ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Vektorové prostory polynomů

Bakalářská práce

Barbora Štaifová
Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2016

……………………………

Barbora Štaifová

Děkuji vedoucí bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady,ochotu a také za čas, který mi věnoval

Obsah

Úvod

Vektorový prostor je jeden z hlavních objektů studia lineární algebry. Ve vektorovém prostoru jsou definované operace, jako je sčítání a násobení. Prvek vektorového prostoru se nazývá vektor. Ve vektorovém prostoru lze dva vektory sečíst a jejich součet je opět prvkem vektorového prostoru, toto platí i pro násobení. Vektorem je vedle orientované úsečky také uspořádaná n-tice reálných čísel, matice nebo polynom. Tato práce je zaměřena na vektorové prostory polynomů.

V první části práce se budeme věnovat základním pojmů týkajících se vektorových prostorů a podprostorů. Definujeme vektorový prostor a podprostor. Tyto pojmy si ukážeme na příkladech týkajících se polynomů. Dále definujeme další pojmy, jako je lineární kombinace, lineární obal, lineárně závislá množina, množina generátorů, báze a dimenze vektorového prostoru. Tyto pojmy si též předvedeme na konkrétních příkladech. V první části se budeme věnovat vektorovým prostorům polynomů jedné neurčité. V druhé části této kapitoly se budeme věnovat vektorovým prostorům polynomů dvou neurčitých.

V druhé kapitole se budeme věnovat lineárnímu zobrazení. Definujeme co to lineární zobrazení je. Uvedeme si základní pojmy, které se lineárního zobrazení týkají, jako je jádro, obraz, hodnost a defekt homomorfismu. Dále se budeme zabývat dělením polynomů a maticí homomorfismu. Všechny tyto pojmy předvedeme na konkrétních příkladech.

Ve třetí kapitole se budeme věnovat skalárnímu součinu. Definujeme co to skalární součin je. Uvedeme si základní pojmy, které se skalárního součinu týkají, jako je ortogonální vektor, ortogonální podmnožina a ortogonální báze. Všechny tyto pojmy předvedeme na konkrétních příkladech.

1. Vektorové prostory a podprostory polynomů

V úvodní kapitole definujme některé základní pojmy, které se týkají vektorového prostoru a které budeme v následujících kapitolách používat.

1.1. Vektorové prostory polynomů jedné neurčité

Jako první definujeme vektorový prostor.

Definice 1.1.1. (vektorový prostor): Nechť T je těleso a V množina s binární operací sčítání, kterou budeme značit symbolem "+". Nechť je dáno zobrazení kartézského součinu TxV do množiny V; dvojici prvků a ∈ T a v ∈ V toto zobrazení přiřazuje prvek, který značíme a.v nebo jednodušeji av; hovoříme o násobení prvků množiny V prvky tělesa T, které značíme symbolem ".". Nechť dále platí:

(i)	$\forall\, u,v \in$ V	$u+v=v+u$
(ii)	$\forall\, u,v,w \in$ V	$(u+v)+w=u+(v+w)$
(iii)	$\exists o \in$ V $\forall\, u \in$ V	$u+o=u$
(iv)	$\forall\, u \in$ V $\exists -u \in$ V	$u+(-u)=o$
(v)	$\forall\, u,v \in$ V $\forall$ a $\in$ T	a.$(u+v)$=a.u+a.v
(vi)	$\forall\, u \in$ V $\forall$ a, b $\in$ T	(a+b).u=a.u+b.u
(vii)	$\forall\, u \in$ V $\forall$ a, b $\in$ T	(a.b).u=a.(b.u)
(viii)	$\forall\, u \in$ V	1.$u=u$

Potom budeme říkat, že V je vektorový prostor (nebo lineární prostor) nad tělesem T. Prvkům množiny V budeme říkat vektory, prvkům tělesa T skaláry. Vektor označený symbolem o a popsaný axiómem (iii) se nazývá nulový vektor prostoru V, vektor označený symbolem –u a popsaný axiómem (iv) se nazývá opačný vektor k vektoru u. [1]

Příklad 1.1.2.

Nyní provedeme důkaz, že polynomy jedné neurčité stupně nejvýše dva tvoří vektorový prostor.

(i) Máme dokázat, že součet *u* a *v* je roven součtu *v* a *u*

Označíme si *u* a *v*:

$u=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

$v=q(x)= b_0+b_1x+b_2x^2$

Dosadíme a vypočteme součet *u* a *v*:

$$u+v=(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)=$$
$$=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2=$$
$$=b_0+a_0+(b_1+a_1)x+(b_2+a_2)x^2=$$
$$=(b_0+b_1x+b_2x^2)+(a_0+a_1x+a_2x^2)=$$
$$=q(x)+p(x)=v+u$$

Z výpočtu je zřejmé, že nezáleží na tom, jestli sčítáme *u* a *v* nebo *v* a *u.* Proto je *u*+*v*=*v*+*u.*

(ii) Máme dokázat, že *(u+v)+w=u+(v+w)*

Označíme si *u*, *v* a *w*:

$u=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

$v=q(x)= b_0+b_1x+b_2x^2$

$w=r(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$

Dosadíme do (*u*+*v*)+*w:*

$$(u+v)+w=[(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)]+(c_0+c_1x+c_2x^2)=$$
$$=[a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2]+ (c_0+c_1x+c_2x^2)=$$
$$= a_0+b_0+c_0+(a_1+b_1+c_1)x+(a_2+b_2+c_2)x^2=$$
$$=(a_0+a_1x+a_2x^2)+[(b_0+b_1x+b_2x^2)+(c_0+c_1x+c_2x^2)]=$$
$$=p(x)+(q(x)+r(x))=u+(v+w)$$

Z výpočtu je zřejmé, že (*u*+*v*)+*w*=*u*+(*v*+*w*).

(iii) Máme dokázat, že součtem polynomu *u* s nulovým polynomem, dostaneme polynom *u*.

Označíme si *u* a *o:*

u=p(x)=$a_0+a_1x+a_2x^2$

o=o(x)=$0+0x+0x^2$

Dosadíme do *u+o:*

$u+o=(a_0+a_1x+a_2x^2)+(0+0x+0x^2)=$

$=a_0+0+(a_1+0)x+(a_2+0)x^2=$

$= a_0+a_1x+a_2x^2=$

=p(x)=u

Výpočtem jsme zjistili, že *u+o=u.*

(iv) Máme dokázat, že $u+(-u)=o$.

Označíme si *u:*

u=p(x)=$a_0+a_1x+a_2x^2$

A dosadíme:

$u+(-u)=(a_0+a_1x+a_2x^2)+(-a_0-a_1x-a_2x^2)=$

$=a_0-a_0+(a_1-a_1)x+(a_2-a_2)x^2=$

$=0+0x+0x^2=o$

Vidíme, že $u+(-u)$ je opravdu rovno o.

(v) Máme dokázat, že a.(u+v)= a.u+a.v

Označíme *u,v,*a:

u=p(x)=$a_0+a_1x+a_2x^2$

v=q(x)= $b_0+b_1x+b_2x^2$

a=a

Dosadíme za a.(u+v):

$a.(u+v)=a.\,[(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)]=$

$=(a.a_0+a.a_1x+a.a_2x^2)+(a.b_0+a.b_1x+a.b_2x^2)=$

=a.p(x)+a.q(x)=a.u+a.v

Z výpočtu je zřejmé, že a.(u+v)= a.u+a.v.

(vi) Máme dokázat, že $(a+b).u= a.u+b.u.$

Označíme u, a, b:

$u=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

a=a

b=b

A počítáme:

$(a+b).u=(a+b).(a_0+a_1x+a_2x^2)=$

$=(a.a_0+a.a_1x+a.a_2x^2)+(b.a_0+b.a_1x+b.a_2x^2)=$

$= a.p(x)+b.p(x)=a.u+b.u$

Vidíme, že $(a+b).u= a.u+b.u.$

(vii) Máme dokázat, že $(a.b).u=a.(b.u)$

Označíme u, a, b:

$u=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

a=a

b=b

Dosadíme a upravujeme:

$(a.b).u=(a.b).(a_0+a_1x+a_2x^2)$

$= a.b.p(x)=a.(b.u)$

Je zřejmé, že $(a.b).u=a.(b.u)$.

(viii) Máme dokázat, že $1.u=u.$

Označíme si u:

$u=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

A počítáme:

$1.u=1.(a_0+a_1x+a_2x^2)=$

$=1a_0+1a_1x+1a_2x^2=$

$= a_0+a_1x+a_2x^2=$

$= p(x)=u$

Vidíme, že 1.*u*=*u*.

Jsou splněny všechny definiční vlastnosti vektorového prostoru.

Dokázali jsme, že polynomy jedné neurčité stupně nejvýše dva tvoří vektorový prostor. Vektory budeme značit písmeny, většinou z konce abecedy.

