

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

**Aktivní tlumení vibrací
vetknutého nosníku**

Plzeň 2017

Lukáš Musil

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Lukáš MUSIL**

Osobní číslo: **A14B0523P**

Studijní program: **B3918 Aplikované vědy a informatika**

Studijní obor: **Kybernetika a řídicí technika**

Název tématu: **Aktivní tlumení vibrací vetknutého nosníku**

Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

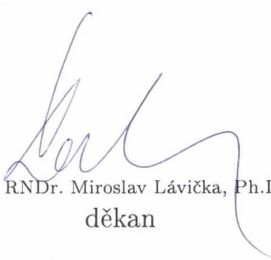
Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Seznamte se s různými matematickými modely vetknutého nosníku popisujícími jeho kmitání. Zvolte vhodný parametrický model pro účely řízení vibrací.
2. Navrhněte metodu identifikace parametrů zvoleného matematického modelu kmitání vetknutého nosníku.
3. Podrobně porovnejte dynamické chování reálného systému a matematického modelu.
4. Navrhněte vhodný algoritmus aktivního tlumení prvního (v případě možnosti i druhého) kmitavého módu soustavy.
5. Navržený algoritmus aktivního tlumení podrobně ověřte metodou simulace v programovém prostředí Matlab/Simulink. V případě možnosti i na reálné soustavě.

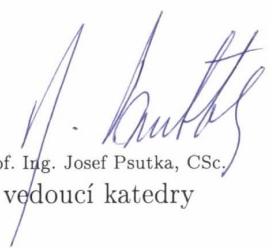
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah kvalifikační práce: **30-40 stránek A4**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**
Seznam odborné literatury:
Dodá vedoucí bakalářské práce.

Vedoucí bakalářské práce: **Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.**
Katedra kybernetiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. listopadu 2016**
Termín odevzdání bakalářské práce: **21. května 2017**


Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
děkan




Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. listopadu 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 22. srpna 2017

Lukáš Musil

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce Prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc. za jeho odborné rady, obětovaný čas a notnou dávku trpělivosti. Dále bych chtěl poděkovat každému, kdo mě při tvorbě této práce jakkoliv podpořil.

Abstract

This thesis deals with an issue of active vibration control of a cantilever beam. First we make up mathematical models of a cantilever beam. Next we deal with the possibility of identifying these models and the real cantilever beam. Finally we designed state space feedback regulator with using LQR method for active vibration control of a cantilever beam.

Key words

Cantilever beam, active vibration control, state space, state space feedback, LQ regulator, active vibration control of a cantilever beam

Abstrakt

Tato práce se zabývá problémem aktivního tlumení vibrací vetknutého nosníku. Nejdříve jsou odvozeny příslušné matematické modely vetknutého nosníku popisující jeho kmitání. Dále se zabýváme možností identifikace těchto modelů a reálného nosníku. Na závěr je navržen stavový zpětnovazební regulátor s využitím LQR metody pro aktivní tlumení vibrací vetknutého nosníku.

Klíčová slova

Vetknutý nosník, aktivní tlumení vibrací, stavový popis, stavová zpětná vazba, LQ regulace, tlumení vibrací vetknutého nosníku

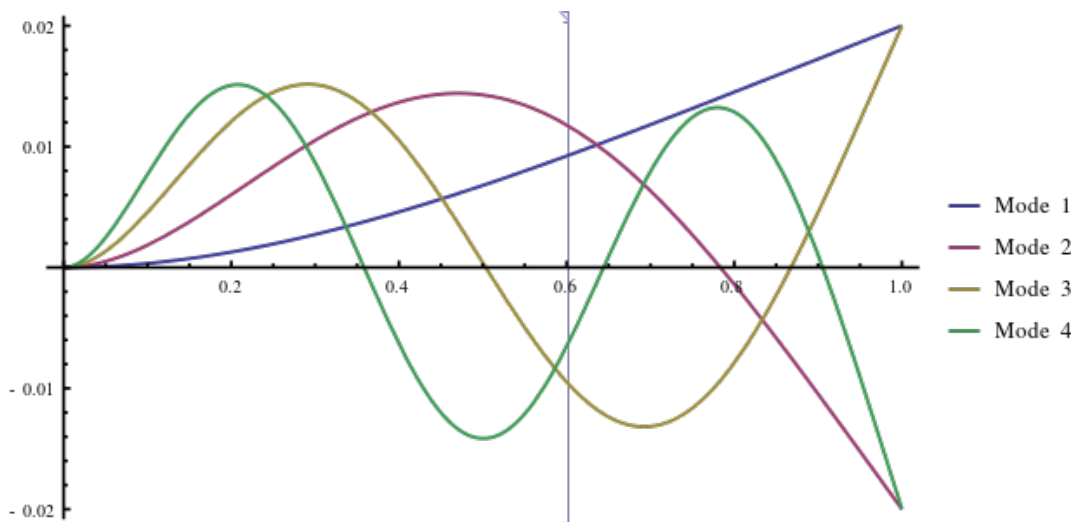
Obsah

1 Úvod	9
1.1 Pasivní tlumení	10
1.2 Aktivní tlumení	10
1.3 Semiaktivní tlumení	10
2 Matematické modely vetknutého nosníku	11
2.1 Stavová reprezentace modelu	11
2.2 Matematický model - 1	12
2.2.1 Lagrangeova metoda	12
2.2.2 Popis matematického modelu	13
2.2.3 Odvození pohybové rovnice	13
2.2.4 Příklad vetknutého nosníku - 1	18
2.3 Matematický model - 2	25
2.3.1 Newton-Eulerova metoda	25
2.3.2 Popis matematického modelu	25
2.3.3 Odvození pohybové rovnice	26
2.3.4 Příklad vetknutého nosníku - 2	28
3 Identifikační experiment	33
3.1 Určení vlastních frekvencí a relativního tlumení	33
3.2 Určení koeficientů výstupu	37
4 Návrh řízení	39
4.1 Řiditelnost systému	39
4.2 Pozorovatelnost systému	39
4.3 Stavová zpětná vazba	40
4.4 Přiřazení Jordanovy formy	40
4.5 LQ regulace	41
4.6 Návrh regulátoru	42
4.7 Porovnání regulovaného a neregulovaného systému	43
5 Závěr	46
Literatura	47
Seznam obrázků	48

1 Úvod

Ve většině dnešních mechatronických systémech se nalézá řada částí, které způsobují mechanické vibrace. Tyto vibrace jsou ve většině případů nežádoucí, protože přinášejí řadu nepříznivých jevů. Vibrace mohou dosáhnout nepřijatelných hodnot, při kterých vznikají veliké dynamické síly, pro které zařízení nejsou často konstruována čímž tedy dochází k jejich poškození či úplnému zničení. Pro mnohá zařízení nežádoucí vibrace nevedou k poškození, ale mají významný vliv na požadovanou přesnost. Dále vibrace způsobují hluk, který snižuje pohodlí. Tlumení vibrací je tedy významnou úlohou při řešení návrhu a realizace mechatronických systémů.

Každý objekt má frekvence, při kterých je amplituda kmitů největší. Tyto frekvence se nazývají vlastní frekvence a odpovídají jednotlivým módům kmitání. Každý mód se liší tvarem kmitů, který je závislý na počtu kmitajících uzlů. Na obrázku (1.1) jsou znázorněny první čtyři módy kmitání vetknutého nosníku.



Obrázek 1.1: Módy kmitání vetknutého nosníku [7]

Metody tlumení nežádoucích vibrací lze podle způsobu jejich potlačení rozdělit následovně [5] [1] :

1.1 Pasivní tlumení

Pasivní tlumení je realizováno umístěním pasivního (neřízeného) prvku na vhodné místo, kde vibrace pohltní nebo je přesune do jiné části frekvenčního pásma. Jako pasivní prvky jsou používány různé realizace tlumičů a pružně tlumících součástí. Výhodou této metody je její malá finanční náročnost a dostupnost pasivních prvků. Nevýhodou je úzká šířka pásma, ve které dochází k tlumení nežádoucích vibrací.

1.2 Aktivní tlumení

Aktivní tlumení je realizováno pomocí aktivního (řízeného) prvku, který představuje kombinaci různých druhů aktuátorů, které představují řízený zdroj obecné síly, jejímž působením dochází k akčnímu zásahu, a senzorů pro měření vibrací. Hlavní nevýhodou této metody je to, že při nevhodném návrhu může dojít k nestabilitě systému. Tato práce je zaměřena na použití tohoto způsobu tlumení vibrací.

1.3 Semiaktivní tlumení

Semiaktivní (označované také jako adaptivní) tlumení je spojením pasivního a aktivního způsobu tlumení vibrací. V podstatě se jedná o pasivní prvky s aktivně se měnícími parametry.

2 Matematické modely vetknutého nosníku

V této kapitole je řešeno odvození dvou matematických modelů vetknutého nosníku, které budou později využity pro návrh metody aktivního tlumení vibrací. K odvození matematického modelu v prvním případě byla použita metoda Lagrangeových rovnic a v případě druhém Newton-Eulerova metoda. Po odvození budou tyto modely demonstrovány na příkladu, ve kterém bude ukázáno převedení modelu do stavové reprezentace, která je výhodnější pro pozdější účely řízení.

