktním bodu C je kolmá na osu otáčení kola a vektor \vec{r}_w . Rychlost \vec{v}_w ovlivňujeme přímo otáčivým pohybem kola.

$$\vec{v}_w = \vec{\omega}_w \times \vec{r}_w \quad (3.23)$$

Díky válečkům, otáčejícím se kolem své osy, na kole v kontaktním bodě C získáváme další stupeň volnosti. Rychlost \vec{v}_b značí rychlost otáčení míče v kontaktním bodě C , která leží v tečné rovině s míčem a bodem C .

$$\vec{v}_b = \vec{\omega}_b \times \vec{r}_b \quad (3.24)$$

Vektor \vec{r}_b směřuje ze středu míče ke kontaktnímu bodu C .

Platí nerovnost $\vec{v}_b \neq \vec{v}_w$, rovnost mezi rychlostmi nastane pouze v případě, že je vektor úhlové rychlosti míče $\vec{\omega}_b$ rovnoběžný s osou otáčení kola.

Vektory můžeme rozložit na jednotkový vektor udávající směr a jeho velikost $\vec{v}_w = v_w \cdot \vec{v}_{wu}$.

$$\vec{v}_{wu} = \vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu} \quad (3.25)$$

Protože mají ideální všesměrová kola díky válečkům schopnost otáčet se kolem své osy tvořené vektorem \vec{r}_{wu} bez odporu, budeme uvažovat pouze průmět vektoru rychlosti

\vec{v}_b do vektoru \vec{v}_w . Využijeme obecný vztah pro vektorový průmět $\vec{a}_1 = (\vec{a} \cdot \vec{b}_u) \vec{b}_u$

$$\vec{v}_w = (\vec{v}_b \cdot \vec{v}_{wu}) \vec{v}_{wu} \quad (3.26)$$

Odvodíme vztah mezi úhlovou rychlostí míče $\vec{\omega}_b$ a úhlovou rychlostí kola ω_w pro podrobnější odvození, viz příloha B.2.

$$\omega_w = -\frac{r_b}{r_w} \vec{\omega}_{wu} \vec{\omega}_b \quad (3.27)$$

Tento vztah platí pro všechna kola, zapíšeme ho tedy maticově

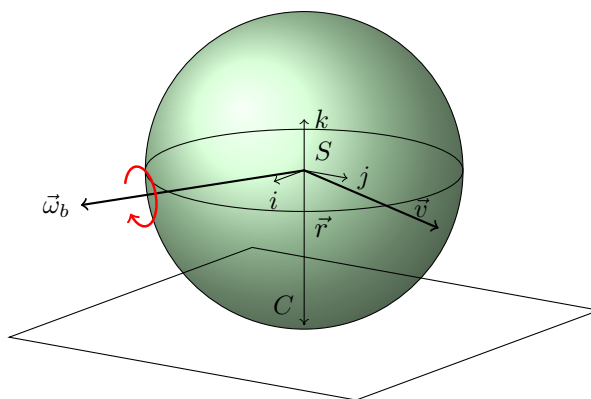
$$\begin{bmatrix} \omega_{w1} \\ \vdots \\ \omega_{wn} \end{bmatrix} = -\frac{r_b}{r_w} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{wu1} \\ \vdots \\ \vec{\omega}_{wun} \end{bmatrix} \vec{\omega}_b \quad (3.28)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme pro náš případ

$$\begin{bmatrix} \omega_{w1} \\ \omega_{w2} \\ \omega_{w3} \end{bmatrix} = -\frac{r_b}{r_w} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{b1} \\ \omega_{b2} \\ \omega_{b3} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.2.3 Posuvný pohyb míče

Uvažujme kouli s poloměrem r_b na povrchu S_0 bez tření a pevně daným středem S a C . Při otáčení míče se bude měnit vektor rychlost \vec{v} , protože uvažujeme nulové tření a nulový skluz, rychlost \vec{v}_c v bodě C je nulová.



OBRÁZEK 3.7: Posuvný pohyb míče po rovině

Výsledný vztah pro rychlost

$$\begin{aligned}\vec{v}_c &= \vec{v} + \vec{\omega}_b \times \vec{r}_b = 0 \\ \vec{v} &= -\vec{\omega}_b \times \vec{r}_b\end{aligned}\tag{3.30}$$

Tento vztah můžeme ještě rozepsat na součin tenzoru úhlové rychlosti s vektorem \vec{r}_b [3], platí tedy

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -\vec{\omega}_b \times \vec{r}_b \\ \vec{v} &= -W \cdot \vec{r}_b \\ \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{bz} & \omega_{by} \\ \omega_{bz} & 0 & -\omega_{bx} \\ -\omega_{by} & \omega_{bx} & 0 \end{bmatrix} r_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.31}$$

Chceme výstupní úhlové rychlosti míče $\vec{\omega}_b$ ze vstupu rychlosti v osách x a y . Za předpokladu že se míč nemůže pohybovat v ose z upravíme vztah (3.31)

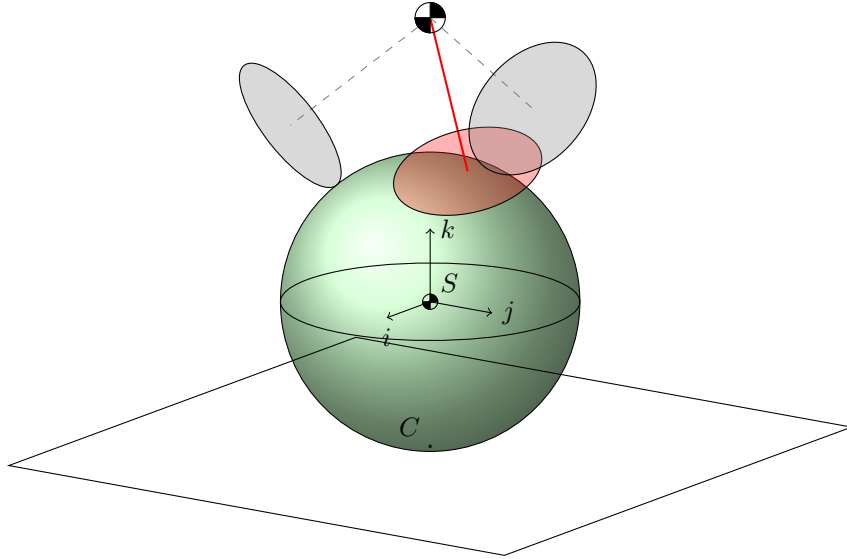
$$\begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r_b} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}\tag{3.32}$$

Je možné do vztahu (3.32) zakomponovat referenční rotaci robotu kolem osy z , tvar bude vypadat následovně

$$\begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix} = -\frac{1}{r_b} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_{bz} \end{bmatrix}\tag{3.33}$$

3.2.4 Posuvný pohyb robota s míčem

Spojením kinematických modelu (viz 3.2.1 a 3.2.1) získáme kinematický model robota



OBRÁZEK 3.8: Posuvný pohyb robota na míči

$$\begin{bmatrix} \omega_{w1} \\ \omega_{w2} \\ \omega_{w3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{r_w} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Tento model je platný pouze v případě, že robot stojí v rovnoměrně vzpřímené poloze, tj. $\theta_1 = 0$ $\theta_2 = 0$, aby tento model platil i v nakloněné poloze, změníme bázi vektoru $\vec{\omega}_b$ vynásobením zleva inverzní rotační maticí \mathbf{R}^{-1} , protože přechod mezi bázemi nijak nemění ortogonalitu báze, platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$ a transformační matice \mathbf{R} nebude nikdy singulární (má neměnný jednotkový determinant $\det \mathbf{R} = 1$) [5]

