

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Kuželosečky v kruhové inverzi
DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jan Kocourek
Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Te

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 27. června 2016

.....
vlastnoruční podpis

Rád bych na tomto místě vyjádřil své poděkování vedoucímu své práce PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph. D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, ochotu a vstřícnost po celou dobu studia.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

ZDE SE NACHÁZÍ ROZHODNUTÍ O NÁHRADNÍM TERMÍNU
ODEVZDÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

Úvod.....	2
1 Kruhová inverze.....	4
1.1 Historie kruhové inverze	4
1.2 Definice kruhové inverze.....	6
1.3 Vlastnosti kruhové inverze	11
1.4 Aplikace kruhové inverze	16
1.4.1 Apolloniovy úlohy.....	16
1.4.2 Úlohy s omezenou nákresnou	19
2 Kuželosečky	20
2.1 Historický úvod.....	20
2.2 Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše.....	21
2.3 Regulární kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností	23
2.3.1 Elipsa	23
2.3.2 Hyperbola	24
2.3.3 Parabola	25
2.4 Společné vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly.....	26
3 Kuželosečky v kruhové inverzi.....	28
3.1 Elipsa	28
3.2 Hyperbola	34
3.3 Parabola	42
3.4 Tabulkový přehled.....	44
3.5 Rovinné křivky a jejich historie	45
3.5.1 Kartézský ovál.....	45
3.5.2 Pascalova závitnice	46
3.5.3 Dioklova kisoída.....	48
3.5.4 Bernoulliho lemniskáta.....	49
3.5.5 Přímá strofoída	50
3.5.6 Maclaurinův trisektris.....	51
3.5.7 Kardioida	52
Závěr.....	54
Resumé.....	55
Seznam literatury	56
Seznam obrázků, tabulek	59
Přílohy	I

Úvod

Tato práce spojuje dvě jinak samostatná témata, kruhovou inverzi a studium rovinných křivek. Kruhová inverze je rovinné zobrazení, které zobrazuje kruhové křivky (přímky, kružnice) opět na kruhové křivky. Této vlastnosti je využito při vyšetřování rovinných křivek - regulárních kuželoseček.

V první kapitole je z historického hlediska uveden pojem kruhové inverze a rozdílný pohled a přístup na toto zobrazení v průběhu věků. Dále je zde definována kruhová inverze včetně několika vět, které jsou i dokázány. Kapitola se také věnuje vlastnostem kruhové inverze, jakým je např. involuce. Závěr kapitoly patří aplikaci kruhové inverze v konstrukčních úlohách. Uveden je zde jeden příklad z Apolloniových úloh, což jsou úlohy, ve kterých máme třem zadaným objektům z výběru bod, přímka, kružnice sestrojiti kružnici, která se dotýká všech třech zadaných objektů. Druhým typem úloh, kdy využíváme kruhovou inverzi, jsou zadání v omezené nákresně, kde kruhová inverze stojí jako alternativa ke stejnolehlosti a mocnosti bodu ke kružnici.

Druhá kapitola se věnuje nejprve historickému pohledu na kuželosečky starověkými Řeky až po pojetí kuželoseček jakožto součást analytické geometrie. Dále je zavedena definice kuželoseček jako rovinných řezů na kulové ploše, množin bodů daných vlastností a vlastností geometrických. Tuto kapitolu uzavírají společné vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly.

V poslední kapitole se nachází samotné téma této diplomové práce *Kuželosečky v kruhové inverzi*. Rozlišovány jsou zde jednotlivé druhy regulárních kuželoseček (elipsa, hyperbola, parabola), ale i centrum kruhové inverze. Při zvětšování poloměru kružnice kruhové inverze nás zajímá nejen vzniklá křivka, ale také počet dotyků s inverzní křivkou, počet průsečíků a zda křivka nebude procházet nějakými významnými body. Všechny tyto poznatky jsou rozděleny na jednotlivé případy a vzniklé křivky souhrnně sepsány do tabulky. Závěr kapitoly se zabývá nejen názvy obrazů kuželoseček, ale i tím kdo je objevil, jaké jsou jejich rovnice a použití v reálném světě.

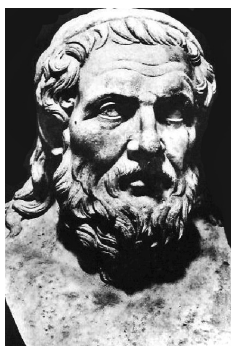
Těžištěm této práce je vytvoření interaktivních dynamických figur, které jsou vytvořeny pomocí programu *Geogebra* a nacházejí se jako volné přílohy na CD. Při vytváření obrazu kuželoseček v kruhové inverzi se nemusíme spoléhat jen na statickou podobu těchto křivek

ve formě obrázků (viz. 3. kapitola), ale můžeme shlédnout dynamické interaktivní figury, které za sebou zanechávají stopu obrazu.

1 KRUHOVÁ INVERZE

1.1 HISTORIE KRUHOVÉ INVERZE

Prvním, kdo uvažoval o kruhové inverzi byl řecký geometr, matematik a astronom Apollonios z Pergy (asi 262 př. n. l. – 190 př. n. l.), který se tímto pojmem zabýval ve svém pojednání *Rovinná místa*¹. Jak ukazuje Pappos (290 – 350 n.l.), Apollonios zde pravděpodobně jako první definoval geometrickou transformaci – homotetii a inverzi, když převáděl rovinná místa opět na rovinná místa. Z Apolloniových úvah vycházel Descartes a Fermat při vytváření analytické geometrie.



Obrázek 1: Apollonios z Pergy

Po Apolloniových úvahách nastupuje dlouhé období, kdy byla kruhová inverze v rámci matematiky řadu let opomíjena. Blíže se jí věnoval až švýcarský geometr Jakob Steiner (18. 3. 1796 – 1. 4. 1863), jenž v roce 1824 uvedl kruhovou inverzi v plné obecnosti.

Jeho pojednání věnované inverzní geometrii však nebyla publikována a našla se až v jeho pozůstalosti.

¹ Pojednání sestávalo ze dvou knih, autor v nich provedl klasifikaci geometrických míst, speciální pozornost přitom věnoval „rovinným místům“, tj. přímkám a kružnicím.



Obrázek 2: Jacob Steiner



Obrázek 3: August Ferdinand Möbius

Dalším, kdo přispěl k rozvoji kruhové inverze byl belgický matematik Adolphe Quetelet (22. 2. 1796 – 17. 2. 1874) jenž roku 1827 odvodil analytické vyjádření kruhové inverze. Italský matematik Giusto Bellavitis (22. 11. 1803 – 6. 11. 1880) sepsal roku 1836 patrně první systematickou studii o kruhové inverzi nazvanou *Teorie inverzních útvarů a její využití v elementární geometrii*. V této studii zformuloval definici inverze a vyložil její základní vlastnosti. Později pojem inverze zobecnil do trojrozměrného prostoru. Skotský fyzik William Thomson (26. 6. 1824 – 17. 12. 1907), známý spíše pod jménem lord Kelvin, v letech 1845 - 1847 v rámci studia elektrostatiky hovořil o transformaci s reciprokými průvodiči a své fyzikální úvahy rozšířil na geometrický prostor.

Studium kruhové inverze završil až německý matematik a astronom August Ferdinand Möbius (17. 11. 1790 – 26. 9. 1868), který v roce 1855 ve své práci² provedl zobecnění inverze. Pomocí čistě geometrických prostředků stanovil základy obecné bodové transformace roviny, která kružnice opět zobrazuje na kružnice a položil tak základy kruhové transformace.

Na Möbiovy výsledky dále navázal německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss (30. 4. 1777 – 23. 2. 1855), který odvodil analytické vyjádření kruhových transformací v komplexní rovině. To, že každá kruhová transformace je složením kruhové inverze v Möbiově rovině a libovolného pohybu, ukázal až britský matematik Arthur Cayley (16. 8. 1821 – 26. 1. 1895).

² *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung.*

Zobecnění teorie kruhových transformací do trojrozměrného prostoru představoval teorém francouzského matematika Josepha Liouvillea (24. 3. 1809 – 8. 9. 1882) - Liouvilleův teorém³.

1.2 DEFINICE KRUHOVÉ INVERZE

Definice 1.2.1

K euklidovské rovině \mathbb{E}_2 přidáme jeden prvek – tzv. **nevlastní bod** (značíme P_∞ , popř. jen ∞), je prvkem každé přímky a leží vně každé kružnice roviny \mathbb{E}_2 . Množina $\mathbb{M}_2 = \mathbb{E}_2 \cup \{P_\infty\}$ se nazývá **Möbiova rovina**. Bodům roviny \mathbb{E}_2 říkáme body vlastní. Přímky roviny doplněné o bod nevlastní se nazývají **rozšířené přímky**.

O jiné definici kruhové inverze uvažuje (Šedivý, 1987), který považuje za známé znalosti rovnosti a operace sčítání a násobení komplexních čísel. Dále potom pojem komplexně sdruženého čísla k číslu z , který značí \bar{z} . Definice kruhové inverze v jeho podání, pak vypadá následovně.

Definice 1.2.2: Necht' $z, z_0 \in E_2, z \neq z_0$ a necht' $|z - z_0| = r$, potom zobrazení $\mathfrak{I}: E_2 \rightarrow E_2$, ve kterém

$$\mathfrak{I}(z) = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$$

nazýváme kruhová inverze. Bod z_0 nazýváme středem, číslo r poloměrem a kružnici (z_0, r) určující kružnici kruhové inverze.

Šedivý kruhovou inverzi jednoduše zapisuje ve tvaru (z_0, r) . Z definice 1.2.2 dále vyplývá, že kruhová inverze není jednoznačné zobrazení roviny na sebe, protože pro $z = z_0$ zobrazení \mathfrak{I} není definováno, takže střed kruhové inverze v zobrazení \mathfrak{I} nemá obraz.

³ Teorém byl publikován v jednom z dodatků pátého vydání Mongeovy knihy *Application de l'analyse á la géométrie*.

Věta 1.2.3: Kruhá inverze (z_0, r) je involutorní zobrazení.

Důkaz: Necht' $z \neq z_0$ je libovolné komplexní číslo, potom pro jeho obraz podle definice 1.2.2 platí:

$$\mathfrak{F}(z) = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}.$$

Označme

$$Z = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$$

potom

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(Z) &= z_0 + \frac{r^2}{Z - z_0} = z_0 + \frac{r^2}{z_0 + \frac{r^2}{z - z_0} - z_0} = \\ &= z_0 + \frac{r^2}{\frac{z_0(\overline{z - z_0}) + r^2 - z_0(\overline{z - z_0})}{\overline{z - z_0}}} = z_0 + \frac{r^2(z - z_0)}{r^2} = z \end{aligned}$$

tedy

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(z)) = z.$$

Tímto jsme dokázali větu 1.2.3 a i to, že body z a $\mathfrak{F}(z)$ jsou navzájem inverzní.

Věta 1.2.4: V kruhové inverzi (z_0, r) leží obraz $\mathfrak{F}(z)$ bodu z na polopřímce z_0z .

Důkaz: Necht' $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0$, potom

$$\mathfrak{F}(z) = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$$

můžeme přepsat do tvaru

$$\mathfrak{F}(z) = z_0 + \frac{r^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (z - z_0).$$

Výše uvedená rovnice je parametrickým vyjádřením přímky určené body (komplexními čísli) z_0, z . Protože je parametr této rovnice vždy kladný, tak $\mathfrak{F}(z)$ leží na polopřímce z_0z .

Definice 1.2.5: Přímky a kružnice označujeme společným názvem kruhové křivky.

Dále uvedeme některá základní fakta platící o kruhových křivkách v rovině \mathbb{M}_2 . Necht' p, q jsou kruhové křivky, potom:

- p je rozšířená přímka, právě když $P_\infty \in p$, v opačném případě jde o kružnici;
- jsou-li p, q rozšířené přímky, potom se vždy protínají alespoň v jednom bodě;
- p, q se vždy protínají nejvýše ve dvou bodech;
- libovolné tři body jednoznačně určují kruhovou křivku.

K poslednímu bodu definice 1.2.5 je ještě nutné dopsat poznámku. Je-li jeden z bodů A, B, C nevlastní, potom je danou kruhovou křivkou rozšířená přímka. V opačném případě musíme ještě rozlišovat, zda jsou body A, B, C kolineární. Potom je kruhovou křivkou opět rozšířená přímka, anebo nekolineární – potom je daná kruhová křivka kružnicí opsanou $\triangle ABC$.

Pro využití kruhové inverze v konstrukční geometrii uvedeme definici kruhové inverze, která je rovnocenná s definicí 1.2.2, přičemž v ní nejvíce vynikne geometrická stránka tohoto zobrazení.

Nejdříve upravíme rovnici

$$\mathfrak{F}(z) = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$$

do tvaru

$$[\mathfrak{F}(z) - z_0](\overline{z - z_0}) = r^2.$$

Potom je zřejmé, že komplexní čísla $\mathfrak{F}(z) - z_0, z - z_0$ mají stejnou amplitudu a amplitudy komplexních čísel $\mathfrak{F}(z) - z_0, \overline{z - z_0}$ se liší jen znaménkem. Proto můžeme rovnici

$$[\mathfrak{F}(z) - z_0](\overline{z - z_0}) = r^2$$

přepsat ve tvaru

$$[\mathfrak{F}(z) - z_0](\overline{z - z_0}) = |\mathfrak{F}(z) - z_0| \cdot |\overline{z - z_0}| = r^2.$$

Rovnost této rovnice je zřejmá, protože komplexní čísla násobíme v goniometrickém tvaru.