2.1 Stavová reprezentace modelu

Stavová reprezentace (vnitřní popis) spojitého lineárního systému, jehož parametry jsou t-invariantní (tj. nemění se v čase), je dána stavovými rovnicemi [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{2.1.0.1}$$

Kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavu, \mathbf{A} je matice dynamiky systému, \mathbf{B} je matice řízení, $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupu, $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupu, \mathbf{C} je matice měření a \mathbf{D} je matice přímých vazeb vstupu na výstup systému.

Explicitní řešení stavové rovnice je dáno vztahem :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau\tag{2.1.0.2}$$

2.2 Matematický model - 1

2.2.1 Lagrangeova metoda

Tato metoda je založena na tom, že pro popis dynamiky daného systému se využívá energetický princip, tzn. nemusí se řešit směr pohybu pro jednotlivá tělesa, ze kterých je systém tvořen, ale stačí vyjádřit potenciální a kinetickou energii systému jako funkci zobecněných souřadnic. Lagrangeovy rovnice mají tvar :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.2.1.1)$$

Kde :

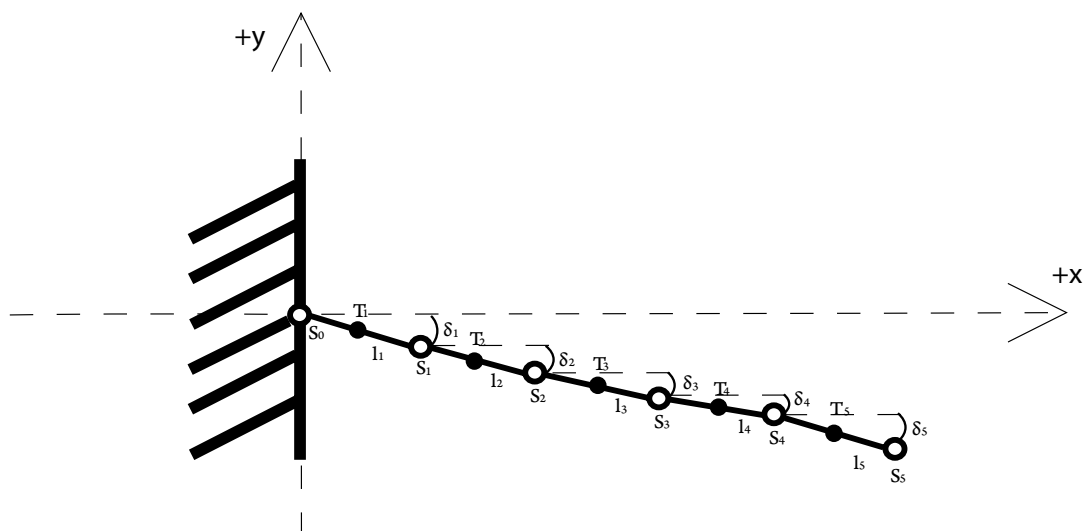
- L je Lagrangian

$$L \triangleq T - V \quad (2.2.1.2)$$

- T je kinetická energie
- V je potenciální energie

- Q_n $n = 1, 2, \dots, N$ jsou zobecněné síly
- q_n $n = 1, 2, \dots, N$ jsou zobecněné souřadnice

2.2.2 Popis matematického modelu



Obrázek 2.1: Model vetknutého nosníku 1

Vetknutý nosník jako spojitý celek o délce L se dá zjednodušeně modelovat tak, že je rozdělen na samostatné části o stejné délce l_1, \dots, l_N popsané dynamikou soustavy hmotných bodů viz obrázek (2.1) [6], kde :

- S_0, \dots, S_N jsou krajní body jednotlivých segmentů
- T_1, \dots, T_N jsou těžiště příslušného segmentu
- $\delta_1, \dots, \delta_N$ jsou úhlové výchylky bodů S_1, \dots, S_N

2.2.3 Odvození pohybové rovnice

Výchylky ve směru osy z jsou velmi malé a lze je tedy zanedbat. Pro výchylky bodů S_0, \dots, S_N ve směru osy y platí :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= l_1 \cdot \sin \delta_1 \\
 y_2 &= l_2 \cdot \sin \delta_2 + y_1 = l_2 \cdot \sin \delta_2 + l_1 \cdot \sin \delta_1 \\
 y_3 &= l_3 \cdot \sin \delta_3 + y_1 + y_2 = l_3 \cdot \sin \delta_3 + l_2 \cdot \sin \delta_2 + l_1 \cdot \sin \delta_1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Pro n-tou výchylku tedy platí :

$$y_n = \sum_{n=1}^N (l_n \cdot \sin \delta_n) \quad (2.2.3.1)$$

Úhly natočení $\sin \delta_1, \dots, \sin \delta_N$ v rovnici (2.2.3.1) jsou velmi malé a lze tedy provést jejich linearizaci. Rovnice má poté následující tvar :

$$y_n = \sum_{n=1}^N (l_n \cdot \delta_n) \quad (2.2.3.2)$$

Dále je potřeba rovnici (2.2.3.2) upravit tak, by popisovala výchylky Y_1, \dots, Y_n těžišť T_1, \dots, T_N :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \delta_1 \\ Y_2 &= l_1 \cdot \delta_1 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot \delta_2 \\ Y_3 &= l_1 \cdot \delta_1 + l_2 \cdot \delta_2 + \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot \delta_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$Y_n = \sum_{n=1}^{N-1} (l_n \cdot \delta_n) + \frac{1}{2} \cdot l_N \cdot \delta_N \quad (2.2.3.3)$$

Nyní je potřeba vyjádřit kinetickou T a potenciální V energii vetknutého nosníku:

$$T = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \cdot m_n \cdot \left(\frac{dY_n}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_n \cdot \left(\frac{d\delta_n}{dt} \right)^2 \right] \quad (2.2.3.4)$$

$$V = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \cdot K_\delta \cdot (\Delta\delta_n)^2 + m_n \cdot g \cdot Y_n \right] \quad (2.2.3.5)$$

Kde :

- $\Delta\delta_1, \dots, \Delta\delta_N$ jsou úhlové výchylky bodů S_1, \dots, S_N , pro které platí:

$$\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_{n-1} \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, N, \quad \delta_0 = 0$$

- m_1, \dots, m_N je hmotnost n -tého segmentu
- g značí gravitační konstantu
- K_δ je ohybová tuhost vetknutého nosníku daná následujícím vztahem [6], kde l značí délku segmentu (nosník je rozdělen na n stejně dlouhých segmentů) :

$$K_\delta = \frac{M}{l\delta} = \frac{3EI_x}{l} \quad (2.2.3.6)$$

- E [Pa] je Youngův modul (modul pružnosti v tahu)
- I_x [m^4] je plošný moment setrvačnosti ve směru osy x , který je dán následujícím vztahem, kde b [m] je šířka a h [m] výška nosníku :

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (2.2.3.7)$$

- J_1, \dots, J_N [$kg \cdot m^2$] jsou momenty setrvačnosti kolem těžiště T_1, \dots, T_N dané vztahem :

$$J_n = \frac{m_n (l^2 + h^2)}{12} \quad (2.2.3.8)$$

Dosažením vztahu (2.2.3.3) do rovnic pro výpočet kinetické (2.2.3.4) a potenciální energie (2.2.3.5) dostaneme hodnotu Lagrangianu (2.2.1.2) , který dosadíme do Lagrangeových rovnic (2.2.1.1) a získáme rovnici popisující dynamiku modelu :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.2.3.9)$$

Kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{K} je matice pružnosti, \mathbf{G} je vektor působení gravitační síly a vektor \mathbf{y} pro příslušné souřadnice.