Příklad 1.1.3.:(vektorové prostory polynomů):

Uveďte nějaké prvky vektorového prostoru polynomů jedné neurčité stupně nejvýše dva.

$p(x)=ax^2+bx+c$ $\quad u=x+1 \quad \in R_2[x]$

$v=x^2-2x+5 \quad \in R_2[x]$

Poznámka: Polynomy jedné neurčité f(x) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$, když $a_n\neq 0$ jsou stupně n.

Například:Pro n=3 $\quad p(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$u=1+x-x^2+5x^3$

$v=2-4x+0x^2+x^3$

Příklad 1.1.4.(co není vektorový prostor)

Najděte nulový vektor v množině $M=\{ax^2+bx+c;a\neq 0;a,b,c\in R\}$

Řešení:

Nechť:

$o=a_0x^2+b_0x+c_0 \quad ; a_0\neq 0$

$u= ax^2+bx+c$

Lze najít *o* tak, aby platilo *o* + *u* = *u*?

Dosadíme za *o* a *u:*

Je rovno $(a_0+a)x^2+(b_0+b)x+(c_0+c)= ax^2+bx+c$?

Počítáme:

$c_0+c=c \Rightarrow c_0=0$

$b_0+b=b \Rightarrow b_0=0$

$a_0+a=a \Rightarrow a_0=0$

Zde nastává spor. Byla zadaná podmínka, že se a_0 nesmí rovnat 0.

Protože v množině M neexistuje nulový vektor, množina M není vektorový prostor.

Dále si definujeme co je to vektorový podprostor.

Definice 1.1.5. (vektorový podprostor): Nechť (V,+,.) je vektorový prostor nad tělesem T. Množina W je vektorovým podprostorem V(budeme psát $W\subset\subset V$), právě tehdy, když

(i) W je podmnožinou V,

(ii) (W,+,.) je vektorovým prostorem nad tělesem T. [1]

Ověřování, zda nějaká množina je vektorovým podprostorem podle definice 1.1.5. by bylo zdlouhavé, proto bude vhodnější užívat následující větu.

Věta 1.1.6.: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Množina W je vektorovým podprostorem prostoru V právě tehdy, když platí:

(i) W je podmnožinou V,

(ii) $W \neq \emptyset$,

(iii) $\forall\ u,v \in W \quad u+v \in W$,

(iv) $\forall\ u \in W\ \forall\ \lambda \in T \quad \lambda.u \in W$. [1]

Důkaz:

Jestliže je W podprostorem prostoru V, potom zřejmě (i)-(iii) platí, neboť sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry je v podprostoru W stejné jako v prostoru V.

Jestliže naopak pro podmnožinu W prostoru V platí (i)-(iii), pak je na této množině definována operace sčítání i operace násobení prvků množiny V prvky tělesa T a tyto operace fungují stejně, jako když prvky množiny W považujeme za prvky prostoru V. Pro tyto operace platí axiómy (i)-(ii) a (v)-(viii) z definice vektorového prostoru, neboť tyto axiómy platí pro všechny prvky prostoru V. Protože je podle (i) množina W neprázdná, existuje prvek $u \in W$; podle (iii) je potom $0u=o \in W$. Pro každý prvek $v \in W$ je dále podle (ii) $(-1)v=-v \in W$, tj. množina W obsahuje s každým vektorem v i vektor k němu opačný. Platí tedy i axióm (iii) a (iv) z definice o vektorovém prostoru. [1]

Tuto větu využijeme pro řešení následujícího příkladu.

Příklad 1.1.7.

Rozhodně, zda je daná množina W vektorovým podprostorem daného vektorového prostoru V:

W jsou všechny polynomy p(x) stupně nejvýše dva s koeficienty v Q, pro které $p(1)+p(-1)=0$. V jsou všechny polynomy stupně nejvýše dva nad tělesem racionálních čísel.

Řešení:

Označíme polynom nejvýše druhého stupně $p(x)=ax^2+bx+c$. Pro $x=1$ dává hodnotu $p(1)=a+b+c$, v bodě $x=-1$ má hodnotu $p(-1)=a-b+c$. Vzhledem k tomu, že $p(1)+p(-1)=0$, musí platit $(a+b+c)+(a-b+c)=0$, a tedy $c=-a$. Můžeme proto psát $W=\{ax^2+bx-a;\ a,b \in Q\}$

Množina W je podmnožinou V, je tedy splněna podmínka (i), součet polynomů z W se od součtu polynomů z V liší jen v absolutním členu, to znamená,že V bude asi podprostor.

(ii) neprázdnost W: Nechť je například $a=0$, $b=1$, pak $x \in W$, a tedy $W \neq \emptyset$

(iii) uzavřenost W na součet: Zvolme $u=a_1x^2+b_1x-a_1$, $v=a_2x^2+b_2-a_2$. Součtem takových vektorů je vektor $u+v=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x-(a_1+a_2)$. I bez označení $a=a_1+a_2$,

$b=b_1+b_2$ je zřejmé, že koeficient absolutního členu je opačný ke koeficientu kvadratického členu, takže součet je prvkem W.

(iv) uzavřenost W na násobení skalárem: Vzhledem k tomu, že v polynomu

$$\lambda u= \lambda(a_1x^2+b_1x-a_1)= \lambda a_1x^2+\lambda b_1x-(\lambda a_1)$$

je vedoucí koeficient opačný k absolutnímu členu, což platí pro všechny prvky W, je i $\lambda u \in W$.

Množina všech polynomů p(x) stupně nejvýše dva splňující podmínku $p(1)+p(-1)=0$ je vektorovým podprostorem prostoru V.

Nyní si definujeme lineární kombinaci.

Definice 1.1.8.(lineární kombinace): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou vektory prostoru V a $a_1, a_2, \dots a_k$ prvky tělesa T. Vektor $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ se nazývá lineární kombinace vektorů $v_1, v_2, \dots v_k$ s koeficienty $a_1, a_2, \dots a_k$. Jestliže je množina vektorů prázdná (v tom případě můžeme psát k=0), pak hovoříme prázdné lineární kombinaci, kterou klademe rovnou nulovému vektoru. Jestliže je $k \geq 1$, pak v případě $a_1=a_2=\dots= a_k=0$ hovoříme o triviální lineární kombinaci a v opačném případě, tj. je-li aspoň jeden z koeficientů $a_1, a_2, \dots a_k$ nenulový, o netriviální lineární kombinaci. [1]

Příklad 1.1.9.

Utvořte lineární kombinaci vektorů:

$u=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ z prostoru Z_7^{2x3}

s koeficienty $\lambda_1=5$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=3$

Řešení:

$$\lambda_1 u+ \lambda_2 v+ \lambda_3 w=5\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 5.6+4.3+3.4 & 0 \\ 5.4+4.2+3.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dále si definujeme lineární obal.

Definice 1.1.10.(lineární obal): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a M podmnožina prostoru V. Průnik všech podprostorů prostoru V, které množinu M obsahují, nazveme lineární obal množiny M a označíme symbolem [M]. [1]

Příklad 1.1.11.

Co tvoří lineární obal množiny M={ $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$} z prostoru Z_7^{2x3} ?

Najděte nějaké další prvky [M].

Řešení:

M={ a$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$+b$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$+c$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;a,b,c∈ Z_7}

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$∈M, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$∈M

Nyní si definujeme lineárně závislou množinu.

Definice 1.1.12.(lineárně závislá množina): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť M je podmnožina prostoru V. Podmnožina M se nazývá lineárně závislá, jestliže nějaký vektor množiny M je možno vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů této množiny. V opačném případě se množina M nazývá lineárně nezávislá. [1]

Věta 1.1.13.: Nechť M je podmnožina vektorového prostoru V nad tělesem T. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Množina M je lineárně závislá.

(ii) Nulový vektor je možno vyjádřit jako netriviální lineární kombinaci navzájem různých vektorů množiny M.

(iii) Existuje vlatní podmnožina N množiny M, pro kterou je [N]= [M]. [1]

Příklad 1.1.14.

Rozhodněte, zda je množina $M=\{x^2+x-2, 2x^2+x-3, x-1\} \subset R_2[x]$ lineárně závislá.

Řešení:

V množině jsou tři vektory, každý z nich má tři složky – koeficienty polynomů. Množina M může být lineárně závislá i nezávislá.

Je-li M lineárně závislá, existují k_1, k_2, k_3, z nichž aspoň jeden je nenulový, tak že

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=o$$

Po dosazení a jednoduchých úpravách musí platit:

$$(k_1+2k_2)x^2+(k_1+k_2+k_3)x+(-2k_1-3k_2-k_3)=0x^2+0x+0$$

Vyřešíme odpovídající homogenní soustavu tří rovnic a třech neznámých

$$k_1+2k_2 \quad =0$$

$$k_1+k_2+k_3=0$$

$$-2k_1-3k_2-k_3=0$$

Sečtením posledních dvou rovnic dostaneme vztah $-k_1-2k_2=0$, který je ekvivalentní s první rovnici. Zvolme k_2 libovolně (nenulový), např. $k_2=1$, pak $k_1=-2k_2=-2$ a $k_3=k_2=-2$ a $-2u_1+u_2+u_3$ je netriviální lineární kombinace vektorů z M, která je rovna nulovému vektoru. Proto je M lineárně závislou množinou.