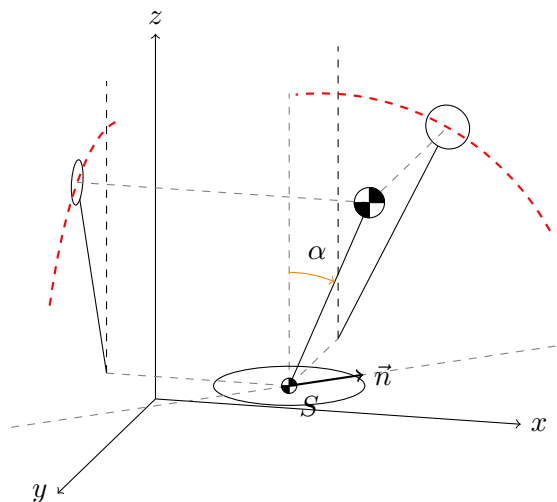
$$\begin{bmatrix} \omega_{w1} \\ \omega_{w2} \\ \omega_{w3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{r_w} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \mathbf{R}^\top \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Protože robot bude snímat accelerometrem svoji výchylku ve dvou rovinách, byla zvolena nejvhodnější transformační rotační matice \mathbf{R} z rotace kolem osy n s úhlem α ,

kde $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ [2].

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha + n_x^2(1 - \cos \alpha) & n_x n_y(1 - \cos \alpha) - n_z \sin \alpha & n_x n_z(1 - \cos \alpha) + n_y \sin \alpha \\ n_x n_y(1 - \cos \alpha) + n_z \sin \alpha & \cos \alpha + n_y^2(1 - \cos \alpha) & n_y n_z(1 - \cos \alpha) - n_x \sin \alpha \\ n_x n_z(1 - \cos \alpha) - n_y \sin \alpha & n_y n_z(1 - \cos \alpha) + n_x \sin \alpha & \cos \alpha + n_z^2(1 - \cos \alpha) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

Jednotkový vektor \vec{n} osy n leží na rovnoběžné rovině s povrchem S_0 , procházející středem míče S .



OBRÁZEK 3.9: Zobrazení osy n a úhlu α

Jednotkový vektor a velikost úhlu α získáme následovně

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \\ \arcsin \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Kapitola 4

Návrh regulátoru

Tato kapitola se bude zabývat návrhem dvou zpětnovazebních regulátorů. První regulátor bude stabilizovat robota na základě měření stavu tím, že určí nejvhodnější referenční zrychlení. Z referenčního pohybu se potom určí potřebné úhlové rychlosti jednotlivých motorů, aby se docílilo optimálního chování, je nutné navrhnout druhý zpětnovazební regulátor, který bude regulovat úhlovou rychlost jednotlivých motorů na referenční hodnotu získanou z přepočtu referenčního pohybu.

4.1 Linearizace matematického modelu

Téměř všechny fyzikální systémy mají nelineární charakter, mnoho těchto systémů se při malých změnách systémových stavových proměnných chová přibližně jako „*lineární*“ systém. Pokud budeme vyvozovat vlastnosti původního nelineárního dynamického systému z jeho linearizované formy, musíme mít na zřeteli jejich lokální platnost [16].

Pohybové rovnice inverzního kyvadla (3.10) linearizujeme kolem pracovního bodu stabilní polohy, kdy je robot vztyčen vzhůru. Tedy $\theta_1, \theta_2 = 0$.

Uvažujme nelineární dynamický systém, kde známe funkce $f(x(t), u(t))$ a $h(x(t), u(t))$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p; \quad (4.1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (4.2)$$

Označíme stavy $x_n(t)$ a řízení $u_1(t) = a_{1ref}, u_2(t) = a_{2ref}$.

Stav v rovině	x, z	y, z
Úhel v rovině	$x_1(t) = \theta_1$	$x_5(t) = \theta_2$
Úhlová rychlost v rovině	$x_2(t) = \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1$	$x_6(t) = \dot{\theta}_2 = \dot{x}_5$
Dráha v rovině	$x_3(t) = x_{x,z}$	$x_7(t) = x_{x,z}$
Rychlost v rovině	$x_4(t) = \dot{x} = \dot{x}_3$	$x_8(t) = \dot{y} = \dot{x}_7$

OBRÁZEK 4.1: Stavy linearizovaného dynamického systému

Lze z uvedených rovnic (3.10) inverzního kyvadla ve 3D převést systém na soustavu n lineárních či nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Pro přehlednost zápisu nepíšeme závislost na čase, tj. $\dot{x}_n(t) \rightarrow \dot{x}_n$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} \cos x_1 + \frac{g}{L} \sin x_1 \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \frac{Lm_p}{(m_p + m_c)} \left(\frac{1}{L} \cos x_1 + \frac{g}{L} \sin x_1 \right) \cos x_1 - \frac{Lm_p}{(m_p + m_c)} x_2^2 \sin x_1 \\
 \dot{x}_5 &= x_6 \\
 \dot{x}_6 &= \frac{1}{L} \cos x_5 + \frac{g}{L} \sin x_5 \\
 \dot{x}_7 &= x_8 \\
 \dot{x}_8 &= \frac{Lm_p}{(m_p + m_c)} \left(\frac{1}{L} \cos x_5 + \frac{g}{L} \sin x_5 \right) \cos x_5 - \frac{Lm_p}{(m_p + m_c)} x_6^2 \sin x_5 \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Zavedeme odchylkové proměnné v blízkém okolí pracovního bodu

$$\Delta x(t) = x(t) - x_r \quad \rightarrow \quad x(t) = x_r + \Delta x(t) \quad (4.4)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_r \quad \rightarrow \quad y(t) = y_r + \Delta y(t) \quad (4.5)$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u_r \quad \rightarrow \quad u(t) = u_r + \Delta u(t) \quad (4.6)$$

Pro stavovou výstupní rovnici dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{x}_r + \Delta \dot{x}(t) &= f(x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)) \\ &= f(x_r, u_{konst}) + \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} y_r + \Delta y(t) &= h(x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)) \\ &= h(x_r, u_{konst}) + \left. \frac{\partial h(\cdot)}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \left. \frac{\partial h(\cdot)}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

a pro ustálený stav $\dot{x}_r = f(x_r, u_{konst}) = 0$ resp. $y_r = h(x_r, u_{konst})$ dostaneme stavovou výstupní rovnici linearizovaného modelu v odchylkových proměnných, které jsou formálně shodné se stavovou reprezentací.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) : \dot{x}(t) &= \mathbf{A} x(t) + \mathbf{B} u(t); \\ y(t) &= \mathbf{C} x(t) + \mathbf{D} u(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{A} \dots n \times n, \quad \mathbf{B} \dots n \times m, \quad \mathbf{C} \dots p \times n, \quad \mathbf{D} \dots p \times m$$

Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou určeny z *Jacobiových matic* po dosazení veličin definujících pracovní bod $x(t) = x_r$, $u(t) = u_{konst}$ [16],

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

kde matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou matice odpovídajících rozměrů s konstantními parametry. Jejich konkrétní hodnoty závisí na volbě stavových proměnných. Vstup a výstup stavové reprezentace je řádově stejný, tudíž nemusíme veličiny normalizovat. Výslednou stavovou reprezentaci lineárního dynamického systému n -tého řádu zapisujeme obvykle

v maticovém tvaru 4.9.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \\ \dot{x}_7(t) \\ \dot{x}_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{gm_p}{m_b+m_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{gm_p}{m_b+m_p} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \\ x_8(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_b + m_p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \\ x_8(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.12)$$

Po zvolení konstant g, m_p, m_c a L lze také linearizaci provést přímo ze simulačního modelu **Simulinku** pomocí MATLAB funkce `linearize()`.