Kde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} l_1^2(\frac{1}{4}m_1+m_2+\dots+m_n)+J_1 & l_1l_2(\frac{1}{2}m_2+m_3+\dots+m_n) & \dots & l_1l_{n-1}(\frac{1}{2}m_{n-1}+m_n) & l_1l_n(\frac{1}{2}m_n) \\ l_1l_2(\frac{1}{2}m_2+m_3+\dots+m_n) & l_2^2(\frac{1}{4}m_2+m_3+\dots+m_n)+J_2 & \dots & l_2l_{n-1}(\frac{1}{2}m_{n-1}+m_n) & l_2l_n(\frac{1}{2}m_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_1l_{n-1}(\frac{1}{2}m_{n-1}+m_n) & l_2l_{n-1}(\frac{1}{2}m_{n-1}+m_n) & \dots & l_{n-1}^2(\frac{1}{4}m_{n-1}+m_n)+J_{n-1} & l_{n-1}l_n(\frac{1}{2}m_n) \\ l_1l_n(\frac{1}{2}m_n) & l_2l_n(\frac{1}{2}m_n) & \dots & l_{n-1}l_n(\frac{1}{2}m_n) & l_n^2(\frac{1}{4}m_n)+J_n \end{bmatrix} \quad (2.2.3.10)$$

$$\mathbf{K} = \frac{Ebh^3}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (2.2.3.11)$$

$$\mathbf{G} = g \cdot \begin{bmatrix} l_1 \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + \dots + m_n \right) \\ l_2 \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + \dots + m_n \right) \\ \vdots \\ l_{n-1} \left(\frac{1}{2}m_{n-1} + m_n \right) \\ l_n \left(\frac{1}{2}m_n \right) \end{bmatrix} \quad (2.2.3.12)$$

Rovnice (2.2.3.9) popisuje nenucené netlumené kmitání vetknutého nosníku. Pokud bychom chtěli rovnici, ve které je zohledněno vlastní tlumení vetknutého nosníku, musíme rovnici (2.2.3.9) rozšířit o matici tlumení \mathbf{B}_t . Pohybová rovnice má po této úpravě následující tvar :

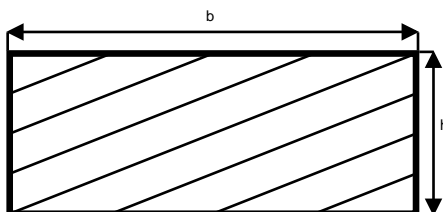
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}_t\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.2.3.13)$$

Kde matice tlumení vypadá následovně :

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & -t_2 & 0 & \dots & 0 \\ -t_2 & t_2 + t_3 & -t_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -t_3 & t_3 + t_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -t_N \\ 0 & \dots & 0 & -t_N & t_N \end{bmatrix} \quad (2.2.3.14)$$

2.2.4 Příklad vetknutého nosníku - 1

Uvažujme model vetknutého nosníku z konstrukční oceli s obdélníkovým průřezem šířky $b = 0.02 [m]$ a výšky $h = 0.001 [m]$, viz obrázek (2.2), o celkové délce $L = 0.3 [m]$, který je popsán pohybovou rovnicí (2.2.3.9).



Obrázek 2.2: Průřez vetknutého nosníku

Pro sestavení modelu je nutné znát hodnoty jeho parametrů. Hodnotu pružnosti v tahu E a hustotu ρ konstrukční oceli nalezneme v tabulkách [zdroj]. Jejich hodnoty jsou :

- $E = 2 \cdot 10^{11} [Pa]$
- $\rho = 7850 [kg \cdot m^{-3}]$

V tomto příkladu bude vetknutý nosník tvořen ze čtyř stejně dlouhých segmentů. Délka jednoho segmentu l tedy bude :

- $l = 0.075 [m]$

Hmotnost jednoho segmentu m určíme podle vztahu :

$$m_i = \rho \cdot b \cdot h \cdot l \quad (2.2.4.1)$$

Protože jsou všechny segmenty ze stejného materiálu, stejné délky, šířky a výšky mají tedy i stejnou hmotnost. Dosazením do vztahu (2.2.4.1) získáme, že hmotnost jednotlivých segmentů je :

- $m = 0.01176 [kg]$

Dále je potřeba určit momenty setrvačnosti kolem těžiště J a ohybovou tuhost K_δ . K získání ohybové tuhosti je potřeba nejdříve vypočítat plošný moment setrvačnosti kolem osy x , který získáme dosazením do vztahu (2.2.3.7). Tento výsledek následně dosadíme do vztahu (2.2.3.6). Momenty setrvačnosti získáme dosazením do vztahu (2.2.3.8). Z výpočtu byly získány tyto výsledky:

- $J = 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$
- $K_\delta = 13.33$

Nejdříve budeme uvažovat případ s netlumeným kmitáním. Matice tlumení \mathbf{B}_t bude tedy nulová. Pro tento případ již známe všechny potřebné parametry pro vyčíslení příslušných matic v pohybové rovnici popisující netlumené kmitání (2.2.3.9). V tomto případě budeme zanedbávat působení gravitační síly. Z toho vyplývá, že vektor působení gravitační síly \mathbf{G} je nulový. Naopak rovnici rozšíříme na pravé straně o vektor vstupní síly řízení \mathbf{F} . Řízením budeme působit na první segment vetknutého nosníku a proto bude mít vektor silového působení následující tvar:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.4.2)$$

Po této úpravě se již jedná o rovnici nuceného netlumeného kmitání vetknutého nosníku a vypadá následovně :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{F} \quad (2.2.4.3)$$

Pro pozdější návrh řízení a simulaci systému je vhodné jej vyjádřit pomocí stavové reprezentace. Nejdříve je nutné v pohybové rovnici osamostatnit nejvyšší stupeň derivace. Tím získáme rovnici v tomto tvaru:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{y} \quad (2.2.4.4)$$

Jako stavy systému označme polohu jednotlivých segmentů $\mathbf{y}(t)$ a jejich rychlost $\dot{\mathbf{y}}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.2.4.5)$$

Poté zavedeme následující substituci :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{s}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (2.2.4.6)$$

Po použití předchozí substituce dostáváme :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_1 &= \mathbf{s}_2 \\ \dot{\mathbf{s}}_2 &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{s}_1(t) \end{aligned} \quad (2.2.4.7)$$

Ze vztahu (2.2.4.7) lze již snadno vyjádřit matici dynamiky \mathbf{A} a matici řízení \mathbf{B} , které mají následující tvar :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.2.4.8)$$

Kde $\mathbf{0}$ a \mathbf{I} značí nulovou a jednotkovou matici stejných rozměrů jako matice $-\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$.

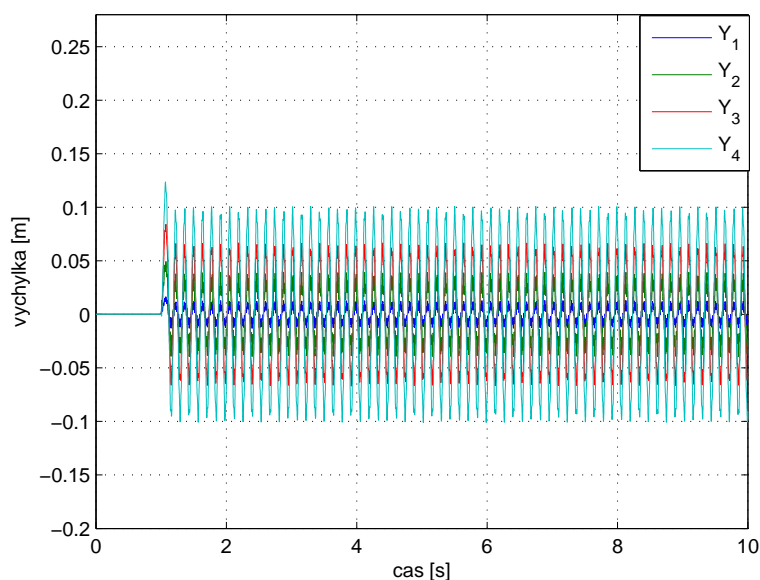
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (2.2.4.9)$$

Kde $\mathbf{0}$ značí nulovou matici stejných rozměrů jako má matice $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}$.

Nyní je potřeba zvolit vhodný výstup systému. Výstupem tedy zvolíme polohy těžišť jednotlivých segmentů $\mathbf{Y}(t)$. Matici měření \mathbf{C} sestavíme podle vztahu (2.2.3.3). Matice \mathbf{C} má obecně tvar:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_1 & \frac{l_2}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_1 & \dots & \dots & l_{n-1} & \frac{l_n}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.4.10)$$

Pro simulaci modelu je využito programové prostředí *Simulink* ve kterém je stavový popis realizován pomocí bloku *State-Space* do kterého stačí dosadit výše vypočtené matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . Nyní je model již hotový a můžeme provést simulaci, která znázorňuje chování vetknutého nosníku při působení jednoho krátkého rázu. V simulačním modelu je tento ráz realizován přivedením pulzu s amplitudou velikosti 1 a délkou trvání 0.1 s. Pulz je aktivován v simulačním čase 1 s. Výsledek simulace je znázorněn na obrázku (2.3), kde Y_1, \dots, Y_4 znázorňuje výchylky jednotlivých těžišť segmentů. Na obrázku je vidět, že pulz přivedený na vstup systému způsobil netlumené kmitání vetknutého nosníku.