Dále si definujeme množinu generátorů.

Definice 1.1.15.(množina generátorů): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a M je podmnožina prostoru V. Jestliže lineárním obalem podmnožiny M je celý prostor V, pak říkáme, že M je množinou generátorů prostoru V, respektive že množina M generuje prostor V.

Prostor V se nazývá konečně generovaný, existuje-li konečná množina, která ho generuje; v opačném případě se prostor V nazývá nekonečně generovaný.

Jestliže je M množina generátorů prostoru V, pak každá podmnožina prostoru V, která M obsahuje, je také množinou generátorů prostoru V. Každý vektorový prostor má zřejmě množinu generátorů; např. množina V generuje prostor V. [1]

Příklad 1.1.16.

Rozhodněte, zda množina M generuje daný vektorový prostor V.Pokud M generuje V, vyjádřete daný vektor v jako lineární kombinaci prvků M.

M={x^2-x+1,2x+2,2x^2+2x+5},V je prostor polynomů stupně nejvýše dva nad tělesem R, *v*=x^2+1

Řešení:

V množině jsou tři vektory, každý z nich má tři složky-koeficienty. Není-li M lineárně závislá, generuje prostor V.

Označme u_1= x^2-x+1, u_2=2x+2, u_3=2x^2+2x+5 a *w*=ax^2+bx+c libovolný vektor V. Pokud M generuje V, lze každý vektor w∈ V vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny M:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=w$$

Dosazení a úpravy

$$k_1(x^2-x+1)+k_2(2x+2)+k_3(2x^2+2x+5)= ax^2+bx+c$$

$$k_1x^2-k_1x+k_1+2k_2x+2k_2+2k_3x^2+2k_3x+5= ax^2+bx+c$$

$$(k_1+2k_3)x^2+(-k_1+2k_2+2k_3)x+k_1+2k_2+5k_3= ax^2+bx+c$$

vedou k soustavě tří rovnic o třech neznámých s parametry a,b,c

$$k_1+2k_3=a$$

$$-k_1+2k_2+2k_3=b$$

$$k_1+2k_2+5k_3=c$$

Řešením soustavy rovnic sčítací metodou nebo úpravami matice soustavy na odstupňovanou matici získáme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & 2 & 2 & b \\ 1 & 2 & 5 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & 4 & a+b \\ 0 & 4 & 7 & b+c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & 4 & a+b \\ 0 & 0 & -1 & -2a-b+c \end{array}\right)$$

(Postup úpravy na odstupňovanou matici:1. krok: 1.řádek přičten k 2. řádku, 2. řádek přičten ke 3. řádku;2. krok:(-2)násobek 2. řádku přičten ke 3. řádku)

Zjistíme, že

$$k_1+2k_3=a$$

$$2k_2+4k_3=a+b$$

$$-k_3=-2a-b+c$$

Odsud je

$$k_3=2a+b-c$$

$$k_2=-\frac{7}{2}a-\frac{3}{2}b+2c$$

$$k_1=-3a-2b+2c$$

a tedy

$$(-3a-2b+2c)(x^2-x+1)+(-\frac{7}{2}a-\frac{3}{2}b+2c)(2x+2)+(2a+b-c)(2x^2+2x+5)=ax^2+bx+c \qquad (*)$$

Pro libovolné a,b,c jsme našli řešení k_1,k_2,k_3, tj. pro libovolný vektor w jsme našli lineární kombinaci vektorů u_1,u_2,u_3. Množina M daný prostor generuje. Zbývá vyjádřit $v=x^2+0x+1$ jako lineární kombinaci prvků M. Koeficienty vektoru *v*, a=1, b=0, c=1, dosadíme do (*), tím získáme hledanou kombinaci

$$v=-u_1-\frac{3}{2}u_2+u_3.$$

Dalším pojmem je báze vektorového prostoru.

Definice 1.1.17.(báze vektorového prostoru): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Množina M je bází vektorového prostoru V jestliže:

(i) M je lineárně nezávislá množina,

(ii) M generuje prostor V. [1]

Příklad 1.1.18.

Je množina M = $\{x^3+x^2+1, x^3+x+1, x^2+x, x^2+1\} \subset R_3[x]$ báze? Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $u = x^3$ vzhledem k bázi M.

Řešení:

Označíme *si* u_1, u_2, u_3, u_4:

$u_1= x^3+x^2+1$

$u_2= x^3+x+1$

$u_3= x^2+x$

$u_4= x^2+1$

Zjistíme, zda M generuje zadaný prostor tím, že budeme dělat změny v lineárním obalu, dokud nezískáme kanonickou bázi stejného prostoru.

u_1-u_2; u_2; u_3-u_4; -u_1+u_4; u_1-u_2; u_3-u_1+u_2; u_3-u_4; u_1-u_4;.$\frac{1}{2}$; .-1

M = $[x^3+x^2+1, x^3+x+1, x^2+x, x^2+1]=[x^2-x, x^3+x+1, x-1, -x^3]=[x^2-x, 2x, x-1, x^3]= [x^2, 2x, -1, x^3]=$ $=[x^3, x^2, x, 1]$

Vidíme, že $x^3=1u_1+0u_2+0\,u_3-1u_4$. Získali jsme tedy souřadnice vektoru *u*.

$$<x^3>=(1,0,0,-1)$$

Jelikož jsme našli souřadnice vektoru *u*, množina M je báze.

Dále si definujeme dimenzi vektorového prostoru a předvedeme ji na příkladech.

Definice 1.1.19. (dimenze vektorového prostoru): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Dimenzí vektorového prostoru V, píšeme dim V, rozumíme počet prvků libovolné báze V. [1]

Příklad 1.1.20.

Najděte dimenzi prostoru $T_1[x]$ až $T_5[x]$.

Řešení:

dim $T_1[x]=2$ báze$\{1,x\}$

dim $T_2[x]=3$ báze$\{1,x,x^2\}$

dim $T_3[x]=4$ báze$\{1,x,x^2,x^3\}$

dim $T_4[x]=5$ báze$\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$

dim $T_5[x]=6$ báze$\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$

Věta 1.1.21.(o dimenzích spojení a průniků): Nechť U,V jsou podprostory nějakého vektorového prostoru nad tělesem T. Potom je

$$\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V. \ [1]$$

Poznámka: Spojením vektorových podprostorů U a V, píšeme U+V, rozumíme lineární obal jejich množinového sjednocení, tj.

$$U+V=[U\cup V]= \{u+v,\ u\in U,\ v\in V\}.$$

Příklad 1.1.22.

Určete dimenzi průniku podprostorů V_1,V_2 prostoru $Q_3[x]$, jestliže $V_1=[x^3-x^2+2x+3,\ 2x^3-2x^2+3x+4]$, $V_2=[3x^3-3x^2+5x+7,\ 4x^3-4x^2+7x+10]$

Řešení:

Nejprve zjistíme dimenze podprostorů V_1a V_2. Oba prostory jsou generovány dvěma nenulovými vektory. Pro generátory V_1 platí, že žádný není násobkem druhého ($2x^3-2x^2+3x+4$ nelze zapsat jako k (x^3-x^2+2x+3)). Jsou proto lineárně nezávislé a $\dim V_1=2$. Rovněž V_2 je generován vektory, pro které neexistuje k tak, že $3x^3-3x^2+5x+7=k(4x^3-4x^2+7x+10)$. Generátory proto tvoří bázi V_2 a $\dim V_2=2$. Zbývá stanovit dimenzi podprostoru V_1+V_2, který je generován sjednocením generátorů prostorů V_1 a V_2

$$V_1+V_2=[x^3-x^2+2x+3,\ 2x^3-2x^2+3x+4,\ 3x^3-3x^2+5x+7,\ 4x^3-4x^2+7x+10]=$$
$$=[x^3-x^2+2x+3,\ -x-2,\ -x-2,\ x+2]=$$
$$=[x^3-x^2+2x+3,\ -x-2]$$

(Postup úprav: 1, Vynásobíme polynom x^3-x^2+2x+3 (-2) a přičteme k polynomu $2x^3-2x^2+3x+4$, polynom x^3-x^2+2x+3 také vynásobíme (-3), ale přičteme k polynomu $3x^3-3x^2+5x+7$, dále polynom $2x^3-2x^2+3x+4$ vynásobíme (-2) a přičteme k polynomu $4x^3-4x^2+7x+10$. Těmito úpravami získáme: $[x^3-x^2+2x+3,\ -x-2,\ -x-2,\ x+2]$.