4.2 Návrh optimálního LQ regulátoru

Lineární kvadratický (LQ) regulátor, spojitý případ s nekonečným horizontem, patří do skupiny nedynamických, tj. nezvyšují řád regulační smyčky [17] stavových regulátorů, jehož řízení je generováno jako lineární kombinace měřitelných složek vektoru stavu. V případě LQ regulátoru vycházíme z lineárního t -invariantního modelu systému, uvedeného v kapitole 4.1. Hlavní myšlenkou LQ metody je nalezení zpětnovazebního zesílení zpětnovazebního řízení $u(t) = -\mathbf{K}x(t)$ pro známý počáteční stav $x(0) = x_0$ takové, které minimalizuje kritérium J definované vztahem

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T \mathbf{Q} x(t) + u(t)^T \mathbf{R} u(t)) dt \quad (4.13)$$

Ztrátová funkce vyjadřuje požadavek na převedení stavu do počátku stavového prostoru $x(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$

Obecně se může stát, že nejsou měřitelné všechny složky vektoru stavu $x(t)$. V takovém případě je nutné navrhnout rekonstruktor stavu. V našem případě jsou všechny stavy pozorovatelné senzory robota, tím pádem je implementace LQ regulátoru jednoduchá bez rekonstruktoru stavu.

Maticе \mathbf{Q} představuje váhu regulační odchylky a \mathbf{R} váží akční zásahy řízení. \mathbf{Q} musí být pozitivně semidefinitní a \mathbf{R} musí být pozitivně definitní, tyto vlastnosti zaručí, že integrál skalární ztrátové funkce (4.13) nebude záporný. Volba matic \mathbf{R} a \mathbf{Q} je čistě experimentální a je pravděpodobné, že optimální volba matic pro simulační model nebude vhodná pro reálné řízení robota, proto je zatím zbytečné analyticky hledat nejlepší koeficienty q_i a r_i .

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2) \quad (4.15)$$

zpětnovazební zesílení získáme pomocí vztahu,

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (4.16)$$

kde matici \mathbf{P} získáme řešením *Algebraické Riccatiho rovnice*

$$0 = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (4.17)$$

Tento vztah má vždy řešení pro \mathbf{P} za výše zmíněných předpokladů pozitivně definitních matic \mathbf{Q} a \mathbf{P} .

Aby časově invariantní kritérium s nekonečným horizontem nabývalo konečné hodnoty, musíme zaručit říditelnost systému se stabilním stavem v počátku a ztrátová funkce nabývala pro tento stabilní stav nulové řízení.

4.3 Řízení motorů na požadovanou úhlovou rychlost kola

V této sekci se budeme zabývat návrhem regulátoru pro elektromotor poháněný stejnosměrným napětím, viz 2.2.1. Regulátor bude realizován na jednočipovém počítači Arduino nano, viz 2.2.2, obsahujícím kompletní mikropočítač. Díky vysoké výpočetní frekvenci mikropočítače, tj. velmi krátké periodě vzorkování, budeme uvažovat systém za spojitý v čase, ale navržený regulátor bude realizován jako diskretní.

Motor je vybaven enkodérem, který snímá aktuální úhlovou rychlost ω_w . Cílem regulátoru by mělo být generování řízení v závislosti na regulační odchylce $e(t) = w(t) - y(t)$

v regulačním obvodu, kde $w(t)$ je referenční signál a $y(t)$ regulovaný výstup. Pro naše potřeby byl zvolen PID regulátor s jedním stupněm volnosti, kde výstupem regulátoru je řídicí signál $u(t)$ a vstupem regulační odchylka $e(t)$. Fyzikálně je řídicí signál $u(t)$ reprezentován jako pulsně-šířkově modulované elektrické napětí. PID s jedním stupněm volnosti má tři parametry, P proporcionální člen, I integrační člen a D derivační člen. Čistá derivace činí problémy, proto zavádíme aproximativní derivaci s filtračním koeficientem N , díky filtraci při skokových změnách nevzniká zbytečně velký akční zásah.

Řízení PID regulátoru je tvořeno třemi složkami a lze zapsat následující přenosovou funkcí

$$U(s) = P + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1 + N\frac{1}{s}} \quad (4.18)$$

Obdobně jako u volby parametrů LQ regulátoru 4.2, je pravděpodobné, že vhodná volba parametrů PID regulátorů v simulaci nebude vyhovovat reálnému systému a proto je dobré parametry volit s orientačně a doladit je experimentálně na reálném robotu.

Kapitola 5

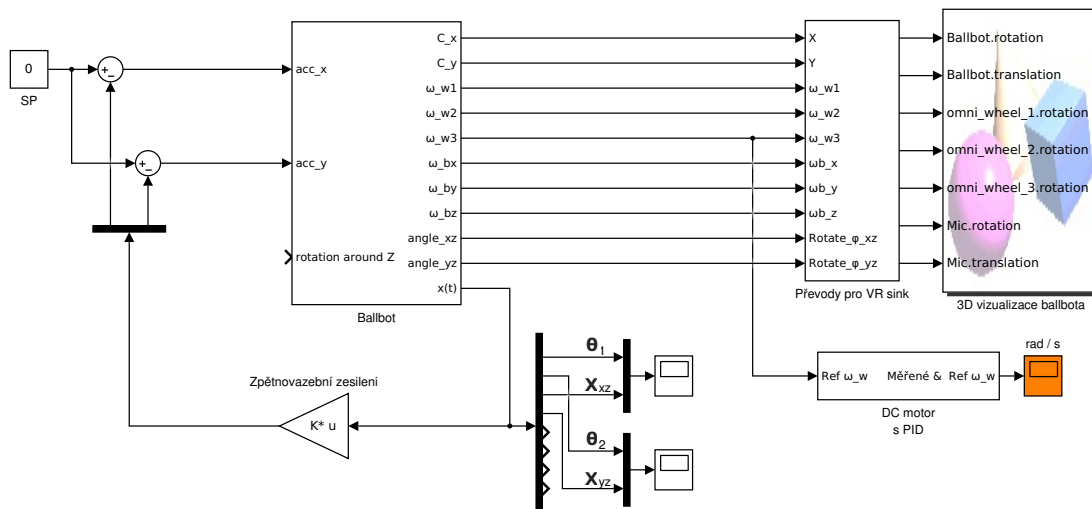
Simulační ověření

Simulace je provedena v **Simulinku**, což je nadstavba programovacího prostředí **MATLAB**. Nejprve je nutné sestavit blokové schéma dynamického systému inverzního kyvadla s regulátorem, poté se sestavil kinematický výpočet rychlostí a 3D vizualizace pomocí **Simulink** knihovny VR sink.