Obrázek 2.3: Vybuzení netlumeného kmitání vetknutého nosníku 1

Nyní se podíváme na to, jak se bude model vetknutého nosníku chovat při uvažování vlastního tlumení. Pro sestavení pohybové rovnice využijeme vztah (2.2.3.9) ve kterém, stejně jako v případě nuceného netlumeného kmitání, rozšíříme pravou stranu rovnice o vektor síly řízení \mathbf{F} , který bude mít stejný tvar jako ve vztahu (2.2.4.2). Působení gravitační síly opět zanedbáváme. Takto získaná rovnice popisuje nucené tlumené kmitání vetknutého nosníku a má následující tvar :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}_t\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{F} \quad (2.2.4.11)$$

V tomto případě, kdy máme nosník rozdělený na čtyři stejné segmenty bude matice tlumení vypadat následovně :

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & -t_2 & 0 & 0 \\ -t_2 & t_2 + t_3 & -t_3 & 0 \\ 0 & -t_3 & t_3 + t_4 & -t_4 \\ 0 & 0 & -t_4 & t_4 \end{bmatrix} \quad (2.2.4.12)$$

Parametry t_1, \dots, t_4 jsou koeficienty vlastního tlumení jednotlivých segmentů. Pro následnou simulaci budeme předpokládat, pokud jsou všechny segmenty stejných, potom budou mít i stejné vlastní tlumení. Hodnotu koeficientů tlumení tedy zvolíme stejnou pro všechny segmenty :

- $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0.001$

Nyní potřebujeme stejně jako v případě nuceného netlumeného kmitání vyjádřit pohybovou rovnici pomocí stavového popisu. Z pohybové rovnice (2.2.4.11) vyjádříme nejvyšší derivaci :

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_t\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{y} \quad (2.2.4.13)$$

Dále budeme postupovat stejně jako ve vztahu (2.2.4.5) a provedeme i stejnou substituci (2.2.4.6). Po provedení substituce získáme vztah :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}_1 &= \mathbf{s}_2 \\ \dot{\mathbf{s}}_2 &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_t \mathbf{s}_2(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{s}_1(t)\end{aligned}\tag{2.2.4.14}$$

Z předchozího vztahu je patrné, že matice dynamiky \mathbf{A} a matice řízení \mathbf{B} vypadají následovně :

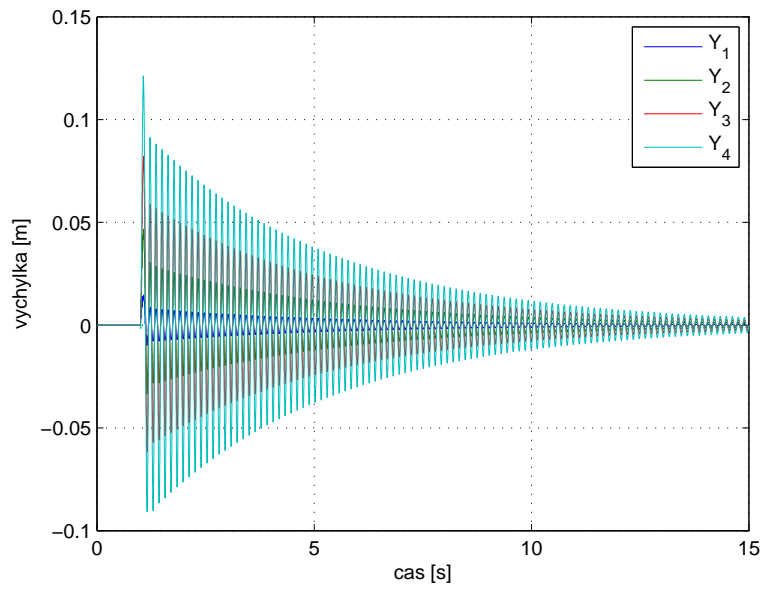
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_t \end{bmatrix}\tag{2.2.4.15}$$

Kde $\mathbf{0}$ a \mathbf{I} značí nulovou a jednotkovou matici stejných rozměrů jako matice $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ resp. $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_t$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{bmatrix}\tag{2.2.4.16}$$

Matici měření \mathbf{C} zvolíme stejně jako v případě nucených netlumených kmitů (2.2.4.10).

Pro model popisující kmitání s úvahou vlastního tlumení byla provedena stejná simulace jako pro případ zanedbání tlumení. Výsledky simulace jsou znázorněny na obrázku (2.4) kde je patrné, že vlivem vlastního tlumení se amplitudy vibrací postupně snižují.



Obrázek 2.4: Vybuzení tlumeného kmitání vetknutého nosníku 1

2.3 Matematický model - 2

2.3.1 Newton-Eulerova metoda

Tato metoda vychází z II. Newtonova zákona (zákon síly), který vyjadřuje vztah mezi vnější silou a zrychlením. Matematicky tedy :

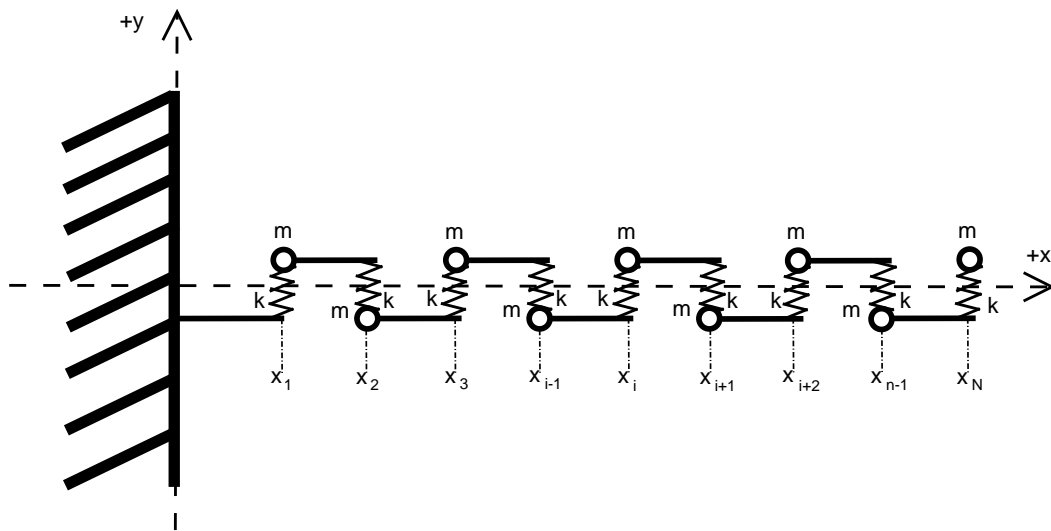
$$F = m \cdot a \quad (2.3.1.1)$$

Podstatou Newton-Eulerovy metody je vyjádřit působení sil na systém a sestavit podmínky dynamické rovnováhy :

$$m \cdot a - F = 0 \quad (2.3.1.2)$$

Při použití této metody je model vetknutého nosníku tvořen soustavou hmotných bodů zavěšených na pružinách, které tak tvoří soustavu lineárních oscilátorů viz obrázek (2.5).

2.3.2 Popis matematického modelu

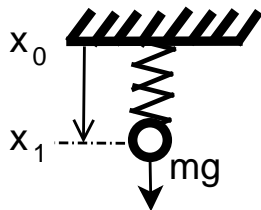


Obrázek 2.5: Model vetknutého nosníku 2

- m je hmotnost jednotlivých hmotných bodů (předpokládá se, že body mají stejnou hmotnost)
- k je tuhost jednotlivých pružin (předpokládá se stejná tuhost pro všechny pružiny)
- x_1, \dots, x_N jsou výchylky jednotlivých bodů

2.3.3 Odvození pohybové rovnice

Pro snadnější odvození sil působících na jednotlivé body vetknutého nosníku je potřeba nejdříve začít pouze s jedním bodem na pružině viz obrázek (2.6).



Obrázek 2.6: Znárodnění hmotného bodu zavěšeného na pružině

- m je hmotnost hmotného bodu
- x_1 je výchylka hmotného bodu
- x_0 je poloha zavěšení pružiny

V tomto jednoduchém příkladu hmotný bod působí tři síly :

- 1) Síla pružiny, kde k značí tuhost pružiny :

$$F = -k(x_1 - x_0) \quad (2.3.3.1)$$

- 2) Setrvačná síla :

$$F = -m \cdot \ddot{x} \quad (2.3.3.2)$$

- 3) Gravitační síla :

$$F = m \cdot g \quad (2.3.3.3)$$

V tomto případě je dynamická rovnováha popsána následovně :

$$m \cdot g - k(x_1 - x_0) - m \cdot \ddot{x} = 0 \quad (2.3.3.4)$$

Po úpravě :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = m \cdot g + k \cdot x_0 \quad (2.3.3.5)$$

V případě vetknutého nosníku je situace poněkud složitější, protože na sebe jednotlivé hmotné body působí. Při zanedbání působení gravitační síly, působí na i -tý hmotný bod následující síly :

1) Setrvačná síla :

$$F = -m \cdot x_i \quad (2.3.3.6)$$

2) Síla i -té pružiny :

$$F = -k(x_i - x_{i-1}) \quad (2.3.3.7)$$

3) Síla $(i+1)$ -té pružiny :

$$F = k(x_{i+1} - x_i) \quad (2.3.3.8)$$

Pro i -tý hmotný bod vypadá dynamická rovnováha následovně :

$$F_i = -k(x_i - x_{i-1}) + k(x_{i+1} - x_i) = m \cdot \ddot{x}_i \quad (2.3.3.9)$$

Takto lze popsat síly působící na libovolný hmotný bod. Malé odlišnosti nastávají u prvního a posledního bodu soustavy. Popis dynamiky prvního hmotného bodu se liší v tom, že na tento bod bude působit další síla. Touto silou bude akční zásah regulátoru. Označme ji tedy u . Síly působící na první bod vypadají tedy následovně :

$$F_1 = k(u - x_1) + k(x_2 - x_1) = m \cdot \ddot{x}_1 \quad (2.3.3.10)$$

Poslední (N -tý) bod se liší v tom, že na něj naopak působí o jednu sílu méně.

$$F_N = k(x_{N-1} - x_N) = m \cdot \ddot{x}_N \quad (2.3.3.11)$$

2.3.4 Příklad vetknutého nosníku - 2

Uvažujme vetknutý nosník stejných rozměrů jako v příkladu 1, tedy nosník z konstrukční oceli o celkové délce $L = 0.3 [m]$ s průřezem šířky $b = 0.02 [m]$ a výšky $h = 0.001 [m]$. Rozdíl v tomto příkladu bude v tom, že jeho dynamiku budeme popisovat pomocí pohybové rovnice (2.3.3.9).