2, Dále vynásobíme polynom $-x-2$ (-1) a přičtu k polynomu $-x-2$. Ten samý polynom vynásobím také 1, ale přičtu ho k polynomu $x+2$. Těmito úpravami dostanu: $[x^3-x^2+2x+3,\ -x-2]$.)

Našli jsme dvouprvkovou bázi prostoru V_1+V_2 , proto je dim V_1+V_2 =2. A nyní už můžeme počítat $\dim(V_1\cap V_2)$. Ta se podle věty o dimenzích a spojení průniků spočítá takto:

$$\dim(V_1\cap V_2)\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=2+2-2=2$$

Dimenze průniku podprostorů V_1,V_2 prostoru $Q_3[x]$, jestliže $V_1=[x^3-x^2+2x+3,\ 2x^3-2x^2+3x+4]$, $V_2=[3x^3-3x^2+5x+7,\ 4x^3-4x^2+7x+10]$ je rovna číslu 2.

1.2. Vektorové prostory polynomů dvou neurčitých

Nejprve si definujeme polynomy n neurčitých.

Poznámka: Obor integrity budeme značit I.

Obor integrity I_n se skládá ze všech možných součtů konečného počtu sčítanců tvaru

$$a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in$ I, $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla.

Každý prvek z I_n, můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $m_1, m_2, \dots m_n$ jsou celá nezáporná čísla. [4]

Definice 1.2.1.: Obor integrity I_n se nazývá obor integrity polynomů *n* neurčitých nad I a značí se I[$x_1, x_2, \dots x_n$]. Jeho prvky se nazývají polynomy *n* neurčitých nad I a značí se f($x_1, x_2, \dots x_n$), g($x_1, x_2, \dots x_n$) atd.

Členem polynomu *n* neurčitých nazýváme výraz $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, stupeň členu polynomu je s = $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, stupeň polynomu *n* neurčitých je maximum ze stupňů jeho členů. [7]

Poznámka: My budeme pracovat s polynomy dvou neurčitých nad tělesem T, tj. s polynomy, které mají koeficienty v tělese T. Budeme je značit *f(x, y).*

Příklad 1.2.2.

Polynomem dvou neurčitých z oboru integrity T[*x, y*] je například polynom

$f(x, y)=2x^2+xy-y^2+3x-6$, kde členy polynomu jsou výrazy $2x^2$, xy, $-y^2$, $3x$, -6. Stupně jednotlivých členů jsou 2, 2, 2, 1, 0 a je tedy zřejmé, že stupeň polynomu f je 2, tj. jedná se o polynom druhého stupně.

Příklad 1.2.3.

Určete stupeň polynomu f(x, y): $x^5+2x^3y^2+10x^2y-2x+y^3+5$, jestliže

a,f(x, y) $\in$ T[x, y],

b, f(x, y) $\in$ T[x][y],

c, f(x, y) $\in$ T[y][x].

Řešení:

a) Stupeň polynomu f(x, y) určíme podle definice jako maximum ze stupňů jeho členů. Stupeň polynomu f(x, y) je 5.

b) Polynom f(x, y) přepíšeme vzhledem k neurčité *y*, tj. jako polynom jedné neurčité *y*, jehož koeficienty jsou polynomy jedné neurčité *x*:

$$y^3+(2x^3)y^2+(10x^2)y+(x^5-2x\ 5).$$

Stupeň polynomu f(x, y) je 3.

c) Polynom f(x, y) přepíšeme vzhledem k neurčité *x*, tj. jako polynom jedné neurčité *x*, jehož koeficienty jsou polynomy jedné neurčité *y*:

$$x^5+(2y^2)x^3+(10y)x^2-2x+(y^3+5).$$

Stupeň polynomu f(x, y) je 5.

Ukážeme si, jak se těmito polynomy operuje.

Příklad 1.2.4.

Sečtěte polynom $f=4x^2+2xy-3x+2$ a $g=2y^2-2xy+3y-4$.

Řešení:

$(4x^2+2xy-3x+2)+(2y^2-2xy+3y-4)= 4x^2+2xy-3x+2+2y^2-2xy+3y-4=$

$=4x^2+2y^2-3x+3y-2$

Vidíme, že můžeme sčítat pouze prvky, které se shodují v obou mocninách. Též vidíme, že nezáleží na tom, jestli sčítáme *f* a *g* nebo *g* a *f*. Tím je splněna první definiční vlastnost vektorového prostoru.

Příklad 1.2.5.

Vynásobte součet *f* a *g* z příkladu 1.2.4. číslem 2.

Řešení:

$2.(4x^2+2y^2-3x+3y-2)= 8x^2+4y^2-6x+6y-4$

Vynásobíme-li polynom *f* číslem 2 a též polynom *g* číslem dva získáme:

$2.(4x^2+2xy-3x+2)= 8x^2+4xy-6x+4$

$2.(2y^2-2xy+3y-4)= 4y^2-4xy+6y-8$

Sečteme-li tyto dva výsledky, získáme:$8x^2+4y^2-6x+6y-4$.

Je zřejmé, že 2.(*f*+*g*)=2.*f*+2.*g*. Je tedy splněna pátá definiční vlastnost vektorového prostoru a to, že a.(*u*+*v*)=a.*u*+a.*v*.

Příklad 1.2.6.

Najděte opačný polynom k polynomu *f* z příkladu 1.2.4.

Řešení:

Opačný polynom k polynomu *f* je –*f*.

Tedy: $-f=-4x^2-2xy+3x-2$

Nyní sečteme *f* a (-*f*):

$$(4x^2+2xy-3x+2)+(-4x^2-2xy+3x-2)=0$$

Z výpočtu je zřejmé, že součet polynomu *f* a a jeho opačného polynomu (-*f*) získáme nulový polynom. Tedy je splněna čtvrtá definiční vlastnost vektorového prostoru polynomů, že u+(-*u*)=*o*.

Obdobně by se pokračovalo pro zbylé definiční vlastnosti vektorového prostoru. A pak bychom mohli tvrdit, že polynomy dvou neurčitých stupně nejvýše 2 také tvoří vektorový prostor. Budeme ho značit $T_2[x,y]$, obsahuje všechny polynomy tvaru

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},$$

kde koeficienty a_{20} , …, a_{00} jsou prvky nějakého tělesa. Analogicky pro další prostory polynomů více neurčitých.

Poznámka: Báze prostoru $T_2[x,y]$ bude mít tvar $\{x^2, xy, y^2, x, y, 1\}$, odkud je zřejmé, že dimenze prostoru je 6. Podobně by se postupovalo pro další vektorové prostory.

Příklad 1.2.7.

Rozhodněte, zda množina $M = \{-2x^2 + 3y - 2,\ xy + y^2 - 2x + 3,\ 3xy + x + y + 8,\ x^2 - y^2 + 2x + 1,\ 2x^2 - xy + 2y,\ 2y^2 + 3x - y - 2\} \subset Q_2[x, y]$ je lineárně závislá.

Řešení:

Označíme-li prvky množiny M postupně $u_1, u_2, …, u_6$, pak podle věty 1.1.13 (ii) se pokusíme zjistit, zda existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj. zda

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 + k_5u_5 + k_6u_6 = o \qquad (*)$$

a alespoň jeden z koeficientů $k_1, k_2, …, k_6$ je různý od nuly. Po dosazení za $u_1, u_2, …, u_6$, o a dalších úpravách dostaneme:

$(-2k_1 + k_4 + 2k_5)x^2 + (k_2 + 3k_3 - k_5)xy + (k_2 - k_4 + k_6)y^2 + (-2k_2 + k_3 + 2k_4 + 3k_6)x + (3k_1 + k_3 + 2k_5 - k_6)y + (-2k_1 + 3k_2 + 8k_3 + k_4 - 2k_6) = 0x^2 + 0xy + 0y^2 + 0x + 0y + 0$

Polynom na levé straně je roven polynomu na pravé straně, když odpovídající si koeficienty jsou si rovny. To vede na soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Řešení takové soustavy by bylo poměrně zdlouhavé, můžeme si vypomoci např. výpočtem v programu Mathematica nebo v jeho online dostupné podobě WolframAlpha:

```
A={{-2,0,0,1,2,0},{0,1,3,0,-1,0},{0,1,0,-1,0,2},{0,-2,1,2,0,3},{3,0,1,0,2,-1},{-2,3,8,1,0,-2}}
```

Tím je zadána matice soustavy A.

```
Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,0,0,0,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]
```

Zápis A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,0,0,0,0} převede matici soustavy na soustavu šesti lineárních rovnic v neznámých k_1, …, k_6, které mají na pravých stranách 0. Příkazem Solve je dán pokyn k vyřešení takové soustavy vzhledem k neznámým k_1, …, k_6,.

{{k1→0,k2→0,k3→0,k4→0,k5→0,k6→0}}

Výsledek naznačuje, že neexistuje netriviální lineární kombinace polynomů množiny M, která by byla rovna nulovému polynomu, proto je M lineárně nezávislá.