Odhadem byly zvoleny konstanty pro lineární i nelineární matematicko-fyzikální model. Váha vozíku $m_c = 0.2 [kg]$, váha kyvadla $m_p = 3.5 [kg]$, délka kyvadla $L = 0.5 [m]$ a známá konstanta tíhového zrychlení $g = 9.806 [ms^{-2}]$.

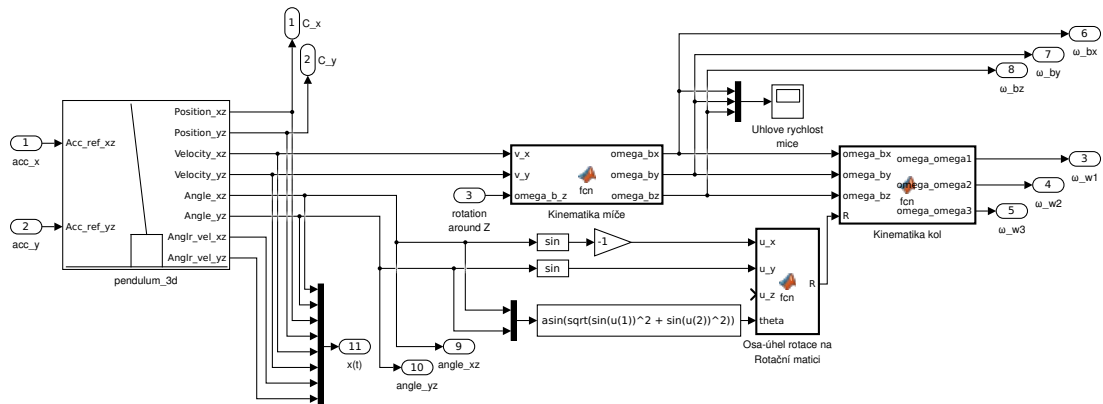
5.1 Blokového simulační schéma

Nelineární rovnice (3.10) a nelineární blokový model stejnosměrného elektromotoru 5.10 spolu s kinematickým výpočtem byly implementovány v **Simulinku**.



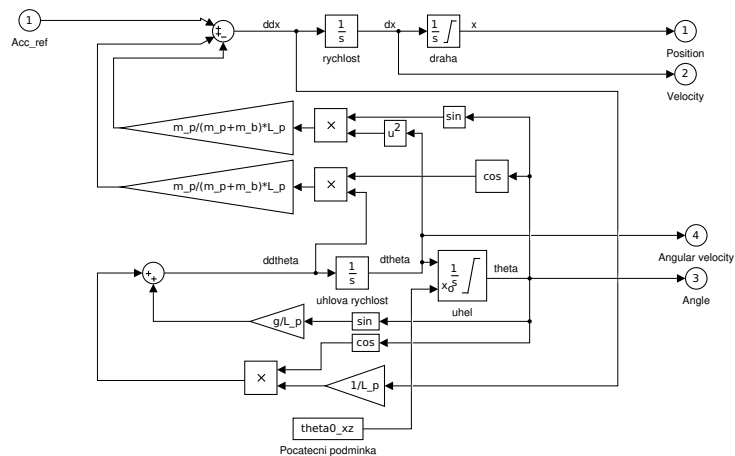
OBRÁZEK 5.1: Celkové schéma simulace

Kinematické vztahy pro přechod z referenčního pohybu v osách x a y na úhlové rychlosti kol ω_{wn} jsou implementovány jako funkce v programovacím jazyce **MATLAB**.



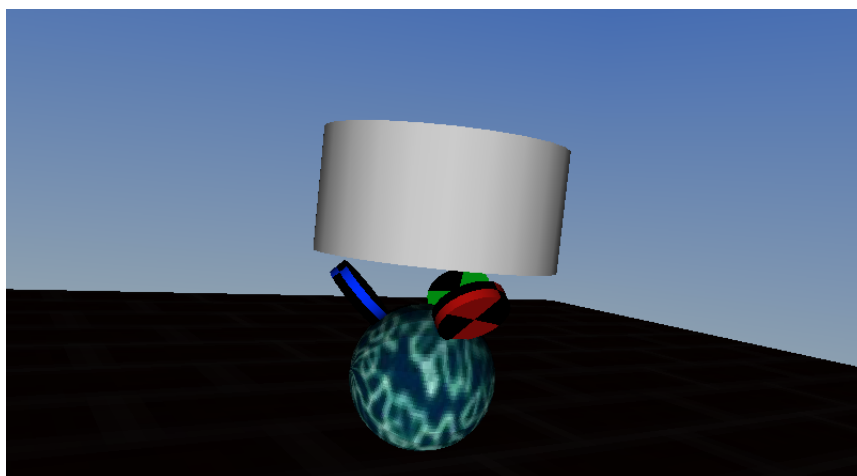
OBRÁZEK 5.2: Simulační model ballbota

Z diferenciální rovnic (3.8) a (3.9) popisujících systém vytvoříme blokové schéma 2D kyvadla v **Simulinku**.



OBRÁZEK 5.3: Simulační model 2D kyvadla

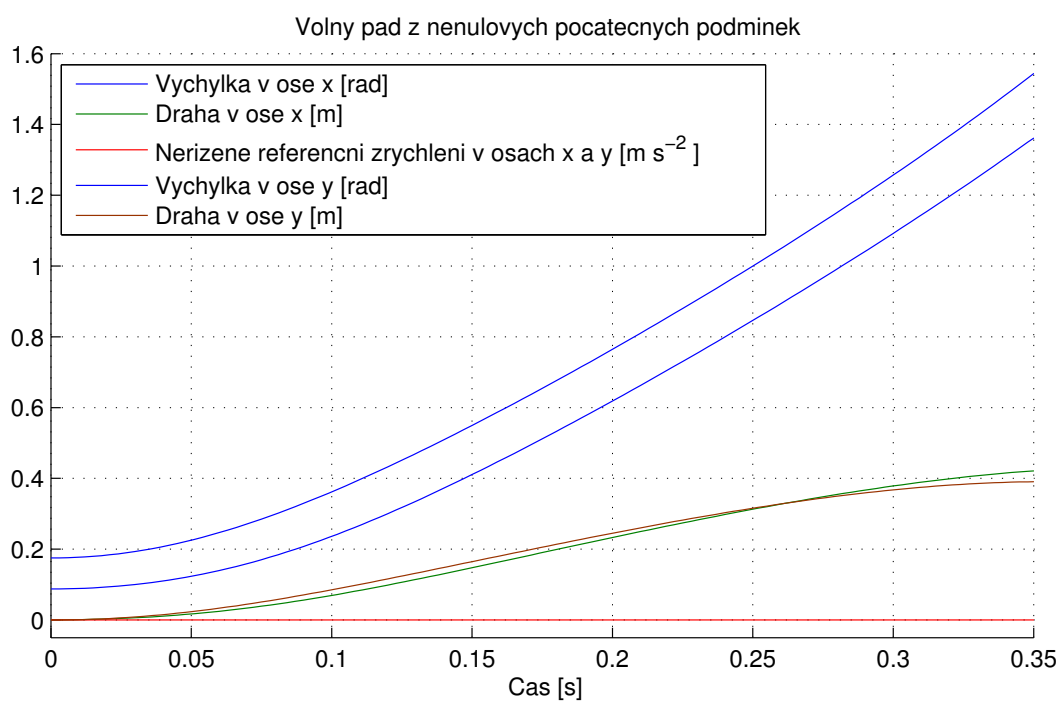
Blok pro 3D kyvadlo se získane paralelním zapojením dvou schémat 2D kyvadel. Vizualizace simulace robota probíhá za pomoci knihovny VR sink.