Víme, že pro komplexní čísla

$$a = |a|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$b = |b|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

platí

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

V našem případě je $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, a proto $a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

Definice 1.2.6: Necht' je dána kružnice ω se středem S a poloměrem r . Uvažujme zobrazení $INV(\omega)$ v Möbiově rovině $\mathbb{M}_2 = \mathbb{E}_2 \cup \{P_\infty\}$, které je určeno následujícím předpisem:

- i. Obrazem bodu S je nevlastní bod P_∞ .
- ii. Obrazem nevlastního bodu P_∞ je bod S .
- iii. Obrazem bodu $X \neq S, P_\infty$ je bod X' takový, že $X' \in \rightarrow SX$ a současně

$$|SX'| \cdot |SX| = r^2.$$

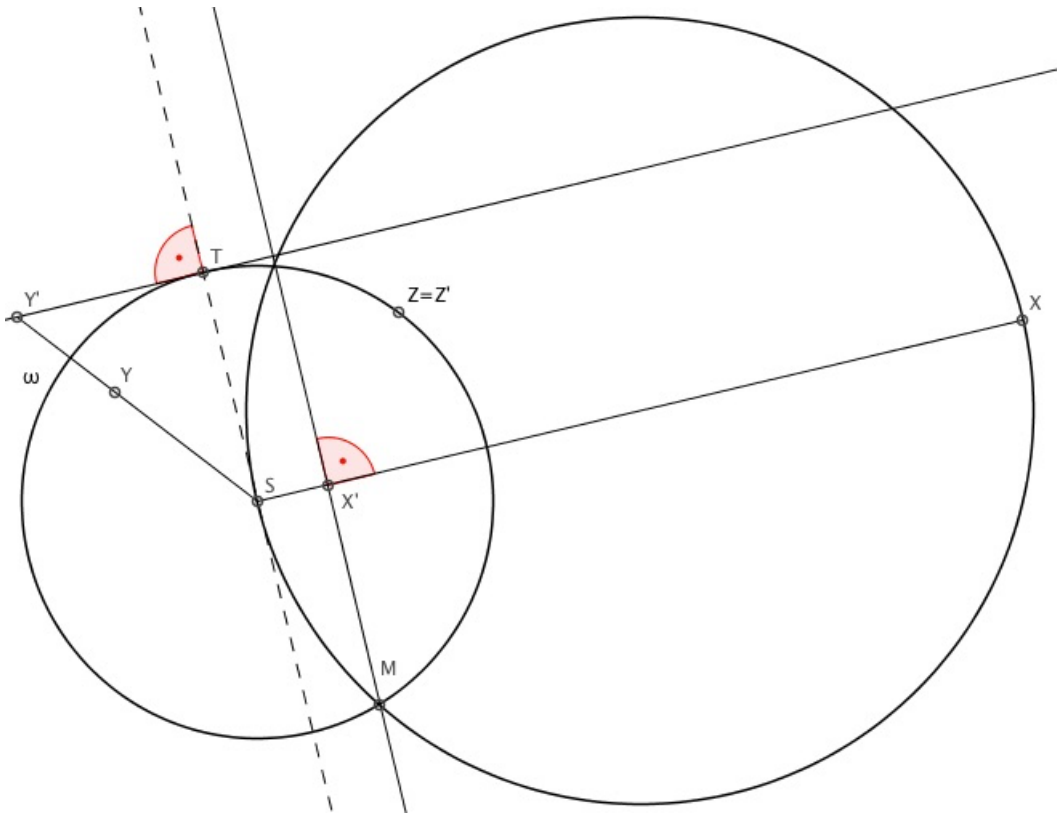
Zobrazení $INV(\omega)$ se nazývá **kruhová inverze (inverze podle kružnice)**, kružnice ω se nazývá **základní kružnice inverze**, bod S nazýváme **střed kruhové inverze** a kladné číslo r^2 je **koeficient kruhové inverze**.

Z rovnosti $|SX'| \cdot |SX| = r^2$ vyplívá konstrukce obrazu X' daného vzoru X . Necht' kruhová inverze je dána určující kružnicí $\omega(S, r)$, potom konstrukce obrazu bodu, který může být vnější nebo vnitřní bod kružnice ω , resp. bodem kružnice ω , je taková:

- a) Necht' bod X je vnější bod kružnice ω (Obrázek 4). Tak nad průměrem SX sestrojíme Thaletovu kružnici k a bodem $M = k \cap \omega$ vedeme kolmici g na SX , tak $g \cap SX = X'$. Pravdivost konstrukce vyplývá z Euklidovy věty o odvěsň v pravoúhlém trojúhelníku SMX .
- b) Necht' $Y \neq S$ je vnitřní bod kružnice ω (Obrázek 4). Stačí, když bodem Y sestrojíme kolmici g na SY , potom tečna t ke kružnici ω sestrojena v bodě $T = g \cap \omega$ protíná polopřímku SY v bodě Y' . Odůvodnění této konstrukce je stejné jako v části za a).
- c) Necht' $Z \in \omega$, potom podle $|SX'| \cdot |SX| = r^2$ platí

$$|SZ'| \cdot |SZ| = r^2$$

čili $|SZ'| = r$. Protože Z' patří polopřímce SZ , tak $Z = Z'$, tak všechny body Z kružnice ω jsou samodružné.



Obrázek 4

Konstrukci bodu Y' bychom nemuseli opisovat tak, jako jsme uváděli v b), protože kruhová inverze je podle věty 1.2.3 involutorní zobrazení.

1.3 VLASTNOSTI KRUHOVÉ INVERZE

U uváděných vět v této části kapitoly předpokládáme, že kruhová inverze je dána určující kružnicí $\omega(S, r)$. Především si všimneme, že obrazy vnějších (vnitřních) bodů kružnice ω jsou vnitřní (vnější) body kružnice ω . Uvedená vlastnost vyplývá z konstrukce bodu, který je obrazem daného vzoru.

Věta 1.3.1: Necht' v kruhové inverzi jsou body $X \neq S$ a X' navzájem inverzní a různé.

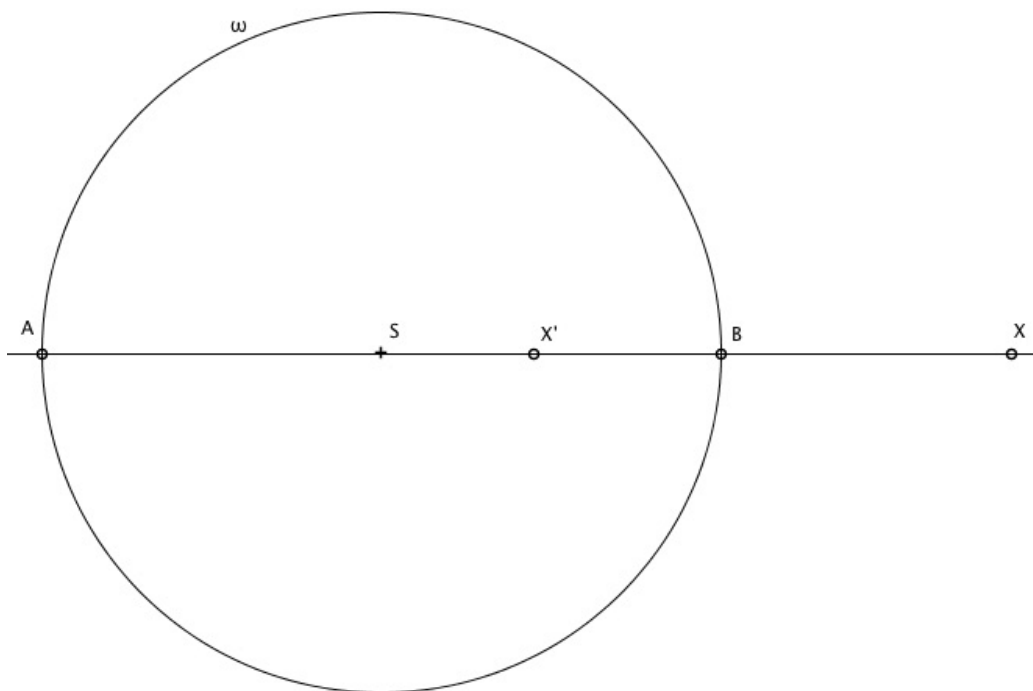
Necht' A, B jsou průsečíky přímky XX' s určující kružnicí ω , potom pro dvojpoměr navzájem různých bodů A, B, X, X' v napsaném pořadí platí:

$$\delta(ABXX') = -1 .$$

Důkaz (Obrázek 5): Dvojpoměr $\delta(ABXX')$ můžeme upravit na tvar

$$\delta(ABXX') = \lambda(ABX) : \lambda(ABX'),$$

kde $\lambda(ABX)$, resp. $\lambda(ABX')$ jsou dělicí poměry bodů A, B, X , resp. A, B, X' v napsaném pořadí ([4], str. 228).



Obrázek 5

Na přímce AB zvolíme souřadnicovou soustavu s počátkem v bodě S a nechť bod X má souřadnici u , kterou zapíšeme $X[u]$, dále nechť $X'[u']$, $B[r]$, $A[-r]$, potom

$$\lambda(ABX) = \frac{u+r}{u-r}, \quad \lambda(ABX') = -\frac{u'+r}{r-u'}$$

kde $r \neq u$, co vyplývá z předpokladu $A \neq B$. Potom je ale i $r \neq u'$ a také $u \neq u'$.

Na základě předcházejících informací dostáváme

$$\begin{aligned} \delta(ABXX') = \lambda(ABX) : \lambda(ABX') &= \frac{u+r}{u-r} : \frac{u'+r}{u'-r} = \frac{uu' + ru' - ru - r^2}{uu' - ru' + ru - r^2} = \\ &= -\frac{ru' - ru}{ru' - ru} = -1. \end{aligned}$$

Po přepsání dostáváme rovnici, kterou jsme se na začátku snažili dokázat:

$$\delta(ABXX') = -1.$$

V tomto důkazu jsme použili rovnost $uu' = r^2$, která vyplývá z definice kruhové inverze.

Věta 1.3.2: Nechť v kruhové inverzi jsou A', B' obrazy bodů A, B , přičemž S nenáleží přímce AB , potom $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SB'A'|$.

Důkaz (Obrázek 6): Z předpokladu vyplývá

$$|SA| \cdot |SA'| = r^2, \quad |SB| \cdot |SB'| = r^2$$

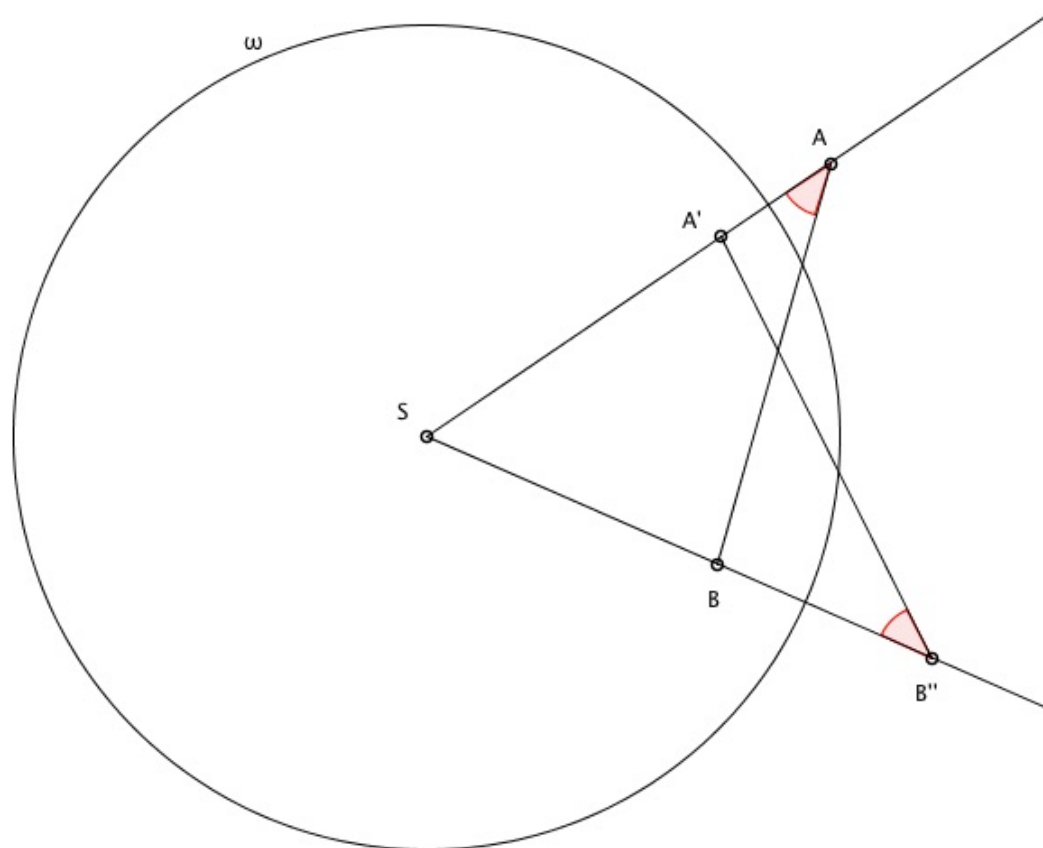
proto

$$|SA| \cdot |SA'| = |SB| \cdot |SB'|$$

$$|SA| : |SB| = |SB'| : |SA'|.$$

Dále platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle B'SA'|$, proto $\Delta SAB \sim \Delta SB'A'$ (podle věty (*sus*)) ([4], str. 229).

Z podobnosti trojúhelníků vyplývá tvrzení této věty.

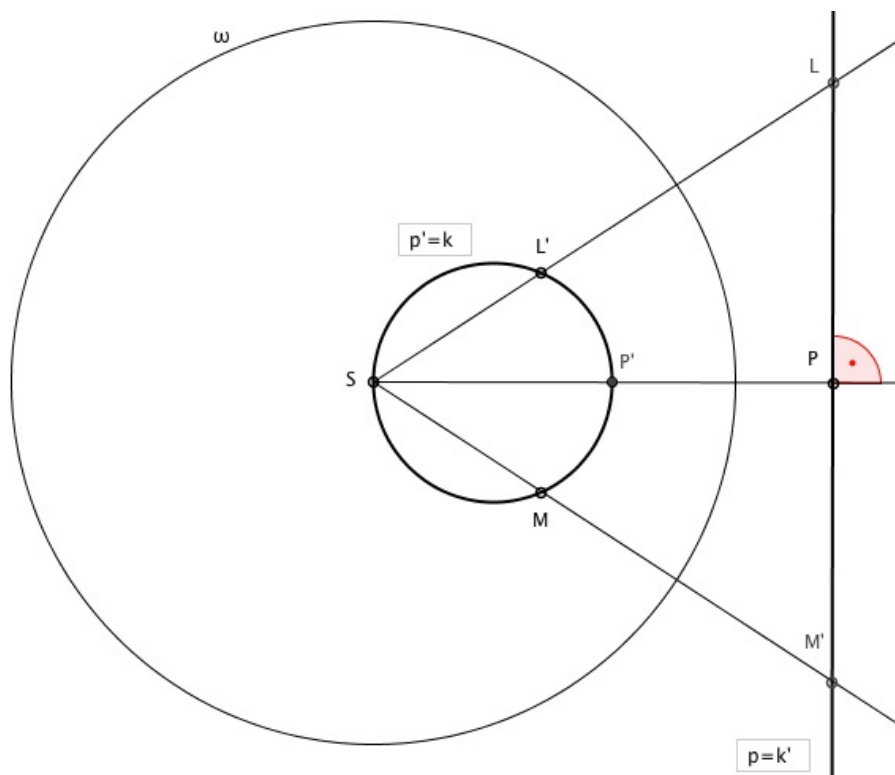


Obrázek 6

Věta 1.3.3: Obrazem každého bodu $X \neq S$ přímky p obsahující střed inverze S je bod na přímce p , t.j. přímka obsahující střed inverze je samodružná jako celek, ne bodově.