Příklad 1.2.8.

Předpokládejme, že množina M z předchozího příkladu je bází prostoru $Q_2[x, y]$. Najděte souřadnice vektorů x^2, xy, y^2, x, y, 1 vzhledem k M.

Řešení:

Hledejme nejprve $\langle x^2 \rangle_M$, tj. souřadnice polynomu x^2 vzhledem k bázi M. Souřadnice jsou koeficienty lineární kombinace vektorů množiny M, která je rovna x^2,

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 + k_5u_5 + k_6u_6 = x^2$$

Úloha povede opět na řešení soustavy 6 lineárních rovnic o 6 neznámých, přičemž matice soustavy bude stejná jako v předchozím příkladu, sloupec pravých stran nebude nulový vektor, ale vektor (1, 0, 0, 0, 0, 0). Výpočet si opět usnadníme v programu Mathematica.

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={1,0,0,0,0,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

{{k1→$-\frac{22}{3}$,,k2→$-\frac{67}{3}$,,k3→$\frac{28}{3}$,k4→-25,k5→$\frac{17}{3}$,k6→$-\frac{4}{3}$}}

Je tedy $\langle x^2 \rangle_M$ = (-22/3; -67/3; 28/3; -25; 17/3, - 4/3)

Podobně můžeme postupovat při hledání souřadnic dalších vektorů. Odpovídající sloupce pravých stran budou po řadě vektory (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1). Uveďme výpočty, které bychom provedli v Mathematice:

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,1,0,0,0,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

{{k1→-16,k2→-50,k3→21,k4→-56,k5→12,k6→-3}}

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,1,0,0,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

{{k1→$\frac{5}{2}$,k2→-8,k3→$-\frac{13}{4}$,k4→$\frac{17}{2}$,k5→$\frac{7}{4}$,k6→$\frac{3}{4}$}}

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,0,1,0,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

$\{\{k1 \to 2, k2 \to 6, k3 \to -\frac{5}{2}, k4 \to 7, k5 \to -\frac{3}{2}, k6 \to \frac{1}{2}\}\}$

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,0,0,1,0},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

$\{\{k1 \to -\frac{2}{3}, k2 \to -\frac{8}{3}, k3 \to \frac{7}{6}, k4 \to -3, k5 \to \frac{5}{6}, k6 \to -\frac{1}{6}\}\}$

Solve[A.{k1,k2,k3,k4,k5,k6}=={0,0,0,0,0,1},{k1,k2,k3,k4,k5,k6}]

$\{\{k1 \to \frac{35}{6}, k2 \to \frac{55}{3}, k3 \to -\frac{91}{12}, k4 \to \frac{41}{2}, k5 \to -\frac{53}{12}, k6 \to \frac{13}{12}\}\}$

Odtud zřejmě

$\langle xy \rangle_M$ = (-16; -50; 21; -56; 12; -3) $\langle y^2 \rangle_M$ = (5/2; 8; -13/4; 17/2; -7/4; 3/4)

$\langle x \rangle_M$ = (2; 6; -5/2; 7; -3/2; 1/2) $\langle y \rangle_M$ = (-2/3; -8/3; 7/6; -3; 5/6; -1/6)

$\langle 1 \rangle_M$ = (35/6; 55/3; -91/12; 41/2; -53/12; 13/12)

2. Lineární zobrazení vektorových prostorů a podprostorů

V této kapitole si nejprve definujeme, co je to lineární zobrazení a dále také definujeme pojmy, které se lineárního zobrazení týkají.

2.1. Lineární zobrazení

Definice 2.1.1.(lineární zobrazení): Nechť V a W jsou vektorové prostory nad tělesem T. Zobrazení f prostoru V do prostoru W se nazývá lineární zobrazení, neboli homomorfismus, jestliže platí:

(i) $\forall u,v \in V \quad f(u+v)=f(u)+f(v)$,

(ii) $\forall u \in V \quad \forall a \in T \quad f(au)=a.f(u)$.

Jestliže f je homomorfismus prostoru V do prostoru W, potom se množina

$$\mathrm{Ker}\, f = \{u \in U;\ f(u)=o\}$$

nazývá jádro homomorfismu f a množina

$$\mathrm{Im}\, f = \{v \in V;\ \exists\ u \in U\ f(u)=v\}$$

se nazývá obraz homomorfismu f. [1]

Příklad 2.1.2.

Rozhodněte, zda je dané zobrazení homomorfismus.

$f{:}U\text{->}V$, $f(\alpha x+\beta)=(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha+2\beta)$, $U=(Z_3)_1[x]$, $V=(Z_3)_2[x]$

Řešení:

Nejprve ověříme, zda je splněna první podmínka a to, že $f(u+v)=f(u)+f(v)$. $f(u+v)$ si označíme písmenem L (jako levá strana). $f(u)+f(v)$ si označíme písmenem P (pravá strana)

(i) $u=(\alpha_1x+\beta_1)$

$v=(\alpha_2x+\beta_2)$

$f(u+v) =(2(\alpha_1+\alpha_2)+ \beta_1+\beta_2)x^2+(\alpha_1+\alpha_2+ \beta_1+\beta_2)x+ \alpha_1+\alpha_2+2(\beta_1+\beta_2)=L$

$P=f(u)+f(v)=((2\alpha_1+\beta_1)x^2+(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1+2\beta_1)+((2\alpha_2+\beta_2)x^2+(\alpha_2+\beta_2)x+\alpha_2+2\beta_2)=((2(\alpha_1+\alpha_2)+\beta_1+\beta_2)x^2+(\alpha_1+\beta_1+ \alpha_2+\beta_2)x+ \alpha_1+ \alpha_2+2(\beta_1+\beta_2)$

Protože se L a P rovnají, je tím ukázáno, že zadané zobrazení splňuje první definiční vlastnost lineárního zobrazení.

Dále ověříme, zda zadané zobrazení splňuje druhou definiční vlastnost lineárního zobrazení a to, že f(a*u*)=a.f(*u*). Budeme postupovat obdobně jako u první podmínky. Písmenem L označíme f(au) a písmenem P označíme a.f(u).

(ii) $u=(\alpha_1x+\beta_1)$

$L=((2a\alpha_1+a\beta_1)x^2+(a\alpha_1+a\beta_1)x+a\alpha_1+2a\beta_1)$

$P= a((2\alpha_1+\beta_1)x^2+(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1+2\beta_1)=(2a\alpha_1+a\beta_1)x^2+(a\alpha_1+a\beta_1)x+a\alpha_1+2a\beta_1)$

P a L se rovnají. Je tedy splněna i druhá definiční vlastnost lineárního zobrazení.

Protože jsou splněny obě dvě podmínky, je dané zobrazení homomorfismus.

Jelikož v příkladu 2.1.5. budeme k jádru a obrazu hledat ještě hodnost a defekt homomorfismu, musíme si je nejprve definovat.

Definice 2.1.3.(hodnost homomorfismu): Nechť f je lineární zobrazení (U, . ,+) do (V, . ,+) nad tělesem T. Hodností homomorfismu f rozumíme dimenzi obrazu homomorfismu f

$$r(f)=\dim(\mathrm{Im}\, f).$$ [1]

Definice 2.1.4.(defekt homomorfismu): Nechť f je lineární zobrazení (U, . ,+) do (V, . ,+) nad tělesem T. Defektem homomorfismu f rozumíme dimenzi jádra homomorfismu f

$$d(f)=\dim(\mathrm{Ker}\, f).$$ [1]

Příklad 2.1.5.

Najděte jádro, obraz, hodnost a defekt homomorfismu.

$f:R^2\to R_2[x]$

$f(a,b)=(2a+b)x^2+(a-3b)x-2a-b$

Řešení:

Jádro homomorfismu je množina všech vektorů prostoru, z něhož zobrazuji, zde R^2, které se zobrazí na nulový vektor druhého prostoru, zde na nulový polynom.

Ker f: $f(a,b)=o$

$f(a,b)=(2a+b)x^2+(a-3b)x-2a-b$

$(2a+b)x^2+(a-3b)x-2a-b=0x^2+0x+0$

$2a+b=0 \qquad 2.3b+b=0 \to b=0$

$a-3b=0 \qquad \to a=3b$

$-2a-b=0 \qquad a=0$

Ker f=$\{(0,0)\}=\{o\}$

Poznámka: Vyjde-li nulový vektorový prostor jako jádro lineárního zobrazení, pak jde podle věty 10.15. na straně 112 v [1] o monomorfismus neboli prostý homomorfismus, který zobrazuje dva různé vektory na dva různé vektory.

Obraz počítáme podle věty 10.4., vlastnosti (vi) na str 103 v [1].

Im f: Množina generátorů R^2 je například $\{(1,0),(0,1)\}$

Im f=$[f(1,0),f(0,1)]=[2x^2+x-2,\ x^2-3x-1]$

Hodnost-r(f): r(f)=dim (Im f)=2

Defekt-d(f): d(f)=dim (Ker f)=0

Příklad 2.1.6

Najděte jádro, obraz, hodnost a defekt homomorfismu.