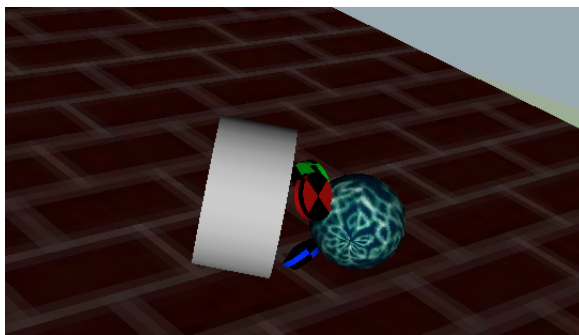
OBRÁZEK 5.4: 3D vizualizace pomoci knihovny „VR sink“

5.2 Ověření modelu

Intuitivně při absenci řízení očekáváme, že se robot zřítí za velmi krátkou dobu.



OBRÁZEK 5.5: Volný pád



OBRÁZEK 5.6: 3D vizualizace po pádu robota

5.2.1 LQ regulátor

Pro návrh regulátoru postupujeme podle algoritmu popsaného v sekci 4.2. Pro zvolené konstanty modelu 5 volíme váhové matice \mathbf{R} a \mathbf{Q} . Na vzpřímené poloze nám záleží nejvíce, proto volíme váhy odpovídající stavu výchylky $q_1, q_5 = 250$, dále je žádoucí aby se robot při regulování nevzdálil příliš daleko, proto volíme váhy odpovídající stavu dráhy $q_3, q_7 = 50$. Aby byly akční zásahy při regulaci robotu realizovatelné, tj. pomalejší referenční zrychlení, utlumíme řízení vahami $r_1, r_2 = 20$

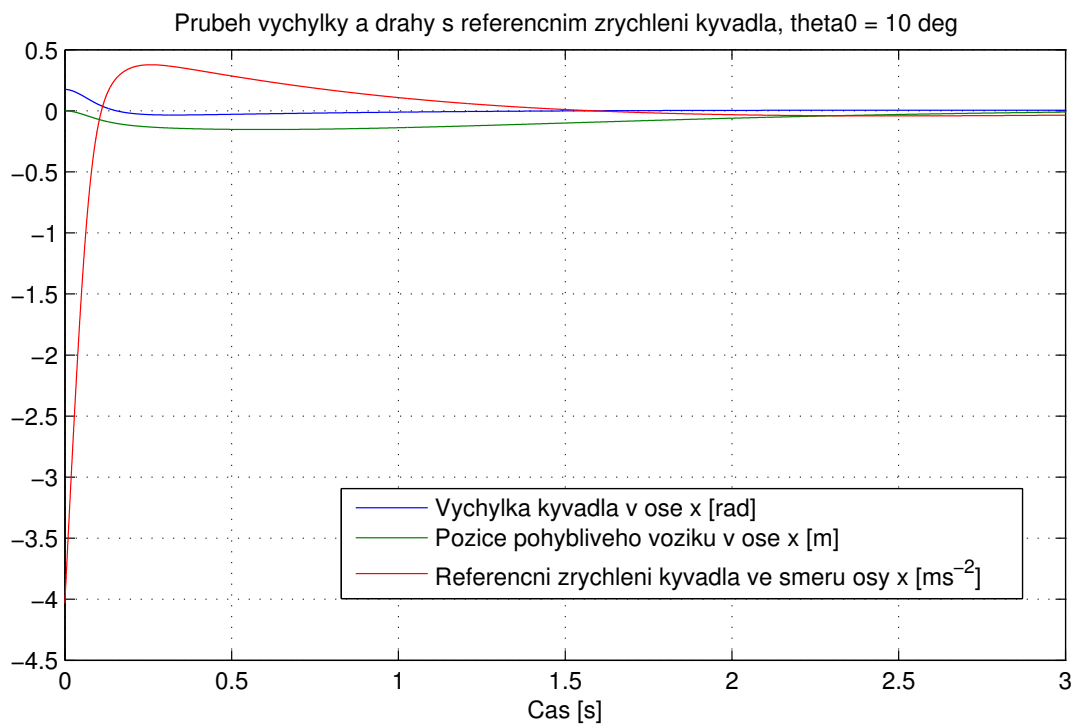
$$\mathbf{Q} = \text{diag}(250, 1, 50, 1, 250, 1, 50, 1) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(20, 20) \quad (5.2)$$

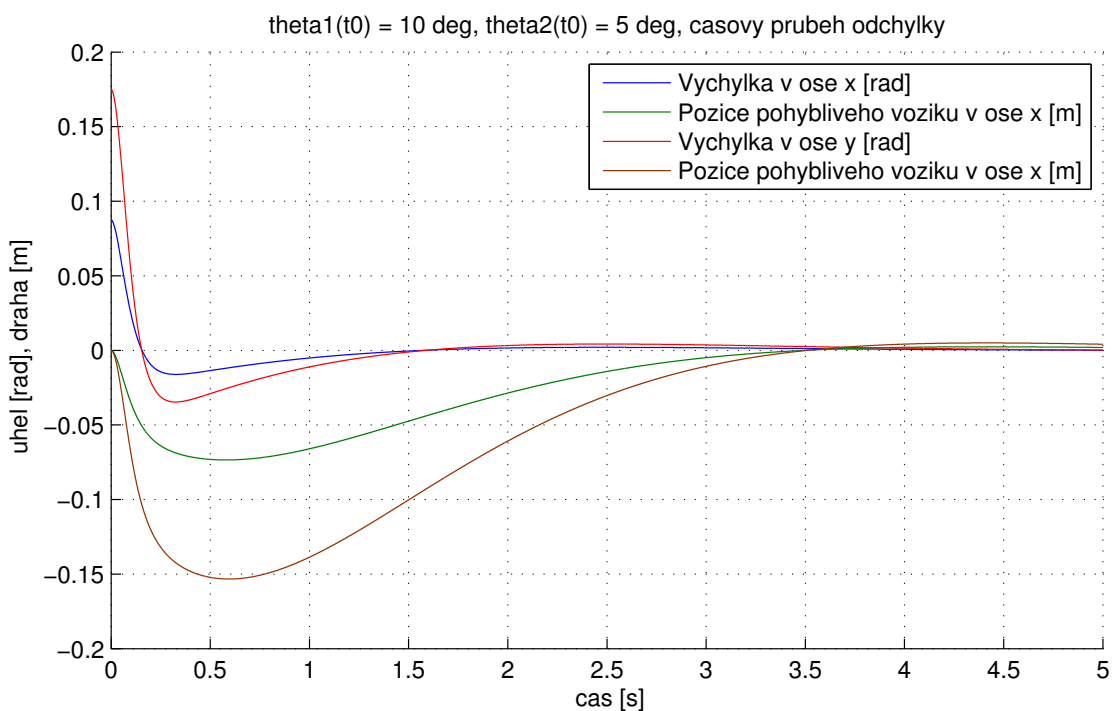
Po vyřešení *Algebraické Riccatiho rovnice* (4.17) a dosazením do vztahu pro výpočet zpětnovazebního zesílení získáme matici \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 23.0 & 0 & -2.0 & 0 & -2.0 & 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 23.0 & 0 & -2.0 & 0 & -2.0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Průběh simulace se zpětnovazebním řízením z nenulových počátečních podmínek je vidět na grafech 5.7 a 5.8

