ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

PROBLÉM ČTYŘ BAREV A JEHO HISTORIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radka Kravarová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne 20. června 2016

....

Poděkování:
Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za cenné rady a připomínky k vypracování této práce.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta pedagogická
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Radka KRAVAROVÁ**
Osobní číslo:	**P13B0018P**
Studijní program:	**B1001 Přírodovědná studia**
Studijní obor:	**Matematická studia**
Název tématu:	**Problém čtyř barev a jeho historie**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy**

Zásady pro vypracování:

1. Formulace problému a jeho prvotní historie. Korektní formulace problému. První redukce problému: hypotéza o čtyřech barvách v teorii grafů.
2. Další postup řešení problému v teorii grafů. Příklady ilustrující některé pojmy.
3. Vyřešení problému za pomoci počítače. (Ne)přijetí počítačových důkazů. Elementární důkazy provedené za pomoci počítače dnes.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: **30 - 50**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

**Bosák, J. Ako bol vyriešený problém štyroch farieb.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.
vol. 24 (1979), issue 4, pp. 181-201.
Halmos, Paul R. Zpomalil se rozvoj matematiky? (2.část).
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.
vol. 36 (1991), issue 6, pp. 305-319.
Fritsch, R., Fritsch, G. The four-color theorem:
history, topological foundations and idea of proof.
Springer Verlag, 1998.
Další knižní prameny, zdroje na Internetu,
časopisy Mathematics Magazine, Kvant atd.**

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.**
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Datum zadání bakalářské práce: **15. června 2015**

Termín odevzdání bakalářské práce: **30. června 2016**

L.S.

Doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
děkanka

Doc. PaedDr. Jarmila Honzíková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 16. června 2015

OBSAH

ÚVOD

Matematika se na žebříčku oblíbenosti ve většině základních i středních škol pohybuje mezi posledními místy. Studentům přijde matematika většinou zbytečná, neatraktivní a nesrozumitelná. To může být způsobeno velkým množstvím látky, která musí být probrána, a tudíž není při výuce čas na předvedení využití matematických vědomostí v běžném životě a na řešení tzv. relaxačních problémů, ale jsou pouze předávány informace a pevné postupy při řešení příkladů.

Výuka matematiky je tedy efektivnější, když se studentům dá možnost aktivně se podílet na zajímavých matematických problémech a tím i podpořit jejich logické a tvůrčí myšlení.

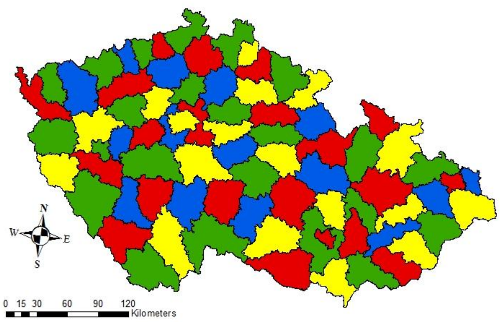
Jedním z takových problémů je problém čtyř barev, který se týká barvení map. Tímto problémem a jeho historií se budeme zabývat v následující práci, která je rozčleněna na čtyři kapitoly. V první kapitole si uvedeme, jak správně formulovat tento problém a jaká omezení je potřeba zavézt, aby nedošlo ke špatné formulaci. Ve druhé kapitole se dozvíme důležité momenty z historie provázející problém čtyř barev. Dozvíme se, kdo je jeho zakladatelem, jací přední matematici, ale i amatéři, se ho snažili dokázat, a jak ovlivnil jednu z matematických disciplín, tzv. teorii grafů. V následující kapitole nahlédneme do již zmiňované teorie grafů. Nebudeme se jí zabývat podrobněji, nýbrž si pouze uvedeme pojmy potřebné k pochopení následujícího převedení barvení map na barvení grafů a v článku J. Bosákova redukci problému do teorie grafů. Zájemcům o teorii grafů doporučuji například knihu *Rovinné grafy* B. Zelinky z roku 1977 či volně přístupná skripta *Teorie grafů* P. Kováře z roku 2014 (či rozšířená skripta z roku 2016). Poslední kapitola je věnována přínosu problému čtyř barev pro matematiku a využití počítače pro dokazování nejen obtížných tvrzení, jako byl právě problém čtyř barev, ale i pro dokázání středoškolských matematických vět.

Tento text je zaměřen hlavně pro studenty středních škol, ale i pro zvídavé žáky druhého stupně základních škol, proto je zde využíváno doprovodných obrázků pro lepší představení určitého pojmu či problému.

1. POPIS PROBLÉMU

Problém čtyř barev pochází z teorie grafů. Jedná se o teorém, který je založen na zdánlivě jednoduché otázce: **je možno obarvit libovolnou zeměpisnou mapu s několika územími (v rovině či na kulové ploše) pomocí čtyř barev, přičemž sousedními územími rozumíme ty dvě oblasti, jež mají společnou hraniční čáru, nikoliv pouze bod** (Šišma, 1997)**?** Tedy například okresy v České republice Kolín a Benešov nejsou sousedními územími, jelikož mají pouze jeden společný bod a tudíž mohou být obarveny stejnou barvou.

Matematickým principem problému čtyř barev je důkaz potřeby co nejmenšího počtu barev využitých k obarvení jakékoliv mapy, přičemž právě čtyři barvy by měl být konečný nejmenší příslušný počet. Obrázek 1 představuje příklad mapy obarvené čtyřmi barvami.



Obr. 1 Mapa okresů ČR

V teorii grafů je tento úkol transformován na obarvení vrcholů *planárního grafu* (neboli grafu, kde se žádné dvě hrany nekříží), přičemž žádné vrcholy spojené hranou nesmí mít stejnou barvu. Potom je barvení území map převedeno na barvení příslušných vrcholů grafů (Šišma, 1997).

1.1 Jak správně formulovat problém čtyř barev

Pro správnou formulaci problému čtyř barev uvažujme jen takové mapy, jejichž územní hranice tvoří jediná jednoduchá uzavřená křivka, počet oblastí je konečný, území jsou souvislá[1] a kromě území nic jiného vybarveno nebude (např. moře a další vodní plochy) (Bosák, 1979).

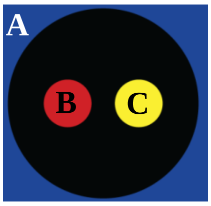
[1] Nebudeme tedy připouštět státy s koloniemi nebo s územím skládajícím se z více oddělených částí

1.1.1 Wadská jezera

Je potřeba vyloučit i možnost existence tzv. „Wadských jezer“. Ty byly zavedeny **Kunizō Yoneyamaem** (1917), který připsal jejich objev svému učiteli Takeo Wadaemu. Jedná se o $n \geq 2$ disjunktní souvislé prostory v rovině, které mají stejné hranice. Tato domněnka patří do odvětví topologie, což je obor matematiky zabývající se zkoumáním vlastností geometrických útvarů, které se zachovávají při vzájemně jednoznačných oboustranně spojitých zobrazeních („blízké“ body se stávají opět „blízkými“ body).

Wadská jezera vznikají tak, že se nejdříve vytvoří uzavřený prostor neboli souš a po té se začínají tvořit tři jezera A, B, C podle následujících kroků:

1) jezero A obklopuje celou souš a tudíž tak vznikne ostrov obsahující jezera B a C,



Obr. 2 První krok

2) vytvoříme na pevnině kanál od jezera A tak, aby každý bod na ostrově byl od vody z jezera A ve vzdálenosti maximálně 1,

Obr. 3 Druhý krok

3) vytvoříme kanál z jezera B, aby každý bod na ostrově byl od vody z jezera B ve vzdálenosti maximálně ½,

Obr. 4 Třetí krok

4) vytvoříme další kanál, tentokrát z jezera C, tak aby každý bod na ostrově byl od vody z jezera C ve vzdálenosti maximálně ⅓,

Obr. 5 Čtvrtý krok

5) rozšíříme kanál A tak, aby každý bod na ostrově byl od vody z jezera A ve vzdálenosti ¼,

.
.
.

n) rozšíříme kanál A (B či C) tak, aby každý bod na ostrově byl od vody z jezera A (B či C) ve vzdálenosti $^{1}/_{n}$.

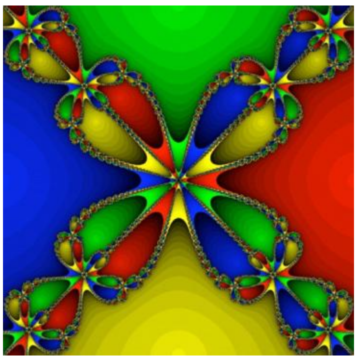
(Kennedy a Yorke, 1991)

1.1.2 Wadské pánve

Stejně jako Wadská jezera je zapotřebí vyloučit i možnost existence Wadských pánví (též zavedeny Kunizō Yoneyamaem). Tyto pánve jsou studovány též v topologii a mají tu vlastnost, že okolí každého bodu na hranici těchto pánví protínají alespoň tři další pánve. Na rozdíl od Wadských jezer jsou jejich oblasti často odděleny (Kennedy a Yorke, 1991).

Příklad Wadské pánve je Newton – Raphsonova metoda pro nalezení nul funkce *f*. To znamená, pro řešení $f(x) = 0$ (obr. 6).

(Stewart, 2011)



Obr. 6 Wadská pánev pro funkci *f* (Z)=Z 4 -1

2. HISTORIE

Jeden z nejslavnějších problémů 20. století po desetiletí podněcoval vývoj teorie grafů, byl formulován a dokazován řadou matematiků po mnoha let. Úspěšný důkaz byl však předložen až v roce 1976, tedy skoro 100 let po svém vzniku.

2.1 Vznik problému

O problému barvení map se už kolem roku 1840 zmínil **A.F. Möbius**[2], který ovšem předložil jednoduší otázku: *„Král měl pět synů. Ve své závěti stanovil, aby bylo po jeho smrti království rozděleno mezi jeho syny na pět oblastí tak, aby každá oblast měla společnou hranici se všemi ostatními oblastmi. Lze královu poslední vůli splnit?“* Odpověď je záporná a dnes je poměrně jednoduše dokazatelná[3] (Kennedy a Yorke, 1991).

První zmínka o problému čtyř barev pravděpodobně pochází z roku 1852, kdy si **Francis Guthrie** (1831-1899) všiml při snaze vybarvit mapu hrabství Anglie, že na vybarvení území stačí pouze čtyři barvy.

Guthrie, Francis

(*Londýn 22. 1. 1831, †Claremont, Jížní Afrika, 19. 10. 1899)

Francis Guthrie se narodil v roce 1831 jako syn obchodníka. Se svým bratrem Frederickem studoval matematiku na University College v Londýně, kde získal bakalářský titul z umění a práva. Guthrie složil závěrečné zkoušky s vyznamenáním a v roce 1856 se stal advokátem University College. Avšak jeho zájem spočíval spíše v matematice, tudíž v roce 1861 přijal místo jako profesor matematiky na nově zřízené Graaff-Reinet College v Cape Colony. Stal se i ředitelem knihovny a organizoval zde řadu přednášek, pomocí kterých pozdvihl knihovnu na kulturní centrum. Přednášelo se zde o astronomii, chemii a botanice. Přednášky z botaniky vedl sám Guthrie, který byl inspirován J. Lindleym. (Fritsch a kol., 1998) V Graaff- Reinet se také seznámil s Harrym Bolusem, který se stal jeho celoživotním přítelem. Guthrie i Bolus byli nadšenými příznivci železnice, tudíž se společně podíleli

[2] August Ferdinand Möbius (1790-1868), německý matematik a astronom, který je nejlépe známý pro jeho práci v analytické geometrii a topologii. Jeden z objevitelů *Möbiovy pásky*. ("August Ferdinand Mobius". Encyclopædia Britannica. Encyclopædia Britannica Online. Encyclopædia Britannica Inc., 2016. Web [cit. 2016-3-7]. Dostupné z: http://www.britannica.com/biography/August-Ferdinand-Mobius)

[3] např. Jan Březina: TGH09 - Barvení grafů. Technical University of Liberec. 29. dubna 2010 pp.5 [cit. 2016-3-7]. Dostupné z: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~morf/vyuka/tgh/prednasky_2011/TGH09.pdf

na rozšíření trasy přes Sneeuberge, kde našli nejlepší průchod přes hory. Jejich cesta byla schválena a trasa se později rozšířila z Kimberley do Middelburgu.

V roce 1875 kvůli neshodám s vedením školy Guthrie rezignoval a odešel do Kapského Města, kde byl dva roky advokátem Nejvyššího soudu a po té se opět stal profesorem matematiky na South African College Schools (dnes University of Cape Town). Tam přednášel až do roku 1899, kdy kvůli špatnému zdravotnímu stavu musel odejít do důchodu (Fritsch a kol., 1998).

Guthrie byl i amatérským botanikem a společně s Bolusem objevoval novou floru Jížní Afriky. Zavázal se k sepsání všech druhů čeledi *Ericaceae* (vřesovcovití) pro Flora Capensis, ale bohužel ještě před dokončením, v roce 1899, zemřel. (Gunn a Codd, 1981) Byl pohřben na hřbitově St Thomas v Rondebosch. Bolus, na jeho počest, po něm pojmenoval některé nalezené druhy vřesovců Jížní Afriky, např. *Guthriea capensis* či *Erica Guthriei* (Fritsch a kol., 1998).

Obr. 7 Francis Guthrie

Společně s bratrem **Frederickem Guthriim** (1833-1886) nenašli případ mapy, kterou by nebylo možné obarvit čtyřmi barvami takovým způsobem, aby sousední oblasti (tedy takové, které sdílejí společnou hranici a ne pouze bod) neměly různou barvu. Avšak ani jednomu se nepodařilo teorém dokázat. Proto Frederick předložil dotaz, jak tento problém vyřešit, svému profesorovi **De Morganovi** (1806-1871) (Šišma, 1997).

De Morgan nedokázal Frederickovi podat důkaz. Proto ještě toho dne, 23. října 1852, napsal dopis siru **W. R. Hamiltonovi** (1805-1865), ve kterém stálo: *„A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know* *was a fact - and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted, but not more - the following is the case in which fourcolours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented.... If you retort with some very simple case which makes meout a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did....“* (volně přeloženo: „Můj student mě požádal, abych mu dnes dal příčinu faktu, který jsem dosud neznal. Říká, že obrázek rozdělen na různé přehrádky lze obarvit tak, že oddíly s jakoukoliv společnou hranicí mohou mít různou barvu – 4 barvy stačí, ne víc – následuje případ, ve kterém jsou čtyři barvy potřebné. Myslí, že není nutné uvažovat o pěti a více barvách… Pokud mi neodpovíte na nějaké jednoduché otázky, které ze mě dělají hloupé zvíře, tak myslím, že to budu muset udělat jako Sphynx...“).

De Morgan doufal, že Hamiltona problém zaujme, ten však po třech dnech odpověděl, že se touto otázkou v nejbližší době zabývat nebude[4]. (Fritsch a kol., 1998). Tento dopis, uložený v Dublinském archivu, je nejstarším písemným dokladem o problému čtyř barev (Maritz a Mouton, 2012).

Morgan se nadále snažil získat důkaz potvrzující správnost Guthrieovy domněnky, proto šířil problém mezi ostatní matematiky. Například 9. prosince 1853 psal o problému svému bývalému učiteli W. Whewelli a 24. června jednomu ze zakladatelů časopisu *Cambridge Mathematical Journal,* R. L. Ellisovi. Kromě rozšíření zpráv o důkazu prostřednictvím dopisů a rozhovorů byl De Morgan zodpovědný za psaní prvních článků vyžadujících důkaz problému čtyř barev. V *The Philosophy of Discovery* publikoval článek s popisem čtyřbarevné domněnky, kde je zachován i komentář: „ musí být jasné, že pro barvení map vždy stačí čtyři různé barvy“, který nejspíš způsobil tradici propojení matematického problému čtyř barev s kartografickým (Timothy, 2002).

Již v roce 1860 na Harwardu o důkazu, který měl potvrdit, že všechny mapy lze obarvit pouze čtyřmi barvami, přednášel významný americký matematik v oblasti teorie množin a logiky **C. S. Peirce** (1839–1914). Avšak Peircův důkaz je považován za nesprávný, jelikož svou práci nikdy nepublikoval a nedochovalo se ani jeho původní znění.

[4] Přesné znění: *„I am not likely to attempt your quaternion of colour very soon.“*

O problému přednášel i **A. Cayley** (1821–1895) v roce 1878 na zasedání Londýnské matematické společnosti.[5] O rok později Královská geografická společnost uveřejnila Cayleyho článek *"On the colouring of maps"* (O vybarvování map), kde vysvětloval, že pro libovolné přirozené číslo *n* lze sestrojit mapu, na jejíž obarvení je potřeba *n* různých barev. Z jeho úvah je tedy zřejmé, že se domníval, že důkaz problému čtyř barev je nemožný (Šišma, 1997).

2.2 Kempeho důkaz

Od roku 1878 se objevovala spousta zdánlivých důkazů potvrzující hypotézu o čtyřech barvách, avšak v každém se našla chyba. Jeden z nejznámějších chybných důkazů, který byl deset let považován za správný, byl nalezen v roce 1879 a jeho autorem je londýnský advokát **A. B. Kempe** (1849-1922). Ten o svém důkazu dal vědět 17. 7. 1879 v časopise *Nature*. Později, na doporučení Cayleyho, byl Kempeho důkaz publikován ve druhém ročníku časopisu *American Journal of Mathematics* jako práce *On the geographical problem of the four colours* (Šišma, 1997).