Věta 1.3.4: Necht' v kruhové inverzi obrazy čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p procházející středem inverze body A', B', C', D' , přičemž ani jeden bod A, B, C, D se nerovná bodu S , potom $\delta(ABCD) = \delta(A'B'C'D')$.

Věta 1.3.5 (Obrázek 7): Obrazem přímky p , která neprochází středem S kruhové inverze je kružnice p' procházející středem S kruhové inverze – kromě bodu S .



Obrázek 7

Důkaz (Obrázek 7): Nechť P je pata kolmice sestavená bodem S na přímku p , P' je obraz v kruhové inverzi. Nechť $L \in p$ je libovolný bod, potom podle věty 1.3.2 platí

$$|\sphericalangle SPL| = |\sphericalangle S'LP'|.$$

Protože $|\sphericalangle S'LP'|$ je pravý, podle Thaletovy věty všechny body L' patří kružnici sestavené nad průměrem SP , kromě bodu S .

Zobrazení, ve kterém obrazem přímky není vždy přímka, nazýváme *nelineární*, a proto vzhledem k větě 1.3.5 kruhovou inverzi zařazujeme mezi nelineární zobrazení ([4], str. 230).

Věta 1.3.6: Obrazem kružnice k procházející středem S kruhové inverze, kromě jejího bodu S , je přímka k' , která neprochází středem kruhové inverze.

Věta 1.3.7: Obrazem kružnice k neprocházející středem S kruhové inverze je kružnice k' neprocházející středem S kruhové inverze.

Na závěr kapitoly 1.3 shrneme některé důležité poznatky a věty, které se objevují v této kapitole. Tyto poznatky pro nás budou důležitější v dalších částech této diplomové práce.

- **Přímka p** , která **prochází** středem kruhové inverze S , se zobrazí na **přímku $p' = p$** .
- **Přímka p** , která **neprochází** středem kruhové inverze S , se zobrazí na **kružnici p'** procházející středem kruhové inverze S .
- **Kružnice k** , která **prochází** středem kruhové inverze S , se zobrazí na **přímku k'** , která neprochází středem kruhové inverze S .
- **Kružnice k** , která **neprochází** středem kruhové inverze S , se zobrazí na **kružnici k'** , která neprochází středem kruhové inverze S .

1.4 APLIKACE KRUHOVÉ INVERZE

1.4.1 APOLLONIOVY ÚLOHY

Apolloniova úloha zaujímá mezi všemi planimetrickými úlohami zvláště významné místo nejenom proto, že její řešení vyžaduje znalosti vrcholných vztahů a vlastností, ale i proto, že při jejím řešení bylo objeveno mnoho nových geometrických poznatků. Řecký matematik, fyzik a astronom Apollonios z Pergy (asi 262 př. n. l. – 190 př. n. l.) proslul studiem kuželoseček jako rovinných řezů kuželové plochy, zavedl názvy elipsa, hyperbola a parabola. Dobře znám je i díky své knize "*O dotycích*". Jednalo se o dvousvazkovou práci, která se bohužel nedochovala. Nemůžeme tudíž s určitostí říci, jakým způsobem Apollonios úlohu řešil. Podle francouzského matematika Vièta podal Apollonios obecné řešení dilatací (poměr přírůstku délky úsečky k původní délce úsečky), jak to Vièt uvedl ve svém díle „*Apollonius Gallus...*”.

Definice 1.4.1.1: Necht' jsou dány tři různé prvky (kružnice, přímky, body). Sestrojte kružnici, která se dotýká zadaných kružnic nebo přímek a prochází zadanými body.

Z výše uvedené definice se dá odvodit její možný počet variant. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (bodů, přímek, kružnic), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Tvoříme tedy kombinace s opakováním třetí třídy:

$$C'_k(n) = C'_3(3) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{5}{3} = 10.$$

Celkem můžeme najít 10 typů Apolloniových úloh, přičemž obecná úloha má nejvýše 8 řešení. Je samozřejmé, že každá z úloh zahrnuje opět zvláštní případy (podúlohy), které mohou mít specifické způsoby řešení. Speciálními případy Apolloniových úloh jsou Pappovy úlohy.

Definice 1.4.1.2: Necht' jsou dány tři různé prvky (kružnice, přímky, body), z nichž alespoň jeden je kruhová křivka a alespoň jeden je bod, přičemž tento bod leží na dané kruhové křivce. Sestrojte kružnici, která se dotýká zadané kruhové křivky v daném bodě a dále se dotýká další kruhové křivky nebo prochází dalším zadaným bodem.

Příklad 1.4.1

Je dána přímka p , bod B a kružnice k_1 , která leží v jedné polorovině určené přímkou p tak, že B je vnějším bodem kružnice k_1 . Sestrojte kružnici k , která prochází bodem B a dotýká se přímky p a kružnice k_1 .⁴

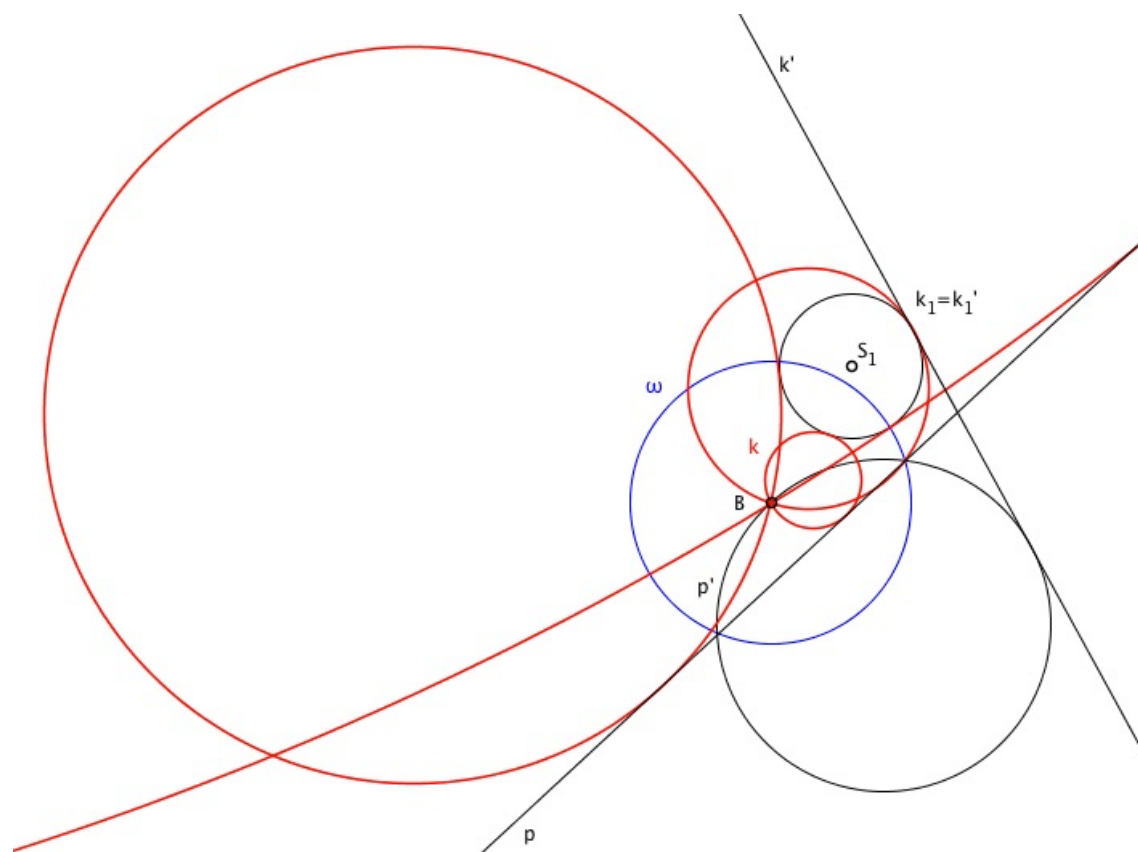
Rozbor:

Jedná se o Apolloniovu úlohu typu Bpk (bod, přímka, kružnice). Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Sestrojíme přímku p , bod B a kružnici k_1 podle výchozího zadání úlohy. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě B a libovolným poloměrem r , tak aby $\omega \perp k_1$. Potom se v kruhové inverzi přímka p zobrazí do kružnice p' , kružnice k_1 do kružnice k_1' a hledaná kružnice, protože má procházet středem inverze, do přímky k' . Přímka k' , vzhledem k požadovaným vlastnostem kružnice k , je společnou tečnou kružnic p' , k_1' . Tímto se původní úloha změnila na řešení úlohy: K dvěma daným kružnicím sestrojte společnou tečnu. Pokud k přímce k' sestrojíme inverzní tvar, kterým je kružnice k , dostáváme kružnici s hledanými vlastnostmi.

Popis konstrukce:

- 1) B, p, k_1 - podle zadání
- 2) ω ; $\omega(B, r)$ - libovolná velikost r , tak aby $\omega \perp k_1$
- 3) $\text{Inv}(\omega)$: p přímka $\rightarrow p'$ kružnice, k_1 kružnice $\rightarrow k_1'$ kružnice
- 4) k ; společné tečny kružnic p', k_1'
- 5) $\text{Inv}(\omega)$: k' přímka $\rightarrow k$ kružnice

⁴ (přeloženo z [4], str. 239 - 240)



Obrázek 8

Diskuse:

Úloha má čtyři řešení, což vyplývá z bodu 4 zápisu konstrukce a rozboru - přímka p nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod, tudíž i kružnice p' a k_1' nemají žádný společný bod - takovýmto kružnicím lze sestavit čtyři společné tečny.

1.4.2 ÚLOHY S OMEZENOU NÁKRESNOU

V předchozím příkladu jsme předpokládali, že nákresna, na které provádíme konstrukce je neomezená. Je-li však nákresna omezená – což samozřejmě ve skutečnosti je (papír, tabule, ...), musíme v některých případech určité konstrukce přizpůsobit konkrétní situaci. V úlohách na omezené nákresně využíváme stejnolehlosti, podobnosti, mocnosti bodu ke kružnici a kruhové inverze. Na následujícím příkladu si ukážeme, jak pomocí kruhové inverze řešit takovéto úlohy.

Příklad 1.4.2

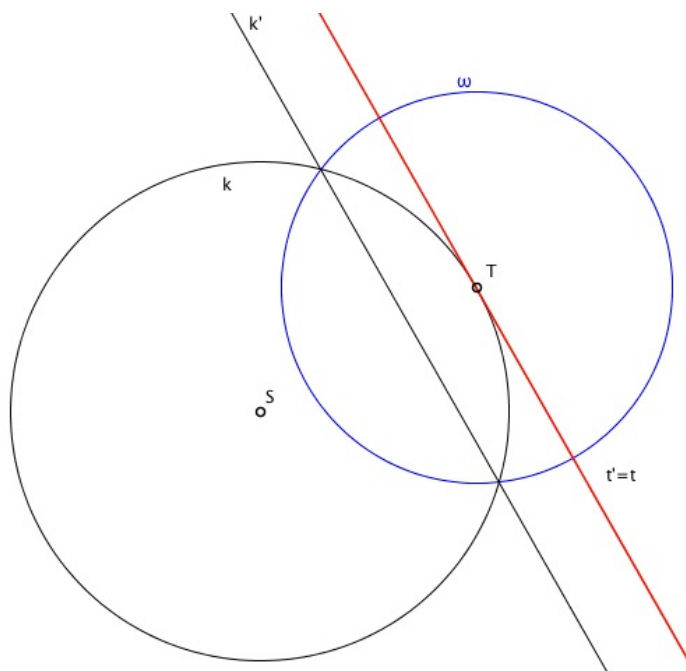
Je dána kružnice k , jejíž střed je nepřístupný. V daném přístupném bodě T sestrojte tečnu kružnice k .⁵

Rozbor:

V kruhové inverzi se středem T přejde zadaná kružnice k na přímku k' , bod T na nevlastní bod ∞ a tečna t procházející středem inverze T je samodružná, tj. $t'=t$. Kruhové křivky k a t se dotýkají v bodě T , a proto přímky k' a t' jsou rovnoběžné. Přímka $t'=t$ tedy prochází bodem T a je rovnoběžná s přímkou t' .

Popis konstrukce:

- 1) k ; $k(S, r)$ - podle zadání
- 2) ω ; $\omega(T, r)$ - libovolná velikost r
- 3) $\text{Inv}(\omega)$; k kružnice \rightarrow
 k' přímka
- 4) t' ; $t' \parallel k' \wedge t' \cap T$



Obrázek 9

Diskuse:

Tato úloha má právě 1 řešení.

⁵ ([16], str.6)

2 KUŽELOSEČKY

2.1 HISTORICKÝ ÚVOD

Mezi první starověké autory, kteří se zabývali pojmem kuželosečka, patřil řecký matematik a geometr Meneachmus (asi 380 př. n. l – 320 př. n. l). Ten se snažil vyřešit jeden ze tří starověkých antických konstrukčních problémů, který vede na pojem kuželosečka, tzv. *Délský problém*. Meneachmos si byl při jeho řešení vědom, že každá kuželosečka je průnikem nějaké kuželové plochy. Názvy, které v dnešní době pro kuželosečky užíváme, zavedl počátkem 2 st. př. n. l. Apolonios z Pergy. Ten ve svém osmisvazkovém díle *Kuželosečky* podal nové definice a změnil dosavadní pohled na tyto rovinné křivky. Kužel definoval jako těleso, které vznikne pohybem bodu přímky po kružnici, když je tato přímka v jiném bodě upevněna. Kuželosečky pak definoval pomocí řezů kuželu rovinou, ale také je chápal jako geometrické místo bodů určitých vlastností.

Dalším, kdo se zasloužil o rozkvět teorie kuželoseček, byl německý matematik, astrolog a astronom Johannes Kepler (1571 – 1630). Ten, mj. také několik let působil v Praze, na základě svých pozorování objevil, že se planety pohybují po eliptických drahách, které mají jedno ohnisko ve středu Slunce. Keplerovy myšlenky byly později v 17. století potvrzeny anglickým matematikem a fyzikem Isaacem Newtonem (4. 1. 1643 – 31. 3. 1728). Užitím Newtonova gravitačního zákona se dá dokázat, že i družice Země se pohybují po kuželosečkách, v tomto případě je jedním ohniskem Země.