$f: R_2[x, y] \to R_1[x, y]$

$f(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00})=(-2a_{20}+a_{10}+a_{00})x+(3a_{11}-a_{01})y+a_{20}-2a_{00}$

Nejprve budeme počítat jádro.

$$\begin{array}{llllll} & -2a_{20} & +a_{10} & & +a_{00} & =0 \\ 3a_{11} & & & -a_{01} & & =0 \\ \hline a_{20} & & & & -2a_{00} & =0 \end{array}$$

$a_{20}=a_{00}$

$a_{01}=3a_{11}$

$a_{10}=2a_{20}-a_{10}$

Jádro tvoří všechny polynomy z $R_2[x, y]$, které mají tvar

$2a_{00}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+(2a_{02}-a_{00})x+3a_{11}y+a_{00}$, a_{00}, a_{11}, $a_{02}\in R$.

Lze ho zapsat také ve tvaru:

Ker*f*$=[2x^2-x+1, xy+3y, y^2+2x]$

Defektd(f)=dim (Ker f)=3

Výpočet obrazu:

Im*f*$=[f(x^2), f(xy), f(y^2), f(x), f(y), f(1)]= [1, 3y, -2x, x-y, x-2]= [1, x, -y, x-2]= [1, x, -y]=$

$=[1, x, y]= R_1[x, y]$

(provedené úpravy: 1. krok:3.(-y)+3y, 2.x+(-2x)

2. krok:2.1+(x-2), (-1).x+(x-2)

3. krok:(-1).(-y))

Hodnost:r(f)=dim (Im f)=3

2.2.Dělení polynomů

Zde předvedeme, jak funguje dělení dvou polynomů. A dále si ukážeme, že říkladem homomorfismu vektorových prostorů polynomů je i zobrazení φ, které polynomu jedné neurčité přiřazuje zbytek po dělení daným polynomem.

Poznámka (dělení polynomů): Máme-li dělit dva polynomy f a g, nejdříve musíme zkontrolovat, zda jsou oba polynomy uspořádány sestupně podle mocniny x. Vydělíme první člen polynomu f prvním členem polynomu g, výsledkem je φ_1. Polynom φ_1 vynásobíme polynomem g a výsledný polynom $g\varphi_1$ odečteme od polynomu f. Polynom $f-g\varphi_1$ označíme jako f_1. Je-li stupeň polynomu f_1 větší nebo roven stupni polynomu g , pokračujeme v dělení. První člen polynomu f_1 dělíme opět prvním členem polynomu g a postupujeme analogicky jako v předchozí části. [6]

Příklad 2.2.1. (polynom jedné neurčité)

Vydělte polynomy f a g: $f=2x^4-3x^3+x^2-5x+2$

$g=x^2-3x+2$

Řešení:

$$\begin{array}{ll}
 & \quad\; f \qquad\qquad\qquad g \qquad \varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3 \\
 & (2x^4-3x^3+x^2-5x+2):(x^2-3x+2)=2x^2+3x+6 \\
g\,\varphi_1: & \underline{2x^4-6x^3+4x^2} \\
f_1=f-g\,\varphi_1: & \quad 3x^3-3x^2-5x+2 \\
g\,\varphi_2: & \quad \underline{3x^3-9x^2+6x} \\
f_2=f-g,f-g,\ \varphi_1-g\,\varphi_2: & \qquad 6x^2-11x+2 \\
g\,\varphi_3: & \qquad \underline{6x^2-18x+12} \\
r: & \qquad\qquad 7x-10
\end{array}$$

Výsledkem dělení je tedy částečný podíl $2x^2+3x+6$ a zbytek $r(x)= 7x-10$

Poznámka:Příkladem homomorfismu vektorových prostorů polynomů je i zobrazení φ, které polynomu jedné neurčité přiřazuje zbytek po dělení daným polynomem. Ukažme to nejprve na příkladě.

Příklad 2.2.2.

Jsou dány polynomy $f_1 = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1$, $f_2 =x^3 - 4x^2 + 3x$, $g = x^2 + x + 2$. Vydělte polynomy dle zadání: (a) $f_1 : g$, (b) $f_2 : g$, (c) $(f_1 + f_2) : g$, (d) $(-6.f_1) : g$

Řešení:

(a) $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1):(x^2 + x + 2)=x^3 - x^2 - 4x + 8$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^5+x^4+2x^3} \\
\quad -x^4-5x^3+2x^2+1 \\
\quad \underline{-x^4-x^3-2x^2} \\
\qquad -4x^3+4x^2+1 \\
\qquad \underline{-4x^3-4x^2-8x} \\
\qquad\qquad 8x^2+8x+1
\end{array}$$

$\underline{8x^2+8x+16}$

15

Můžeme tedy psát, že: $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1) = (x^2 + x + 2).(x^3-x^2-4x+8)+15$

(b) $(x^3 - 4x^2 + 3x):(x^2 + x + 2)=x - 5$

$\underline{x^3+x^2+2x}$

$-5x^2+x$

$\underline{-5x^2-5x-10}$

$6x-10$

Můžeme tedy psát, že: $(x^3 - 4x^2 + 3x)=(x^2 + x + 2).(x-5)+6x-10$

(c) $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1)+(x^3 - 4x^2 + 3x)=x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$(x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1):(x^2 + x + 2)=x^3 - x^2 - 3x + 3$

$\underline{x^5+x^4+2x^3}$

$-x^4-4x^3-2x^2+3x+1$

$\underline{-x^4-x^3-2x^2}$

$-3x^3+3x+1$

$\underline{-3x^3-3x^2-6x}$

$3x^2+9x+1$

$\underline{3x^2+3x+6}$

$6x-5$

Můžeme tedy psát, že: $(x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1)=(x^2 + x + 2).(x^3 - x^2 - 3x + 3)+6x-5$

(d) $-6.(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1)= - 6x^5 + 18x^3 - 12x^2 - 6$

$(- 6x^5 + 18x^3 - 12x^2 - 6):(x^2 + x + 2)= - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 48$

$\underline{-6x^5-6x^4-12x^3}$

$6x^4+30x^3-12x^2-6$

$\underline{6x^4+6x^3+12x^2}$

$24x^3-24x^2-6$

$$\underline{24x^3+24x^2+48x}$$
$$-48x^2-48x-6$$
$$\underline{-48x^2-48x-96}$$
$$90$$

Můžeme tedy psát, že: $(-6x^5 + 18x^3 - 12x^2 - 6)=(x^2 + x + 2).(-6x^3 + 6x^2 + 24x - 48)+90$

Všimněme si, že součet zbytků získaných dělením v (a) a (b), tj. -15 + (10 + 6x), je roven zbytku při dělení v (c), tj. -5 + 6x. Rovněž platí, že -6-násobek zbytku po dělení f_1 :g, což je -6.(-15), je roven zbytku po dělení $-6.f_1 : g$.

Lze usoudit, že zobrazení φ, v němž je polynomu f přiřazen zbytek r po dělení daným polynomem g, je homomorfismus, protože jsme na příkladu ukázali, že součet obrazů $\varphi(f_1) + \varphi(f_2) = r_1 + r_2$ je roven obrazu součtu, $\varphi(f_1 + f_2)$, podobně násobek obrazu $a.\varphi(f_1) = a.r_1$ je roven obrazu násobku, $\varphi(af_1)$.

Pomocí hlavní věty o dělení polynomů dokážeme větu číslo 2.2.4, tj. že popsané zobrazení φ je homomorfismus i v obecném případě.

Věta 2.2.3.(hlavní věta o dělení polynomů):Nechť jsou dány polynomy $f(x)\neq 0, g(x)$ z oboru integrity $(T(x),+,.)$, kde platí $st[g(x)]\geq 1$, potom existují polynomy Q(x), R(x) takové, že platí

$$f(x)=Q(x).g(x)+R(x), \text{ kde } R(x)=0 \vee st[R(x)]<st[g(x)].$$

Tyto polynomy jsou jednoznačně určené. [5]

Věta 2.2.4.: Nechť $T_n[x]$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n nad komutativním tělesem T a g je nenulový polynom stupně m.

Zobrazení φ: $T_n[x] \rightarrow T_{m-1}[x]$, v němž je polynomu f přiřazen zbytek r po dělení polynomem g, je homomorfismus.

Důkaz: Předpokládejme, že f_1, f_2 jsou libovolné prvky $T_n[x]$, a je libovolný prvek tělesa T a g je daný polynom stupně m.