Kempe, Alfred Bray

(*Londýn 22. 7. 1849, † Londýn 21. 4. 1922)

Alfred Kempe se narodil jako třetí syn Johna Edwarda Kempeho, který byl knězem v kostele svatého Jakuba. Alfred studoval na škole St Paul´s School v Londýně, která patřila mezi jednu z nejvýznamnějších škol v Anglii se vznešenou akademickou pověstí.

Zde se věnoval matematice a hudbě. Jeho učitelem matematiky byl Cayley, v roce 1872 absolvoval s vyznamenáním a ve stejný rok vydal svou první práci o řešení rovnic *n*-tého stupně mechanickými prostředky a o pět let později publikoval svou slavnou monografii o mechanismech s názvem "Jak nakreslit přímku", jejíž aplikací je například píst u parního stroje, který je spojen tak, že se pohybuje přibližně v přímce.

Přes jeho vášeň k matematice a hudbě se Kempe stal advokátem (především hlavně jako specialista na církevní práva), tudíž matematika s hudbou mu zůstala pouze jako koníček. Jeho odborné znalosti o církevních zákonech vedly

[5] Sté výročí této události, bylo vysíláno na londýnském televizním kanálu krátkou relací, kterou sledovalo přes 10 milionů diváků. (Maritz, P. and S. Mouton (2012). "Francis Guthrie: A Colourful Life." The Mathematical Intelligencer **34**(3): 67-75.

k tomu, že sloužil v mnoha výborech, například byl tajemníkem Královské komise pro církevní soudy od roku 1881 do roku 1883.

Po předložení „důkazu“ problému čtyř barev v roce 1879 v časopise *Nature* byl Kempe navržen do Královské společnosti. Zde pracoval jako hospodář po dobu 11 let. V roce 1897 byl zvolen do rady Královské společnosti a v roce 1912 získal šlechtický titul.

V roce 1912 se Kempeho zdravotní stav začal zhoršovat a v sedmdesáti letech rezignoval ze své pozice hospodáře pro Královskou společnost. Zemřel v roce 1922 na zápal plic. (O´Connor a Robertson, 2003)

Obr. 8 Alfred Bray Kempe

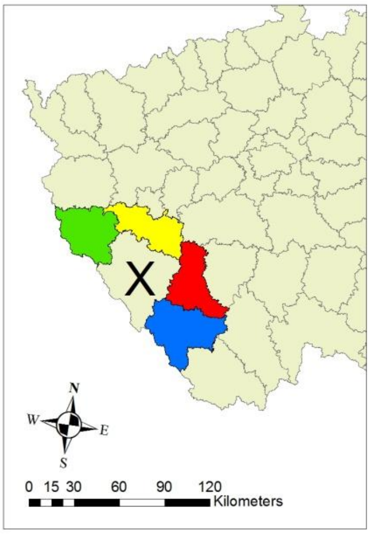
Kempe ve své práci nejdříve předpokládal hypotézu čtyř barev pro tzv. **trivalentní mapy.** Tedy pro mapy, na kterých se stýkají právě tři hraniční křivky v jednom bodě. Pokud by důkaz platil pro trivalentní mapy (tudíž by pro jejich obarvení stačily pouze čtyři barvy), potom by čtyři barvy stačily k obarvení libovolné mapy. (Šišma, 1997)

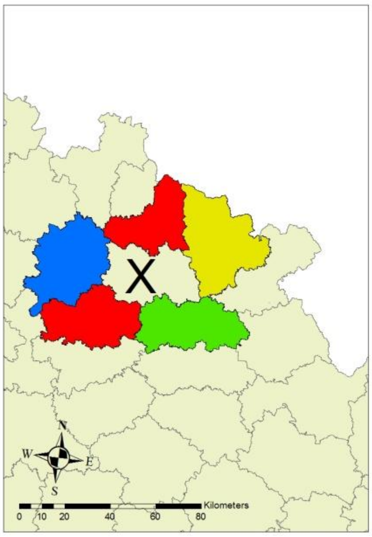
Dále bral v úvahu, že mapa, která obsahuje čtyři a méně oblastí je bez obtíží obarvitelná čtyřmi barvami a pro oblasti, které sousedí pouze jedním bodem, platí možnost obarvení stejnou barvou[6] (Kempe, 1997).

[6] Například státy Arizona a Colorado.

Dále postupoval důkazem matematickou indukcí, pro který platí předpoklad: jakákoliv mapa s *n* zeměmi lze obarvit maximálně čtyřmi barvami, a pak nechť M je mapa skládající se z *n* + 1 zemí. Tudíž lze prokázat existence alespoň jedné oblasti, v libovolné trivalentní mapě M, která sousedí maximálně s pěti oblastmi (Timothy, 2002).

Z mapy M_{n+1} pak vytvořil mapu M_n odstraněním jedné hrany uvažované oblasti. Důkaz pro oblasti sousedícími s dvěma či třemi dalšími oblastmi byl adekvátní. (Šišma, 1997) Avšak pro oblasti se čtyřmi a pěti sousedy mohou nastat dvě nevhodné situace. První situace, kdy území X je obklopeno čtyřmi oblastmi, které mají různé barvy (obr. 9a), nebo druhá situace, kdy je území obklopeno pěti sousedy obarvenými čtyřmi různými barvami (obr. 9b).



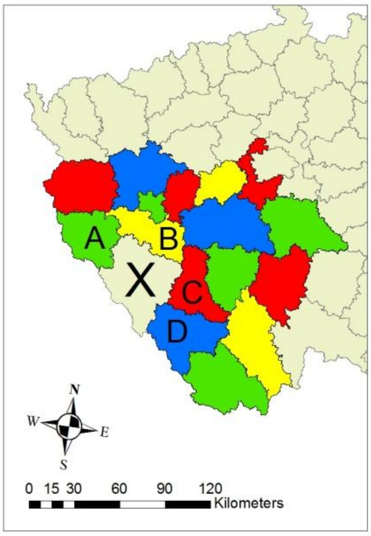


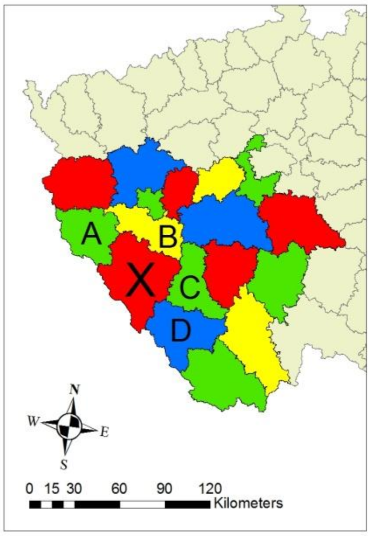
Obr. 9 a) Území X obklopeno čtyřmi oblastmi b) Obarvené území X

Na tyto dva případy Kempe zvolil postup (dnes nazýván **metodou Kempeho řetězců** neboli tzv. Kempe chain), díky kterému lze z nepříznivé volby pozic barev vytvořit pozitivní sled barevných kombinací území. Jeho metoda počíná ve výměně barev v závislosti na dvou nesousedních oblastech[7]. Pro ilustraci lze na první případ použít Kempeho dvě podsituace, u kterých záleží na obsažení barevného řetězce v mapě.

[7] Pro hlubší zájem například Timothy S. (2002). "Alfred Bray Kempe´s "proof" of the Four-color Theorem " Math Horizons 10(2): 21-23.

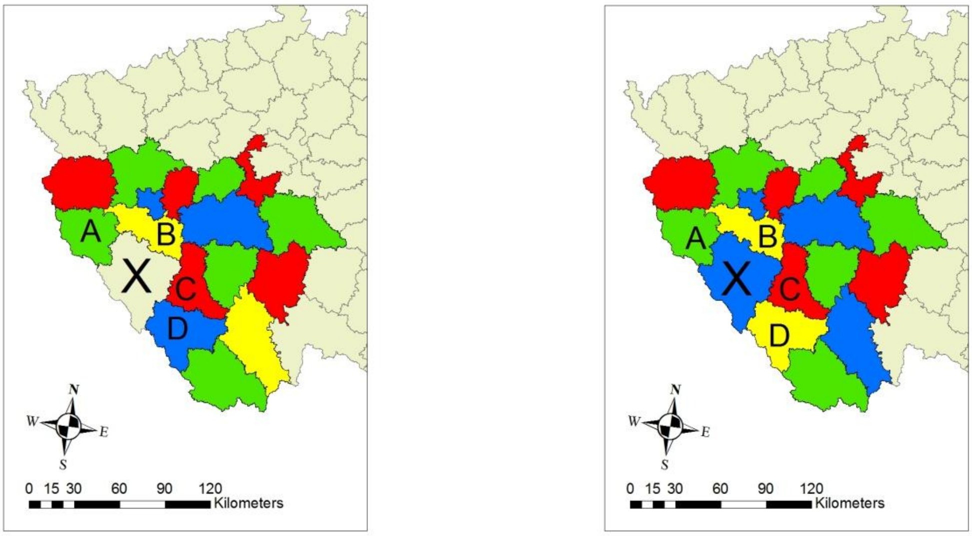
V první podsituaci **není obsažen** zelenočervený řetězec A-C v mapě (obr. 10a). V tomto případě je řešení jednoduché a spočívá ve výměně červené sousední oblasti C za zelenou a úpravě přiléhajících oblastí. Po této změně oblasti A a C mají zelenou barvu, lze tedy na území X použít barvu červenou, jak je možné vidět na obrázku 10b. Tento proces lze udělat i obrácením barev, tedy území A a C budou obarveny červenou barvou a na území X bude použita barva zelená (Timothy, 2002).





Obr. 10 a) Situace bez řetězce b) Obarvené území X

Ve druhé podsituaci **existuje** zelenočervený řetězec A-C v mapě (obr. 11a). V tomto případě nelze ani jedno území obarvit barvou druhého území. Avšak pokud se v mapě nachází zelenočervený řetězec A-C, je jasné, že žlutomodrý řetězec B-D nemůže existovat. Tudíž můžeme použít postup pro první situaci pro území B a D (obr. 11b) (O´Connor a Robertson, 2003).



Obr. 11 a) Situace s řetězcem b) Obarvené území X

Kempe upozorňuje, že jeho důkaz platí jen pro rovinné plochy, tudíž pro jiný typ ploch nemusí platit. Jako příklad uvádí torus[8], u kterého je někdy potřeba užití až 6 barev (Šišma, 1997).

Kempeho vyřešení problému zajímalo a inspirovalo spoustu matematiků, ale i laickou společnost. Jedním z nich je i matematik **Ch. L. Dodgson** (1832-1898), který je také znám pod svým spisovatelským jménem Lewis Carroll (autor knih Alenka v říši divů a Alenka za zrcadlem). Ten vytvořil, na základě teorému čtyř barev, hru pro dva, kdy jeden hráč kreslí jakoukoliv mapu a druhý hráč jí má za úkol vybarvit pomocí čtyř barev (Richeson, 2012).

2.3 Vyvrácení Kempeho důkazu

Kempeho důkaz byl považován za správný až do roku 1890, kdy **P. J. Heawood** (1861 – 1955) upozornil na neplatnost Kempeho úvahy v případě, kdy se neobarvená oblast X nachází uprostřed pěti oblastí, které již jsou obarveny všemi čtyřmi barvami. (Ross a Hall, 2010) Sám Kempe oznámil na zasedání *London Mathematical Society*, že se chyby dopustil a že není schopen důkaz opravit. Heawood věnoval problému čtyř barev spoustu let a publikoval několik prací až do roku 1950. V jedné práci zobecňuje následující zjištění. Trivalentní mapu lze obarvit čtyřmi barvami, pokud počet hran

[8] Torus (neboli anuloid) je plocha vzniklá rotací kružnice kolem přímky ležící v rovině této kružnice a kružnici neprotíná.

každého území je dělitelný třemi. Každému vrcholu trivalentní mapy přiřadil hodnoty +1 a -1 tak, aby součet ohodnocených vrcholů každého území byl dělitelný třemi. A tudíž mapu lze obarvit čtyřmi barvami (Šišma, 1997).

Heawood dokázal, že Kempeho metody dokazují platnost úvahy pro obarvení jakékoliv rovinné mapy pěti barvami. (Maritz a Mouton, 2012) Důležité však je i jeho systematické zkoumání barvení map i na jiných plochách. Ukázal, že na obarvení mapy na anuloidu je potřeba sedm barev a to díky závislosti tzv. *chromatického čísla mapy M* na ploše S_p.

Je- li libovolná mapa na ploše S_p obarvitelná n barvami a nenalezneme mapu, která se dá obarvit n - 1 barvami, pak má plocha S_p chromatické číslo n (neboli $\chi(S_p) = n$).

Heawood následně odvodil vzorec pro nerovnost chromatického čísla $\chi(S_p)$ orientované plochy $p \geq 1$:

$$\chi(S_p) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor .$$

Heawood se dále domníval, že v tomto vztahu dokázal dokonce rovnost:

$$\chi(S_p) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor .$$

V roce 1891 však **L. W. J. Heffter** (1862 – 1962) ukázal, že platí pouze nerovnost, avšak uvědomoval si, že pro každou plochu S_p lze najít mapu obarvitelnou $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$ barvami (Šišma, 1997). Heawood tento vztah dokázal pouze pro plochu S_1.

Heffter se rozhodl řešit problém sestrojením map, ve kterých jednotlivé oblasti sousedí se všemi ostatními. Tento problém převedl na systému sousedících bodů[9]. To znamená, že každý bod je spojen hranou s ostatními body, přičemž se tyto hrany nepřekrývají. V grafové terminologii bychom takto zobrazený graf nazvali rovinným úplným grafem na ploše S_p. Po převedení hledal nejmenší rod plochy pro pevně daný počet sousedících bodů. Toto číslo značíme p_n, kde n je počet bodů a p je rod plochy.

[9] Později tvz. problém nití.

Pro $n \geq 3$ platí:

$$p_n \geq k(n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

Heffter tento vztah dokázal pro $n \leq 12$ a pro speciální posloupnost čísel $n = 19$, 31, 55, 67, 139, 175, 199, ... (Avanesyan, 2011).

Mnozí si však Heawoodovy práce nevšimli a považovali stále Kempeho důkaz za pravdivý. (Maritz a Mouton, 2012) Například **C. de la Vallée Poussin**, který v roce 1896 také objevil v Kempeho důkazu chybu, o Heawoodově práci vůbec nevěděl (Šišma, 1997).

2.4 Vyřešení problému

S dalším neúspěšným důkazem přišel profesor přírodní filozofie **G. P. Tait** (1831-1901). Svou práci publikoval v roce 1880. O jedenáct let později na jeho chybu upozornil **J. Petersen** (1839-1910). Ačkoliv Tait nedokázal pravdivost problému čtyř barev, jeho práce obsahovala několik bystrých myšlenek a novou důležitou formulaci týkající se barvení grafů, tzv. *Taitovu hypotézu*. Také díky různé stylizaci problému čtyř barev byly objeveny tzv. *Blanuša snarks* a *Petersenův graf* (GFDL, 2016).

Po Kempeho a Taitovo nezdařilých důkazech se dále povedlo pouze prokázat obarvitelnost map čtyřmi barvami, jen s omezeným počtem oblastí. Například, **P. Franklin** v roce 1922 dokázal, že čtyři barvy stačí pro všechny mapy s nanejvýš 25 zeměmi. **C. N. Reynolds** v roce 1926 ukázala, že čtyři barvy stačí pro mapy s nanejvýš 27 zeměmi, **C. E. Winn** s 35 zeměmi v roce 1940, **O. Ore** a **J. Stemple** až pro mapy s 39 zeměmi v roce 1970 a **J. Mayer** pro mapy obsahujících 95 zemí v roce 1976 (Ross a Hall, 2010).

V letech 1960 až 1970 se německý matematik **Heinrich Heesch**[10] (1906 – 1995) věnoval metodám hledání důkazů pomocí počítačů. Jedním z jeho cílů byl důkaz problému čtyř barev pomocí počítačové metody, avšak ukázalo se, že zpracování důkazu by mu trvalo spoustu času (GFDL, 2016).

Avšak jeho myšlenkou se inspirovali matematici **Kenneth Appel** (1932 – 2013) a **Wolfgang Haken** (1928) z univerzity v Illinoisu, Urbana-Champaign, a pomocí

[10] Heinrich Heesch je považován za prvního matematika používajícího počítač pro výpočetní techniky.

Heeschových výsledků a **Johna Kocha** (1909–1978) napsali svůj vlastní počítačový program, pomocí něhož dokázali větu o čtyřech barvách. Svůj výsledek oznámili dne 21. června 1976 (Bailey a Borwein, 2013). O rok později byla jejich práce *Every planar mapis four colorable* publikována v časopise Illinois *Journal of Mathematics*. (Appel a Haken, 1997) Od té doby razítko na Department of Mathematics v Ilionois vyhlašovalo úspěšné vítězství nad problémem čtyř barev (Bailey a Borwein, 2013). Samotné řešení hypotézy čtyř barev trvalo 1200 hodin procesorového času a důkaz je obsažen ve stosedmdesátistránkovém dokumentu, kde 56 stran obsahuje text a 114 stran obrazové přílohy. Samotná příprava metod, programu a samotné práce trvala 4 roky.