Obrázek 10: René Descartes

O pohled na kuželosečky jako součást analytické geometrie se zasloužil francouzský filozof, matematik a fyzik René Descartes (31. 3. 1596 – 11. 2. 1650), který ve svém spisu *Géometrie* uvádí některé rovnice druhého stupně, jež považuje za rovnice kuželoseček.

2.2 KUŽELOSEČKY JAKO ŘEZY NA KUŽELOVÉ PLOŠE

Název kuželosečka, jak je uvedeno v kapitole 2.1, napovídá, že tyto křivky je možné získat jako rovinné řezy kuželové plochy. Nejprve definujme pojem rotační kuželové plochy.

Definice 2.2.1: Necht' je v euklidovském prostoru \mathbb{E}_3 dán pevný bod V , pevná přímka o procházející bodem V a úhel $\alpha = \angle(o, a)$, kde $a \neq o$, $a \not\perp o$ je libovolná přímka procházející bodem V . **Rotační kuželovou plochou** $\kappa(V, o, \alpha)$ rozumíme množinu všech přímek (tzv. **povrchových přímek**), které svírají s přímkou o (osou kuželové plochy) úhel o velikosti α . Bod V se nazývá **vrchol** kuželové plochy.

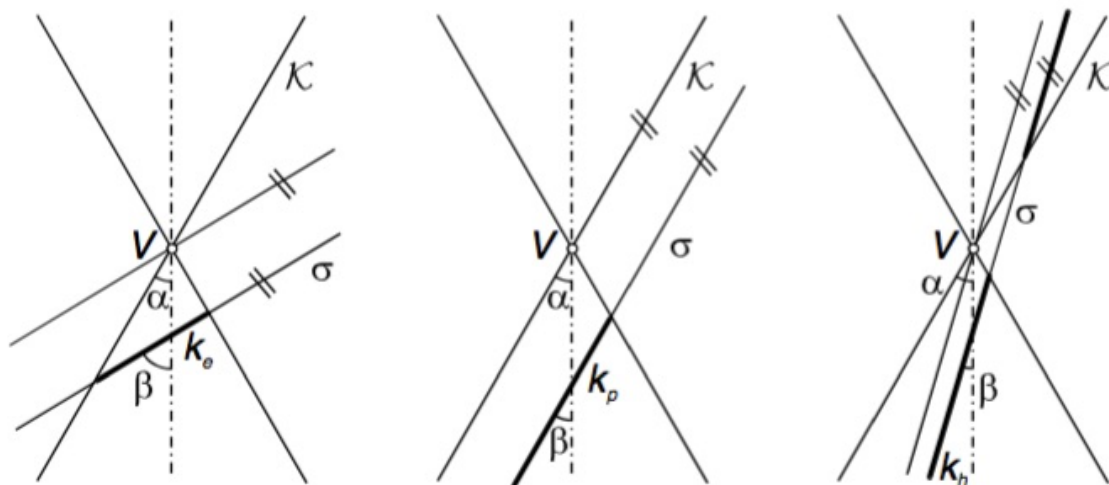
Rozlišujeme následující dva případy:

- 1) rovina σ je vrcholová ($V \in o$),
- 2) rovina σ není vrcholová ($V \notin o$).

V prvním případě dostaneme řezem kuželosečku, která se nazývá **singulární**, v druhém, která se nazývá **regulární**. Označíme-li $\beta = \angle(o, \sigma)$, potom v závislosti na velikostech úhlů α a β nastává následující případ.

Není-li rovina σ vrcholová ($V \notin o$), potom pro průsečnou křivku k platí:

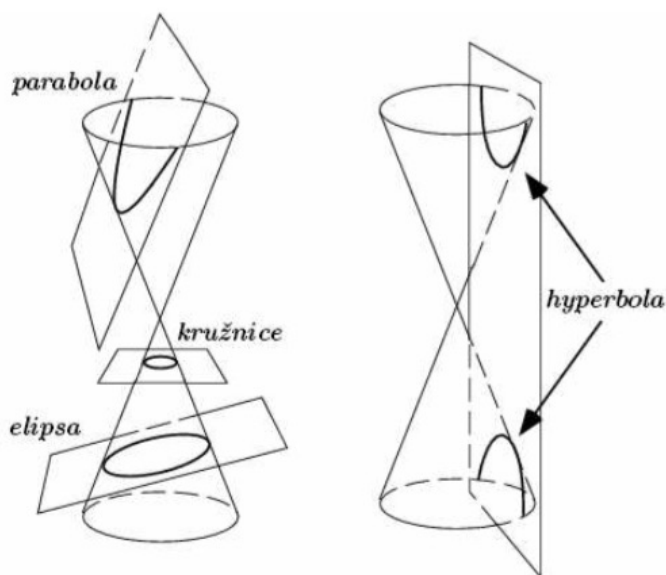
- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je **elipsa** (příčemž pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ je k kružnice)
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je **parabola**
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je **hyperbola**.



Obrázek 11: elipsa, parabola, hyperbola

Věta 2.2.2: Řezem na rotační kuželové ploše rovinou, která není vrcholová je kuželosečka, jejímiž ohnisky jsou dotykové body kulových ploch, které lze vepsat do kuželové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu. Jestliže rovina protíná všechny povrchové přímky kuželové plochy, je řezem **elipsa** (je-li rovina navíc kolmá k ose plochy, potom je řezem kružnice jakožto speciální případ elipsy – dotykové body vepsaných kulových ploch potom splývají). Je-li rovina řezu rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou plochy, je řezem **parabola** (do kuželové plochy lze vepsat jedinou kulovou plochu splňující dané podmínky). Je-li rovina řezu rovnoběžná se dvěma povrchovými přímkami plochy, je řezem **hyperbola** a ony povrchové přímky udávají směry asymptot.

Pro lepší představivost poznatků, které jsme uvedli v předchozí větě, použijeme obrázku níže, kde jsou jednotlivé řezy na rotační kuželové ploše lépe vidět.



Obrázek 12

2.3 REGULÁRNÍ KUŽELOSEČKY JAKO MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ

Prozatím jsme se zabývali kuželosečkami jako rovinnými křivkami, které vzniknou řezem rotačních kuželových ploch rovinami, které neprochází jejich vrcholem. Nyní definujeme kuželosečky jako množiny bodů s jistými vlastnostmi. Jako jednoduchý příklad, který je nám již znám, můžeme uvést definici kružnice jako množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevně zvoleného bodu. Podobně definujeme i ostatní regulární kuželosečky. K tomu poznamenejme, že všechny jsou definovány pomocí pojmu vzdálenosti, takže skutečnost, že mají rovnice s kvadratickými členy je vlastně dána už tím, že vzdálenost se v rovině počítá pomocí vzorce obsahující druhé mocniny.

V následujícím textu se zaměříme na základní geometrické vlastnosti regulárních kuželoseček. Podrobně si, ale nebudeme odvozovat různé vzorce a rovnice specifické pro daný typ kuželosečky, resp. její speciální geometrické polohy. Tyto polohy lze odvodit z algebraických rovnic.

2.3.1 ELIPSA

Definice 2.3.1.1: Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností $2a$, nazýváme **elipsa**;

tj.

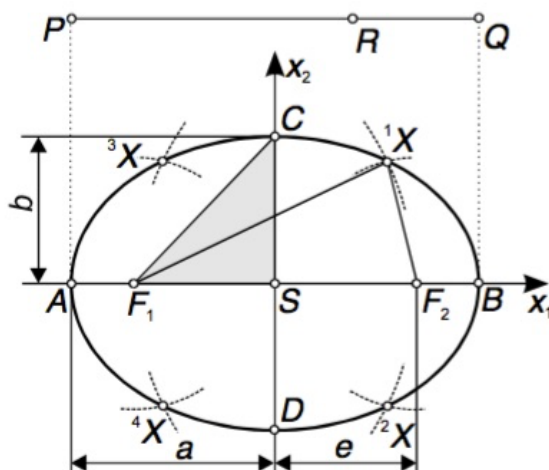
$$k_e = \{X \in \mathbb{E}_2 : |XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{konst.}, 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$

Dané pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**⁶, spojnicím XF_1 a XF_2 říkáme **průvodiče**. Střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed elipsy**. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost (excentricita)** a označuje se e

$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

Přímku AB nazýváme **hlavní osa** (týmž názvem označujeme i vzdálenost $|AB|$) a její průsečíky s elipsou nazýváme **hlavní vrcholy** elipsy, označujeme A a B . Kolmice k hlavní ose vedená středem se nazývá vedlejší osa elipsy a její průsečíky s elipsou nazýváme **vedlejší vrcholy** elipsy, označujeme C a D . Konstantě a se říká velikost hlavní poloosy elipsy, konstantě b velikost vedlejší poloosy.

⁶ F – zkr. *focus*, z lat. *ohnisko*.



Obrázek 13: Elipsa

Kdybychom v definici elipsy připustili i možnost, že ohniska F_1, F_2 splynou, potom by se mezi elipsy zařadila i *kružnice* jakožto speciální případ elipsy s nulovou výstředností.

2.3.2 HYPERBOLA

Definice 2.3.2.1: Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $2a$, nazýváme **hyperbola**;

tj.

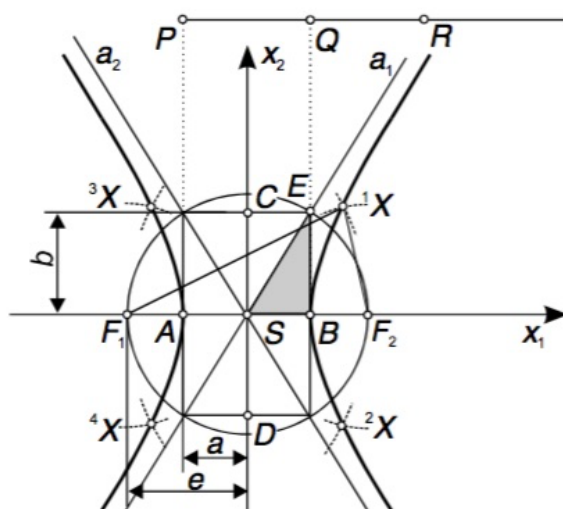
$$k_h = \{X \in \mathbb{E}_2 : ||XF_1| - |XF_2|| = 2a = konst., 0 < 2a < |F_1F_2|\}.$$

Tak jako u elipsy označujeme dané pevné body F_1, F_2 **ohniska**, spojnicím XF_1 a XF_2 říkáme **průvodiče** a střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed hyperboly**. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost (excentricita)** a označuje se e

$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

Přímku AB nazýváme **hlavní osa** (týmž názvem označujeme i vzdálenost $|AB|$) a její průsečíky s elipsou nazýváme **vrcholy** hyperboly, označujeme A a B . Kolmice k hlavní ose vedená středem se nazývá **vedlejší osa** hyperboly. Konstantě a se říká velikost hlavní poloosy hyperboly, konstantě b velikost vedlejší poloosy hyperboly a konstantě e excentricita (výstřednost) elipsy:

$$e^2 = a^2 + b^2.$$



Obrázek 14: Hyperbola

Protože neexistuje bod, pro který by současně platilo $|XF_1| - |XF_2| = 2a$ a $|XF_2| - |XF_1| = 2a$, je zřejmé, že hyperbola se skládá ze dvou částí, jímž říkáme **větve hyperboly** a které nemají žádný společný bod.

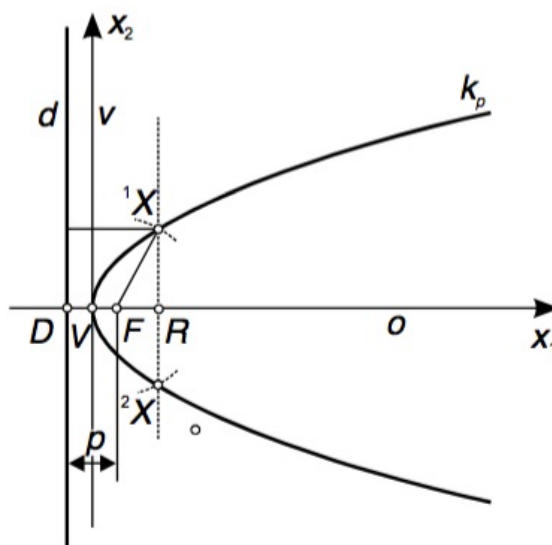
2.3.3 PARABOLA

Definice 2.3.3.1: Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od pevného bodu F a pevné přímky d , jenž tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti, nazýváme **parabola**;

tj.

$$k_p = \{X \in \mathbb{E}_2 : |XF| = |X, d|, \quad F \notin d\}.$$

Pevný bod F se nazývá **ohnisko** a pevná přímka d **řídící (direkční) přímka**. Vzdálenost ohniska od řídící přímky se značí p a nazývá se **parametr**. Kolmici k řídící přímce procházející ohniskem F nazýváme osa paraboly, její průsečík s parabolou vrchol paraboly V .



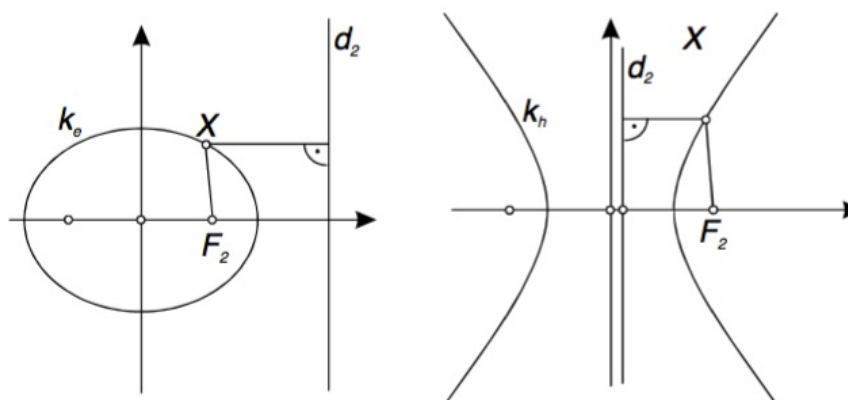
Obrázek 15: Parabola

2.4 SPOLEČNÉ VLASTNOSTI ELIPSY, HYPERBOLY A PARABOLY

Regulární kuželosečky (elipsu, parabolu a hyperbolu) jsme v kapitole 2.2 definovali pomocí řezu kuželovou plochou a v kapitole 2.3 množinově – bodovou definicí. A ačkoliv je každá z těchto křivek zavedena různými definicemi, lze k nim uplatnit jednotný přístup.