Podle hlavní věty o dělení polynomů platí

$$f_1 = q_1.g + r_1$$

$$f_2 = q_2.g + r_2$$

kde neúplné podíly q_1, q_2 a zbytky r_1, r_2 jsou určeny jednoznačně a stupně polynomů r_1, r_2 jsou menší než m. Pro součet polynomů f_1, f_2 platí $f_1 + f_2 = (q_1.g + r_1) + (q_2.g + r_2) = (q_1 + q_2).g + (r_1 + r_2)$. Je tedy $(r_1 + r_2)$ jednoznačně určený zbytek po dělení polynomu $f_1 + f_2$ polynomem g.

V popsaném zobrazení platí $\varphi(f_1) = r_1$, $\varphi(f_2) = r_2$, $\varphi(f_1 + f_2) = r_1 + r_2$, odkud je rovnost $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ zřejmá.

Podobně pro a-násobek polynomu f_1 platí $af_1 = a(q_1.g + r_1) = (aq_1)g + ar_1$, odkud ar_1 je zbytek po dělení af_1:g, a tedy platí $\varphi(af_1) = a\varphi(f_1)$.

2.3. Matice homomorfismu, skládání homomorfismů

Zde si definujeme matici homomorfismu. Ukážeme, jak funguje skládání homomorfismů. A také definujeme další pojmy potřebné k výpočtům.

Definice 2.3.1.(matice homomorfismu): Nechť V a W jsou vektorové prostory dimenzí m a n nad tělesem T a f je homomorfismus prostoru V do prostoru W. Nechť M={v_1,…..,v_m} je báze prostoru V a N báze prostoru W. Maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N budeme rozumět matici typu n x m nad tělesem T, ve které na místě *ij* stojí *i*-tá souřadnice vektoru f(v_j) vzhledem k bázi N. [1]

Věta 2.3.2.(matice homomorfismu): Nechť V a W jsou vektorové prostory dimenzí m a n nad tělesem T a M, N báze těchto prostorů. Nechť f je homomorfismus prostoru V do prostoru W a A matice typu n x m nad tělesem T. Matice A je maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N právě tehdy, když pro každý vektor $v \in V$ je

$$\langle f(v)\rangle_N^T = A\langle v\rangle_M^T.$$ [1]

Věta 2.3.3.(skládání homomorfismů): Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem T a K, M,N po řadě jejich báze, nechť f je homomorfismus prostoru V do prostoru W a nechť g je homomorfismus prostoru U do prostoru V. Jestliže A je maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N a B maticí homomorfismu g vzhledem k bázím K, M, potom je součin AB maticí homomorfismu fg vzhledem k bázím K, N. [1]

Příklad 2.3.4.(Skládání homomorfismů, matice homomorfismu)

Jsou dány homomorfismy (vzhledem k uspořádaným kanonickým bázím příslušných prostorů- $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\{1, x\}$)

$f: Q_3[x] \to Q^{2x2}$ $\quad\quad$ $f(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{pmatrix} a+2c & 2b-d \\ -a+d & b+3c \end{pmatrix}$

$g: Q^{2x2} \to Q_1[x]$ $\quad\quad$ $g\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=(\alpha+2\beta-3\gamma)x+(-\beta+2\gamma+\delta)$

Najděte předpis pro složený homomorfismus gf a matice homomorfismů f, g, gf (vzhledem ke kanonickým bázím příslušných prostorů).

Řešení:

Složený homomorfismus je dán předpisem:

$$g[f(ax^3+bx^2+cx+d)]=g\begin{pmatrix} a+2c & 2b-d \\ -a+d & b+3c \end{pmatrix}$$

$=[a+2c+2(2b-d)-3(-a+d)]x+[-(2b-d)+2(-a+d)+b+3c]=(4a+4b+2c-5d)x+(-2a-b+3c+3d)$

Označme M, N, P postupné kanonické báze prostorů $Q_3[x]$, Q^{2x2}, $Q_1[x]$ při stejném uspořádání vektorů jako v zadání.

Pro sestavení matice A homomorfismu F je třeba znát souřadnice obrazů prvků M vzhledem k N.

$f(1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\quad$ $\langle f(1)\rangle_N=\langle 0.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle_N=(0,-1,1,0)$

$f(x)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\quad$ $\langle f(x)\rangle_N=\langle 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle_N=(2,0,0,3)$

$f(x^2)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ => $\langle f(x^2)\rangle_N=\langle 0.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rangle_N=(0,2,0,1)$

$f(x^3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ => $\langle f(x^3)\rangle_N=\langle 1.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rangle_N=(1,0,-1,0)$

Matice A homomorfismu f má tvar:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

A získali jsme ji tak, že jsme zapsali získané souřadnice do sloupce.

Najdeme též obrazy vektorů báze N vzhledem k bázi P:

$g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1x+0$ => $\langle 1x+0\rangle_P=(0,1)$

$g\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2x-1$ => $\langle 2x-1\rangle_P=(-1,2)$

$g\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-3x+2$ => $\langle -3x+2\rangle_P=(2,-3)$

$g\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0x+1$ => $\langle 0x+1\rangle_P=(1,0)$

Matice B homomorfismu g má tvar:

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Sloupce matice C homomorfismu gf tvoří uspořádaná dvojice:

$$\langle f(1)\rangle_P=\langle -5x+3\rangle_P=(3,-5)$$

$$\langle f(x)\rangle_P=\langle 2x+3\rangle_P=(3,2)$$

$$\langle f(x^2)\rangle_P=\langle 4x-1\rangle_P=(-1,-4)$$

$$\langle f(x^3)\rangle_P=\langle 4x-2\rangle_P=(-2,4),$$

je tedy

$$C=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1 & -2\\ -5 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

Definice 2.3.5.(matice přechodu): Nechť V je vektorový prostor a M, N jeho dvě báze. Maticí přechodu od báze M k bázi N budeme rozumět matici identického homomorfismu prostoru V vzhledem k bázím M, N. [1]

Příklad 2.3.6.

Najděte matici přechodu od báze N k bázi M.

M={$-2x^2 + 3y - 2$, $xy + y^2 - 2x + 3$, $3xy + x + y + 8$, $x^2 - y^2 + 2x + 1$, $2x^2 - xy + 2y$, $2y^2 + 3x -$ $-y - 2$}

N={x^2, xy, y^2, x, y, 1}

Řešení:

Najdeme souřadnice všech členů N. Využijeme identitu.

$f(x^2)=1.(x^2)=x^2$

$\langle x^2\rangle_M$ = (-22/3; -67/3; 28/3; -25; 17/3, - 4/3) viz příklad 1.2.8.

$f(xy)=1.(xy)=xy$

$\langle xy\rangle_M$ = (-16; -50; 21; -56; 12; -3) viz příklad 1.2.8.

$f(y^2)=1.(y^2)=y^2$

$\langle y^2\rangle_M$ = (5/2; 8; -13/4; 17/2; -7/4; 3/4) viz příklad 1.2.8.

$f(x)=1.x=x$

$\langle x\rangle_M$ = (2; 6; -5/2; 7; -3/2; 1/2) viz příklad 1.2.8.

$f(y)=1.y=y$

$\langle y\rangle_M$ = (-2/3; -8/3; 7/6; -3; 5/6; -1/6) viz příklad 1.2.8.

$f(1)=1.1=1$

$\langle 1\rangle_M$ = (35/6; 55/3; -91/12; 41/2; -53/12; 13/12) viz příklad 1.2.8.

Protože jsme vypočítali souřadnice bázových vektorů množiny N vzhledem k bázi M je matice,

$$\begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & -16 & \frac{5}{2} & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{35}{6} \\ -\frac{67}{3} & -50 & 8 & 6 & -\frac{8}{3} & \frac{55}{3} \\ \frac{28}{3} & 21 & -\frac{13}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{6} & -\frac{91}{12} \\ -25 & -56 & \frac{17}{2} & 7 & -3 & \frac{41}{2} \\ \frac{17}{3} & 12 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{53}{12} \\ -\frac{4}{3} & -3 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

sestavená ze souřadnic, maticí přechodu od báze N k bázi M.

Příklad 2.3.7.(matice homomorfismu vhledem ke změněným bázím prostorů)

Homomorfismus f:R_2[x] ->R^2 je dán maticí

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi M={x^2+x, -x+2, 2x^2+2} prostoru R_2[x] a kanonické bázi prostoru R^2. Určete matici homomorfismu f vzhledem ke kanonickým bázím těchto prostorů.

Řešení:

Aby byl dán homomorfismus f maticí vzhledem ke kanonické bázi prostoru R_2[x], tj. vzhledem k K={1,x,x^2} a kanonické bázi prostoru R^2, tj. N={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1}, stačí najít matici přechodu B^{-1} od kanonické báze K k bázi M. To je matice identického homomorfismu f_1: R_2[x]-> R_2[x] vzhledem ke K a M. Matice AB^{-1} je maticí složeného homomorfismu ff_1, který určuje daný homomorfismus vzhledem ke kanonickým bázím.