Obr. 12 Razítko Department of Mathematics v Ilionois

Appelova a Hakenova práce spočívala ve vytvoření množiny 1936 (později redukováno na 1476) map, jenž vznikla metodou pokus – omyl, které lze obarvit čtyřmi barvami a poté v porovnávání s ostatními možnostmi obarvení různých map (O´Connor a Robertson, 2003).

Nad Appelovou a Hakenovou prací se dlouho velmi diskutovalo. Jejich důkaz vyvolával v řadě matematiků nedůvěru díky svému vzniku pomocí počítače a nemožnosti ručního přepočítání (Šišma, 1997). Většina totiž měla stále v paměti nezdařený důkaz **Y. Shimamota**, který v roce 1971 přišel také s důkazem problému čtyř barev vygenerovaném počítačem, v němž **W. T. Tutte** a další našli chybu způsobenou špatným naprogramováním (Maritz a Mouton, 2012).

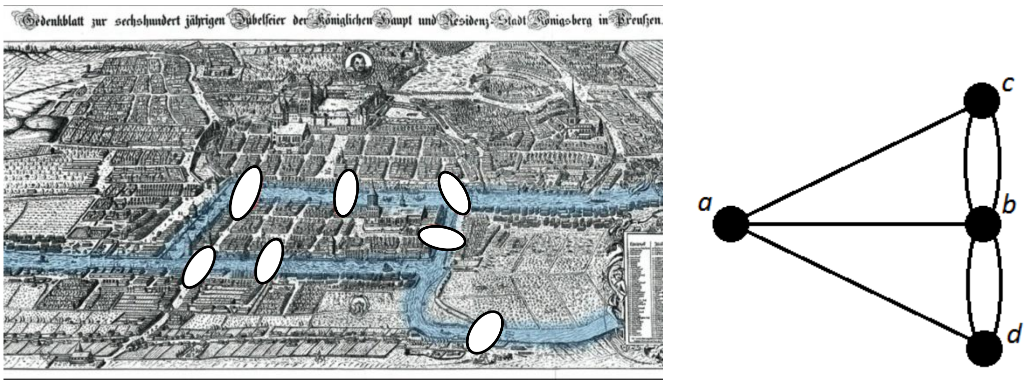
Během několika let **U. Schmidt,** z RWTH Aachen, našel chybu v postupu využitým v Appel-Hakenovo důkazu. Na toto zjištění Appel a Haken reagovali v roce 1989 článkem, kde vysvětlovali podstatu chyby zjištěné Schmidtem a její opravení.

V roce 1996 zveřejnili **N. Robertson, D. P. Sandets, Seymour a R. Thomas** nový důkaz problému čtyř barev, který je též proveden pomocí počítače, avšak již redukován a usnadněn, ačkoliv stále neověřitelný ručním počítáním (Bailey a Borwein, 2013). Své výsledky publikovali na síti Internet[11] (Šišma, 1997).

3. PŘEVEDENÍ PROBLÉMU DO TEORIE GRAFŮ

Před samotným převedením problému je potřeba uvézt základy teorie (rovinných) grafů a jejich obarvení. Nahlédneme tedy do jedné z mladších matematických disciplín.

Začátek teorie grafů je datován do 30. let 18. století. Za zakladatele teorie grafů je považován švýcarský a později pruský matematik **Leonhard Euler**, který v roce 1736 vyřešil úlohu *problému sedmi mostů přes řeku Pregel ve městě Královci*, později Königsbergu a dnes Kaliningradu. Město se nachází na obou stranách řeky a uprostřed řeky jsou dva ostrovy. Mezi oběma břehy a ostrovy je celkem sedm mostů (obr. 14). Úloha zní: *je možno z nějakého místa vyjít, projít všemi mosty (žádným mostem dvakrát) a vrátit se zpět do výchozího města?* Euler dokázal, že to není možné. Aby si úlohu zjednodušil břehy a ostrovy si znázornil body a mosty jako úsečky spojující tyto body (obr. 14). Tím dostal přehlednější situaci úlohy a jednoduše ukázal, že neexistuje požadovaná cesta (INFO WEB s.r.o., 2015).



Obr. 13 Mosty přes řeku Pregel a zjednodušená úloha sedmi mostů

Přes sto let pak zůstaly grafy bez zájmu matematiků. Až v roce 1847 **Gustav Kirchhoff** (1824 – 1887) použil počet koster grafu na výpočet proudů v elektrických sítích. O deset let později pomocí grafů zjišťoval počty různých uskupení molekul alkanů **Arthur Cayley** (1821 – 1895)

[11] viz. http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:SJc9cmhAWl0J:people.math.gatech.edu/~thomas/OLDFTP/fcdir/fcstoc.ps+&cd=1&hl=cs&ct=clnk&gl=cz

V roce 1857 vznikla hra, jež spočívá ve spojení všech vrcholů pravidelného dvanáctistěnu tak, aby byl každý vrchol použit právě jednou[12]. Hra byla vymyšlena **sirem William Hamiltonem** (1805 – 1865) a byla pojmenována **The Icosian Game**[13]. Tuto úlohu lze vyřešit pomocí teorie grafů.

Obr. 14 Pravidelný dvanáctistěn a jedno z možných řešení hry The Icosian Game

V roce 1936 byla v Lipsku publikována první monografie věnována teorii grafů. Jejím autorem je maďarský matematik **Dénese König** (1884-1944), který ve čtrnácti kapitolách soustředil všechny tehdejší znalosti o grafech. Königova kniha sloužila dlouhá léta jako jediný učební materiál o teorii grafů (Huclová, 2008).

Ve 20. století docházelo k rozvoji teorii grafů i v Československu. V roce 1920 byl publikován algoritmus pro nalezení minimální kostry **Otakarem Borůvkou** (1899 – 1995). Prakticky tento algoritmus se využil k zvýhodnění výstavby elektrických sítí[14](Jirovský, 2010).

3.1 Grafy

V matematice existuje spousta typů grafů. Jedním z nich jsou grafy funkcí, tedy křivky v soustavě souřadnic, které znázorňují chování funkcí f_n (Matematika.cz, 2006).

Dalším typem grafů jsou tzv. statistické grafy (sloupcový, koláčový, bodový,…). Pro nás je důležitý typ grafů, které nemají s předešlými nic společného. S předešlými typy grafů mají stejný pouze odvozený název z řeckého „grafein“[15] neboli „psáti“, jedná se tedy o grafy, u kterých jde o nějaké „kreslení“ (Zelinka, 1977).

[12] Vznikl tak pojem hamiltonovská kružnice, jedná se o kružnici, která projde právě jednou všemi vrcholy grafu.
[13] *Icosian*= dvacítkový, dvanáctistěn má dvacet vrcholů.
[14] Stejný problém vyřešil i Vojtěch Jarník, s jiným algoritmem.
[15] Stejný základ se vyskytuje například u slova „telegrafie“ (psaní na dálku). „fotografie“ (psaní světlem) atd.

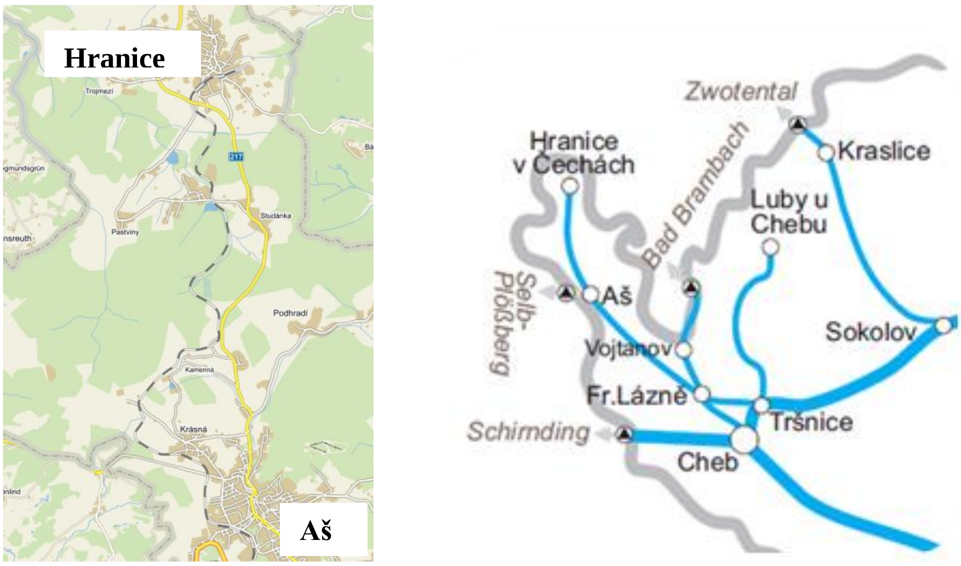
3.1.1 Příklady grafů kolem nás

Smyslem těchto grafů je názorně popsat vztah mezi dvojicí prvků a současně zprostředkovat toto poznání ostatním. Ačkoliv si člověk většinou neuvědomí, že se jedná o graf, jejich využití se nachází všude kolem nás.

1) Mapa v jízdním řádu

Při otevření jízdního řádu si lze povšimnout mapy, která je poněkud odlišná od mapy v zeměpisných atlasech. Ačkoliv jsou na ní zakresleny státní hranice, nenajdeme již zakreslené hory ani řeky (s výjimkou hor, na kterých jsou stanice lanovek). Nacházejí se zde pouze body znázorňující železniční stanice a úsečky (či oblouky), které tyto body spojují, znázorňující tratě vedoucí mezi těmito stanicemi. Pochopitelně nás tato mapa nechce naučit zeměpisným dovednostem, avšak chce nám ulehčit hledání tratě, kterou potřebujeme.

Tato mapa se však neliší pouze v nezaznamenání hor a řek, ale i v zakreslení železniční tratě. Pro ilustraci lze srovnat nákres železniční tratě Aš - Hranice na běžné mapě s mapou v jízdním řádě (obr. 16).



Obr. 15 Běžná mapa a mapa v jízdním řádu

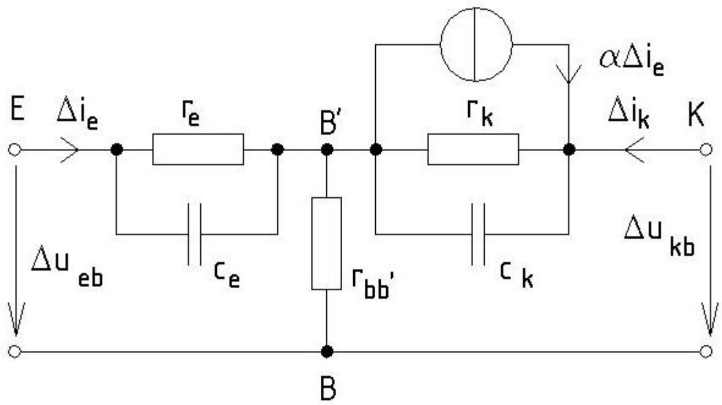
Je možné si povšimnout zřetelného rozdílu nákresu trasy Aš - Hranice. Na běžné mapě jsou železniční tratě vyobrazeny podle skutečného vzhledu, tudíž křivka znázorňující tuto trať se různě klikatí. Avšak podíváme-li se do mapy v jízdním řádu, je ta samá trať znázorněna pouze úsečkou (nanejvýš málo zakřiveným obloukem). Důvodem je fakt, že pokud někam jedeme vlakem, nezáleží nám na zatáčkách na trati, ale spoléháme pouze na to, že nás vlak doveze tam, kam je uvedeno v jízdním řádu.

Pokud bychom na této mapě vynechali státní hranice a zanedbali přesné umístění železničních stanic dle skutečnosti, pak bychom i přes ztíženou orientaci dokázali potřebné stanice a trať nalézt. Tedy mapa by i po této destrukci plnila svou úlohu. Ovšem již už by nebylo vhodné nazývat ji mapou. Mohli bychom ji nazývat grafem.

Podobně však může být zakreslena silniční, telefonní či telegrafní síť, rozvod elektřiny, vody nebo svítiplynu.

2) Elektrotechnické zařízení

Podobně jako s mapou v jízdním řádu, se běžně můžeme setkat se schématem nějakého elektrického zařízení. Zde se však už nenacházejí pouhé body, ale ustálené znaky, které značí potřebné předměty. Kondenzátor, spínač, cívku, elektronku určitého typu atd. Pro nás je však důležité, že se tyto předměty nevyskytují ve schématu izolovaně, ale jsou propojeny vodičem znázorněným úsečkami.

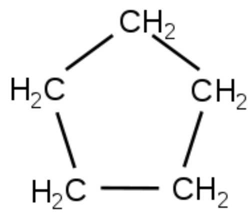


Obr. 16 Schéma elektrotechnického zařízení

Je opět jasné, že ze schématu nepoznáme, jak jsou dráty skutečně zprohýbány. Potřebujeme však vědět, které předměty jsou s vodičem propojeny a které ne, tudíž zprohýbání drátů není pro nás podstatné. I přes neznalost definice grafu už jistě vizuálně poznáme, že i elektrotechnické schéma je rovněž grafem (Zelinka, 1977).

3) Strukturní vzorce sloučenin

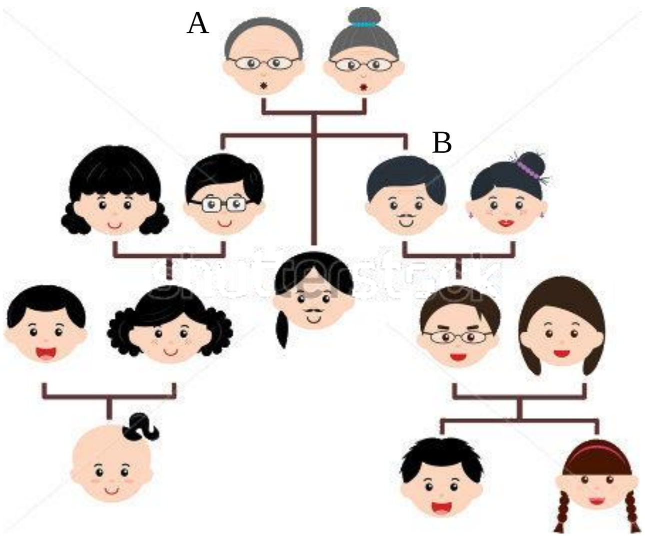
V chemii se setkáváme se strukturními vzorci sloučenin. Jedná se o znázornění vazeb mezi určitými atomy (zapsané zpravidla jejich chemickými značkami) pomocí úseček. Takovýto strukturní vzorec též můžeme nazvat grafem.



Obr. 17 Strukturní vzorec cyklopentanu

4) Rodokmen

Jiným grafem může být i rodokmen, který vyjadřuje vztahy mezi příbuznými a může napomáhat sledovat určitý genetický znak v rodině. Na základě výskytu, četnosti opakování a pohlaví nositelů znaku se dá vyvodit způsob dědičnosti a i odhadnutí jeho výskytu v dalších generacích (Šípek, 2016).



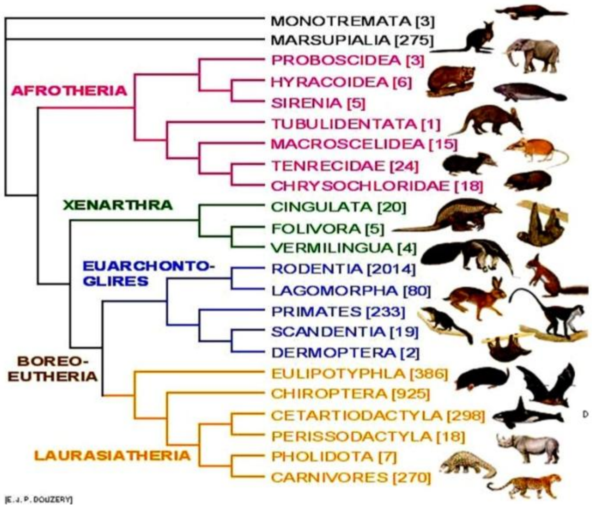
Obr. 18 Rodokmen

Tento typ grafu je už na pohled odlišný od dosud znázorňovaných. Předešlé grafy znázorňují vztahy (matematicky tzv. relace) mezi symetrickými předměty, tedy mezi předměty, pro které platí, že pokud předmět A je v nějakém vztahu k předmětu B, pak i předmět B je v tomto vztahu k předmětu A.[16] Když se podíváme na rodokmen je jasné, že pokud pan B je synem pana A, tak pan A nemůže být synem pana B. Proto nemůžeme nedbat na polohu symbolů jednotlivých osob, ale musíme dodržovat stále to samé zakreslování. Tedy pokud zakreslíme syna pod otce, pak už v celém rodokmenu musíme kreslit děti pod rodiče.

Pokud k úsečce spojující otce se synem přikreslíme šipku směřující k synovi, je od této chvíle již rodokmen jasný i bez dodržování poloh jednotlivých osob. Tímto doplněním dostáváme tzv. *orientovaný graf* (Zelinka, 1977).

5) „Strom života“

Díky evoluční biologii můžeme např. v muzeích vidět tzv. „stromu života“ neboli fylogenetický strom. Jedná se o grafické znázornění příbuzenských vztahů mezi různými taxonomickými jednotkami, o nichž lze předpokládat, že mají společného předka (Buriánková, 2000).