Nechť jsou elipsa k_e , resp. hyperbola k_h v základní poloze vzhledem k souřadnému systému, tj. jejich rovnice mají tvar

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \text{ (v případě elipsy), resp. } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \text{ (v případě hyperboly).}$$



Obrázek 16

Pro libovolný bod $X = [x_1, x_2] \in k_e$ (resp. k_h) platí, že jeho vzdálenost od ohniska F_2 je

$$|XF_2| = \left| a - \frac{ex_1}{a} \right| = \frac{|a^2 - ex_1|}{a}.$$

Buď d_2 přímka rovnoběžná s vedlejší osou ve vzdálenosti $\frac{a^2}{e}$; direkční přímka ohniska F_2 .

Vzdálenost bodu X od direkční přímky d_2 je

$$|X, d_2| = \left| \frac{a^2}{e} - x_1 \right| = \frac{|a^2 - ex_1|}{e}.$$

Z výše uvedeného vztahu plyne, že pro každý bod X elipsy, resp. hyperboly platí vztah

$$|XF_2| : |X, d_2| = e : a = \varepsilon = \text{konst.} > 0,$$

kde e je lineární excentricita a a je hlavní poloosa. Číslo ε se nazývá číselná excentricita (výstřednost) elipsy (hyperboly), přičemž je zřejmé, že pro elipsu je $\varepsilon < 1$ (neboť $a > e$)

a pro hyperbolu je $\varepsilon > 1$ (neboť $a < e$). Vzhledem k definici paraboly je $|XF| = |X, d|$,

a proto pro každý bod X paraboly dostáváme

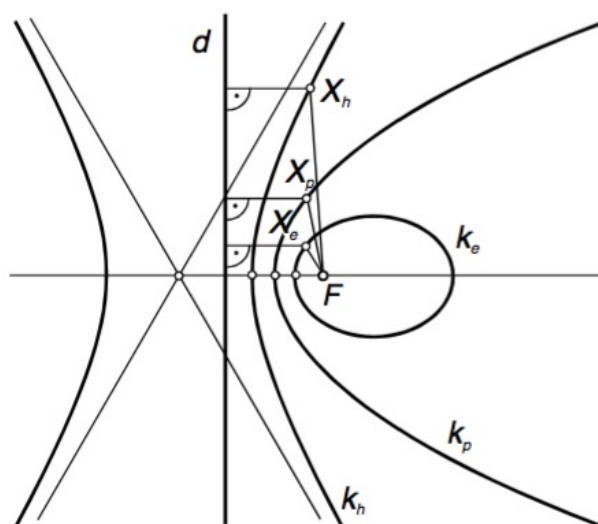
$$|XF_2| : |X, d_2| = \varepsilon = 1 \text{ ([2], str. 90 - 91).}$$

Věta 2.4.1: Všechny body $X \in \mathbb{E}_2$, jejichž vzdálenost od pevně zvoleného bodu F a od pevně zvolené přímky d ($F \notin d$) jsou v konstantním poměru

$$|XF| : |X, d| = \varepsilon > 0,$$

leží na regulární kuželosečce, jejímž ohniskem je bod F a jejíž direkční přímkou příslušnou k ohnisku F je přímka d . Navíc platí:

- $\varepsilon < 1 \Leftrightarrow k$ je *elipsa*
- $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow k$ je *parabola*
- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow k$ je *hyperbola*.



Obrázek 17

Ještě poznamenejme, že kdybychom uvažovali kružnici, jako speciální případ elipsy

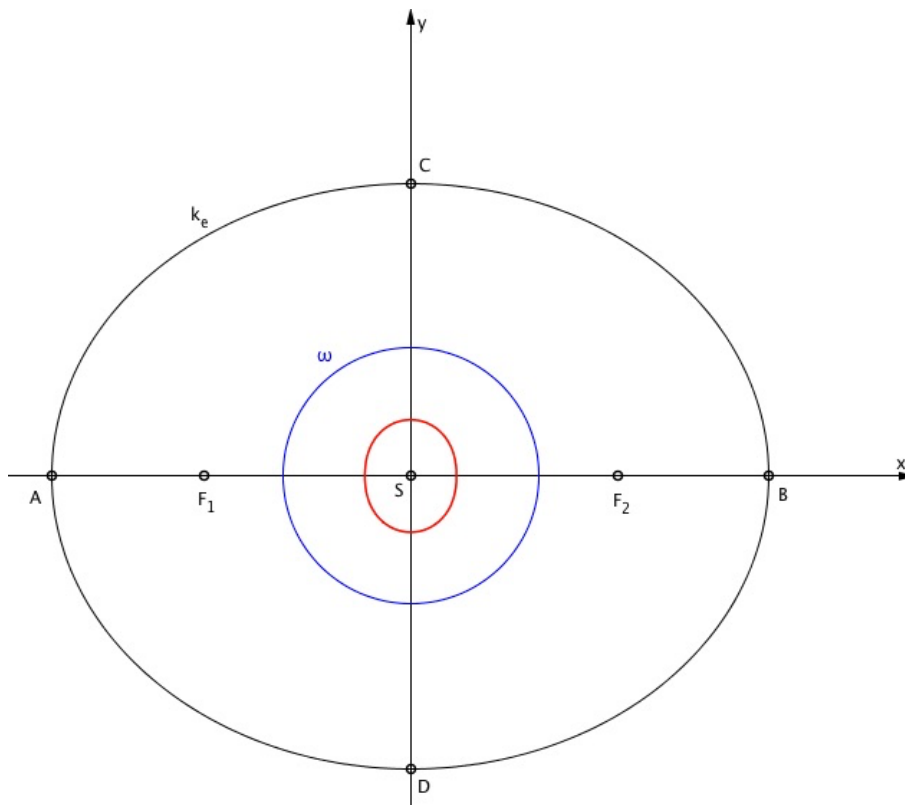
($a = b$, $e = 0$), potom by pro ni zřejmě platilo $\varepsilon = 0$.

3 KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI

3.1 ELIPSA

[A] Označíme-li kruhovou inverzi ω , elipsu k_e a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 . Hlavní vrcholy elipsy A, B a vedlejší C, D . Střed kruhové inverze ω umístíme do středu Kartézské soustavy souřadnic (zároveň i do středu elipsy S).

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěné do středu elipsy vznikne opět stejný obrazec, tj. **Kartézský ovál**. Jeho tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi elipsy, počet průsečíků a zda nám Kartézský ovál nebude procházet nějakými významnými body.



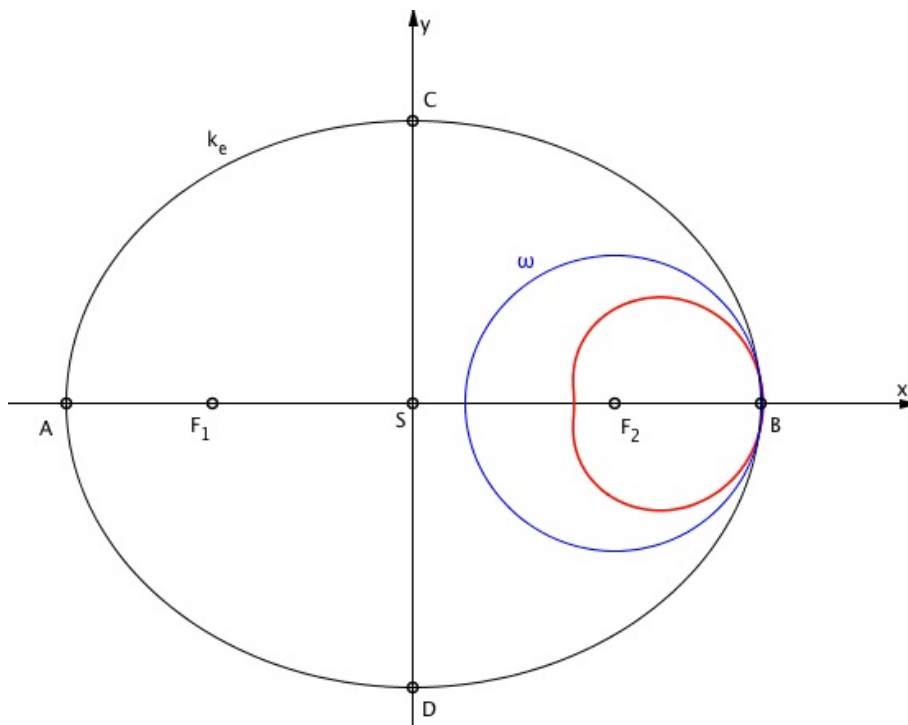
Obrázek 18: Střed kruhové inverze ve středu elipsy

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |SF_1|$ - křivka nemá s elipsou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body;
- $r = |SF_1|$ - křivka nemá s elipsou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body;
- $r > |SF_1|$ - v ideálním případě zvolením poloměru má křivka s elipsou dva body dotyku (vnitřní) a prochází vedlejšími vrcholy C, D ;
- $r = |SA|$ - křivka má s elipsou dva body dotyku (vnější) a prochází hlavními vrcholy A, B ;
- $r > |SA|$ - křivka nemá s elipsou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body.

[B] Označíme-li kruhovou inverzi ω , elipsu k_e a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 . Hlavní vrcholy elipsy A, B a vedlejší C, D . Střed kruhové inverze ω je umístěn v některém z ohnisek F_1, F_2 elipsy k_e .

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěném v jednom z ohnisek elipsy vznikne opět stejný obrazec, tj. **Pascalova závitnice (limaçon)**. Její tvar se zásadně nemění a jedině, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi elipsy, počet průsečíků a zda nám Pascalova závitnice nebude procházet nějakými významnými body.



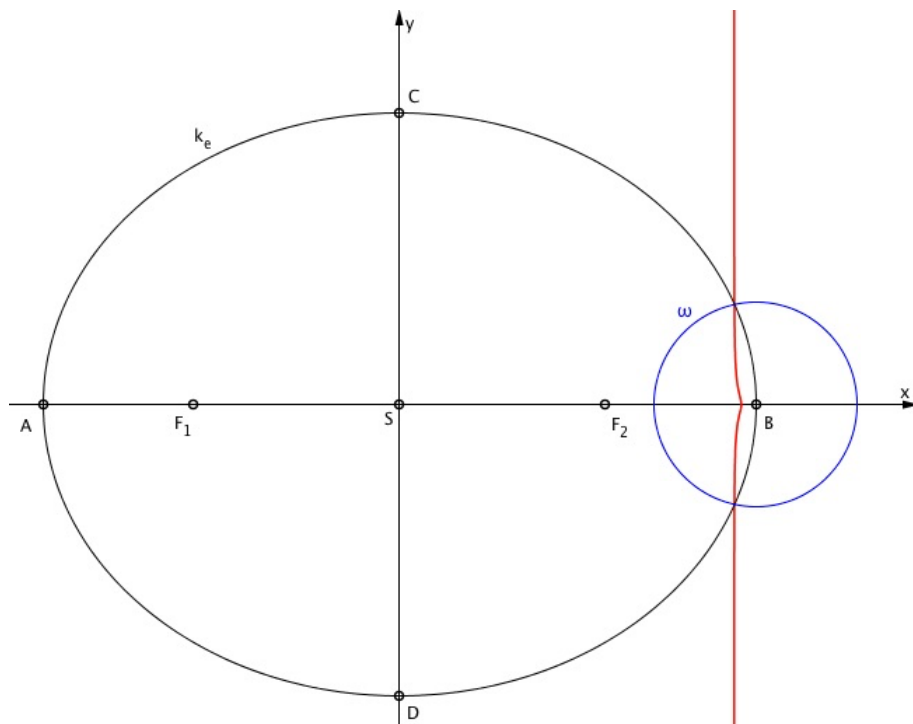
Obrázek 19: Střed kruhové inverze v jednom z ohnisek elipsy

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |SF_2|$ - křivka má s elipsou jeden bod dotyku (vnitřní) a prochází jedním z hlavních vrcholů B (resp. A);
- $r = |SF_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $|F_1F_2| > r > |SF_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech; v ideálním případě zvolením poloměru křivka prochází oběma vedlejšími vrcholy C, D a protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |F_1F_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $|F_1F_2| < r < |AF_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech; v ideálním případě zvolením poloměru křivka prochází ohniskem F_1 a protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |AF_2|$ - křivka má s elipsou jeden bod dotyku (vnější) a prochází hlavním vrcholem A ;
- $r > |AF_2|$ - křivka nemá s elipsou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body.

[C] Označíme-li kruhovou inverzi ω , elipsu k_e a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 . Hlavní vrcholy elipsy A, B a vedlejší C, D . Střed kruhové inverze ω je umístěn v některém z hlavních vrcholů A, B (popř. vedlejších C, D).

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěném v jednom z hlavních vrcholů elipsy vznikne opět stejný obrazec, tj. **Dioklova kisoida** (někdy též bývá nazývána *břečťanová křivka*). Její tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi elipsy, počet průsečíků a zda nám Dioklova kisoida nebude procházet nějakými významnými body.



Obrázek 20: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů elipsy

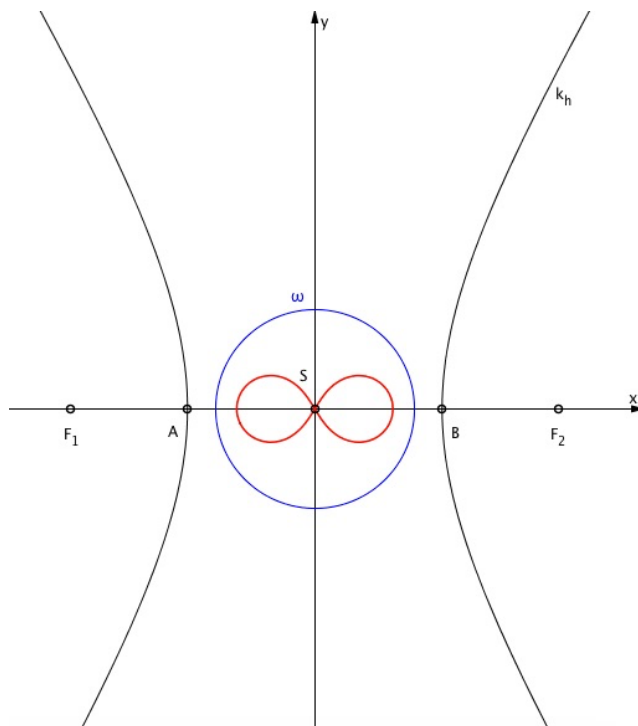
Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |BF_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |BF_2|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $|BF_2| < r < |BS|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech; v ideálním případě zvolením poloměru křivka prochází ohniskem F_2 a protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |BS|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $|BS| < r < |BF_1|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |BF_1|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech;
- $|AB| > r > |BF_1|$ - křivka protíná elipsu ve dvou bodech; v ideálním případě zvolením poloměru křivka prochází ohniskem F_1 a protíná elipsu ve dvou bodech;
- $r = |AB|$ - křivka má s elipsou jeden bod dotyku (vnější) a prochází hlavním vrcholem A (resp. B);
- $r > |AB|$ - křivka nemá s elipsou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body.