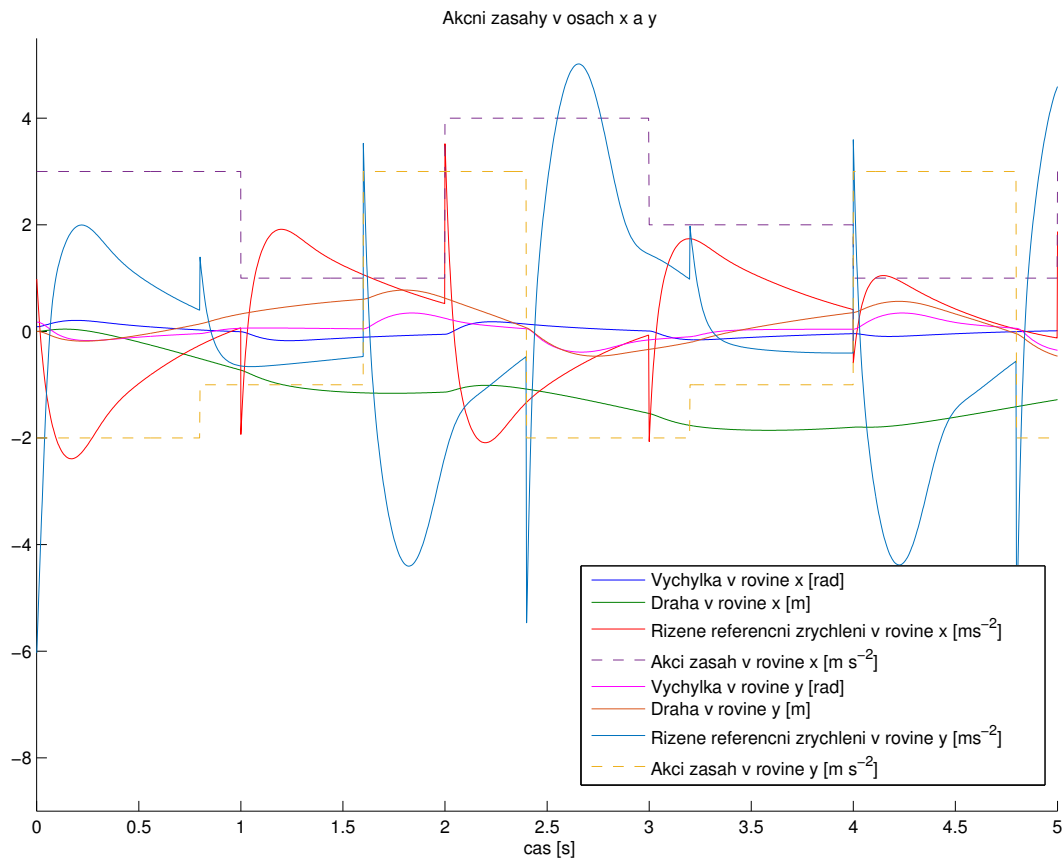


OBRÁZEK 5.7: Prubeh drahy, vychylky a referenčního zrychlení z nenulových počátečních podmínek



OBRÁZEK 5.8: Prubeh drah a vychylek z nenulových počátečních podmínek

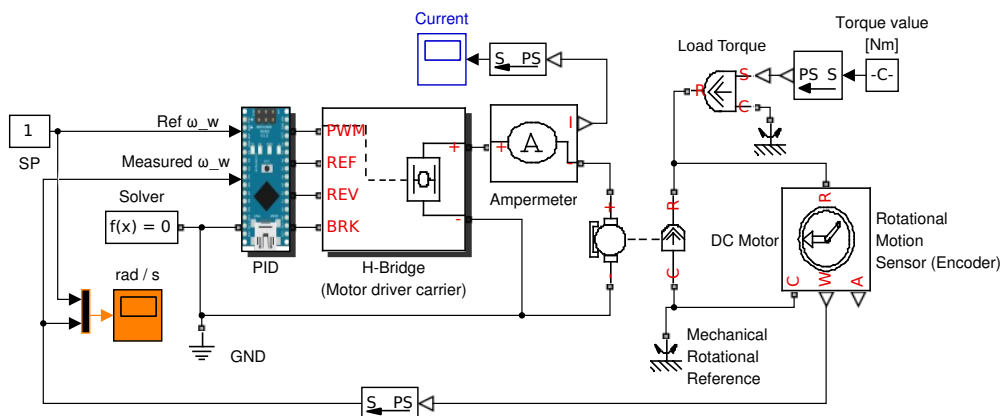
Pokud budeme zavedeme poruchu ve formě prudkého zrychlení v konkrétních směrech, robot zůstane stát s relativně nízkou výchylkou, avšak dráha je ovlivněna více a robot se vzdálil od počátku téměř na dva metry, viz 5.9.



OBRÁZEK 5.9: Průběh simulace, pokud zavedeme poruchu ve formě zrychlení v daném směru

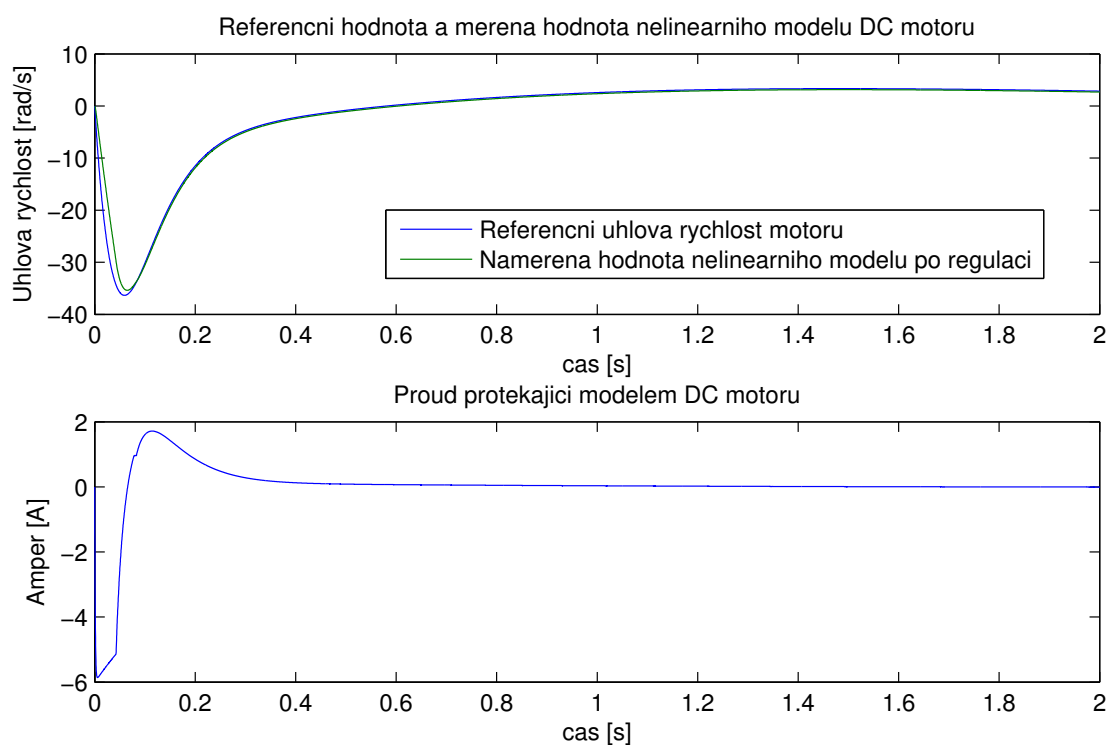
5.2.2 Regulace motoru

Schéma zapojení je provedeno v **Simulinku** za pomoci rozšiřující knihovny **simscape**, která umožňuje rychlé sestavení simulačního modelu bez nutnosti ručně odvozovat rovnice pro stejnosměrný elektromotor. Blok knihovny **simscape** reprezentující elektromotor *DC motor* má nastavitelné parametry běžně používané pro popis vlastností motoru často uvedené výrobcem. Parametry PID regulátoru byly nastaveny experimentálně. Konkrétní zvolené hodnoty $P = 4$, $I = 0.5$, $D = 0.02$ a $N = 4000$