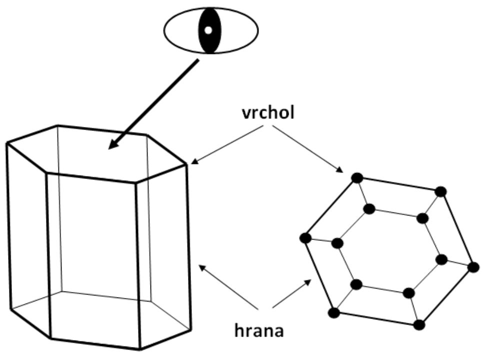
Obr. 19 Fylogenetický strom savců

Kolem nás se nachází spousta dalších příkladů grafů, které nám usnadňují pochopení určitého problému, i určitých vztahů, avšak v každém máme určitou množinu prvků (železniční stanice, součástky elektrotechnických zařízení, atomy, lidé, živočichové,…). V teorii grafů budeme říkat těmto prvkům vrcholy. Také všude

[16] Například pokud máme trať vedoucí z Prahy do Olomouce, můžeme si být jistí, že vede trať i z Olomouce do Prahy.

nacházíme buď úsečky či oblouky, které nám znázorňují vztah mezi určitými prvky. Ty v teorii grafů nazveme hranami (Zelinka, 1977).

Proč název hrany a vrcholy? Název hrany a vrcholy pro grafy pochází z mnohostěnu, jelikož tyto geometrické útvary mají též hrany a vrcholy. Přičemž u mnohostěnu jsou vrcholy rohy a hrany úsečky spojující dva rohy. Strukturu každého mnohostěnu můžeme tak znázornit grafem. Pokud se podíváme skrz skleněný mnohostěn, uvidíme obrazec, který můžeme překreslit na graf (Černý, 2010).



Obr. 20 Překreslení struktury mnohostěnu na graf

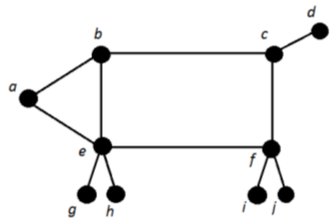
V teorii grafů tedy rozumíme grafem objekt popsaný množinou vrcholů a množinou hran.

Definice 1. (**Neorientovaný graf**) Graf je definován jako trojice $G = (V, H, p)$, kde V je konečná množina prvků (nesmí být neprázdná), kterým říkáme **vrcholy** (či uzly) grafu, H je množina (může být neprázdná) jejíž prvky nazýváme **hranami** grafu a p je zobrazení z H do množiny všech maximálně dvouprvkových podmnožin množiny V, tj. do $\{\{u, v\}; u, v \in V\}$, které určuje, které vrcholy jsou „spojeny“ danou hranou.

Vrcholy grafu značíme obvykle malými písmeny z konce abecedy a hrany jako dvouprvkové množiny *V*, například $\{u, v\}$ či zkráceně *uv*.

Vrcholy u a v jsou takzvaně *incidentní* s hranou *uv*, to znamená, že vrcholy u a *v* „patří“ k hraně *uv*.

Grafy se nejčastěji zadávají přímo názorným obrázkem či výčtem vrcholů a hran (Kovář, 2012). Například:

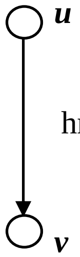


Obr. 21 Neorientovaný graf

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

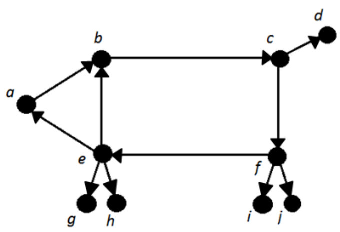
$$H = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{e, f\}, \{f, j\}, \{f, i\}, \{e, g\}, \{e, h\}\}$$

Orientovaný graf se od neorientovaného grafu liší tím, že nestačí u každé hrany určit dva vrcholy, nýbrž je potřeba určit jaký z nich je počáteční a jaký koncový.



Obr. 22 Počáteční a koncový vrchol

Definice 2. (Orientovaný graf) Orientovaným grafem G rozumíme trojici $G = (V, H, p)$, kde V je neprázdná množina, jejíž prvky budeme nazývat vrcholy, H je množina (může být i prázdná), jejíž prvky nazýváme hrany a p je zobrazení z H do množiny všech uspořádaných dvojic prvků z V, tj. do $\{(u, v); u, v \in V\} = V \times V$, které určuje počáteční a koncové vrcholy hran.

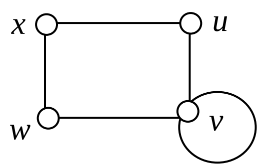


Obr. 23 Orientovaný graf

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$H = \{\{a, b\}, \{e, a\}, \{b, c\}, \{e, b\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{f, e\}, \{f, j\}, \{f, i\}, \{e, g\}, \{e, h\}\}$$

V grafech se často nacházejí i takové případy, kdy mezi dvěma vrcholy vede více hran nebo v nich mohou existovat tzv. **smyčky**. Ty vznikají, pokud hrana vychází a končí v témže vrcholu, tedy $p(h) = \{v, v\}$.



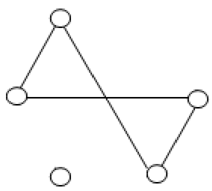
Obr. 24 Smyčka *p(h)={v,v}*

3.1.2 Běžné typy grafů

Některé typy grafů jsou pojmenovány určitými názvy kvůli snadnějšímu vyjadřování.

a) Jednoduchý graf

Graf, ve kterém neexistují smyčky a každé jeho dva vrcholy jsou spojeny nanejvýš jednou hranou, nazýváme grafem *jednoduchým*.



Obr. 25 Jednoduchý graf

b) Triviální graf

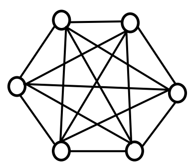
Triviální graf je graf, který se skládá jen z jednoho vrcholu.

c) Diskrétní graf

Diskrétní graf neobsahuje žádnou hranu.

d) Úplný graf (K_n)

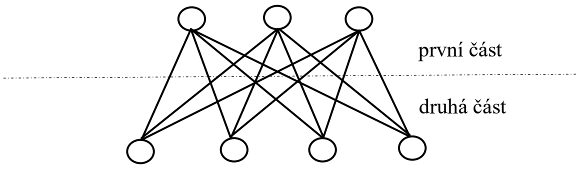
Úplný graf má $n \geq 1$ vrcholů, přičemž každé dva vrcholy jsou spojeny hranou (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):



Obr. 26 Úplný graf K_6

e) Bipartitní graf ($K_{m,n}$)

Bipartitní graf má $n \geq 1$ a $m \geq 1$ vrcholů, přičemž množina vrcholů lze rozdělit na dvě části, přičemž z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části.

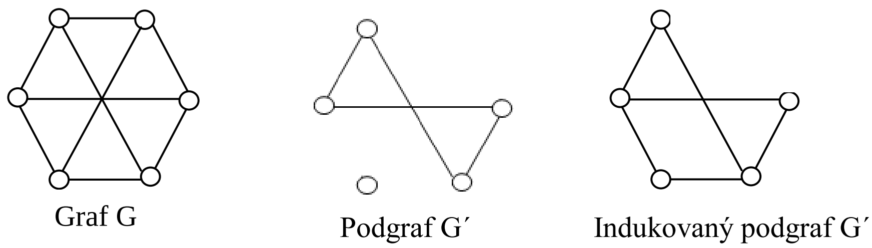


Obr. 27 Bipartitní graf $K_{3,4}$

(Veselý, 2015)

f) Podgraf (G´)

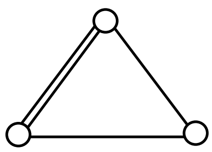
Graf G´= (*V´,H´,p´*) se nazývá *podgraf* grafu G, jestliže množina vrcholů *V´* je podmnožinou množiny vrcholů *V* a množina hran *H´* je podmnožinou množiny hran *H*. Vzniká tedy odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu G. Při odebrání vrcholů je zapotřebí odebrat i hrany spojené s tímto vrcholem. Pokud jsou odebrány pouze tyto hrany grafu G, pak vzniká tzv. *indukovaný podgraf* G´.



Obr. 28 Graf G a jeho podgrafy

g) Multigraf

Multigraf je graf jehož vrcholy jsou spojeny větším množstvím hran (tzv. násobné hrany).



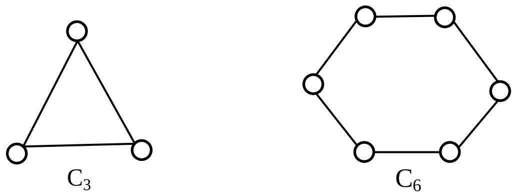
Obr. 29 Multigraf

h) Kružnice (C_n)

Kružnice je neprázdný graf $P = (V, H)$, kde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ a $H = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\} \cup \{v_nv_0\}$.

Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených do jednoho cyklu n hranami.

Nejkratší kružnicí je trojúhelník s délkou $n = 3$.

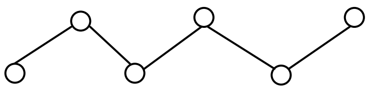


Obr. 30 Graf kružnice C_3 a C_6

i) Cesta (P_n)

Cesta je neprázdný graf $P = (V, H)$, kde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ a $H = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$, vrcholům v_0a v_n jsou koncové vrcholy cesty.

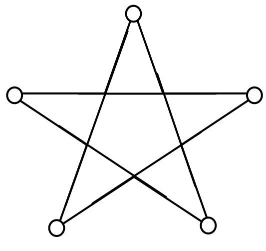
Cesta délky n má n+1 vrcholů spojených za sebou n hranami:



Obr. 31 Cesta P_5

j) Souvislý graf

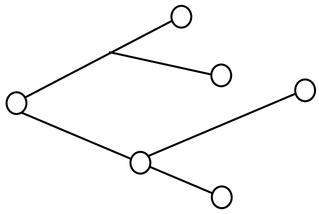
Graf G je *souvislý*, pokud mezi každou dvojicí vrcholů $u, v \in V$ existuje cesta.



Obr. 32 Souvislý graf

k) Strom

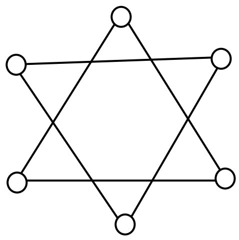
Strom je souvislý graf, jenž neobsahuje v žádném podgrafu kružnici.



Obr. 33 Souvislý graf strom

l) Nesouvislý graf

Graf G je *nesouvislý*, pokud mezi dvojicí vrcholu $u, v \in V$ neexistuje žádná cesta.



Obr. 34 Nesouvislý graf

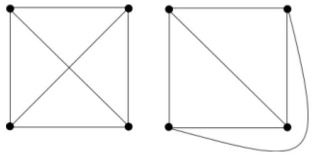
(Jirovský, 2010)

3.1.3 Rovinné grafy

Někdy je potřeba, aby se hrany v grafech neprotínaly. Problém, jak rozmístit vrcholy grafů tak, aby se jeho hrany neprotínaly, je jeden z mnoha problémů teorie grafů. Proto byly zavedené speciální případy, kdy hrany nemají společný žádný bod (až na koncový vrchol). Tyto grafy splňující tento požadavek se nazývají rovinné (nebo planární) grafy.

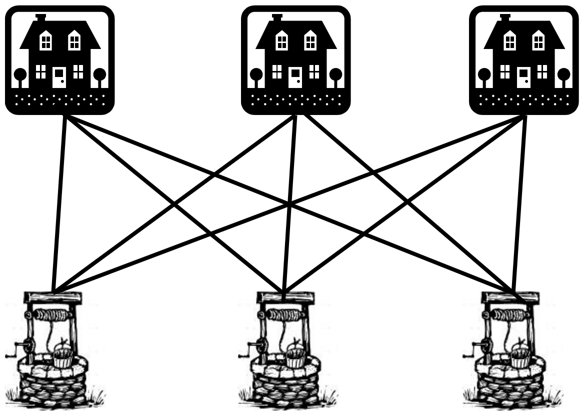
Definice 3. (Rovinný graf) *Rovinným grafem* rozumíme graf, pro který platí takové nakreslení, že se žádné dvě jeho hrany neprotínají jinde než ve vrcholech.

Ač se nám na pohled může zdát, že některý graf není rovinný, jelikož se jeho hrany překrývají, při bližším pohledu můžeme zjistit, že pokud přemístíme vrchol či hranu na jiné místo (obr. x), může nám vzniknout graf, který splňuje podmínky z **definice 3**.



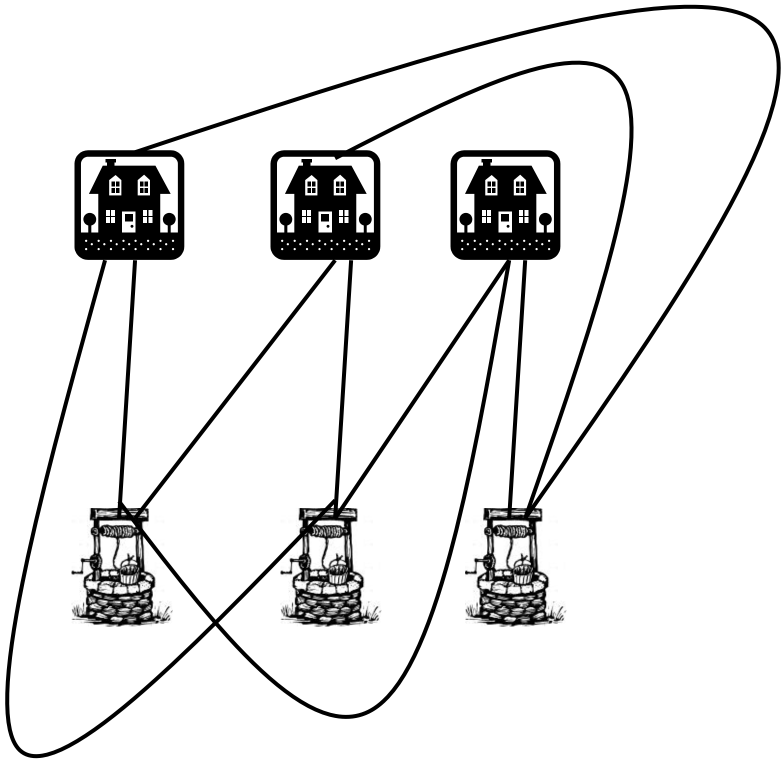
Obr. 35 Rovinný graf

Existují však grafy, které ani po přeuspořádání jejich hran, nejsou rovinné. Podívejme se na úplný graf $K_{3,3}$. Tento graf je úzce spjat s úlohou *o třech domech a třech studních*, která zní takto: *Jsou tři domy a tři studně. Obyvatelé všech tří domů mohou používat všechny tři studny. Každý z nich by chtěl mít od domu ke všem třem studním svou cestu, která by se nekřížila s cestami z ostatních dvou domů. Lze takové cesty vytvořit?* Zkusme si úlohu graficky znázornit:



Obr. 36 Graf úlohy tři domy a tři studně s křížícími se cestami

Obrázek 37. znázorňuje případ, kdy by obyvatelům domů nevadilo, kdyby se cesty ke studním křížily. Pokud si domy a studny označíme vrcholy, jedná se o úplný bipartitní graf K3,3. Avšak abychom vyhověli požadavkům obyvatelům domů, musíme se pokusit cesty vézt jiným směrem (např. obr. 38). Po mnoha pokusech zjistíme, že nelze vézt cesty tak, aby se nekřížily. Tudíž graf K3,3 není rovinným grafem. (Zelinka, 1977)

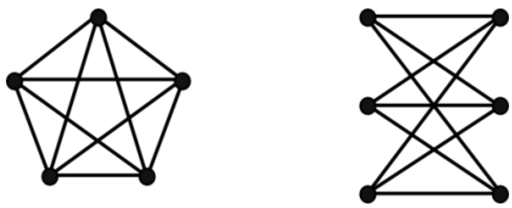


Obr. 37 Přeuspořádání hran v grafu úlohy tří domů a tří studen

Stejně jako graf $K_{3,3}$ i graf K_5[17] není rovinným grafem. Díky tomuto zjištění si můžeme usnadnit rozhodování o tom, zda určitý graf je či není rovinný.

Věta 1. (Kuratowského věta) Graf je *rovinný* právě tehdy, jestliže neobsahuje podgraf, který by byl grafem dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Poznámka: Dělením grafu myslíme graf, který vznikne přidáním vrcholů na některé hrany.



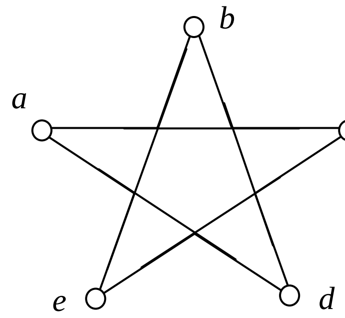
Obr. 38 Graf K_5 a $K_{3,3}$

(Šámal, 2000)

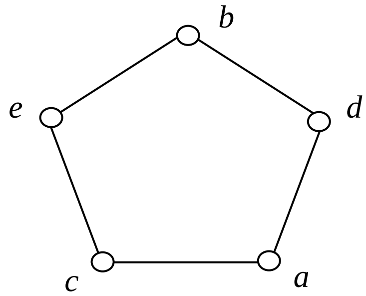
[17] Úplná graf K_5 reprezentuje v problému čtyř barev případ pěti navzájem sousedících oblastí, které v rovině nelze sestrojit. (Šišma P. (1997). Problém čtyř barev. Praha, Prometheus.