3.2 HYPERBOLA

[A] Označíme-li kruhovou inverzi ω , hyperbolu k_h a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 a hlavní vrcholy hyperboly A, B . Střed kruhové inverze ω umístíme do středu Kartézské soustavy souřadnic (zároveň i do středu hyperboly S).

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěné do středu hyperboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **Bernoulliho lemniskáta**. Její tvar se zásadně nemění a jedině, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi hyperboly, počet průsečíků a zda nám Bernoulliho lemniskáta nebude procházet některými významnými body.



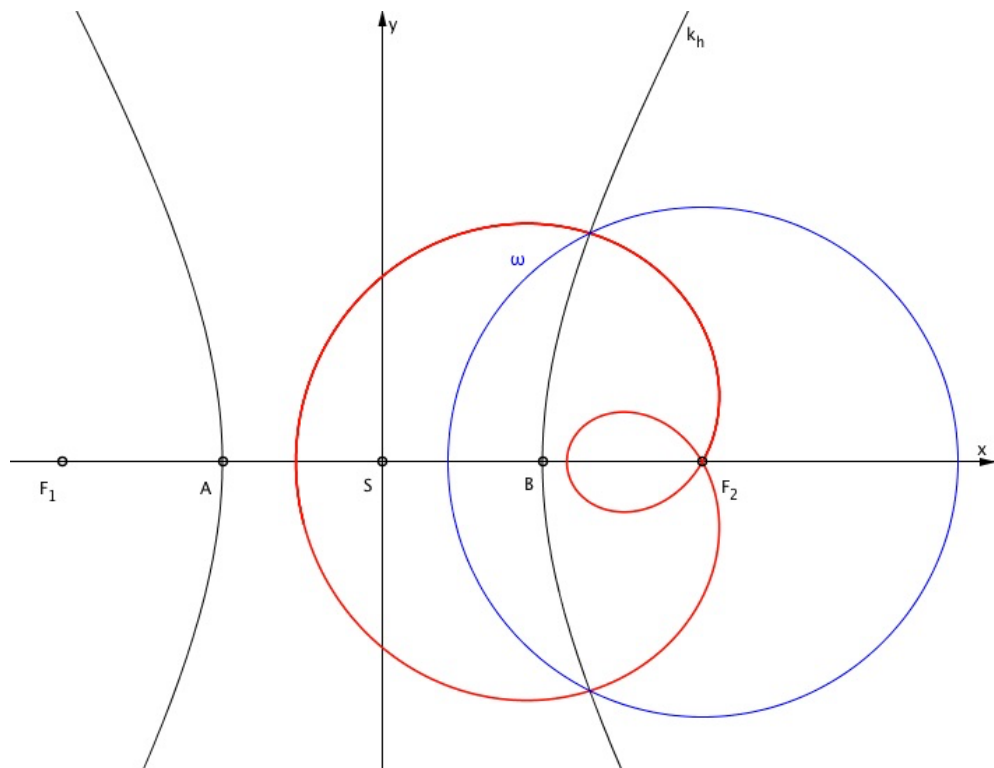
Obrázek 21: Střed kruhové inverze ve středu hyperboly

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |SA|$ - křivka nemá s hyperbolou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body;
- $r = |SA|$ - křivka prochází hlavními vrcholy A, B a s hyperbolou má vnitřní dotyk;
- $|SF_1| > r > |SA|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech; v ideálním případě zvolením poloměru protíná křivka větve hyperboly ve čtyřech bodech a prochází ohnisky F_1, F_2 ;
- $r = |SF_1|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech;
- $r > |SF_1|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech.

[B] Označíme-li kruhovou inverzi ω , hyperbolu k_h a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 a hlavní vrcholy hyperboly A, B . Střed kruhové inverze ω umístíme do ohniska F_1 (popř. F_2) hyperboly k_h o souřadnicích $[a\sqrt{2}, 0]$, tj. $F_1 = [a\sqrt{2}, 0]$.

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěném v ohnisku hyperboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **Pascalova závitnice**. Její tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi hyperboly, počet průsečíků a zda nám Pascalova závitnice nebude procházet některými významnými body.



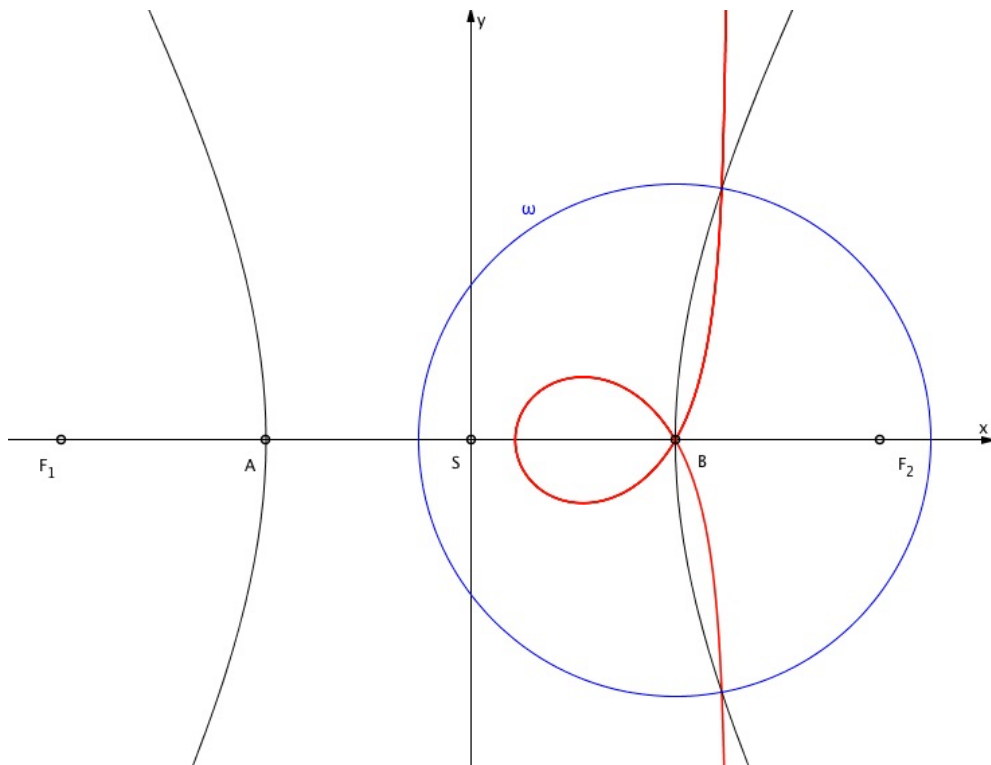
Obrázek 22: Střed kruhové inverze v jednom z ohnisek hyperboly

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |BF_2|$ - křivka nemá s hyperbolou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body;
- $r = |BF_2|$ - křivka prochází hlavním B vrcholem a má s hyperbolou vnitřní dotek;
- $|SF_2| > r > |BF_2|$ - protíná větve hyperboly ve dvou bodech; v ideálním zvolením poloměru křivka prochází hlavními vrcholy A, B a protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $r = |SF_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v šesti bodech;
- $|AF_2| > r > |SF_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v šesti bodech;
- $r = |AF_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v šesti bodech, prochází hlavním vrcholem A a s větvemi hyperboly má jeden bod dotyku (vnitřní);
- $|F_1F_2| > r > |AF_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v osmi bodech; v ideálním zvolením poloměru křivka prochází ohniskem F_1 a protíná větve hyperboly v osmi bodech;
- $r = |F_1F_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v osmi bodech;
- $r > |F_1F_2|$ - křivka protíná větve hyperboly v osmi bodech.

[C] Označíme-li kruhovou inverzi ω , hyperbolu k_h a její střed S , ohniska, jak tomu bývá zvykem, označíme F_1, F_2 a hlavní vrcholy hyperboly A, B . Střed kruhové inverze ω umístíme do hlavního vrcholu hyperboly B (popř. A).

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěné do jednoho z hlavních vrcholů hyperboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **přímá strofoida**. Její tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi hyperboly, počet průsečíků a zda nám přímá strofoida nebude procházet některými významnými body.



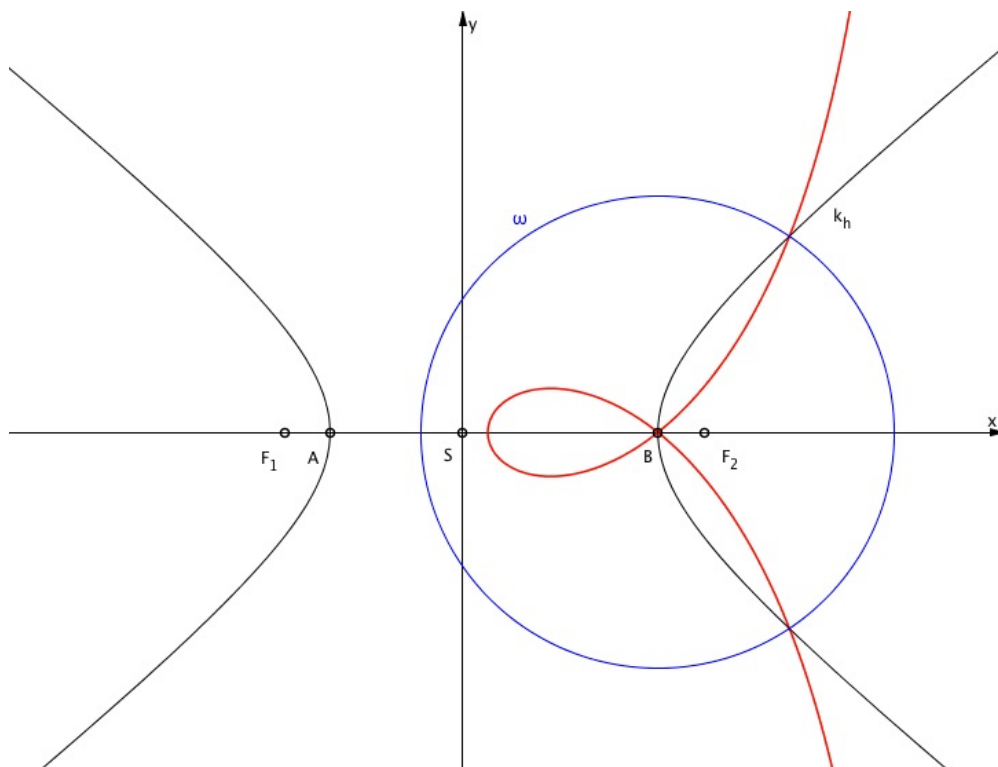
Obrázek 23: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů hyperboly

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |SB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $r = |SB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $|SB| < r < |AB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $r = |AB|$ - křivka prochází hlavním vrcholem A a protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $|F_1B| > r > |AB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech; v ideálním zvolení poloměru křivka prochází ohniskem F_1 a protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech;
- $r \geq |F_1B|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech.

[D] Označíme-li nepravidelnou hyperbolu k_h s $a = b\sqrt{3}$, kruhovou inverzí ω a její střed umístíme do hlavního vrcholu hyperboly B (popř. A). Ohniska označíme dle zvyklostí F_1, F_2 .

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěné do jednoho z hlavních vrcholů hyperboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **Maclaurinův trisektris**. Jeho tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi hyperboly, počet průsečíků a zda nám Maclaurinův trisektris nebude procházet některými významnými body.



Obrázek 24: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů nepravidelné hyperboly

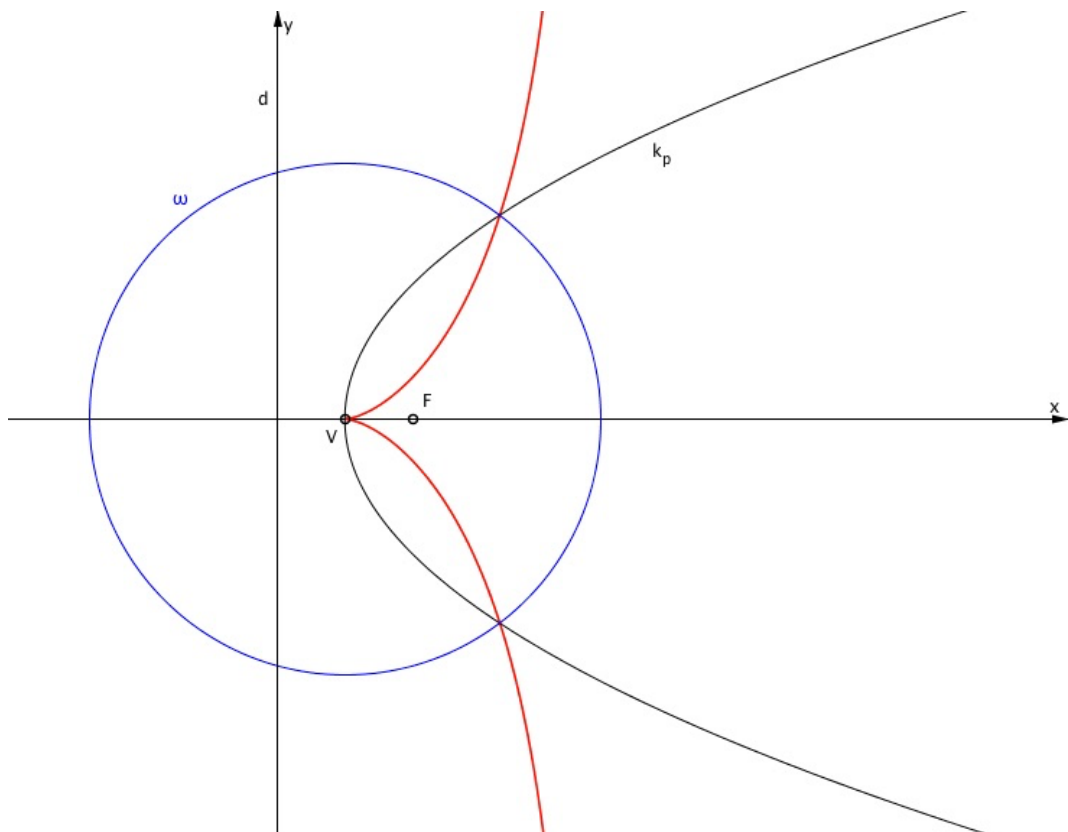
Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r \leq |SB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $|AB| < r < |SB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $r = |AB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve dvou bodech;
- $|F_1B| > r > |AB|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech; v ideálním zvolení poloměru křivka prochází ohniskem F_1 a protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech;
- $r = |F_1B|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech;
- $r > |F_1B|$ - křivka protíná větve hyperboly ve čtyřech bodech.