OBRÁZEK 5.10: Simulační model stejnosměrného motoru, při zátěži

Výstup simulace při nenulové počáteční podmínce, model ballbota byl vychýlen o 0.1rad , přibližně 5.73° , v obou směrech x a y . Parametry nelineárního modelu elektromotoru byly zvoleny tak, aby přibližně odpovídala parametrům výrobce. Výstup regulované úhlové rychlosti jednoho z motorů je vidět z grafu 5.11



OBRÁZEK 5.11: Regulovaná úhlová rychlost DC motoru a průtok proudu

Kapitola 6

Závěr

Pro návrh algoritmu řízení byl vytvořen matematický model robotu balancujícího na míči. První část modelu robotu se skládá z nelineárního dynamického modelu inverzního sférického kyvadla na pohyblivém vozíku s dvěma vstupy a osmi výstupy. Druhá část se skládá z kinematického výpočtu úhlových rychlostí pro jednotlivá kola. Model inverzního sférického kyvadla je řízený pomocí stavové zpětné vazby a přepočtená úhlová rychlost motoru je dosažena PID regulací. Vytvořená 3D vizualizace posloužila při experimentování s regulací, kde špatné algoritmy bylo možné zavrhnout hned.

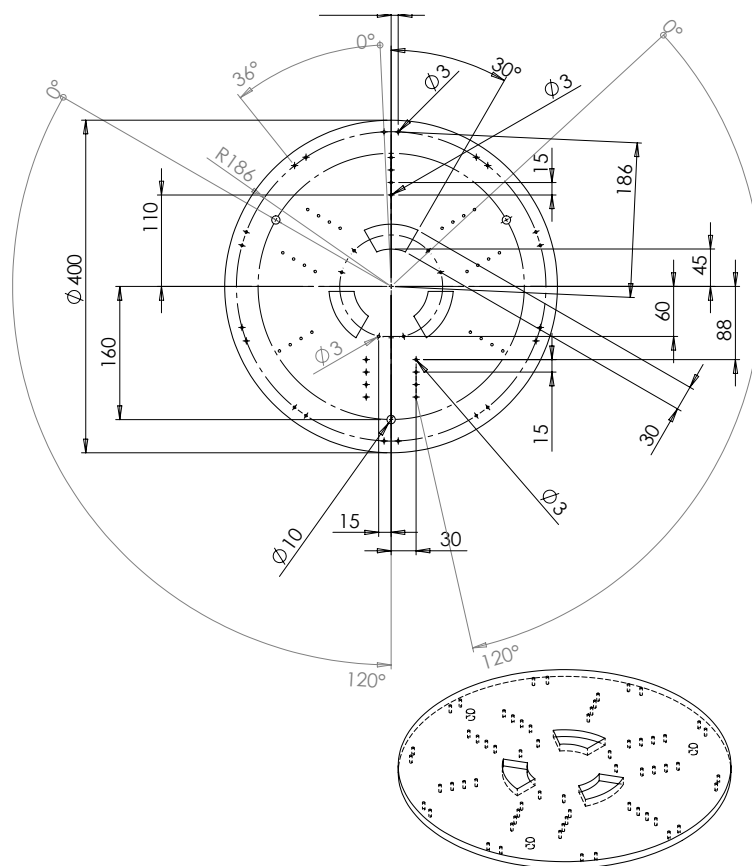
Teoretické poznatky z této bakalářské práce, poslouží k reálné implementaci na sestrojené konstrukci robotu s třemi všesměrovými koly. V praxi bude nutné filtrovat jednotlivé měřené složky stavu z čidel, dále je možné navrhnout třetí planární model, který by se staral o minimalizaci nežádoucího kroutivého momentu, který vzniká tlakem konstrukce na míč, otáčením robotu kolem své vlastní vzpřímené osy.

Dalším z milníků budoucí práce, je rozšíření stavové regulace robustnější metodou a tím docílit sledování trajektorie. Na robot budou umístěny ultrazvukové senzory na detekci objektů a tím dát robotu možnost se vyhýbat překážkám.

Příloha A

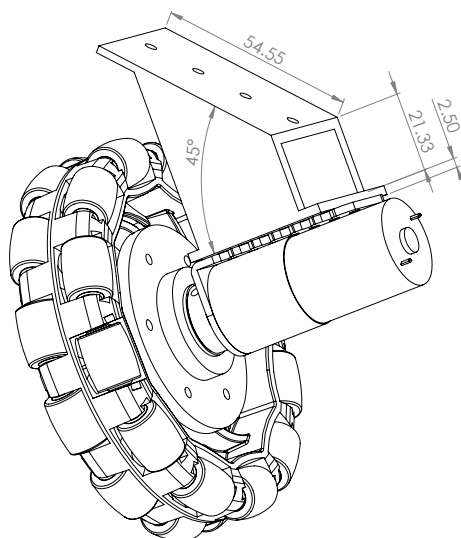
Technické výkresy

A.1 Akrylátová deska



OBRÁZEK A.1: Náčrtek podstavy, měřítko v [mm]

A.2 Držák motoru k desce



OBRÁZEK A.2: Soustava s držáky, měřítko v [mm]

Příloha B

Odvození vztahů

B.1 Odvození rovnice kinematiky

Cílem je získat z pohybových rovnic robota (3.20) závislost na úhlové rychlosti motoru. Výsledná úhlová rychlost kola ω_w je skalární veličina a proto musí být výsledný vztah pouze jedna rovnice.