Tuto větu uvedl a dokázal v roce 1930 polský matematik **Kazimierz Kuratowsky** (1896 – 1980) ve své práci "Sur le problème des courbes gauches en topologie". Větu nezávisle prokázali i **Orrin Frink** a **Paul Smith**, ale jejich důkazy nebyly nikdy publikovány (Šišma, 1997).

Příklad 1. *Rozhodni, zda graf G_5 s vrcholy a, b, c, d, a e je rovinný.*

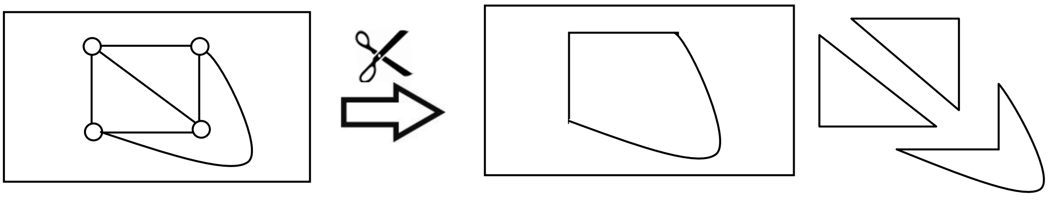


Řešení. Graf G_5 neobsahuje podgraf, který by byl dělením K_5 nebo $K_{3,3}$. Proto se pokusíme uspořádat vrcholy grafu G_5 tak, aby se hrany nekřížily.



Jelikož po přeuspořádání vrcholů se žádné hrany grafu G_5 nekříží, je tento graf rovinný.

Pokud bychom rovinný graf z obrázku X měli nakreslený na papíru, mohli bychom vzít do ruky nůžky a obrázek rozstříhat podél nakreslených hran. Dostali bychom tak čtyři „kusy" papíru, které nazýváme stěnami rovinného grafu (obr. 40).



Obr. 39 Vznik stěn grafu K_4 rozstříháním papíru

(Černý, 2010)

Definice 4. (Stěna rovinného grafu) *Stěnou rovinného grafu* rozumíme část roviny tvořené body, pro které platí, že pro libovolnou dvojici z nich existuje souvislá čára spojující tyto dva body neprotínající žádnou hranu grafu. Množinu všech stěn grafu G budeme značit $S(\mathrm{G})$.

Rozlišujeme vnitřní a vnější stěny, kdy vnější stěna je neohraničená část roviny, vnitřní stěna je ohraničená část roviny.

Teď, když už víme, co jsou stěny grafu, můžeme uvézt jednu z nejdůležitějších vět týkající se vztahu mezi počtem vrcholů, počtem hran a počtem stěn. Tohoto vztahu si všiml **Leonhard Euler** (1707 – 1783) kolem roku 1750 (Kovář, 2012).

Věta 2. (Eulerův vzorec) Pro každý souvislý graf, který má *n* vrcholů, *m* hran a *s* stěn, platí

$$n + s = m + 2.$$

(Demlová a Pondělíček, 1997)

Důkaz: Indukce vzhledem k počtu hran *m*.

Předpoklad indukce: Nejmenší souvislý graf pro zvolený počet vrcholů n je strom. Jelikož strom obsahuje pouze jednu vnější stěnu, platí pro něj počet hran m = n -1. Snadno již ověříme, že platí $n + s - m = n + 1 - (n - 1) = 2$.

Indukční krok: Předpokládáme, že věta platí pro všechny souvislé grafy, které mají m - 1 hran. Potom pokud vezmeme souvislý graf, který obsahuje alespoň jeden cyklus C, a vynecháme jednu hranu v z cyklu C, dostaneme opět souvislý graf, jehož počet hran se zmenšil o 1. Společně s počtem hran se změní i počet stěn, jelikož hrana *v* oddělovala dvě stěny,tudíž jejím odebráním došlo ke splynutí těchto dvou stěn. Tudíž se také počet stěn sníží o 1. Počet vrcholů se nezmění.

Podle indukčního předpokladu platí v grafu, který vznikl odebráním hrany *v*, $n + (s - 1) - (m - 1) = n + s - m = 2$. □

Eulerův vzorec závisí pouze na struktuře grafu. To znamená, že každé rovinné nakreslení grafu má stejný počet oblastí určen počtem vrcholů a hran grafu (Kovář, 2012).

Ačkoliv je vzorec jednoduchý má několik důležitých důsledků a je součástí většiny tvrzení o rovinných grafech.

Důsledky

1) Pro každý rovinný graf platí $m \leq 3n - 6$ a $s \leq 2n - 4$.
2) Pro každý rovinný graf bez trojúhelníků platí $m \leq 2n - 4$ a $s \leq n - 2$.
3) Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše pět.
4) Každý rovinný graf lze obarvit pěti barvami.

(Míša, 2006)

Než se podíváme na barvení grafů a barvení map musíme si uvézt ještě některé potřebné základní pojmy, bez kterých bychom neporozuměli principu barvení map a redukci problému čtyř barev.

3.1.4 Stupeň vrcholu

Definice 5. (Stupeň vrcholu) Mějme graf $G = (V,H,p)$. Stupeň vrcholu $v \in V$ je počet hran obsahující vrchol v. Značíme $d\ (u)$.

V orientovaném grafu je stupněm vrcholu $d\ (u)$ součet výstupního a vstupního stupně, přičemž vstupním stupněm vrcholu u $d_+\ (u)$ je počet hran, pro nějž je vrchol u koncový. A výstupní stupeň vrcholu u $d_-\ (u)$ je počet hran, pro nějž je u počáteční vrchol.

$$d\ (u) = d_+\ (u) + d_-\ (u)$$

Pokud chceme dát znatelně najevo, že se jedná o nejnižší stupeň vrcholu v grafu, označujeme tento stupeň $\delta(G)$, naopak pro nejvyšší stupeň vrcholu grafu používáme značení $\Delta(G)$.

Jednoduchý graf s n vrcholy má maximální stupeň každého vrcholu $n-1$. Pokud je tato maximální hodnota hodnotou všech vrcholů grafu, jedná se o úplný graf.

Věta 3. (Princip sudosti) Nechť máme graf *G*= (*V*, *H*, *p*).

i) Součet stupňů všech vrcholů grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran, tj.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|H|$$

ii) Je- li G jednoduchý graf a $|V| = n$, pak $|H| \leq \binom{n}{2}$a rovnost nastává právě, když G =K_n.

Důkaz:

i. Při sčítání stupňů všech vrcholů grafu G, počítáme teoreticky kolik je konců hran. Každá hrana má dva konce, proto počet konců všech hran je dvojnásobek počtu hran. A jelikož na každém konci hrany se nachází vrchol, musí být stupeň vrcholů roven právě počtu konců hran.

ii. Protože hrana je určena dvojicí různých vrcholů, je počet hran omezen počtem dvouprvkových podmnožin vybraných z množiny *V*, což je číslo $\binom{n}{2}$. □ (Kovář, 2012)

Známe-li tedy stupeň všech vrcholů v grafu, můžeme jednoznačně určit počet hran v tomto grafu. Podle principu sudosti žádný graf nemůže mít nikdy lichý počet vrcholů lichého stupně.

Příklad 2. *Kolik hran má graf, který má sedm vrcholů stupně 3 a pět vrcholů stupně 6?*

Řešení. Takový graf neexistuje! Součet stupňů požadovaného grafu by byl $7.3 + 5.6 = 51$. To by znamenalo, že graf má 51/2 hran, což není možné, jelikož počet hran nemůže být desetinné číslo.

Definice 6. (Stupňová posloupnost) Nechť máme graf *G*= (*V*, *H*, *p*) s vrcholy v_1, v_2, ..., v_n. Posloupnost stupňů vrcholů $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ nazýváme *stupňovou posloupností grafu* G.

Pro přehlednost se stupně vrcholů ve stupňové posloupnosti řadí tak, aby vznikla nerostoucí posloupnost, tj. $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$.

Pro každý graf snadno sestavíme stupňovou posloupnost, avšak nemůžeme tuto posloupnost vždy použít pro jednoznačné určení grafů. Ve speciálních případech lze použít stupňovou posloupnost k jednoznačnému určení grafu, např. (3,3,3,3) je stupňová posloupnost pouze úplného grafu K_4. Ale pokud si vezmeme stupňovou posloupnost (3, 2, 2, 1, 1, 1), nemůžeme již jednoznačně určit, o jaký graf se jedná (obr. 41).

Obr. 40 Dva grafy se stupňovou posloupností (3, 2, 2, 1, 1, 1)

Stupňová posloupnost také nemůže obsahovat žádné záporné číslo a ani posloupnost *n* nezáporných celých čísel nesmí obsahovat číslo *n* či větší číslo než *n*, jelikož žádný vrchol grafu nemůže mít více než *n*-1 sousedních vrcholů (Kovář, 2012).

Věta 4. (Havlova – Hakimiho věta) Nechť $(d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n)$ je posloupnost nezáporných celých čísel. Pak netriviální graf s *n* vrcholy se stupňovou posloupností

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

existuje právě tehdy, když existuje graf s *n*-1 vrcholy se stupňovou posloupností

$$D' = \left(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n\right).$$

Takto uspořádaná posloupnost D′ je kratší a vždy obsahuje menší číslo než posloupnost D, a proto po nejvýš n-1 krocích dostaneme posloupnost, o které dokážeme rozhodnout, zda patří nějakému grafu. Pokud tedy D′ je stupňová posloupnost nějakého grafu, pak i D je stupňová posloupnost grafu.

Příklad 3. *Ukažte, že posloupnost (4,3,3,2,1,1) není stupňovou posloupností žádného grafu užitím věty 4.*

Řešení. Opakovaným užitím věty 4. dostaneme následující posloupnosti

$$(4,3,3,2,1,1) \overset{H-H}{\sim} (2,2,1,0,0) \overset{H-H}{\sim} (1,0,-1,-1)$$

poslední z nich obsahuje záporná čísla, proto určitě není stupňovou posloupností žádného grafu. Tudíž ani (4,3,3,2,1,1) není stupňovou posloupností.

3.2 Barvení grafů

Různým objektům v grafu (vrcholům, hranám, stěnám atd.) můžeme přiřadit barvu (většinou reprezentovanou přirozeným číslem) pomocí jedné disciplíny teorie grafu, tzv. *barvení grafů*.

Déle se budeme zabývat pouze vrcholovému barvení, jelikož barvení ostatních objektů lze snadno převézt na vyšetřování vrcholové barevnosti.

Například hranové barvení převedeme na vrcholové barvení pomocí tzv. hranového grafu δG. Graf δG získáme takto: *„Za vrcholy grafu δG prohlásíme hrany původního grafu G. Dva vrcholy v hranovém grafu jsou spojeny hranou v δG, jestliže jim odpovídající hrany původního grafu G měly společný vrchol.“* (Míša, 2006)

3.2.1 Vrcholové barvení grafů

Mohou existovat různá vrcholová obarvení grafu G, například všem vrcholům grafu G můžeme přiřadit tutéž barvu (Zelinka, 1977).

Našim cílem je obarvit vrcholy grafu G tak, aby žádné dva incidentní vrcholy neměly stejnou barvu. Jelikož při barvení nezávisí na orientaci a násobnosti hran je možné omezit se pouze na neorientovaný graf (Šeda, 2003).

Definice 7. (Přípustné obarvení) Přípustné obarvení grafu G pomocí k barev je takové zobrazení

$$c: V(\mathrm{G}) \rightarrow \{1,2,\dots,k\},$$

ve kterém každé dva vrcholy, které jsou spojené hranou, budou mít různou barvu, tj $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu grafu $uv \in H(\mathrm{G})$.

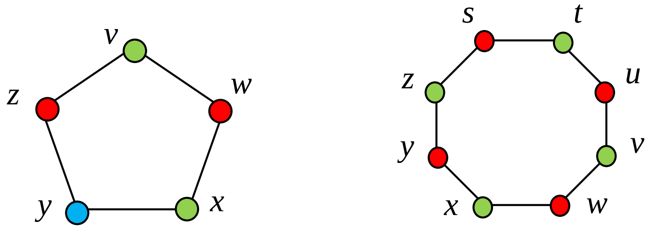
Samozřejmě můžeme každý vrchol grafu obarvit jinou barvou. V praxi je však potřeba obarvit vrcholy pomocí nejmenšího počtu barev kvůli nákladům či specifickým požadavkům. Bude nás tedy zajímat **nejmenší počet barev,** kterými můžeme co nejlépe obarvit vrcholy grafu (Kovář, 2012).

Definice 8. (Chromatické číslo) Nejmenší počet barev potřebných k obarvení grafu nazýváme barevnost grafu neboli *chromatické číslo* χ(G).

(Míša, 2006)

Příklad 4. Jaký je nejmenší počet barev potřebných k obarvení grafu C_5 a C_8?

Řešení. A) Barevnost grafu C_5. Vrcholy grafu C_5 označme po řadě *v, w, x, y* a *z*. Vrchol *v* obarvíme první barvou (například zelenou), jelikož vrchol *v* sousedí s vrcholy *w* a *z,* obarvíme tyto vrcholy druhou barvou (například červenou). Vrchol *x* sousedící s vrcholy w (červeně obarven) a y (dosud neobarven) můžeme opět obarvit první barvou. Zbývající vrchol *y* sousedí s vrcholem *z*, který je obarven červenou barvou, a vrcholem *x*, který je obarven zelenou barvou. Proto vrchol *x* musíme obarvit třetí barvou (například modrou). Nejmenší počet barev potřebných pro obarvení grafu C_5 jsou tedy 3 a proto barevnost grafu C_5 je $\chi(C_5) = 3$.



Obr. 41 Vrcholové obarvení grafů C_5 a C_8

Z příkladu 4. můžeme analogicky dokázat, že pro všechny kružnice liché délky je χ(C) = 3 a pro všechny kružnice sudé délky χ(C) = 2.

Je logické, že na obarvení daného grafu můžeme využít maximálně počet barev rovný počtu vrcholů tohoto grafu. Některá chromatická čísla typická pro určitý graf jsou uvedena v tabulce 1.

Tab. 1. Chromatické číslo charakteristické pro určitý typ grafu

Typ grafu	Bipartitní graf	Kružnice sudé délky	Kružnice liché délky	Diskrétní graf	Úplný graf K_n	Strom
χ(G)	2	2	3	1	*n*	*2*

Pro nás je však důležité, že se doposud nepodařilo najít rovinný graf, jehož chromatické číslo by bylo větší než čtyři.

Tvrzení 1. (O čtyřech barvách) Pro každý rovinný graf *G* je $\chi(G) \leq 4$.

(Zelinka, 1977)

Toto tvrzení nedokážeme, ale může uvést poměrně slabší větu, které již lze dokázat.

Věta 5. Nechť G je rovinný graf, pak $\chi(G) \leq 5$.

Tuto větu dokázal P. J. Heawood a zájemce se na důkaz této věty může podívat například v knize B. Zelenky *Rovinné grafy* (strana 84).

Barvení grafů je NP-úplný problém, není tedy znám algoritmus pro jejich řešení v polynomiálním čase. Existují však algoritmy, které představují rychlé a poměrně dobré řešení, které však nemusí být vždy optimální. Pro tento text jsou algoritmy používané k obarvení grafu nad rámec obsahu.

3.2.2 Aplikace barvení grafů

Teorii barvení grafů můžeme aplikovat na různé problémy v běžném životě. Například na podávání léků, které se nesmějí brát současně, plánování procesů, které nemohou probíhat naráz (rozvrh hodin, plánování schůzek,…), ale třeba i na skladování nebezpečných látek a barvení map.

Skladování nebezpečných látek, které se ovlivňují

Někdy je potřeba oddělit nebezpečné látky tak, aby nebyly v kontaktu s jinými. Například při skladování chlorovaných rozpouštědel (chloroform, trichlormethan,…) se dbá na to, aby byly skladovány odděleně od hořlavých kapalin a alkalických kovů. Při styku s hořlavými kapalinami by mohlo dojít k prudké reakci za vzniku toxických plynů (fosgen, chlorovodík či chlor) a při styku s alkalickými kovy (sodík, draslík,…) by mohlo dojít i k výbuchu (Loudová, 2013).

Otázkou tedy je, jaký je nejmenší počet potřebných místností pro uložení těchto nebezpečných látek? Každý typ látky, který nesmí být skladován současně, spojíme úsečkou a každou látku znázorníme bodem, tím dostaneme graf, jehož vrcholy odpovídají ukládaným látkám a jeho hrany odpovídají vztahu mezi určitými látkami. Pokud budeme jednotlivé místnosti odlišovat barvami, můžeme takto modifikovaný problém s nebezpečnými látkami převézt na problém barvení vrcholů grafů.

Nově se můžeme zeptat takto: jaký je nejmenší počet barev potřebných pro obarvení vrcholů grafu, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejně?

Barvení map

Náklady za tisk map byl jeden z důvodů, proč se lidé začali zabývat myšlenkou, jaký nejmenší počet barev stačí na obarvení příslušné mapy.