3.3 PARABOLA

[A] Označíme-li kruhovou inverzi ω , parabolu k_p a její vrchol V , pevný bod F nazveme ohnisko. Řídící přímka d je o předpisu $d: x = 0$ (tj. souběžná s osou y), střed kružnice kruhové inverze ω je umístěn do vrcholu V paraboly k_p .

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěné do vrcholu paraboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **Dioklova kisoida**. Její tvar se zásadně nemění a jediné, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi paraboly, počet průsečíků a zda nám Dioklova kisoida nebude procházet některými významnými body.



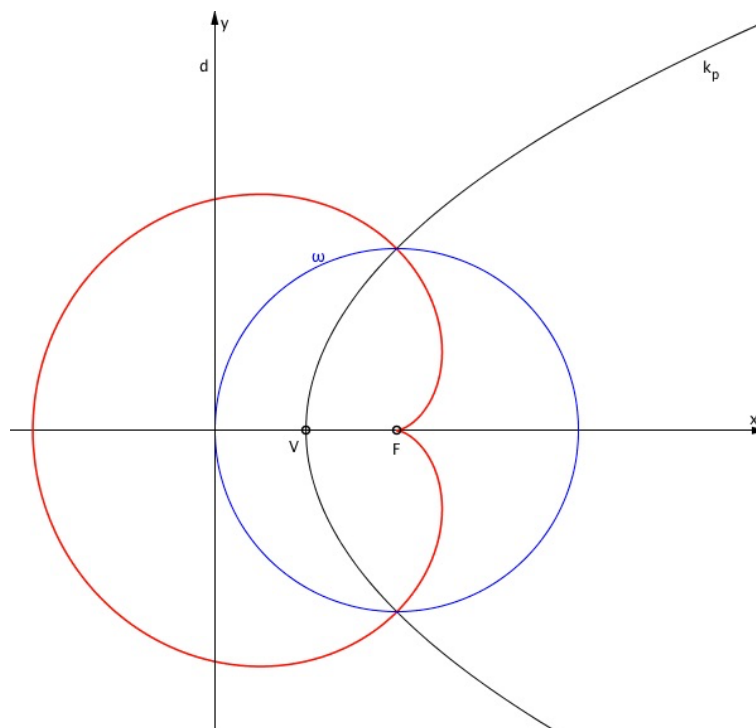
Obrázek 25: Střed kruhové inverze ve vrcholu paraboly

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $r > 0$ - křivka protíná parabolu ve dvou bodech.

[B] Označíme-li kruhovou inverzi ω , parabolou k_p a její vrchol V , pevný bod F nazveme ohnisko. Řídící přímka d je o předpisu $d: x = 0$ (tj. souběžná s osou y), střed kružnice kruhové inverze ω je umístěn v ohnisku F paraboly k_p .

Při postupném zvětšování poloměru kruhové inverze umístěném v ohnisku paraboly vznikne opět stejný obrazec, tj. **kardioida** (neboli srdcovka). Její tvar se zásadně nemění a jedině, co se bude vždy lišit, je počet dotyků s větvemi paraboly, počet průsečíků a zda nám kardioida nebude procházet některými významnými body.



Obrázek 26: Střed kruhové inverze v ohnisku paraboly

Rozlišovat budeme následující případy. Je-li:

- $0 < r < |VF|$ - křivka nemá s parabolou žádné průsečíky, body dotyku a ani neprochází žádnými významnými body;
- $r = |VF|$ - křivka prochází vrcholem a má s parabolou vnitřní dotyk;
- $r > |VF|$ - křivka protíná parabolou ve dvou bodech.

3.4 TABULKOVÝ PŘEHLED

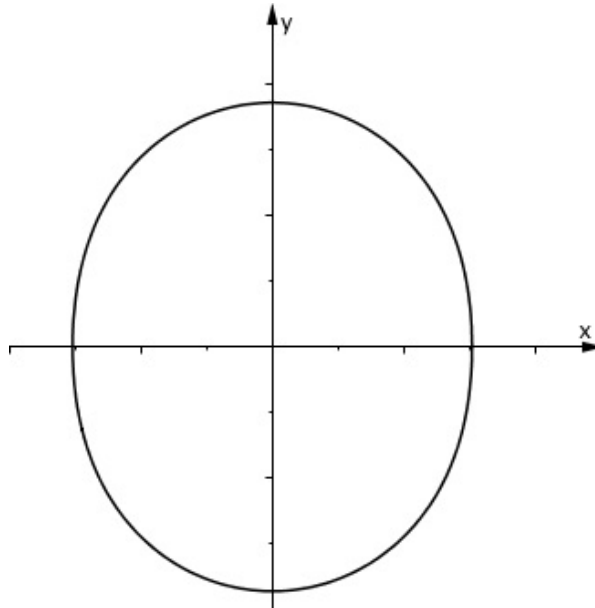
Inverzní křivka	Centrum inverze	Křivka
<i>Elipsa</i>	střed elipsy	Kartézský ovál
	ohnisko elipsy	Pascalova závitnice
	hlavní vrchol	Dioklova kisoida
<i>Hyperbola</i>	střed hyperboly	Bernoulliho lemniskáta
	ohnisko hyperboly	Pascalova závitnice
	vrchol hyperboly	přímá strofoida
	vrchol hyperboly s $a = b\sqrt{3}$	Maclaurinův trisektris
<i>Parabola</i>	vrchol paraboly	Dioklova kisoida
	ohnisko paraboly	kardioida

Tabulka 1: Přehled kuželoseček v kruhové inverzi

3.5 ROVINNÉ KŘIVKY A JEJICH HISTORIE

3.5.1 KARTÉZSKÝ OVÁL

Kartézský ovál (někdy také kartézská křivka nebo Descartův ovál) byl poprvé studován René Descartem (31. 3. 1596 – 11. 2. 1650) v roce 1637 poté i I. Newtonem. Tato křivka se skládá ze dvou oválů, proto by se spíše měla jmenovat kartézské ovály.



Obrázek 27: Kartézský ovál

Definice 3.5.1.1: Geometrické místo bodu P , jehož vzdálenosti r_1 a r_2 od dvou pevných, ale různých bodů F_1 a F_2 splňují rovnost

$$k_1 \cdot r_1 + k_2 \cdot r_2 = 1,$$

v níž k_1 a k_2 jsou konstanty (nikoli obě kladné), pro které dále platí, že $k_1^2 \neq k_2^2$, nazveme **kartézský ovál**.

Je-li $|k_1| = |k_2|$, pak je kartézský ovál středovou kuželosečkou; přesněji pro $k_1 \cdot k_2 > 0$ je kartézský ovál elipsou a pro $k_1 \cdot k_2 < 0$ hyperbolou.

3.5.2 PASCALOVA ZÁVITNICE

Definice 3.5.2.1: Kotálí-li se tvořící kružnice k o poloměru r^k svým vnějším obvodem po vnějším obvodu kružnice l o poloměru r^l , opisuje tvořící bod A , ležící ve vzdálenosti d , kde $d > r^k$, od středu tvořící kružnice k , vytváří tak **prodlouženou epicykloidu**.

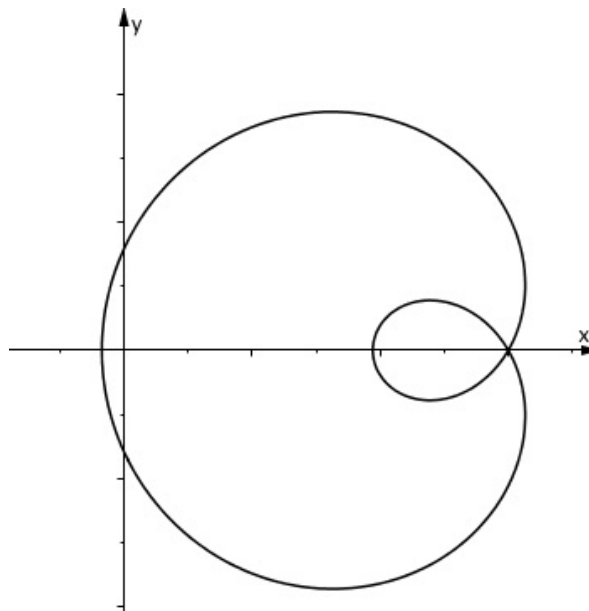
Umístíme-li prodlouženou epicykloidu do pravouhlé souřadnicové soustavy, vznikne následující parametrická rovnice:

$$x = (r^l + r^k) \cos t - d \cdot \cos\left(\frac{r^l + r^k}{r^k} \cdot t\right)$$

$$y = (r^l + r^k) \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r^l + r^k}{r^k} \cdot t\right),$$

kde r^k je poloměr tvořící kružnice k , r^l poloměr pevné kružnice l , t velikost úhlu otočení a $d > r^k$ vzdálenost tvořícího bodu A od středu tvořící kružnice k .

Pascalova závitnice (nebo limaçon) je speciálním případem prodloužené epicykloidy pro $r^l = r^k$ a pro $d > r^k$, kde d je vzdálenost tvořícího bodu od středu tvořící kružnice k , r^l je poloměr pevné kružnice l , r^k poloměr tvořící kružnice k .



Obrázek 28: Pascalova závitnice

Rovnice Pascalovy závitnice je v pravoúhlých souřadnicích po transformaci počátku do tvořícího bodu o souřadnicích $[d, 0]$ ve tvaru:

$$(x^2 + y^2 + 2dx)^2 = (r^k)^2 \cdot (x^2 + y^2),$$

rovnice Pascalovy závitnice má v polárních souřadnicích tvar:

$$r = r^k + 2d \cdot \cos \alpha$$

a parametrické rovnice jsou ve tvaru:

$$x = 2r^k \cdot \cos t - d \cdot \cos 2t,$$

$$y = 2r^k \cdot \sin t - d \cdot \sin 2t.$$

Pascalova závitnice je často nazývána také jako Pascalův limaçon (nebo jen jako limaçon) - tento název pochází z latinského slova *limax* znamenající *závit*. Za objevitele této křivky se považuje Étienne Pascal (2. 5. 1588 – 24. 9. 1651), který svůj výzkum publikoval v *Underweysung der Messung* v roce 1525. Ačkoliv je tato křivka pojmenována podle Pascala, tak její pojmenování užil roku 1650 až Gilles-Personn Roberval, jako příklad metod kreslení tečen. Pascalova závitnice je také křivkou, která může být užita k řešení problému trisekce úhlu.

3.5.3 DIOKLOVA KISOIDA

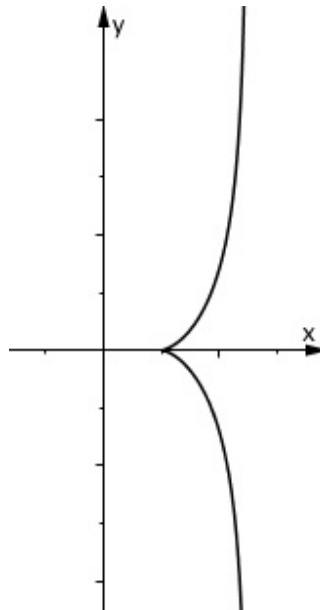
Tato křivka vzniká valivým pohybem vrcholu paraboly, která se odvaluje po shodné parabole. Umístíme-li Dioklovu kisoиду do pravoúhlé soustavy souřadnic, dostaneme následující tvar:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

a v polárních souřadnicích tvaru

$$r = 2a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Dioklova kisoida je křivka 3. stupně (někdy též bývá nazývána *břečťanová křivka*), která byla vynalezena a pojmenována podle řeckého matematika Diokla z Karistu (asi 240 př. n. l. – 180 př. n. l.), který ji asi kolem roku 180 př. n. l. získal svým pokusem kopírovat kostku geometrickými metodami. Název kisoida "cissoid" se poprvé objevil v díle Gemina (asi 10 př. n. l. – asi 60 n. l.).

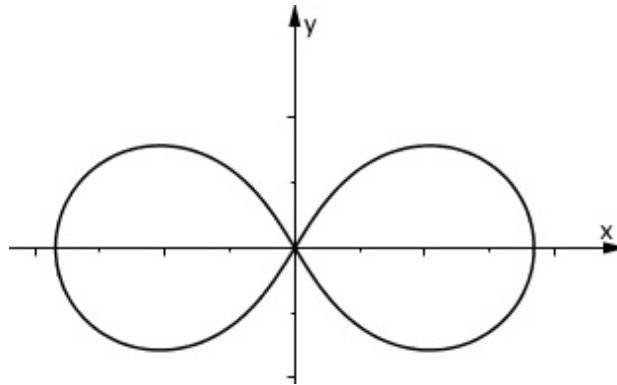


Obrázek 29: Dioklova kisoida

V 17. století byla Dioklova kisoida objektem zkoumání mnoha matematiků, kteří na ní zkoušeli konstrukci tečny a výpočet objemu této křivky. V roce 1634 P. de Fermat a G. P. de Roberval zkonstruovali tečnu ke kisoidě.

3.5.4 BERNOULLIHO LEMNISKÁTA

Definice 3.5.4.1: Geometrické místo bodu P , které se pohybuje takovým způsobem, že součin jeho vzdáleností od dvou pevných, ale různých bodů S a T (přitom předpokládáme body S a T o souřadnicích $S = [-a, 0]$ a $T = [a, 0]$) je roven a^2 , nazveme **Bernoulliho lemniskátou**.



Obrázek 30: Bernoulliho lemniskáta

V pravoúhlých souřadnicích má Bernoulliho lemniskáta rovnici ve tvaru

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 \cdot (x^2 - y^2)$$

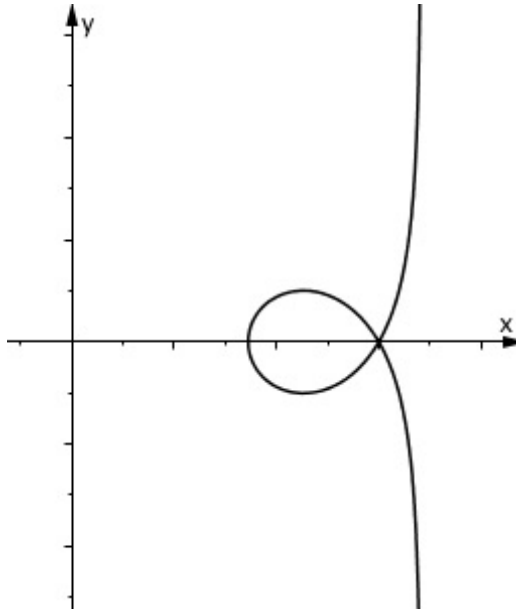
a v polárních souřadnicích tvar:

$$r^2 = a^2 \cdot \cos(2\alpha).$$

Tato polární křivka, podobající se symbolu nekonečna, je pojmenována po švýcarském matematikovi a fyzikovi Jakobu Bernoullim (6. 1. 1655 – 16. 8. 1705). Bernoulli publikoval článek v roce 1694 v *Acta Eruditorum*, ve kterém tuto křivku nazýval *lemniscus* – stužkový přívěsek. Často je proto tato křivka nazývána Bernoulliho lemniskáta. Jakob Bernoulli si v tu dobu nebyl vědom, že vlastně popsal křivku, která je speciálním příkladem Cassiniova oválu objeveného v roce 1680. Roku 1750 Giovanni Fagnane (1715 – 1797) objevil obecné vlastnosti lemniskáty a Eulerovo zkoumání délky oblouku této křivky jej v roce 1751 vedlo k pozdější práci týkající se eliptických funkcí.