Vytknutím b_x , b_y a přičtením druhé rovnice do první eliminujeme koeficient ω_{roll}

$$0 = v_x - \omega_z a_y - r\omega_w \sin \alpha - b_y \omega_{roll} \quad / : b_y$$

$$0 = v_y + \omega_z a_x + r\omega_w \cos \alpha + b_x \omega_{roll} \quad / : b_x$$

$$0 = \frac{1}{b_y} v_x - \frac{1}{b_y} \omega_z a_y - \frac{1}{b_y} r\omega_w \sin \alpha - \omega_{roll}$$

$$0 = \frac{1}{b_x} v_y + \frac{1}{b_x} \omega_z a_x + \frac{1}{b_x} r\omega_w \cos \alpha + \omega_{roll}$$

Sloučíme obě rovnice, získáme diferenciální rovnici.

$$0 = \frac{1}{b_y} v_x + \frac{1}{b_x} v_y - \frac{1}{b_y} \omega_z a_y + \frac{1}{b_x} \omega_z a_x - \frac{1}{b_y} r\omega_w \sin \alpha + \frac{1}{b_x} r\omega_w \cos \alpha \quad \cancel{-\omega_{roll}} + \cancel{\omega_{roll}} \quad / \cdot b_x b_y$$

$$0 = b_x v_x + b_y v_y - b_x \omega_z a_y + b_y \omega_z a_x - b_x r\omega_w \sin \alpha + b_y r\omega_w \cos \alpha$$

$$0 = r\omega_w (b_y \cos \alpha - b_x \sin \alpha) + b_x (v_x - \omega_z a_y) + b_y (v_y + \omega_z a_x)$$

$$-r\omega_w (b_y \cos \alpha - b_x \sin \alpha) = +b_x (v_x - \omega_z a_y) + b_y (v_y + \omega_z a_x)$$

Dosadíme za b_x , b_y a upravíme.

$$-r\omega_w(\sin(\alpha + \delta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \delta)\sin\alpha) = \cos(\alpha + \delta)(v_x - \omega_z a_y) + \sin(\alpha + \delta)(v_y + \omega_z a_x)$$

Výraz $\sin(\alpha + \delta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \delta)\sin\alpha$ se dá dále zjednodušit.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \delta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \delta)\sin\alpha &= \\ [\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta]\cos\alpha - [\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta]\sin\alpha &= \\ \cancel{\cos\alpha\sin\alpha\cos\delta} + \cos^2\alpha\sin\delta - \cancel{\sin\alpha\cos\alpha\cos\delta} + \sin^2\alpha\sin\delta &= \\ + \sin\delta(\cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha) &= \sin\delta \end{aligned}$$

Dosadíme tedy zpět do diferenciální rovnice.

$$\begin{aligned} -r\omega_w\sin\delta &= \cos(\alpha + \delta)(v_x - \omega_z a_y) + \sin(\alpha + \delta)(v_y + \omega_z a_x) \\ \omega_w &= -\frac{1}{r\sin\delta} [\cos(\alpha + \delta)(v_x - \omega_z a_y) + \sin(\alpha + \delta)(v_y + \omega_z a_x)] \end{aligned}$$

B.2 Odvození závislosti mezi ω_w a $\vec{\omega}_b$

Klíčovou úlohou motorů je ovlivňování úhlové rychlosti míče ω_b , proto upravíme vztah následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \vec{v}_w &= (\vec{v}_b \cdot \vec{v}_{wu})\vec{v}_{wu} \\ \vec{v}_w &= \vec{v}_b \cdot \vec{v}_{wu}^2 \\ \vec{v}_w &= \vec{v}_b \cdot (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu})^2 \\ \vec{v}_w &= (\vec{v}_b \times \vec{r}_b) \cdot (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu})^2 \\ (\vec{\omega}_w \times \vec{r}_w) &= (\vec{\omega}_b \times \vec{r}_b) \cdot (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu})^2 \\ \omega_w r_w (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu}) &= r_b (\vec{\omega}_b \times \vec{r}_{bu}) \cdot (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu})^2 \\ \omega_w &= \frac{r_b}{r_w} (\vec{\omega}_b \times \vec{r}_{bu}) \cdot (\vec{\omega}_{wu} \times \vec{r}_{wu}) \end{aligned}$$

Protože jsou jednotkové vektory $\vec{\omega}_{wu}$ a \vec{r}_{wu} v jedné ose, jejich skalární součin je roven $\vec{r}_{bu} \cdot \vec{r}_{wu} = -1$, a protože jsou vektory \vec{r}_{bu} a $\vec{\omega}_{wu}$ na sebe vzájemně kolmé, mají

skalární součin $\vec{r}_{bu} \cdot \vec{\omega}_{wu} = 0$. Můžeme výraz díky identitě [12]

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}^T ((\mathbf{c}^T \mathbf{a}) I - \mathbf{c} \mathbf{a}^T) \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

zjednodužit na

$$\begin{aligned} \omega_w &= \frac{r_b}{r_w} [(\vec{\omega}_b \cdot \vec{\omega}_{wu}) \overbrace{(\vec{r}_{bu} \cdot \vec{r}_{wu})}^{-1} - (\vec{\omega}_b \cdot \vec{r}_{wu}) \overbrace{(\vec{r}_{bu} \cdot \vec{\omega}_{wu})}^0] \\ \omega_w &= -\frac{r_b}{r_w} \vec{\omega}_{wu} \vec{\omega}_b \end{aligned}$$

Literatura

- [1] VEX Robotics, Wheels Motion Robotics [online]. poslední aktualizace 7. 4. 2016 [cit. 7. 4. 2015]. Dostupné z: <http://www.vexrobotics.com/vexedr/products/accessories/motion/edr-wheels.html>.
- [2] Otočení. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2006, poslední aktualizace: 8. 9. 2015 v 19:00 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Oto%C4%8Den%C3%AD#Matice_rotace.
- [3] Angular velocity. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2006, poslední aktualizace: 12:41, 13 April 2016 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor.
- [4] Arduino - ArduinoBoardNano . In: *Arduino Website* [online]. 2008, poslední aktualizace: APRIL 3, 2016 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <https://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardNano>.
- [5] Change of basis. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2004, poslední aktualizace: 21:55, 12 April 2016 [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Change_of_basis#Change_of_coordinates_of_a_vector.
- [6] VNH5019 Motor Driver Carrier. In: *Pololu Robotics and Electronics* [online]. 2013, poslední aktualizace: SEPTEMBER 5, 2015 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <https://www.pololu.com/product/1451>.
- [7] Interaction Design Lab Potsdam. *Fritzing 0.9.2b* [software]. [přístup: 1. května 2016]. Dostupné z: <http://fritzing.org/>. Požadavky na systém: Mac OS X, Linux, Windows.
- [8] Inverted pendulum. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2006, poslední aktualizace: 12:41, 13 April 2016 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverted_pendulum#Equations_of_motion.
- [9] Metal Gearmotor 25Dx54L mm HP 6V with 48 CPR Encoder. In: *Pololu Robotics and Electronics* [online]. 2013, poslední aktualizace: JANUARY 15, 2016 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <http://www.pololu.com/catalog/product/2270>.

-
- [10] Kinematics. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2002, poslední aktualizace: 23:30, 26 April 2016] [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Kinematics#Relative_velocity.
- [11] Pololu Step-Down Voltage Regulator D15V70F5S3. In: *Pololu Robotics and Electronics* [online]. 2013, poslední aktualizace: MARCH 1, 2016] [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <https://www.pololu.com/product/2111>.
- [12] Vector algebra relation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2010, poslední aktualizace: 18:51, 27 December 2015] [cit. 2015-05-06]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_algebra_relations#Addition_and_multiplication_of_vectors.
- [13] P. Fankhauser and C. Gwerder. *Modeling and Control of a Ballbot*. Bachelor thesis, ETH Zurich, 2010.
- [14] M. Jonason Bjärenstam and M. Lennartsson. *Development of a ball balancing robot with omni wheels*. PhD thesis, 2012.
- [15] T. Lauwers, G. Kantor, and R. Hollis. One is enough. In *Proc. of 2005 International Symposium of Robotics Research*, pages 12–15, 2005.
- [16] J. Melichar. Lineární systémy 1, 2011. Pomocný učební text. ZČU. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/cs/courses/ls1>.
- [17] J. Melichar. Lineární systémy 2, 2011. Pomocný učební text. ZČU. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/cs/courses/ls2>.