Jak souvisí obarvení mapy s obarvením grafů? Pokud si v každém území mapy zvýrazníme jeden bod (například hlavní město, největší horu,…) a body sousedních území[18] spojíme úsečkou (či obloukem), dostaneme rovinný graf, pomocí kterého nalezneme příslušný nejmenší počet barev k obarvení mapy (Hliněný, 2008).

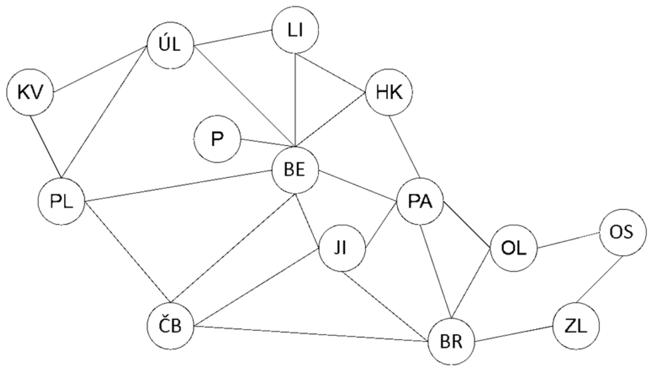
S myšlenkou převést barvení map na teorii barvení grafů již přišel A. B. Kempe v roce 1879 při řešení problému čtyř barev. Rovinný graf vždy dostáváme z mapy na rovinné či kulové ploše, ale problém lze zobecnit i na nerovinné grafy (Šišma, 1997).

Pro ilustraci si vezmeme mapu krajů České republiky s krajskými městy (obr 43.).

Obr. 42 Mapa krajů České republiky s příslušnými krajskými městy

Za vrcholy budoucího grafu si zvolíme uvedená krajská města[19]. Po spojení všech sousedních krajských měst a odstranění hranic krajů nám vznikne graf G^M na obrázku 44.

[18] Mějme pořád na mysli, že sousedními oblastmi berem ty, co mají za hranici souvislou čáru, ne pouze bod.
[19] Jelikož středočeský kraj nemá své krajské město, zvolíme si vrcholem v tomto kraji město Benešov.

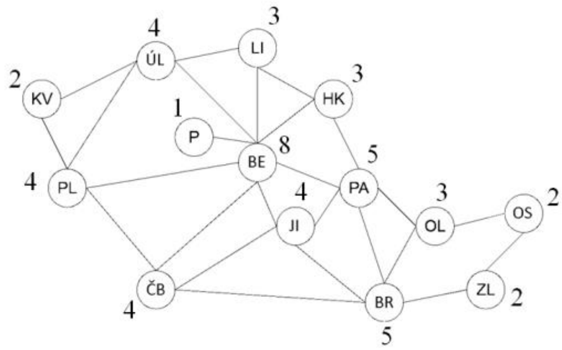


Obr. 43 Graf G^M vzniklý z krajských měst a města Benešov

Názorně si ukážeme dva příklady, jak je možné obarvit tento vzniklý graf G^M.

První způsob:

1. Ke každému vrcholu grafu G^M si připíšeme hodnotu jeho stupně.

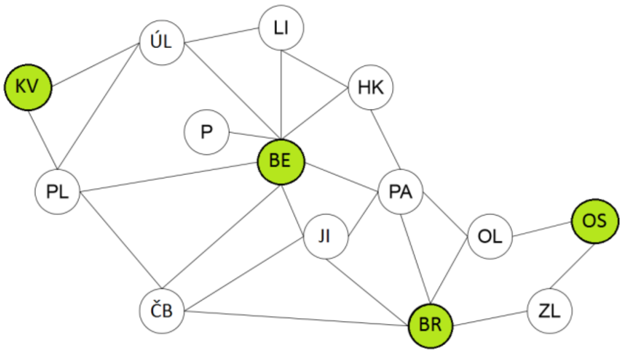


Obr. 44 Graf G^M s čísly vyjadřující stupně vrcholů

2. Vrcholy seřadíme do posloupnosti P, tak aby platilo $st(v_{k_1}) \geq st(v_{k_2}) \geq \cdots \geq st(v_{k_n})$

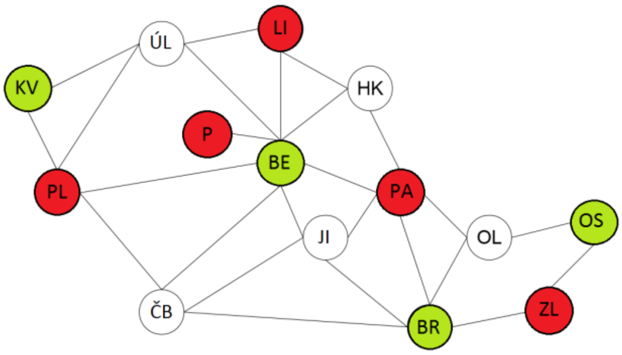
$$P = \{BE, BR, PA, ÚL, JI, PL, ČB, LI, HK, OL, KV, OS, ZL, P\}.$$

3. Vezmeme si první barvu (například zelenou)
   a) vybereme z P první vrchol a zabarvíme ho zelenou barvou
   b) vybereme z P dosud nezabarvený vrchol, který není přilehlý k již obarvenému vrcholu, a též ho zabarvíme zelenou barvou. Krok 3b) opakujeme, dokud existuje nezabarvený vrchol nepřilehlý k již obarvenému vrcholu. Pak pokračujeme dalším krokem.



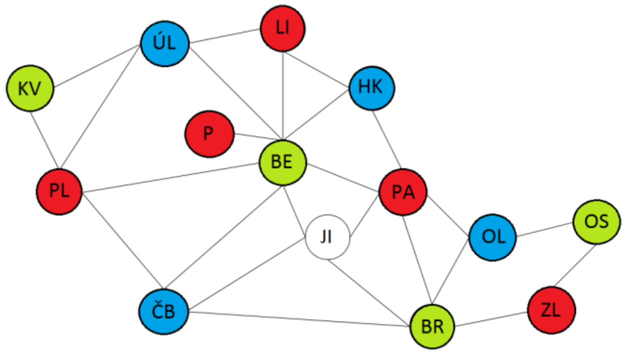
Obr. 45 Obarvení první barvou

4. Vezmeme si druhou barvu (například červenou)
   a) vybereme z P neobarvený vrchol nejvyššího stupně a zabarvíme ho touto barvou
   b) vybereme z P dosud nezabarvený vrchol, který není přilehlý k již obarvenému vrcholu červenou barvou, a též ho zabarvíme červenou barvou. Krok 4b) opakujeme, dokud existuje nezabarvený vrchol nepřilehlý k již červenému vrcholu. Pak pokračujeme dalším krokem.



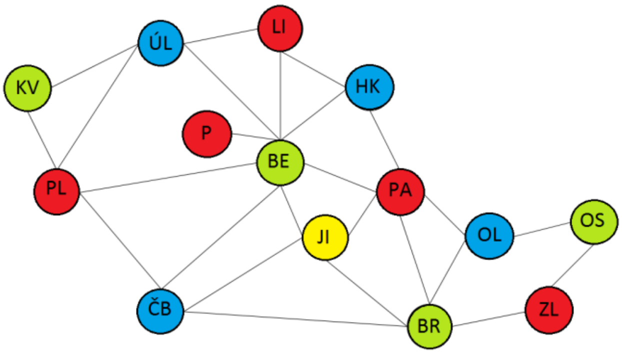
Obr. 46 Obarvení druhou barvou

5. Vezmeme si třetí barvu (například modrou)
   c) vybereme z P neobarvený vrchol nejvyššího stupně a zabarvíme ho modrou barvou
   d) vybereme z P dosud nezabarvený vrchol, který není přilehlý k již obarvenému vrcholu modrou barvou, a též ho zabarvíme touto barvou. Krok 4b) opakujeme, dokud existuje nezabarvený vrchol nepřilehlý k již modrému vrcholu. Pak pokračujeme dalším krokem.



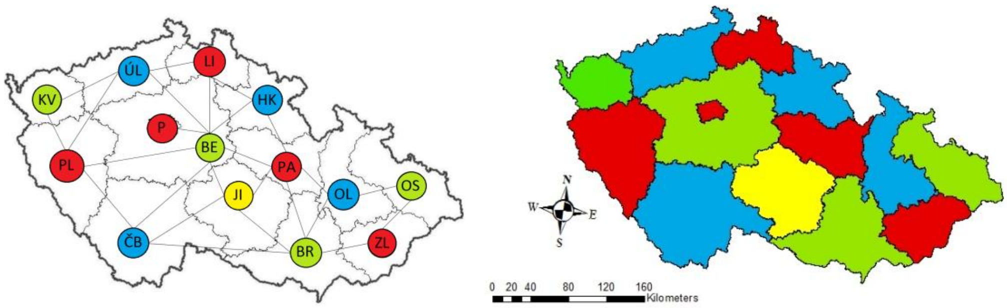
Obr. 47 Obarvení třetí barvou

6. Takto přidáváme pokaždé jinou barvu, dokud nedostaneme všechny obarvené vrcholy tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu.



Obr. 48 Konečné obarvení pomocí prvního způsobu

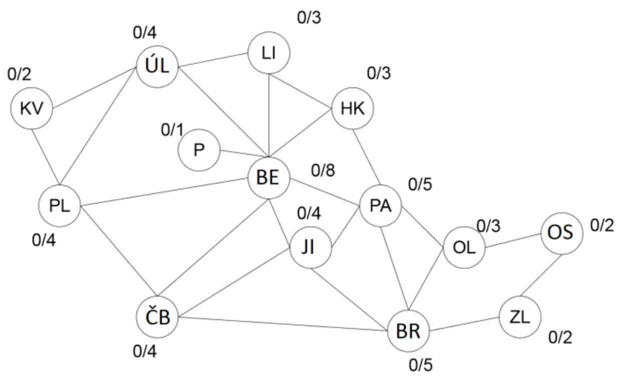
7. Po obarvení grafu převedeme graf G^M zpět na mapu krajů ČR a kraje obarvíme podle barvy vrcholů zastupujících tento kraj.



Obr. 49 Převedení grafu G^M zpět na mapu a vybarvení krajů dle barvy vrcholů

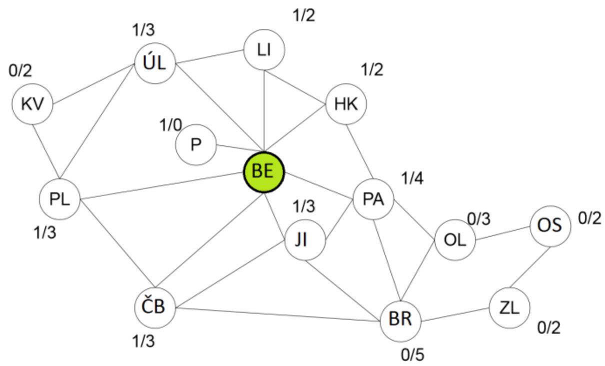
Druhý způsob:

1. Každý vrchol grafu G^M ohodnotíme dvojicí čísel *n/m*, kdy *n* se bude rovnat počtu barev, jimiž jsou obarveni sousedé vrcholu, a *m* se bude rovnat počtu doposud neobarvených sousedů vrchol. Zvolíme si pět barev, které si ohodnotíme čísly 1 až 5 (například 1 = zelená, 2 = červená, 3 = modrá, 4 = žlutá a 5 = oranžová).



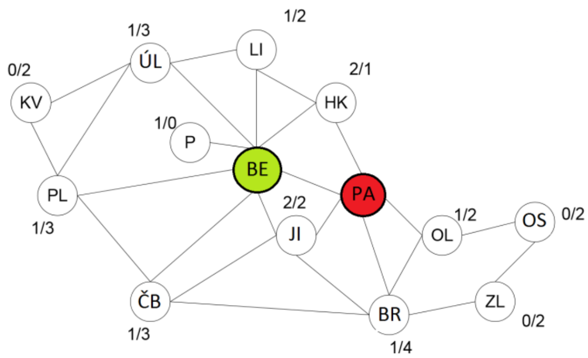
Obr. 50 Vrcholy grafu G^M ohodnoceny dvojicí čísel *n/m*

2. Najdeme vrchol, který má největší počet doposud neobarvených sousedů a vrchol obarvíme nejníže ohodnocenou barvou. Přepočítáme dvojici čísel *n/m* u každého vrcholu.



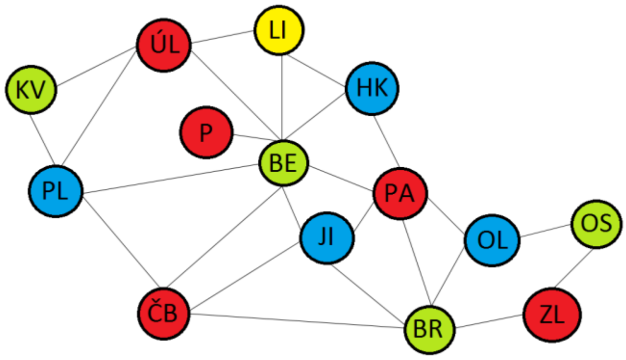
Obr. 51 Obarvení prvního vrcholu a přepočítání dvojice čísel *n/m*

3. Mezi neobarvenými vrcholy najdeme vrchol, jehož již obarvení sousedé jsou obarveni největším počtem různých barev (tedy hledáme vrchol jehož číslo *n* je největší). Pokud je takových vrcholů více, najdeme mezi nimi vrchol, který má největší počet dosud neobarvených sousedů (tedy má největší číslo *m*). A vrchol obarvíme barvou 2. Opět přepočítáme u každého vrcholu dvojici čísel *n/m*.



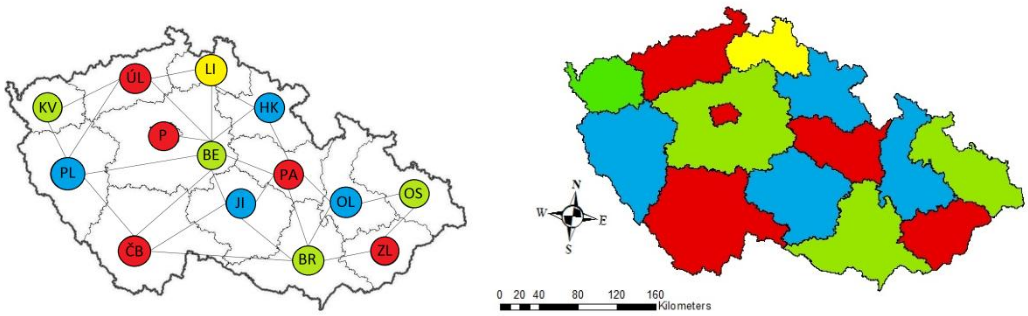
Obr. 52 Obarvení dalšího vrcholu a přepočítání dvojice čísel *n/m*

4. Opakujeme postup v kroku 3 do obarvení všech vrcholů grafu G^M. Při obarvování nového vrcholu vždy použijeme nejníže možnou ohodnocenou barvu. Možnou míníme takovou, aby nedošlo k obarvení dvou sousedních vrcholů stejnou barvou.



Obr. 53 Konečné obarvení pomocí druhého způsobu

5. Po obarvení grafu převedeme graf G^M zpět na mapu krajů ČR a kraje obarvíme podle barvy vrcholů zastupujících tento kraj.



Obr. 54 Převedení grafu G^M zpět na mapu a vybarvení krajů dle barvy vrcholů

Bez problému bychom stejnou mapu obarvily například sedmi, šesti, ale i pěti barvami. Nám dokonce stačily pouze čtyři barvy. Snadno však zjistíme, že počet potřebných barev již nelze snížit. (Gymnázium Brno, 2015)

K dispozici jedna barva: Pokud bychom měli pouze jednu barvu, nemohli bychom rozlišit ani dva sousední kraje.

K dispozici dvě barvy: Pokud bychom měli pouze dvě barvy, nemohli bychom od sebe rozlišit tři sousední území. Tedy kdybychom jednou barvou obarvili Plzeňský kraj a druhou barvou kraj Jihočeský, neměli bychom barvu na rozlišení Středočeského kraje.

K dispozici tři barvy: Pokud jednou barvou obarvíme Středočeský kraj, pak zbývajícími dvěma barvami bychom museli střídavě obarvit sedm sousedících krajů, což je pro lichý počet nemožné. (Jirovský, 2010)

3.3 Redukce problému čtyř barev

Nyní se již můžeme podívat na převod problému čtyř barev do teorie grafů. Juraj Bosák se zabývá ve své knize Pokroky matematiky, fyziky a astronomie z roku1979 převedením problému čtyř barev na čtyři redukce a to:

1) na redukci barvení stěn grafu,
2) na redukci barvení vrcholů grafu,
3) na redukci jednoduché triangulace,
4) na redukci využívající nevyhnutelné množiny.

Postupně stručně uvedeme každou redukci.

3.3.1 Redukce na barvení stěn grafu

První redukce spočívá v převedení „zeměpisné“ mapy na „matematickou“ formulaci problému, a to tedy na graf.

Postup máme uveden v úvodu *Barvení map*. Avšak předpokládejme, že vrcholy i hrany grafu G leží na hranici států (či jiného území), vodních ploch a i na samotném okraji mapy.