Nosník bude rozdělen na čtyři stejné dlouhé segmenty o stejné délce a hmotnosti jako v příkladu nosníku 1, tedy:

- $l = 0.075 [m]$
- $m = 0.01176 [kg]$

Rozdělením vetknutého nosníku na čtyři segmenty získáme soustavu čtyř rovnic popisující dynamiku nosníku:

$$\begin{aligned}k \cdot (u - x_1) + k \cdot (x_2 - x_1) &= m \cdot \ddot{x}_1 \\k \cdot (x_1 - x_2) + k \cdot (x_3 - x_2) &= m \cdot \ddot{x}_2 \\k \cdot (x_2 - x_3) + k \cdot (x_4 - x_3) &= m \cdot \ddot{x}_3 \\k \cdot (x_3 - x_4) &= m \cdot \ddot{x}_4\end{aligned}\tag{2.3.4.1}$$

Každou z těchto čtyř rovnic je potřeba upravit tak, aby byla v každé rovnici osamostatněna derivace nejvyššího stupně. Rovnice po úpravě vypadají následovně :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{k \cdot u}{m} + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - 2x_1) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k}{m} \cdot (x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \ddot{x}_3 &= \frac{k}{m} \cdot (x_4 - 2x_3 + x_2) \\ \ddot{x}_4 &= \frac{k}{m} \cdot (x_3 - x_4)\end{aligned}\tag{2.3.4.2}$$

Jako stavy systému označme polohu jednotlivých segmentů x_1, \dots, x_4 a jejich rychlost $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_4$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad (2.3.4.3)$$

Dále provedme následující substituci :

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_2 \\ s_3 &= x_3 \\ s_4 &= x_4 \\ s_5 &= \dot{x}_1 \\ s_6 &= \dot{x}_2 \\ s_7 &= \dot{x}_3 \\ s_8 &= \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (2.3.4.4)$$

Po použití substitute (2.3.4.4) dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_5 \\ \dot{s}_2 &= s_6 \\ \dot{s}_3 &= s_7 \\ \dot{s}_4 &= s_8 \\ \dot{s}_5 &= \frac{k \cdot u}{m} + \frac{k}{m} \cdot (s_2 - 2s_1) \\ \dot{s}_6 &= \frac{k}{m} \cdot (s_3 - 2s_2 + s_1) \\ \dot{s}_7 &= \frac{k}{m} \cdot (s_4 - 2s_3 + s_2) \\ \dot{s}_8 &= \frac{k}{m} \cdot (s_3 - s_4) \end{aligned} \quad (2.3.4.5)$$

Po úpravě dostaneme ze vztahu (2.3.4.5) matici dynamiky \mathbf{A} a matici řízení \mathbf{B} , které mají následující tvar :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{-k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4.6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4.7)$$

Protože nás zajímá poloha těžišť jednotlivých segmentů, bude mít matice měření \mathbf{C} následující tvar:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4.8)$$

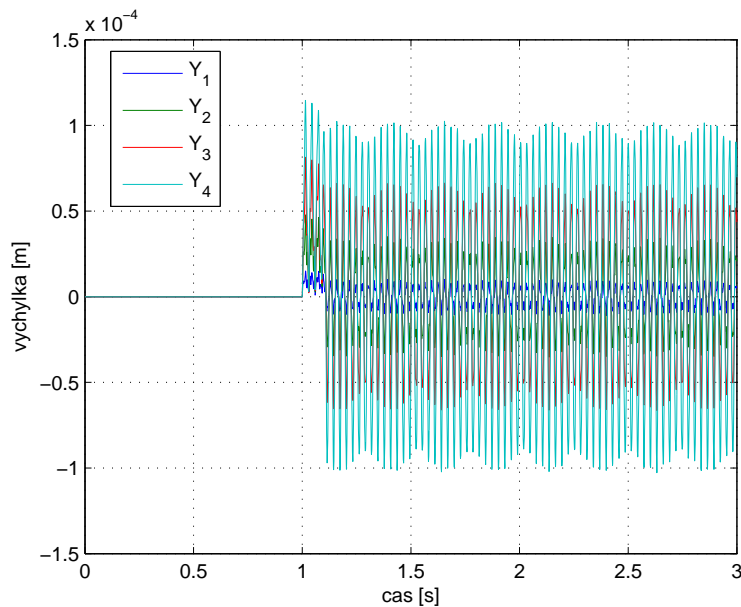
Matice přímých vazeb vstupu na výstup \mathbf{D} je nulová matice rozměru 4×1 , tj tedy:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4.9)$$

Dále bylo potřeba zvolit vhodně tuhosti k jednotlivých pružin. Tuhost jednotlivých pružin bylo potřeba zvolit tak, aby se chování modelu 2 ve frekvenční oblasti co nejvíce podobalo modelu 1. Tuhost pružin byla zvolena experimentálně a má následující hodnotu :

- $k = 4533.3$

Všechny parametry modelu jsou již známy a můžeme provést stejný experiment jako v případě modelu 1. Na vstup systému přivedeme pulz s amplitudou 1 a délkou trvání 0.1 s. Pulz je aktivován v simulačním čase 1 s. Výsledek simulace je zobrazen na obrázku (2.7) na kterém je patrné, že pulz vybudil netlumené kmitání vetknutého nosníku.



Obrázek 2.7: Vybudení netlumeného kmitání vetknutého nosníku 2

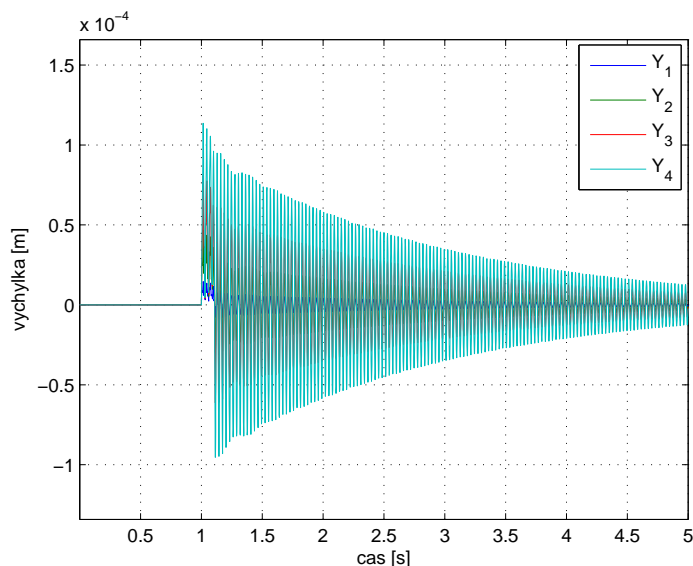
Nyní se podíváme na to, jak se bude model chovat při uvažování vlastního tlumení nosníku. Z rozšíření rovnice (2.3.4.1) o působení tlumení a následnou substitucí lze snadno odvodit, že matice dynamiky \mathbf{A} vetknutého nosníku 2 bude mít následující tvar :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & \frac{-2c}{m} & \frac{c}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \frac{c}{m} & \frac{-2c}{m} & \frac{c}{m} & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \frac{c}{m} & \frac{-2c}{m} & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{-k}{m} & 0 & 0 & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad (2.3.4.10)$$

Kde c je konstanta tlumení, které je zvolena jako :

- $c = 0.1$

Zbývající parametry modelu zvolíme stejně jako v případě netlumeného kmitání a provedeme stejnou simulaci. Na výsledcích simulace, obrázek (??) je vidět, že přivedený pulz vybudí kmitání nosníku, které je působením vlastního tlumení utlumen.