3.5.5 PŘÍMÁ STROFOIDA

Definice 3.5.5.1: Necht' je dán svazek kružnic o společné tečně v ose x s bodem dotyku v počátku. Svazek kružnic protne průměry vedenými bodem $A = [a, 0]$. **Přímou strofoidou** nazýváme množinu všech krajních bodů průměrů.



Obrázek 31: Přímá strofoida

Přímá strofoida má v pravouhlých souřadnicích rovnici:

$$y^2 = \frac{x^2 \cdot (a - x)}{a + x}$$

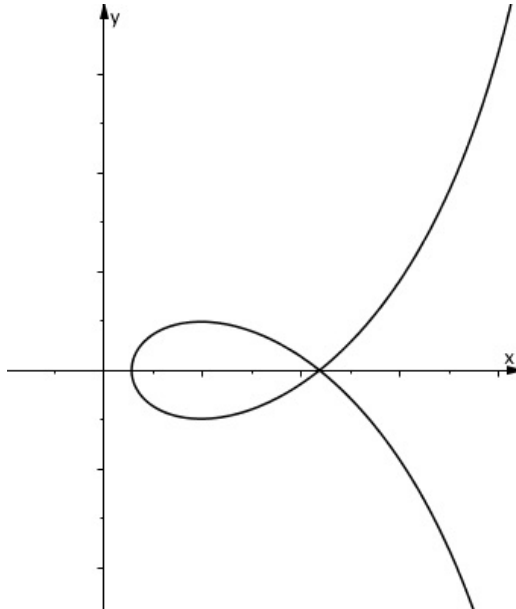
a v polárních souřadnicích rovnici

$$r = a \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Strofoida se poprvé objevila v pracích Isaaca Barrowa (1630 - 1677) v roce 1670, i když Evangelista Torricelli (1608 - 1647) popisuje tuto křivku ve svých dopisech kolem roku 1645. Až Giles-Personn Roberval (1602 - 1675) ji popsal jako geometrické místo ohnisek kuželoseček, obdržených jako řezy na kuželi rovinami, které mají společnou tečnu kuželosečky v jejím vrcholu. Název strofoida, znamenající *pás se zákrutem*, byl poprvé předložen Montuccim v roce 1846.

3.5.6 MACLAURINŮV TRISEKTRIS

Maclaurinův trisektris je křivka, kterou poprvé studoval Colin Mclaurin (1698 - 1746) v roce 1742. Cíl jeho zkoumání poskytl řešení jednoho z geometrických problémů starověku, tedy trisekci úhlu (schopnost rozdělit úhel na tři stejné části).



Obrázek 32: Maclaurinův trisektris

Maclaurinův trisektris má v pravouhlých souřadnicích rovnici:

$$y^2 = \frac{x^2(x + 3a)}{a - x},$$

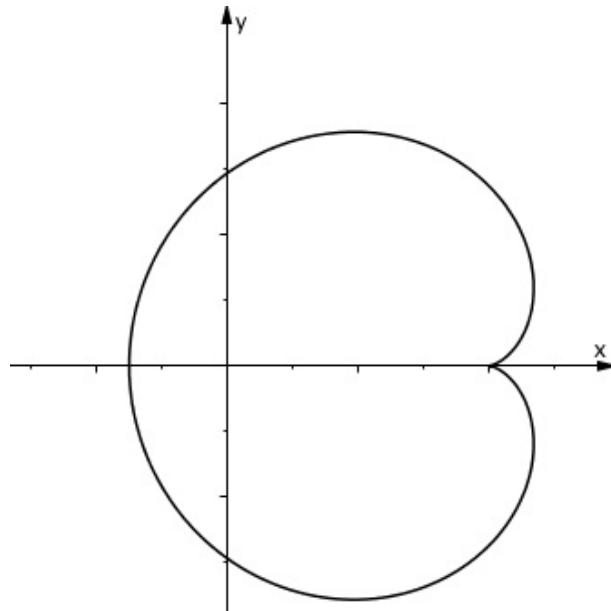
parametrické vyjádření je následující:

$$x = a \frac{t^2 - 3}{t^2 + 1}$$

$$y = a \frac{t(t^2 - 3)}{t^2 + 1}.$$

3.5.7 KARDIODA

Definice 3.5.7.1: Kotálí-li se tvořící kružnice k o poloměru r^k svým vnějším obvodem po obvodu pevné kružnice l o poloměru $r^l = r^k$, opisuje tvořící bod kružnice k **prostou epicykloidu** zvanou **kardioida**.



Obrázek 33: Kardioida

V pravouhlých souřadnicích má kardioida rovnici ve tvaru:

$$(x^2 + y^2 - (r^k)^2)^2 = 4(r^k)^2 \cdot ((x - r^k)^2 + y^2),$$

přičemž počátek O je ve středu pevné kružnice l a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s hrotem.

V polárních souřadnicích má kardioida rovnici tvaru:

$$r = 2r^k \cdot (1 - \cos \alpha),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, přičemž pól leží na pevné kružnici a polární osou je prodloužení úsečky spojující pól a střed pevné kružnice.

Parametrické rovnice kardiody jsou:

$$x = r^k \cdot (2 \cos t - \cos 2t),$$

$$y = r^k \cdot (2 \sin t - \sin 2t).$$

Název kardiody (neboli srdcovka) byl poprvé použit Johannem Castillonem (1704 – 1791) v jeho díle *Philosophical Transactions of the Royal Society* v roce 1741. Délka kardiody byla poprvé vypočtena La Hirem v roce 1708, jenž je díky této skutečnosti někdy považován za jejího objevitele. Kardiody může být také považována za speciální případ Pascalovy závitnice, z čehož plyne, že její studium a tedy i její objevení sahá daleko před J. Castillona či P. de La Hireho (1640 - 1718).

ZÁVĚR

V předložené diplomové práci jsme se pokusili vyzdvihnout rovinné zobrazení zvané kruhová inverze spolu s geometrickým významem kuželoseček. Cílem práce bylo ukázat jiné využití kruhové inverze, než na jaké jsou studenti vysokých škol zvyklí. Toto zobrazení se nejvíce používá při konstrukčním řešení Apolloniových úloh, nebo typu úloh s omezenou nákresem. Ačkoliv jsme první dvě kapitoly postupovali od definic a základních vlastností, tak tyto poznatky pro nás byly v závěrečné části této práce důležitější.

Při konstruování kuželoseček v kruhové inverzi pro nás bylo důležité využití interaktivního prostředí Geogebra. Jiná konstrukce nepřicházela v úvahu neboť obrazy kuželoseček v kruhové inverzi obsahují předpisy vyšších řádů a občas i samotná Geogebra má problémy s jejich vykreslováním.

V závěrečné kapitole této diplomové práce jsou uvedeny jen konkrétní příklady poloh středů kružnic kruhové inverze ω . Ve skutečnosti existuje nekonečné množství poloh a práci proto nelze nějakým způsobem zobecnit. Vybrány jsou proto jen určité polohy, které jsou pro dané kuželosečky význačné.

RESUMÉ

In this thesis, we have tried to highlight the planar display called circular inversion together with the geometric meaning of conic sections. The aim of this thesis was to show different uses of circular inversion than what the university students are used to. This display is most often used in the construction solve of Apollonius's exercises or types of exercises with limited drawing pad. Although in the first two chapters are processed by definitions and basic properties, these findings have for us in the final part of this work important.

When I was constructing conic sections in circular inversion for us it was important to use interactive programme of Geogebra. Other construction didn't come into consideration because the images of conics in a circular inversion contains regulations higher orders and sometimes Geogebra has problems with their rendering.

In the final chapter of this thesis are just specific examples situations of middle of circles of circular inversion ω . In fact there are an infinite amount of situations and the position so we can't this thesis somehow generalize. Chooses are therefore only certain positions that are for the conic significant.

SEZNAM LITERATURY

- [1] Lávička, M. *Geometrie 1: Základy geometrie v rovině*. 1. Vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. ISBN 80-7082-861-7.
- [2] Lávička, M. *KMA/G1 Geometrie 1: Pomocný učební text*, Plzeň: Západočeská univerzita, 2008.
- [3] Lávička, M. *Syntetická geometrie: Pomocný učební text k předmětu KMA/SG*, Plzeň: Západočeská univerzita, 2007.
- [4] Šedivý, O., Božek M., Duplák J., Kršňák P., Trenkler M. *Geometria 2/ Pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách*, 1. Vyd. Bratislava: SPN, 1987.
- [5] Burian, K. *Geometrie 1*, Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě, 1981.
- [6] Trkovská, Dana. *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015. ISBN 978-80-7378-289-4, str. 7 - 30.
- [7] Kolman, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1968.
- [8] Polák, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 5. vyd. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-22885-2.
- [9] Leischner, Pavel. *Geometrická zobrazení*. 1. Vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2010. ISBN 978-80-7394-234-4.
- [10] Pech, Pavel. *Kuželosečky*. 1. Vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2004. ISBN 80-7040-755-7.
- [11] Blažek, Vladimír. *Geometrie III*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem , 1995. ISBN 80-7044-103-8.
- [12] Drs, Ladislav. Novák, Josef. Roubek, Oldřich. *Konstruktivní geometrie*. Praha: ČVUT v Praze , 1983.

Internetové zdroje:

[13] Fuchsová, Hana. *Kruhová inverze* [online]. Plzeň, 2013 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <https://otik.uk.zcu.cz/bitstream/handle/11025/8173/Kruhova%20inverze%20Hana%20Fuchsova%202013.pdf?sequence=1> . Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.

[14] Hájková, Ivana. *Kuželosečky a kvadriky ve výuce na SŠ* [online]. Brno, 2006 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/16896/prif_m/Text_prace.pdf Diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně – Přírodovědecká fakulta.

[15] Patáková, Eva. *Apolloniovy úlohy* [online]. Plzeň, 2005 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/apoll/apoll.html> Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni.

[16] *Konstrukční planimetrické úlohy* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: http://www.kmt.zcu.cz/subjects/geom/Uctexty/konstr_uloh.pdf

[17] *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

[18] Liška, Petr. *Apolloniova úloha* [online]. Brno, 2007 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/150476/prif_b/Bakalarska_prace.pdf Bakalářská práce. Masarykova univerzita v Brně – Přírodovědecká fakulta.

[19] *WolframMathWorld: Inverse Curve* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/InverseCurve.html>

[20] *WolframMathWorld: Lemniscate* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html>

[21] *WolframMathWorld: Hyperbola Inverse Curve* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/HyperbolaInverseCurve.html>

[22] *WolframMathWorld: Limacon* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html>

[23] *WolframMathWorld: Right Strophoid* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08].

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/RightStrophoid.html>

[24] *WolframMathWorld: Maclaurin Trisectrix* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08].

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/MaclaurinTrisectrix.html>

[25] *WolframMathWorld: Cissoid of Diocles* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08].

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/CissoidofDiocles.html>

[26] *WolframMathWorld: Cardioid* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08].

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html>

[26] *WolframMathWorld: Cartesian Ovals* [online]. ©2016 [cit. 2016-03-08].

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/CartesianOvals.html>

[27] Bímová, Daniela. *Kinematická geometrie n -rozměrného euklidovského prostoru* [online]. Praha, 2006 [cit. 2016-06-15].

Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/42747/> Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK

Seznam obrázků

Obrázek 1: Apollonios z Pergy	4
Zdroj: http://html.rincondelvago.com/apollonius-of-perga.html	
Obrázek 2: Jacob Steiner	5
Zdroj: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Steiner.html	
Obrázek 3: August Ferdinand Möbius	5
Zdroj: http://fineartamerica.com/featured/august-ferdinand-moebius-granger.html	
Obrázek 4	10
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 5	11
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 6	13
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 7	14
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 8	18
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 9	19
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 10: René Descartes	20
Zdroj:	
https://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_37/October_1890/Sketch_of_Rene_Descartes	
Obrázek 11: elipsa, parabola, hyperbola.....	21
Převzato: Lávička (2008, str. 94)	
Obrázek 12	22
Převzato: Hájková (2006, str. 8)	
Obrázek 13: Elipsa	24
Převzato: Lávička (2008, str. 77)	
Obrázek 14: Hyperbola.....	25
Převzato: Lávička (2008, str. 83)	
Obrázek 15: Parabola	26
Převzato: Lávička (2008, str. 88)	
Obrázek 16	26
Převzato: Lávička (2008, str. 91)	
Obrázek 17	27
Převzato: Lávička (2008, str. 92)	
Obrázek 18: Střed kruhové inverze ve středu elipsy	28
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 19: Střed kruhové inverze v jednom z ohnisek elipsy	30
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	

Obrázek 20: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů elipsy	32
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 21: Střed kruhové inverze ve středu hyperboly	34
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 22: Střed kruhové inverze v jednom z ohnisek hyperboly	36
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 23: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů hyperboly	38
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 24: Střed kruhové inverze v jednom z hlavních vrcholů nepravidelné hyperboly	40
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 25: Střed kruhové inverze ve vrcholu paraboly.....	42
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 26: Střed kruhové inverze v ohnisku paraboly.....	43
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 27: Kartézský ovál	45
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 28: Pascalova závitnice.....	46
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 29: Dioklova kisoida	48
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 30: Bernoulliho lemniskáta	49
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 31: Přímá strofoida	50
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 32: Maclaurinův trisektris	51
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	
Obrázek 33: Kardioida	52
Zdroj: vytvořil autor v programu GeoGebra 5	

Seznam tabulek

Tabulka 1: Přehled kuželoseček v kruhové inverzi	44
--	----

PŘÍLOHY

Volné přílohy této diplomové práce jsou součástí přiloženého CD.