Nyní pokud obarvíme stěny rovinného grafu G čtyřmi barvami tak, aby žádné sousední stěny neměly stejnou barvu (přičemž stěny, které v zeměpisné mapě nepředstavují státy[20], necháme neobarvené), dostaneme regulární obarvení i původní zeměpisné mapy.

Původní „zeměpisný“ problém bude tedy vyřešen, pokud dokážeme pravdivost této hypotézy:

Hypotéza (O čtyřech barvách) *Stěny každého rovinného grafu lze regulérně obarvit čtyřmi barvami.*

[20] Vodní plochy, vnější stěna,…

3.3.2 Redukce na barvení vrcholů grafu

Ve druhé redukci J. Bosák převádí problém obarvení stěn rovinného grafu na obarvení vrcholů jiného rovinného (tzv. duálního[21]) grafu G*.

Nyní každému vrcholu grafu G* přiřadíme barvu tak, aby sousední vrcholy neměly totéž zabarvení. Pokud se nám povede vrcholy tohoto grafu obarvit pouze čtyřmi barvami, můžeme vyslovit následující tvrzení.

Tvrzení 2. *Hypotéza o čtyřech barvách je správná, pokud vrcholy každého rovinného grafu je možno regulérně obarvit čtyřmi barvami.*

Důkaz: Nechť G je daný graf a G* duální graf. Pokud je možné vrcholy každého rovinného grafu regulárně obarvit čtyřmi barvami, obarvíme takto vrcholy grafu G*. Dále obarvíme stěny grafu G tak, že se barva stěny *s* shoduje s barvou vrcholu V_s grafu G*. Zřejmě vznikne regulární obarvení stěn grafu G čtyřmi barvami. □

3.3.3 Redukce na jednoduché triangulace

Pokud bychom dále pracovali s množinou všech rovinných grafů, s kterou předpokládá tvrzení 2., bylo by další zkoumání problému velmi obsáhlé a náročné. Proto zúžíme tuto množinu na podmnožinu jednoduchých triangulací, neboť další redukce problému čtyř barev (tvrzení 3.) ukazuje, že se stačí zaobírat pouze touhle podmnožinou. Dokonce je možné použít pouze podmnožinu ireducibilních[22] jednoduchých triangulací.

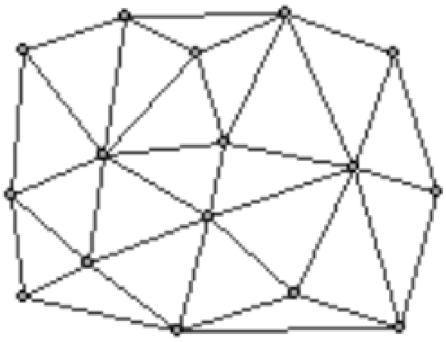
Tvrzení 3. *Hypotéza o čtyřech barvách je správná, pokud vrcholy každé jednoduché triangulace je možné regulárně obarvit čtyřmi barvami (tj. pokud neexistuje ireducibilní jednoduchá triangulace)*

Triangulací nazveme graf, jehož vnitřní i vnější stěny jsou trojúhelníkové. Příkladem triangulace je graf na obrázku 56. *Jednoduchou triangulací* pak nazveme graf, pokud neobsahuje dvojúhelníky, vrcholy stupně ≤ 4 a trojúhelníky, které netvoří hranici žádné oblasti (Šišma, 1997).

---

[21] Duální graf G^D k souvislému rovinnému grafu G, je graf, pro který platí, že každý vrchol G^D odpovídá jedné stěně v G, hraně v^D spojující vrcholy G^D odpovídá hrana v spojující dvě stěny v grafu G, které těmto vrcholům odpovídají.

[22] Ireducibilní = vrcholy nelze obarvit pomocí čtyř barev.



Obr. 55 Příklad triangulace

3.3.4 Redukce na využití nevyhnutelných množin

Ve čtvrté redukci mají důležitou úlohu reducibilní konfigurace a nevyhnutelné množiny[23]. Poslední redukce problému čtyř barev tedy zní:

Tvrzení 4. *Hypotéza o čtyřech barvách je správná, pokud existuje nevyhnutelná množina reducibilních konfigurací.*

Důkaz: Nechť je *N* nevyhnutelná množina reducibilních konfigurací. Pokud by byla hypotéza o čtyřech barvách nesprávná, existoval by ireducibilní graf a ireducibilní jednoduchá triangulace *t*. Jelikož *N* je nevyhnutelná množina, obsahuje aspoň jednu konfiguraci *k,* která je izomorfní s některým podgrafem triangulace *t.* Konfigurace je však reducibilní, takže triangulace *t* obsahuje podgraf izomorfní s reducibilní konfigurací, a tedy nemůže být ireducibilní => spor. □

Přičemž *konfigurací* rozumíme souvislý rovinný graf, jehož všechny vnitřní oblasti jsou trojúhelníkové (Šišma, 1997).

[23] *„Mějme dvě množiny grafů M_1 a M_2, řekneme, že množina M_1 je nevyhnutelná vzhledem k množině M_2, když každý graf z M_2 má alespoň jeden podgraf izomorfní s některým grafem z M_1." (Šišma P. (1997). Problém čtyř barev. Praha, Prometheus.*

4. PŘÍNOS PRO MATEMATIKU

Problém čtyř barev, který svou obtížností připomíná Velkou Fermatovu větu[24] v teorii čísel, se podílel na mocném rozvoji teorie grafů (Sedláček, 1981). Ačkoliv dlouhou dobu odolával pokusům o dokázání, spousta matematiků díky tomu přišla na důležité formulace využitelných v teorii grafů. Uveďme si například Heawoodovu dokázanou úvahu, že k obarvení každé mapy stačí pět barev nebo Kempeho řetězce.

4.1 Počítač a důkazy

Nezapomeňme také na důležitost problému čtyř barev v oblasti počítačových důkazů. Prvotní přijetí dokázání problému čtyř barev pomocí počítače nebylo pozitivní, jak jsme si již zmiňovali v historii, avšak právě tento způsob provedení důkazu měl velký vliv na budoucí používání počítačové techniky v oblasti matematiky.

Stále jsou vedeny odborné diskuze nad přesností počítačové techniky v dokazování tvrzení, ale její využívání již nezpůsobuje tak velkou psychickou bariéru proti technickému využívání jako například v roce 1976. Připusťme, že lidské dokazování může být srozumitelnější než počítačové a i díky běžným lidským chybám může dojít k dokázání jiného tvrzení, jako například Kempeho neúčelné prokázání pravdivosti věty o pěti barvách při zkoumání problému čtyř barev. Avšak počítačová technika správním zadáním může značně pomoci při řešení důkazů, které vyžadují obtížné výpočty a spoustu času.

Proč jsou matematické důkazy důležité? Matematické důkazy po korektním provedení platí navždy. Tím se odlišují například od fyzikálních důkazů, které mohou být vyvráceny díky přesnějšímu měření nebo měření v nových podmínkách. Pokud je důkaz platný lze jej dál využít k dalšímu počítání či dokazování jiných tvrzení. Také většinou napomáhá lepšímu pochopení tvrzení a potvrzuje, že jej možné bez pochybnosti používat (Myslín, 1999).

Pro většinu studentů jsou matematické důkazy obtížné, nepochopitelné a nezábavné, avšak je otázkou, zda by nešlo využít počítačových programů pro atraktivnější a rychlejší dokazování středoškolských tvrzení.

[24] Neexistují celá kladná čísla x, y, z a n, kde $n > 2$, pro která $x^n + y^n = z^n$.

Studenti středních škol se zajisté setkají se součtem geometrických řad. A budou se muset naučit vzoreček $s = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$, který platí pro součet s geometrické řady $\sum_{n=1}^{k} a_1 q^{(n-1)}$. Pokud si však tento vzorec nezapamatují, budou se muset k výsledku dopracovat pomocí vhodných a vžitých úprav, které jim zaberou určitý čas.

Například takto:

1) Chtěli bychom vypočítat součet prvních *n* členů:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

2) Členy $a_2 \dots a_n$ můžeme vyjádřit pomocí a_1

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

3) Nyní celou rovnici vynásobíme kvocientem q

$$\mathrm{q}s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n = a_1(q + q^2 \dots + q^n)$$

4) Pokud obě předešlé rovnice odečteme od sebe, dostaneme po úpravě rovnici

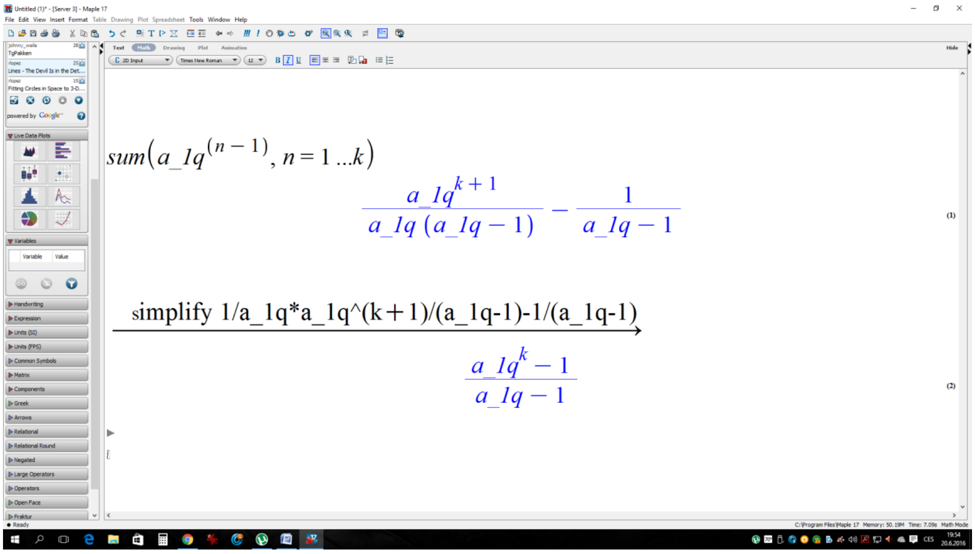
$$s_n - q s_n = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

5) Pokud $q \neq 1$, můžeme si vyjádřit součet prvních *n* členů

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Po správném výsledku budou nejspíše pyšní na své popsané řádky a zdárný postup. Avšak pokud stejnou geometrickou řadu necháme vypočítat například počítačový program Maple® 17 získáme výsledek v několika vteřinách:



Obr. 56 Výpočet sumy v Maple® 17

Jak je možné, že stroj bez inteligence si takto rychle poradí se zadaným příkladem? Odpovědí je *Gosperův algoritmus*, algoritmus znám skoro 40 let. Ten vytvořil R. W. Gosper, Jr., který přispěl i k rozvoji počítačového programu Macsyma (Tyr, 2012).

Gosperův algoritmus

$(S(n),b)$:=gosper$(a(n))$

[předpokládá, že $\left(\frac{a(n)}{a(n-1)}\right)$ je racionální lomená funkce,

pokud $\left(\frac{S(n)}{S(n-1)}\right)$ je také racionální funkce je b=tru,

jinak b=false]

použité algoritmy:

num(a) – čitatel racionální lomené funkce a

den(a) – jmenovatel racionální lomené funkce a

$\mathrm{res}_n(x,p,q)$ – resultant polynomů p, q podle proměnné x

gcd(p,q) – největší společný dělitel polynomů p, q

deg$(p(n))$ – stupeň polynomu $p(n)$

cof$(p(n),i)$ – koeficient u i-té mocniny n v polynomu $p(n)$

1. b:=true;
2. if $a(n)$=0 then $S(n)$:=0; return fi;
3. $p(n)$:=1;

   $q(n)$:=num$\left(\frac{a(n)}{a(n-1)}\right)$;

   $r(n)$:=den$\left(\frac{a(n)}{a(n-1)}\right)$;

4. while ($\mathrm{res}_n(q(n),r(n+j^*))$ má nezáporný celý kořen j^*) do

   $g(n)$:=gcd$(q(n),r(n+j^*))$;

   $q(n) := \frac{q(n)}{g(n)}$;

   $r(n) := \frac{r(n)}{g(n-j^*)}$;

   $p(n)$:=$p(n)g(n)g(n-1)\ldots g(n-j0+1)$;

   od;

```
5. lp:=deg(q(n+1)+r(n));
   lm:=deg(q(n+1)-r(n));
   if lp ≤ lm then k:=deg(p(n))-lm
   else
     k0:=2 (−lp cof(q,lp)−cof(q,lp−1)+cof(r,lp−1)) / (cof(q,lp)+cof(r,lp));
     if (k0 je celé) then k:=max(k0,deg(p(n))-lp+1)
     else k:=deg(p(n))-lp+1;
     fi
   fi;
   if k < 0 then b:=false; return fi;
6. vyřešit rekurentní vzorec  p(n)=q(n+1)f(n)-r(n)f(n-1)
   s okrajovou podmínkou      f(1)= p(1)/q(2)
   pro f(n)=ck n^k+...+c0
   if (neexistuje řešení) then b:=false; return fi;
7. S(n):=q(n+1)a(n)f(n)/p(n);
   return
```

(Liska, 2014)

V závěru můžeme vypočítat $S = \lim_{k\to\infty} S_k$.

Jeho úkolem je nalézt posloupnost částečných součtů $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=l}^{m} a_n$, kde $l, m \in \mathbb{N}, l < m.$, taky abychom mohli vyjádřit $s_m - s_{l-1}$ (popřípadě $\sum_{n=1}^{k} a_n = S_k$).

Gosperův algoritmus funguje však jen tehdy, pokud je daná řada gosperovsky sčitatelná. A tedy musí splňovat následující předpoklad (Tyr, 2012).

Definice 9. (Hypergeometrická posloupnost) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *hypergeometrickou* právě tehdy, když pro všechna přirozená *n* lze podíl členů a_{n-1} a a_n vyjádřit ve tvaru

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{u(n)}{v(n)},$$

kde $u(n), v(n)$ jsou polynomy.

(Hora, 2010)

Dále je zapotřebí uvézt větu, která poskytuje teoretický základ Gosperovu algoritmu.

Věta 6. Racionální funkci $\frac{u(n)}{v(n)}$ nad tělesem T lze zapsat ve tvaru $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{p(n)\,q(n)}{p(n-1)r(n)}$, kde *p*, *q*, *r* jsou polynomy splňující pro všechny nezáporná celá čísla *j:*

$$D\big(q(n), r(n+j)\big) = 1.$$

Přičemž polynomy p, g, r je možné zjistit algoritmicky.

Důkaz:

Znegujeme toto tvrzení. $\exists j^* \in \mathbb{N}_0 : D(q(n), r(n+j^*)) \neq 1$. číslo j^* vypočteme pomocí rezulantů polynomů $q(n)$ a $r(n+j)$. Uvažujme, že jsme nalezli největší $j^* \in \mathbb{N}_0$. Nyní budeme hledat polynomy $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, pro které platí $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{\bar{p}(n)\,\bar{q}(n)}{\bar{p}(n-1)\,\bar{r}(n)}$.

$$g(n) \coloneqq D(q(n), r(n+j^*))$$

$$\bar{p}(n) \coloneqq p(n) \prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k) = g(n)g(n-1)\ldots g(n-j^*+1)$$

$$\bar{q}(n) \coloneqq \frac{q(n)}{g(n)}$$

$$\bar{r}(n) \coloneqq \frac{r(n)}{g(n-j^*)}$$

Již stačí ověřit rovnost $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{\bar{p}(n)\,\bar{q}(n)}{\bar{p}(n-1)\,\bar{r}(n)} = \frac{q(n)}{r(n)}$ (Tyr, 2012)

Definice 11. Trojici *p*, *q*, *r* nazýváme **regulární reprezentací podílu** $\frac{u}{v}$ právě tehdy, když polynomy *p*, *q*, *r* mají vlastnosti z věty 6.

Definice 10. Nechť máme dva polynomy kladných stupňů $f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_m x_m + b_{m-1} x_{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

Rezultantem $R = \mathrm{res}_x(f(x), g(x))$ polynomů $f(x)$, $g(x)$ je determinant:

$$R = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & & & & \\ \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \ldots & & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \ldots & & b_0 & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 \end{pmatrix}.$$

Věta 7. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická posloupnost nad tělesem T a nechť polynomy *p*, *q*, *r* tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Jestliže i posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, je hypergeometrická, pak lze *n* – tý částečný součet s_n vyjádřit ve tvaru

$$s_n = \frac{q(n+1)}{p(n)}.a_n.f(n)$$

pro jistý polynom *f*(*n*) splňující podmínku *p*(*n*) = *q*(*n* + 1).*f*(*n*) – *r*(*n*).*f*(*n* – 1).

(Hora, 2010)

Nyní se znovu podívejme na geometrickou posloupnost $\sum_{n=1}^{k} a_1 q^{(n-1)}$.

Příklad: Odvoďte pomocí Gosperova algoritmu vzorec pro součet *n* členů geometrické posloupnosti $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_1 q^{(n-1)}$, kde $|q| \neq 1$.