Obrázek 2.8: Vybuzení tlumeného kmitání vetknutého nosníku 2

3 Identifikační experiment

Identifikace je činnost při které se snažíme určit popis reálného systému a to volbou vhodné struktury a parametrů jeho modelu. V našem případě předpokládáme, že vetknutý nosník se chová jako kmitavý člen druhého řádu, respektive každé vlastní frekvenci vetknutého nosníku přibližně odpovídá přenos kmitavého členu druhého řádu a celkový přenos je tedy dán součtem těchto dílčích přenosů. Předpokládaný přenos vetknutého nosníku $P(s)$ vypadá následovně :

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{b_{1i}s + b_{0i}}{s^2 + 2\xi_i\Omega_i s + \Omega_i^2} \quad (3.0.0.1)$$

Kde Y značí výstup a U vstup systému, s je parametr Laplasovi transformace, ξ_i je relativní tlumení příslušné vlastní frekvence Ω_i , koeficienty b_{1i} a b_{0i} jsou parametry výstupu signálu, jejich určení bude popsáno dále.

3.1 Určení vlastních frekvencí a relativního tlumení

Nejdříve je potřeba určit vlastní frekvence a relativní tlumení systému. Pokud máme systém ve stavovém popisu, můžeme vlastní frekvence určit z vlastních čísel (pólů systému) matice dynamiky. Póly systému lze chápat jako komplexně sdružené číslo následujícího tvaru :

$$\sigma(A) = -\sigma \pm j\omega \quad (3.1.0.1)$$

Kde σ značí reálnou a $j\omega$ imaginární část pólu. Pro vlastní frekvence Ω platí:

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \quad (3.1.0.2)$$

Ze vztahu (3.1.0.2) lze snadno odvodit, že pokud jsou póly ryze imaginární (reálná část $\sigma = 0$), tak vlastní frekvence Ω přímo rovna imaginární složce pólu.

Dále pro vlastní čísla platí :

$$2\sigma = 2\xi \cdot \Omega \quad (3.1.0.3)$$

Dosazením (3.1.0.2) do (3.1.0.3) získáme :

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} \quad (3.1.0.4)$$

V případě příkladu nosníku - 1 pro nucené netlumené kmitání jsou zjištěné vlastní frekvence následující :

- $w_1 = 45.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 7.24 \text{ [Hz]}$
- $w_2 = 293.1 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 46.65 \text{ [Hz]}$
- $w_3 = 827.7 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 131.73 \text{ [Hz]}$
- $w_4 = 1491 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 237.3 \text{ [Hz]}$

V příkladu nosníku - 2 pro nucené netlumené kmitání jsou vlastní frekvence následující :

- $w = 215.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 34.29 \text{ [Hz]}$
- $w = 620.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 98.75 \text{ [Hz]}$
- $w = 950.6 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 151.29 \text{ [Hz]}$
- $w = 1166.1 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 185.59 \text{ [Hz]}$

V obou případech pro netlumené kmitání jsou póly ryze imaginární. Z toho vyplývá, že relativní tlumení pro každou vlastní frekvenci je nulové.

V příkladu nosníku - 1 pro nucené tlumené kmitání byly pomocí vztahu (3.1.0.2) získány následující vlastní frekvence :

- $w_1 = 45.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 3.77 \text{ [Hz]}$
- $w_2 = 293.1 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 10.71 \text{ [Hz]}$
- $w_3 = 827.7 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 16.41 \text{ [Hz]}$
- $w_4 = 1491 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 20.12 \text{ [Hz]}$

Podle vztahu (3.1.0.4) byly získány následující hodnoty relativního tlumení :

- $\xi_1 = 0.0051$
- $\xi_2 = 0.033$
- $\xi_3 = 0.0931$
- $\xi_4 = 0.1677$

V příkladu nosníku - 2 byly získány následující hodnoty vlastních frekvencí a relativního tlumení :

1.1661 0.9506 0.6205 0.2155

- $w = 215.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 34.29 \text{ [Hz]}$
- $w = 620.5 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 98.75 \text{ [Hz]}$
- $w = 950.6 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 151.29 \text{ [Hz]}$
- $w = 1166.1 \text{ [rad} \cdot \text{sec}^{-1}] \doteq 185.59 \text{ [Hz]}$
- $\xi_1 = 0.0024$
- $\xi_2 = 0.0068$
- $\xi_3 = 0.0105$
- $\xi_4 = 0.0129$

Pro reálný vetknutý nosník je nalezení vlastních frekvencí a relativního tlumení komplikovanější. Vlastní frekvence nalezneme tak, že na vstup systému přivedeme sinusový signál kterému budeme postupně zvyšovat frekvenci. Pro frekvenci při které bude amplituda výstupu nabývat lokálního maxima označíme za vlastní.

Pro zjištění relativního tlumení konkrétní vlastní frekvence budeme vycházet ze vztahu :

$$|P_i(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_i^2 - \omega^2) + 4\xi_i^2\Omega_i^2\omega^2}} \quad (3.1.0.5)$$

Kde $|P_i(j\omega)|$ odpovídá hodnotě frekvenčního přenosu pro danou frekvenci ω . Ze vztahu (3.1.0.5) můžeme vyjádřit hodnotu ξ_i :

$$\xi_i = \sqrt{\frac{1}{4\Omega_i^2\omega^2 |P_i(j\omega)|} - \frac{(\Omega_i^2 - \omega^2)}{4\Omega_i^2\omega^2}} \quad (3.1.0.6)$$

Aby byla hodnota výsledného relativního tlumení konkrétní vlastní frekvence přesnější provedeme předchozí výpočet na několika frekvencích ω v okolí dané vlastní frekvence Ω . Poté tento výsledek zprůměrujeme :

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_N}{N} \quad (3.1.0.7)$$

3.2 Určení koeficientů výstupu

Nyní již známe parametry vstupu systému a proto musíme dále určit parametry výstupu tedy koeficienty b_{1i}, b_{0i} pro všechny naměřené vlastní frekvence. Tyto parametry určíme pomocí metody nejmenších čtverců. Podstatou této metody je nalézt řešení soustavy rovnic, které odpovídá minimu ze součtu čtverců odchylek v každé rovnici. Aby pro tuto soustavu existovalo řešení, musí být minimální počet rovnic roven počtu hledaných neznámých ve zvolených rovnicích. Obecně je lepší volit větší počet rovnic než je proměnných. Touto volbou je zajištěn lepší odhad parametrů.

V našem případě je každá rovnice ve tvaru :

$$P(j\omega_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b_{1i}j\omega_i + b_{0i}}{j\omega_i^2 + \xi_i\Omega_i j\omega_i + \Omega^2} = b_{1i} \cdot B_{1i} + b_{0i} \cdot B_{0i} \quad (3.2.0.1)$$

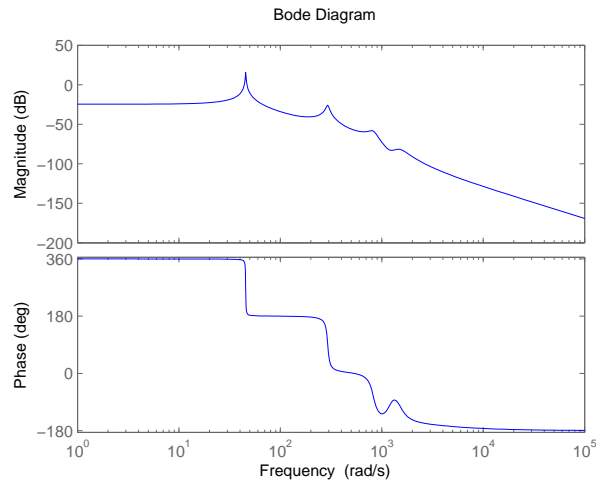
Kde :

$$B_{1i} = \frac{j\omega_i}{j\omega_i^2 + \xi_i\Omega_i j\omega_i + \Omega^2} \quad (3.2.0.2)$$

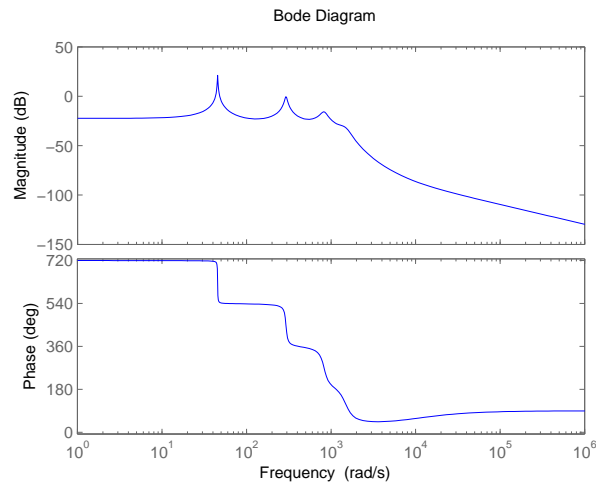
$$B_{0i} = \frac{1}{j\omega_i^2 + \xi_i\Omega_i j\omega_i + \Omega^2} \quad (3.2.0.3)$$

V této rovnici rovnici jsou jedinými neznámými koeficienty b_{1i} a b_{0i} , protože hodnotu $P(j\omega_i)$ získáme z naměřených dat, pro každou frekvenci vstupního signálu $j\omega_i$, koeficienty Ω_i a ξ_i odpovídají vlastní frekvenci a jejímu relativnímu tlumení, které jsme zjistili v předchozí části. Z toho vyplývá, že budeme potřebovat minimálně $2N$ rovnic, kde v našem případě $N = 4$, protože máme nalezeny čtyři vlastní frekvence.

Identifikace systému byla provedena simulačně na modelu vetknutého nosníku 1 s uvažováním vlastního tlumení. Experiment proběhl na frekvenčním rozsahu 1 až 7000 $[rad \cdot sec^{-1}]$. Na obrázcích (3.1) a (3.2) jsou znázorněny Bodeho frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích. Jejich porovnáním lze říci, že se identifikace zdařila.



Obrázek 3.1: Logaritmický amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika modelu



Obrázek 3.2: Logaritmický amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika identifikovaného přenosu

4 Návrh řízení

V této části je řešen návrh regulátoru pro tlumení vibrací. Než začneme navrhovat samotný regulátor, je potřeba uvést některé důležité pojmy z oblasti regulace.

4.1 Řiditelnost systému

Aby bylo možné vůbec uvažovat o řízení systému je potřeba zjistit, zda je říditelný. Systém je říditelný pokud existuje pro všechny stavy systému řízení, díky kterému se na konečném intervalu libovolný počáteční stav $x(t_0)$ změní v koncový stav $x(t_1) = 0$.

Pro systém popsaný stavovou reprezentací platí, že systém je říditelný pokud hodnota matice říditelnosti \mathbf{Q}_r je rovna dimenzi vektoru stavu $\mathbf{x}(t)$. Matematicky tedy [2] :

$$\text{rank} [\mathbf{Q}_r] = \text{rank} [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \dim(\mathbf{x}(t)) = n \quad (4.1.0.1)$$

4.2 Pozorovatelnost systému

Systém je pozorovatelný, pokud lze pozorováním jeho vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu $t \in \langle t_0; t_1 \rangle$ určit hodnotu počátečního stavu $x(t_0)$. To znamená, že matice pozorovatelnosti \mathbf{Q}_p je rovna dimenzi vektoru stavu $\mathbf{x}(t)$. Matematicky to znamená [2] :

$$\text{rank} [\mathbf{Q}_p] = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \dim(\mathbf{x}(t)) = n \quad (4.2.0.1)$$

4.3 Stavová zpětná vazba

Stavová zpětná vazba je pro systém popsáný stavovou reprezentací (2.1.0.1) dána vztahem [4] :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.3.0.1)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (4.3.0.2)$$

Kde $\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$ znázorňuje stavovou zpětnou vazbu. Dosazením stavové zpětné vazby získáme následující systém:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) \quad (4.3.0.3)$$

Pokud je dvojice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) říditelná, potom pro libovolně zvolenou symetrickou množinu $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ existuje zpětná vazba (4.3.0.2) taková, že množina vlastních čísel matice $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t)$ se rovná Λ .

4.4 Přiřazení Jordanovy formy

Pro matice \mathbf{A} a \mathbf{L} platí, že jsou podobné ($\mathbf{A} \sim \mathbf{L}$) právě tehdy, jestliže existuje regulární matice \mathbf{T} taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}$ [4].

Pokud jsou matice \mathbf{A} a \mathbf{L} , potom mají stejná vlastní čísla, ale pokud mají jen stejná vlastní čísla nemusí být podobné. Z toho důvodu je důležité přiřazovat Jordanovu formu a ne jen vlastní čísla. Tím je zajištěno, že zachováme všechny spektrální vlastnosti zvolené matice \mathbf{L} .

Uvažujme systém se stavovou zpětnou vazbou (4.3.0.3). Pro tento systém chceme nalézt matici \mathbf{F} takovou, aby matice $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})$ byla podobná matici \mathbf{L} . Požadujeme, aby existovala regulární matice \mathbf{T} taková, že :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.4.0.1)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L} + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{T} = 0 \quad (4.4.0.2)$$

Označením $\mathbf{H} = \mathbf{F}\mathbf{T}$ získáme následující rovnici v maticovém tvaru :

$$\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L} + \mathbf{B}\mathbf{H} = 0 \quad (4.4.0.3)$$

Řešení této maticové (Sylvestroví) rovnice získáme, je regulární skoro pro každou matici \mathbf{H} a hledaná zpětnovazební matice má následující tvar :

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.4.0.4)$$

4.5 LQ regulace

Podstatou LQ regulace je nalézt ideální řešení ve smyslu minimalizace kvadratického kritéria popisující poměr nákladů regulace ku kvalitě a rychlosti regulace. Typy LQ regulátorů se dělí podle spojitosti na spojité a diskrétní a podle délky horizontu: s konečným, nekonečným horizontem.

V našem případě bude použit spojité LQR s nekonečným horizontem. Nekonečný horizont znamená, že hodnotící kritérium je bráno v celé časové oblasti.

Uvažujme systém se stavovou zpětnou vazbou (4.3.0.1), (4.3.0.2). Pro výsledný výpočet parametrů platí \mathbf{I} [3] :

$$\mathbf{I} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \min \quad (4.5.0.1)$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}) \mathbf{x} dt \quad (4.5.0.2)$$

Kde \mathbf{R} je pozitivně definitní matice udávající váhu vstupů a \mathbf{Q} je pozitivně semidefinitní matice udávající váhy stavů. Matici \mathbf{Q} volíme ve tvaru :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} \geq 0 \quad (4.5.0.3)$$

Na matici \mathbf{H} je kladen požadavek, aby dvojice (\mathbf{H}, \mathbf{A}) byla pozorovatelná.

Při zavedení substituce vztahu (4.5.0.2) :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \quad (4.5.0.4)$$

Lze napsat výpočet parametru \mathbf{I} jako :

$$\mathbf{I} = \mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4.5.0.5)$$

Kde \mathbf{P} je řešením Ricatiovy rovnice :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{F})^T + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{F}) + \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.5.0.6)$$

4.6 Návrh regulátoru

Nášim cílem je tlumit módy kmitání vetknutého nosníku, které odpovídají pólům systému. V případě netlumeného modelu se póly nalézají na imaginární ose, tzn. systém je na mezi stability a v případě modelu s vlastním tlumením se póly nalézají v levé komplexní polorovině v blízkosti imaginární osy. Při tlumení módů kmitání se snažíme příslušné póly posunout dále do levé komplexní poloroviny. Pro umístění těchto pólů použijeme LQ regulátor. Při návrhu byly experimentálně voleny různé varianty parametrů \mathbf{R} a \mathbf{Q} . LQ regulátor byl navrhován pro model vetknutého nosníku - 1 s uvažováním vlastního tlumení.

Po sérii experimentů byly výsledné parametry \mathbf{R} a \mathbf{Q} zvoleny následovně následovně :

$$\mathbf{R} = 5 \quad (4.6.0.1)$$

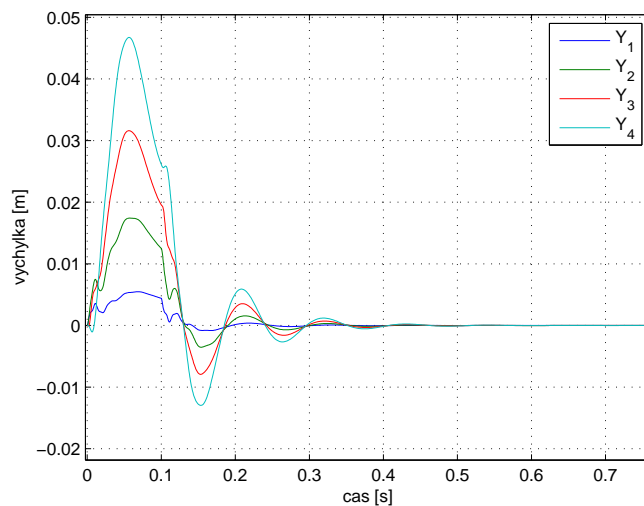
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6.0.2)$$

S těmito parametry vypadá výsledná zpětnovazební matice následovně :

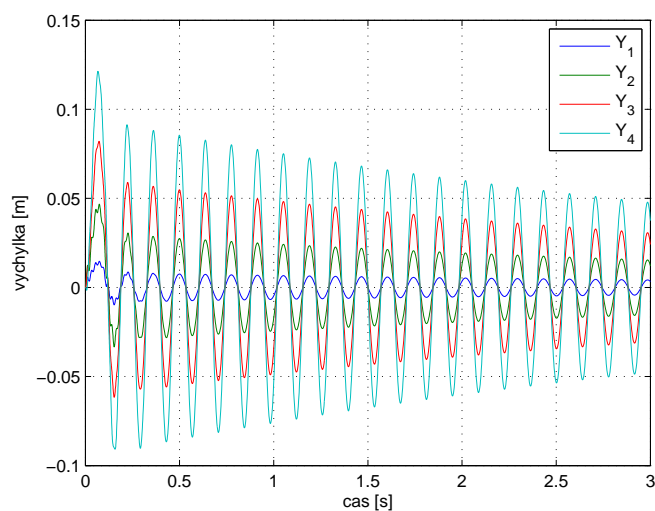
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5.1952 & 2.4486 & 0.0680 & -0.1249 & 0.0466 & 0.0322 & 0.0161 & 0.0046 \end{bmatrix} \quad (4.6.0.3)$$

4.7 Porovnání regulovaného a neregulovaného systému

V této části je provedeno simulační porovnání regulovaného a neregulovaného systému. V prvním experimentu je na vstup systému přiveden pulz trvající 0.1 s s velikostí amplitudy 1, viz obrázky (4.1) a (4.2).