Řešení:

1) $a_n = q^{n-1},\ a_{n-1} = q^{n-2},\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$

2) $p(n) = 1$

$q(n) = q$

$r(n) = 1$

3) $l_p = \deg\big(q(n+1) + r(n)\big) = \deg(q+1) = 0$

$l_m = \deg\ (q(n+1) - r(n) = \deg(q-1) = 0$

$k = \deg\big(p(n)\big) - l_m = 0$

4) $f(n) = c_0$

$p(n) = q(n+1)f(n) - r(n)f(n-1);$

$1 = qc_0 - 1c_0 = c_0(q-1)$

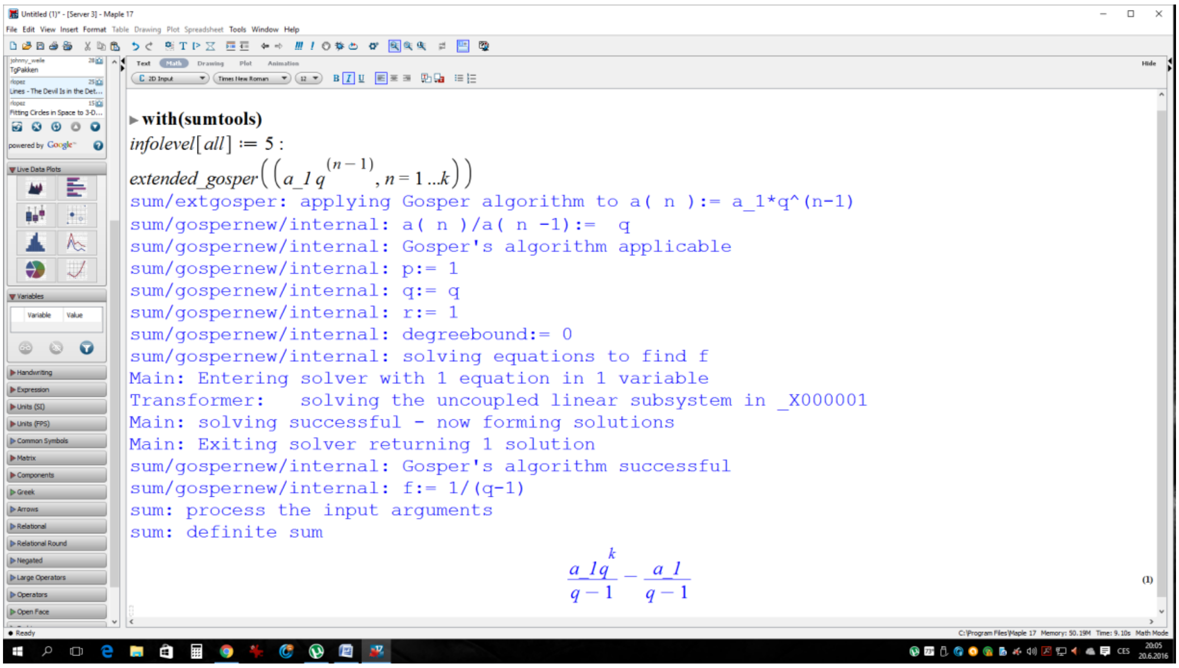
$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{1-q}, f(n) = \frac{1}{1-q}$

5) $s_n' = \frac{q(n+1)\ a_n\ f(n)}{p(n)} = q\ q^{n-1} \frac{1}{q-1} = \frac{q^n}{q-1}$

$$s_0' = \frac{1}{q-1} \Rightarrow s_n = s_n' - s_0' = \frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

pomocí Gosperova algoritmu se nám podařil odvodit středoškolský vzorec $\Rightarrow a_1 \sum_{n=1}^{k} q^{(n-1)} = a_1(1 + q + \cdots + q^{k-1}) = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$

Při zadání stejného příkladu v Maple® 17 se nám ukážou kroky postupu, který využíval tento program. Po zadání úlohy se nejdříve program ujistil, zda se jedná o racionální funkci a lze tedy použít Gosperův algoritmus. Poté nalezl regulární reprezentaci a určil stupeň polynomu *f*(*n*) s *k*=0. Nalezl polynom *f*(*n*) = $\frac{1}{(q-1)}$ a částečný součet posloupnosti roven $a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$.



Obr. 57 Využití Gosperova algoritmu v Maple® 17

Závěr

V minulosti bylo užívání počítačů v matematice přijímáno skepticky, avšak po překonání pochybností začalo mít velký vliv na rozvoj matematických disciplín. Také díky počítačovým programům byly dokázány jedny z největších vět a tvrzení v historii matematiky, uveďme si například problém čtyř barev, který byl dokazován předními matematiky téměř sto let, či větu o klasifikaci jednoduchých konečných grup.

Dnes je již spousta volně přístupných matematických počítačových programů, které umožňují svou výpočetní rychlostí a rozsahem řešit různé problémy a úlohy, například Maple, Wolfram mathematica, Wolfram Aplha, MAW, GeoGebra atd.

Každý učitel matematiky by měl seznámit studenty s některými matematickými programy, které by jim umožnily efektivněji pochopit probíranou látku. Také by měl do své výuky zařadit řešení nejen klasických úloh, ale i zajímavých matematických problémů jako je například problém čtyř barev nebo problém sedmi mostů, aby se mohlo rozvíjet tvůrčí a logické myšlení studentů.

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s jedním z největších problémů v historii matematiky, s jeho interpretací v teorii grafů a s jeho přínosem ve využití počítačových programů při dokazování matematických vět a tvrzení.

Resumé

Cílem této bakalářské práce je seznámit čtenáře s problémem čtyř barev a jeho historií. První kapitola se zabývá formulací problému čtyř barev. Ve druhé kapitole se uvádí historie problému, která vznikla v roce 1852. Ve třetí kapitole se uvádějí základní pojmy z teorie grafů, princip barvení map a redukce problému do teorie grafů. Poslední kapitola obsahuje přínos problému čtyř barev pro matematiku a příklad využití počítače na důkaz vzorce pro geometrickou řadu.

Klíčová slova: barvení map, Kempeho řetězce, rovinný graf, konfigurace, Gosperův algoritmus

Summary

The aim of this work introduces the reader to four color problem and its history. The first chapter deals with the formulation of problem the four colors. The second chapter presents the history of problem, which begins in 1852. The third chapter describe the basic concepts of graph theory, the principle of coloring maps and the reduction of the problem in graph theory. The last chapter contains a contribution problem of four colors for math and an example of using a computer to prove the formula for geometric series.

Keywords: coloring maps, Kempeho chain, planar graph, configuration, Gosper´s algorithm

Použitá literatura a prameny

Literatura

Appel, K. a Haken, W. (1997). "Every planar map is your colorable. Part I: Discharging." Illionois Journal of Mathematics 21(3): 429 - 490. ISSN: 0019-2082

Avanesyan, G. (2011). "Historie teorie grafů, bakalářská práce." Fakulta informatiky a statistiky. Vysoká Škola Ekonomická, Praha. [citováno 28. 5. 2016] Dostupné na: https://www.vse.cz/vskp/28387_historie_teorie_grafu_

Bailey, D. H. a Borwein, J. M. (2013). "The Colour Life of the Four-color Theorem: A Tribute to Kenneth Appel." The Huffingtonpost. [online] [citováno 28. 5. 2016] dostupné na: http://www.huffingtonpost.com/david-h-bailey/kenneth-appel-four-color-theorem_b_3233775.html.

Bosák, J. (1979). "Ako bol vyriešený problém štyroch farieb." Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 24(4): 181-201.

Buriánková, I. (2000). "Základy fylogenetiky a konstrukce fylogenetických stromů." PřF UP, Katedra ekologie. [online] [citováno 10. 6. 2016] dostupné na: http://moloch.upol.cz/uploads/vyukovy-portal/mem-8-za-klady fylogenetiky.pdf

Černý, J. (2010). "Základní grafové algoritmy." MFF UK, České vysoké učení technické. Praha. ISBN:8001052583

Demlová, M. a Pondělíček, B. (1997). "Matematická logika." Praha, ČVUT. ISBN:8001016838

Fritsch, R., Peschke, J. a kol. (1998). "The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof." Springer - Verlag. New York.

Gunn, M. a Codd, L.E.W. (1981). " Botanical Exploration Southern Africa." CRC Press. ISBN:0869611291

Hliněný, P. (2008). "Teorie grafů (FI: MA010)." FI MU. Brno:[sn].

Hora, J. (2010). "O počítačových důkazech matematických vět". Sborník ze XIV. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky. Velké Meziříčí: Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF, 2010. s. 67-73. ISBN: 80-903833-5-1

Huclová, A. (2008). "Teorie grafů a její využití, bakalářská práce." Fakulta strojního inženýrství. Vysoké učení technické. Brno. [citováno 28. 5. 2016] dostupné na: https://dspace.vutbr.cz/bitstream/handle/11012/6010/Teorie%20graf%C5%AF%20a20jej%C3%AD%20vyu%C5%BEit%C3%AD.pdf?sequence=1.

Jirovský, L. (2010). "Historie teorie grafů." Teorie grafů. [citováno 12. 6. 2016] dostupné na: http://teorie-grafu.cz/uvod/historie.php.

Kempe, A. B. (1997). "On the Geographical Problem of the Four Colours." Early Journal Content on JSTOR 2(3): 193-201.

Kennedy, J. a Yorke, J. A. (1991). "Basins of Wada." Physica D: Nonlinear Phenomena 51(1): 213-225.

Kovář P. (2012). "Úvod do Teorie grafů." Vysoká škola báňská. Technická univerzita. Ostrava

Loudová A. (2013). "Každá chemická látka vyžaduje jiný přístup." Nebezpečný náklad 1. [citováno 19. 6. 2016]
dostupné na: http://www.nebezpecnynaklad.cz/inc/clanky/13_1_loudova.pdf

Maritz, P. a Mouton, S. (2012). "Francis Guthrie: A Colourful Life." The Mathematical Intelligencer 34(3): 67-75.

Míša, J. (2006). "Vrcholové a hranové barvení a nezávislé množiny. Jak spolu tyto problémy souvisí (převod jedné úlohy na druhou). Princip vrcholového barvení, jeho zvláštnosti." Algoritmy diskrétní matematiky. [citováno 19. 6. 2016]
Dostupné na: http://statnice.e-misa.info/A2-04.pdf.

O´Connor, J. J. a Robertson, E. F. (2003). "Alfred Bray Kempe." MacTutor History of Mathematics. [citováno 20. 5. 2016] dostupné na: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kempe.html.

Richeson, D. S. (2012). "Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology" Princeton University Press. ISBN:1400838568

Ross, W. T. a Hall, J. (2010). "Four, five, and six color theorems." Nature of Mathematics, Great ideas and gems of mathematics. [citováno 20. 5. 2016] dostupné na: https://natureofmathematics.wordpress.com/lecture-notes/four-and-five-color-theorems/.

Sedláček, J. (1981). "Úvod do teorie grafů." Academia. Praha 2: 1

Stewart, I. (2011). "Sources of uncertainty in deterministic dynamics: an informal overview." Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 369(1956): 4705-4729.

Šámal, R. (2000). "Rovinné grafy." Praha, MFF UK. [citováno 19. 6. 2016]
dostupné na: https://mks.mff.cuni.cz/library/RovinneGrafyRS/RovinneGrafyRS.pdf

Šeda, M. (2003). "Teorie grafů." VUT FSI. Brno.

Šišma, P. (1997). "Problém čtyř barev." Historie matematiky II. Prometheus. Praha.:169-180

Timothy, S. (2002). "Alfred Bray Kempe´s "proof" of the Four-color Theorem " Math Horizons 10(2): 21-23.

Tyr, D. (2012). "Základní sumační techniky, bakalářská práce." Fakulta pedagogická. Západočeská univerzita. Plzeň. [citováno 21. 6. 2016] dostupné na: https://otik.uk.zcu.cz/handle/11025/5434

Veselý, L. (2015). "Základy teorie grafů." TUL: Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií. Liberec. [online][citováno 7. 6. 2016] dostupné na: https://github.com/ludekvesely/szz-2015/wiki/09.-Z%C3%A1klady-teorie-graf%C5%AF

Zelinka, B. (1977). "Rovinné grafy." Mladá fronta. Praha. 131

Internetová zdroje

GFDL (2016). "Four color theorem." Absolute astronomy. [online][citováno 30. 5. 2016] dostupné na: http://www.absoluteastronomy.com/topics/Four_color_theorem.

Gymnázium Brno, (2015). "Problém čtyř barev." Gymnázium Brni, Elgertova, příspěvková organizace. [online][citováno 19. 6. 2016] dostupné na: http://www.gymelg.cz/sites/default/files/matematika/4_BARVY.pdf

INFO WEB s.r.o. (2015). "Problém sedmi mostů města Královce." Algoritmy.net. [online][citováno 10. 6. 2016] dostupné na: https://www.algoritmy.net/article/91/Problem-sedmi-mostu.

Liska R. (2014). "Gosperův algoritmus." [citováno 21. 6. 2016] dostupné na: http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~liska/poalg/node35.html.

Matematika.cz (2006). "Co je to funkce." [online] [citováno 10. 6. 2016] dostupné na: http://www.matematika.cz/co-je-to-funkce.

Myslín, J. (1999). "Matematický důkaz je věčná jistota." Věda. [online] [citováno 21. 6. 2016] dostupné na: http://vtm.e15.cz/matematicky-dukaz-je-vecna-jistota.

Šípek, A. (2016). "Rodokmen." Genetika - Biologie; Váš zdroj informací o genetice a biologii. [citováno 10. 6. 2016] dostupné na: http://www.genetika-biologie.cz/rodokmen.

Seznam obrázků

Zdroje obrázků

Obrázky, u kterých není uveden zdroj, jsou vytvořeny v programu ArcGis či Microsoft Word.

Obrázky v *Barvení map* vytvořeny v Microsoft Malování a ArcGis na základě Gymnázium Brno (2015). "Problém čtyř barev." Gymnázium Brni, Elgertova, příspěvková organizace. [online][citováno 19. 6. 2016] dostupné na: http://www.gymelg.cz/sites/default/files/matematika/4_BARVY.pdf

Obr. 2 První krok.;**Obr. 3 Druhý krok**.;**Obr. 4 Třetí krok**.;**Obr. 5 Čtvrtý krok**.;In: Kennedy, J. a Yorke, J. A. (1991). "Basins of Wada." Physica D: Nonlinear Phenomena 51(1): 213-225.

Obr. 6 Wadská pánev pro funkci f (Z)=Z4 -1.In: Stewart, I. (2011). "Sources of uncertainty in deterministic dynamics: an informal overview." Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 369(1956)

Obr. 7 Francis Guthrie.In: LikeSuccess. [online][citováno 28.5.2016] z:http://likesuccess.com/author/francis-guthrie

Obr. 8 Alfred Bray Kempe. In: By Unknown - http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Kempe.html, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26768506 [online] [citováno 28.5.2016]

Obr. 12 Razítko Department of Mathematics v Ilionois. In: Bailey, D. H. a Borwein, J. M. (2013). "The Colour Life of the Four-color Theorem: A Tribute to Kenneth Appel." The Huffingtonpost. [online] [citováno 28. 5. 2016] dostupné na: http://www.huffingtonpost.com/david-h-bailey/kenneth-appel-four-color-theorem_b_3233775.html.

Obr. 13 Mosty přes řeku Pregel. In: Bogdan Giuşcă - Public domain (PD), based on the image, CC BY-SA 3.0, [online] [citováno 19. 6. 2016] https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=112920

Obr. 15 Běžná mapa a mapa v jízdním řádu.In: Mapy.cz a Jízdní řády.cz z: http://www.jizdni-rady.nanadrazi.cz/ [online] [citováno 20. 6. 2016]

Obr. 16 Schéma elektrotechnického zařízení. In: Slideplayer. [online] [citováno 20. 6. 2016] z:http://slideplayer.cz/slide/2800127/

Obr. 17 Strukturní vzorec cyklopentanu. In: petroleum.cz [online] [citováno 20. 6. 2016] z: http://www.petroleum.cz/ropa/cykloalkany.aspx

Obr. 18 Rodokmen. In: Clipartlogo.com [online] [citováno 20. 6. 2016] z: http://cz.clipartlogo.com/premium/detail/vector-icons-family-tree-a_105087677.html

Obr. 19 Fylogenetický strom savců. In: Buriánková, I. (2000). "Základy fylogenetiky a konstrukce fylogenetických stromů." PřF UP, Katedra ekologie. [online] [citováno 10. 6. 2016] dostupné na: http://moloch.upol.cz/uploads/vyukovy-portal/mem-8-za-klady-fylogenetiky.pdf

Obr. 38 Graf K_5 a $K_{3,3}$ In: Zelinka, B. (1977). "Rovinné grafy." Mladá fronta. Praha.

Seznam příloh

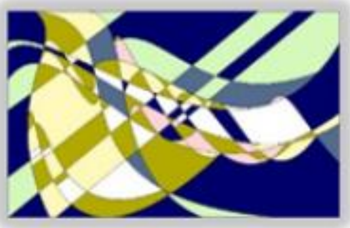
Příloha I: Problém čtyř barev v umění

Příloha I: Problém čtyř barev v umění

I někteří malíři se zabývají problémem čtyř barev a využívají ho pro svá umění. Například Vítězslav Janáček, který na webové stránce iDNES. cz uvedl i svůj osobní důkaz tohoto problému (viz http://janacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=463268).

indián

techno



holubice

orion

kosmická pole

jaro světů

jezdci ve fraku

kávový dort

Janáčkovo návrhy na obrazy vytvořené v programu Microsoft Malování.

(převzato z iDnes. cz dostupné na: http://janacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=463268)