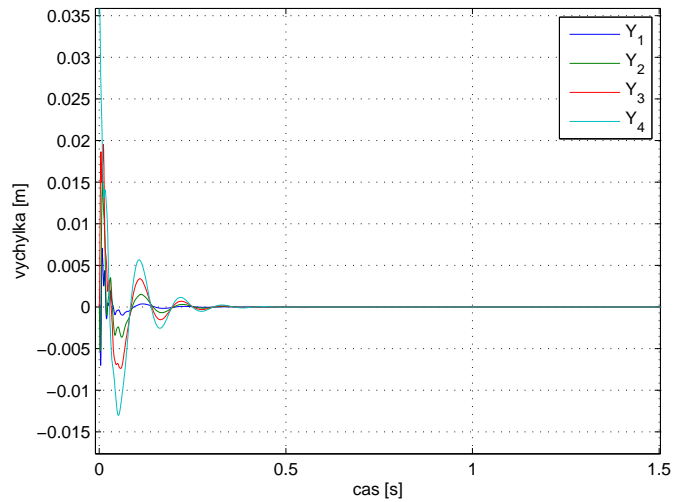


Obrázek 4.1: Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na první segment

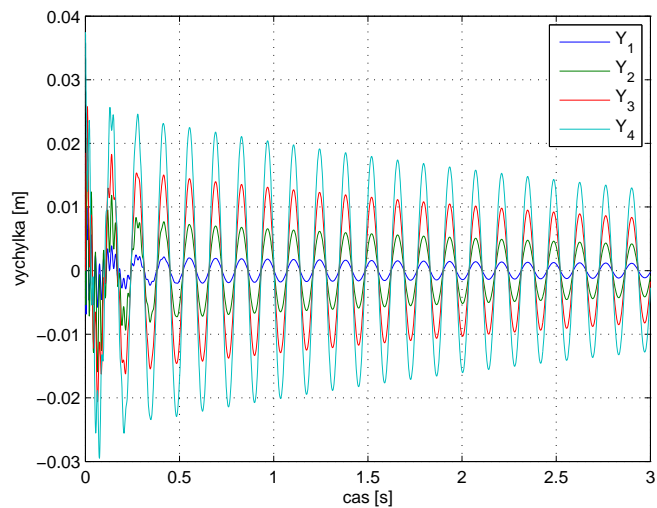


Obrázek 4.2: Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na první segment

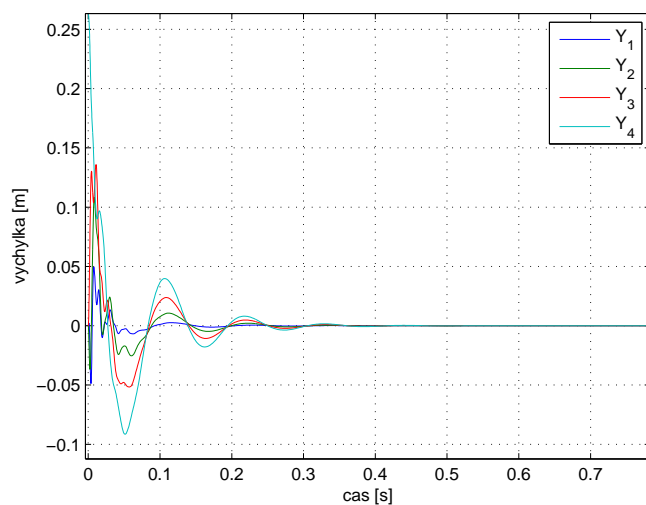
Dalším experimentem bylo působení rázu na koncový segment nosníku. Tohoto bylo docíleno vychýlením počátečního stavu koncového segmentu, viz obrázky (4.3) , (4.4), (4.5) a (4.6).



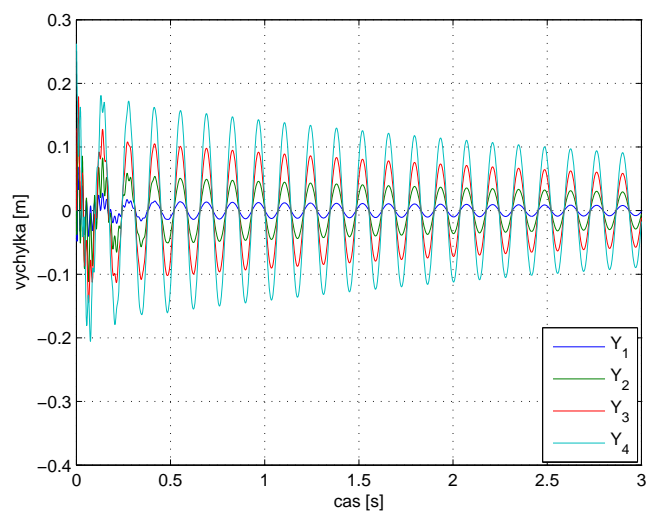
Obrázek 4.3: Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 1



Obrázek 4.4: Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 1



Obrázek 4.5: Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 2



Obrázek 4.6: Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 2

Z výsledků simulací je patrné, že systém s LQ regulátorem vždy utlumí vibrace v relativně krátkém čase

5 Závěr

V této práci jsme se zabývali návrhem aktivního tlumení vibrací vetknutého nosníku.

Nejdříve byly odvozeny dva modely popisující kmitání vetknutého nosníku. Z porovnání těchto modelů, při daném nastavení parametrů je patrné, že si modely neodpovídají. Což je způsobeno volbou parametru tuhosti pružin pro příklad modelu - 2. Větší podobnosti by pravděpodobně mohlo být dosaženo vhodnější metodou určení tuhosti, než-li je experimentální metoda.

Dále byla řešena identifikace systému. Tuto identifikaci jsme zamýšleli provést na reálném nosníku, ale nakonec byla řešena pouze pomocí simulace. Pomocí identifikace se podařilo nalézt přenos, který má podobné vlastnosti jako matematický model a to ve smyslu podobnosti ve frekvenční oblasti.

K sestavenému matematickému modelu byl navržen zpětnovazební regulátor. Přiřazení pólů bylo řešeno pomocí LQ regulátoru volbou vhodných parametrů tak, aby se utlumily vlastní frekvence systému.

Experimentální volba parametrů byla následně zkontrolována pomocí simulace. Z výsledků simulace vyplývá, že výsledný regulátor je navržen správně.

Literatura

- [1] JALILI, N. A comparative study and analysis of semi-active vibration-control systems. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF VIBRATION AND ACOUSTICS*. 2002, 124, 4, s. 593–605.
- [2] MELICHAR, J. Lineární systémy 1. Učební texty, Západočeská univerzita v Plzni. Plzeň, 2010.
- [3] SCHLEGEL, M. Lq regulátor – doplňující text k předmětu ps. 2004.
- [4] SCHLEGEL, M. – KÖNIGSMARKOVÁ, J. Parametric Jordan form assignment revisited. *Asian Journal of Control*. 2014, 16, 2, s. 409–420.
- [5] SHEN, Y. – GOLNARAGHI, M. – HEPPLER, G. Semi-active vibration control schemes for suspension systems using magnetorheological dampers. *Journal of Vibration and Control*. 2006, 12, 1, s. 3–24.
- [6] TŮMA, J. ACTIVE VIBRATION CONTROL OF A CANTILEVER BEAM. *Engineering Mechanics*. 2012, s. 55.
- [7] WIKIPEDIA. 2007. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Euler\T1\textendashBernoullibeamtheory#/media/File:BeamVibrationPlot.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%20textendashBernoullibeamtheory#/media/File:BeamVibrationPlot.svg)[vid.13.5.2015].

Seznam obrázků

1.1	Módy kmitání vetknutého nosníku [7]	9
2.1	Model vetknutého nosníku 1	13
2.2	Průřez vetknutého nosníku	18
2.3	Vybuzení netlumeného kmitání vetknutého nosníku 1	21
2.4	Vybuzení tlumeného kmitání vetknutého nosníku 1	24
2.5	Model vetknutého nosníku 2	25
2.6	Znázornění hmotného bodu zavěšeného na pružině	26
2.7	Vybuzení netlumeného kmitání vetknutého nosníku 2	31
2.8	Vybuzení tlumeného kmitání vetknutého nosníku 2	32
3.1	Logaritmický amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika modelu	38
3.2	Logaritmický amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika identifikovaného přenosu	38
4.1	Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na první segment	43
4.2	Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na první segment	43
4.3	Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 1	44
4.4	Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 1	44
4.5	Systém s tlumením vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 2	45
4.6	Systém bez tlumení vibrací - přivedení pulzu na poslední segment - 2	45