B- matice přechodu od M ke K, tj. matice f_1

$$\langle f_1(x^2+x)\rangle_K=\langle x^2+x\rangle_K=(0,1,1), \text{ protože } x^2+x=0.1+1.x+1.x^2$$

$$\langle f_1(-x+2)\rangle_K=\langle -x+2\rangle_K=(2,-1,0), \text{ protože } -x+2=2.1-1.x+0.x^2$$

$$\langle f_1(2x^2+2)\rangle_K=\langle 2x^2+2\rangle_K=(2,0,2), \text{ protože } 2x^2+2=2.1+0.x+2.x^2$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Součin AB^{-1} lze vypočítat různými způsoby. Lze nejprve najít inverzní matici k matici B a pak touto maticí násobit matici A zleva, nebo lze výpočet součinu provést najednou pomocí sloupcových úprav. My použijeme sloupcové úpravy.

Výpočet součinu AB^{-1}:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ \hline -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ \hline -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ \hline -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hline 3 & -3 & 2\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline \frac{3}{2} & 3 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

(Úpravy matice: 1. : prohození prvního a třetího sloupce

2. : vynásobení prvního sloupce (-1) a přičtení ke druhému sloupci

3. : vynásobení druhého sloupce 1 a přičtení ke třetímu sloupci

4. : vynásobení třetího sloupce 2 a přičtení k prvnímu sloupci, vynásobení třetího sloupce (-2) a přičtení ke druhému sloupci

5. : vynásobení prvního sloupce $\frac{1}{2}$, vynásobení druhého sloupce (-1) a vynásobení třetího sloupce (-1))

Matice

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 3 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

je maticí homomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi prostoru $R_2[x]$ a kanonické bázi prostoru R^2.

3. Vektorové prostory polynomů se skalárním součinem

V této kapitole se budeme věnovat skalárnímu součinu polynomů a dalším pojmům, které se skalárního součinu týkají.

Nejprve definujeme skalární součin.

Definice 3.1.(skalární součin, unitární prostor): Nechť V je vektorový prostor nad tělesem R. Skalárním součinem na prostoru V nazveme každé zobrazení f množiny V x V do tělesa R, které má následující vlastnosti:

(i)	$\forall\, u, v \in V$		$f(u,v)=f(v,u)$,
(ii)	$\forall\, u, v, w \in V$		$f(u+v, w)=f(u, w)+f(v, w)$,
(iii)	$\forall\, u, v \in V$	$\forall\, \lambda \in R$	$f(\lambda u, v)=\lambda.f(u, v)$,
(iv)	$\forall\, u \in V$,	$u \neq o$	$f(u, u)>0$.

Prostorem se skalárním součinem, respektive unitárním prostorem, budeme rozumět každý vektorový prostor s nějakým pevně zvoleným skalárním součinem. [1]

Skalární součin dvou polynomů můžeme definovat buď takto:

$$f(u,v) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

Tento skalární součin budeme nazývat standardní skalární součin.

Například v prostoru $R_2[x]$ $u=a_2x^2+a_1x+a_0$

$v=b_2x^2+b_1x+b_0$

$f(u, v)=a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$.

Anebo můžeme skalární součin dvou polynomů definovat pomocí integrálu, neboť lze polynomy považovat za speciální případy funkcí:

$$f(u,v) = \int_a^b u.v\, dx,$$

kde jsou meze rovny buď a=0 a b=1, nebo a=-1 a b=1.

Tím je definován skalární součin i na prostoru všech polynomů stupně nejvýše *n*.

Nyní dokážeme na příkladu, že jsou splněny všechny definiční vlastnosti skalárního součinu.

Příklad 3.2.

Dokažte, že pro $R_2[x]$ platí všechny definiční vlastnosti.

Řešení:

K řešení nejprve využijeme standardní skalární součin.

(i) Máme dokázat, že skalární součin f(*u, v*) je roven skalárnímu součinu f(*v, u*).

$u=a_2x^2+a_1x+a_0$

$v=b_2x^2+b_1x+b_0$

$$f(u, v)=a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$$

$$f(v, u)=b_2a_2+b_1a_1+b_0a_0$$

Koeficienty polynomů *u* i *v* jsou reálná čísla, proto nezáleží, jestli násobíme $a_i.b_i$ nebo $b_i.a_i$, výsledek bude stejný. Proto je f(*u,v*)=f(*v,u*).

(ii) Máme dokázat, že f(*u*+v, *w*) je rovno f(*u, w*)+f(*v, w*).

$u=a_2x^2+a_1x+a_0$

$v=b_2x^2+b_1x+b_0$

$w=c_2x^2+c_1x+c_0$

$$f(u+v, w)=(a_2+b_2)c_2 + (a_1+b_1)c_1 + (a_0+b_0)c_0=a_2c_2 + b_2c_2 + a_1c_1 + b_1c_1 + a_0c_0 + b_0c_0 =$$

$$= a_2c_2 + a_1c_1 + a_0c_0 + b_2c_2 + b_1c_1 + b_0c_0$$

$$f(u, w)+f(v, w)=(a_2c_2 + a_1c_1 + a_0c_0) + (b_2c_2 + b_1c_1 + b_0c_0)=$$

$$=a_2c_2 + a_1c_1 + a_0c_0 + b_2c_2 + + b_1c_1 + b_0c_0$$

Z výpočtu je vidět, že f(*u+v, w*)= f(*u, w*)+f(*v, w*).

(iii) Máme dokázat, že f(*λu, v*) je roven λ.f(*u, v*).

$u=a_2x^2+a_1x+a_0$

$v=b_2x^2+b_1x+b_0$

$f(\lambda u, v)=\lambda a_2b_2 + \lambda a_1b_1 + \lambda a_0b_0$

Když vytkneme λ získáme: $\lambda(a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0)$

$\lambda.f(u, v)=\lambda(a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0)$

Výsledky pro $f(\lambda u, v)$ a $\lambda.f(u, v)$ jsou shodné, a proto je splněna i třetí definiční vlastnost.

(iv) Máme dokázat, že skalární součin $f(u, u)>0$.

$u=a_2x^2+a_1x+a_0$

$f(u, u)=a_2a_2 + a_1a_1 + a_0a_0 = a_2^2+ a_1^2 + a_0^2$

Násobíme-li dvě stejná reálná čísla, výsledek je vždy nezáporný. Protože je *u* nenulový vektor, je aspoň jeden z koeficientů různý od nuly, a tedy $a_2^2+ a_1^2 + a_0^2>0$. A proto je splněna i čtvrtá definiční vlastnost.

Dokázali jsme, že jsou splněny všechny čtyři definiční vlastnosti pro standardní skalární součin.

Nyní využijeme skalární součin definovaný pomocí integrálu.

(i) Máme dokázat, že skalární součin $f(u, v)$ je roven skalárnímu součinu $f(v, u)$.

Poznámka: Abychom se nepletli ve značení, skalární součin si můžeme označit i takto:

$$\varphi=(u, v)$$

$u=f(x)$

$v=g(x)$

$$\phi(u,v) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

$$\phi(v,u) = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx$$

Násobení polynomů je komutativní, proto je integrál ze součinu stejný nezávisle na tom, jestli násobíme f(x) s g(x) nebo g(x) s f(x). A proto můžeme psát, že $f(u, v)=f(v, u)$.

(ii) Máme dokázat, že f(*u+v, w*) je rovno f(*u, w*)+f(*v, w*).

u=f(x)

v=g(x)

w=h(x)

$$\phi(u+v,w) = \int_{-1}^{1} [f(x)+g(x)]h(x)dx = \int_{-1}^{1} [f(x)h(x)+g(x)h(x)]\,dx$$

$$\phi(u,w)+\phi(v,w) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{f(x)h(x)}dx + \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [f(x)h(x)+g(x)h(x)]\,dx$$

Využili jsme znalostí z matematické analýzy, vidíme, že f(u+v, w)=f(u, w)+f(v, w).

(iii) Máme dokázat, že f(λ*u, v*) je roven λ.f(*u, v*).

u=f(x)

v=g(x)

$$\phi(\lambda u,v) = \int_{-1}^{1} \lambda f(x)g(x)dx = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

$$\lambda\phi(u,v) = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Je patrné, že f(λ*u, v*)=λ.f(*u, v*).

(iv) Máme dokázat, že skalární součin f(*u, u*)>0.

u=f(x)

$$\phi(u,u) = \int_{-1}^{1} f(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

f^2(x) dává v případě *u* různého od nulového polynomu hodnoty větší než 0 pro libovolné x∈R. Hodnota určitého integrálu bude proto kladná.

Dokázali jsme, že jsou splněny všechny čtyři definiční vlastnosti pro standardní skalární součin.

Věta 3.3.(vlastnosti skalárního součinu): Nechť V je unitární prostor. Potom platí:

(i) $\forall\, u \in V$ $f(u,o)=0$,

(ii) $\forall\, u, v, w \in V$ $f(u,v+w)=f(u, v)+f(u, w)$,

(iii) $\forall\, u, v \in V$ $\forall\, \lambda \in R$ $f(u, \lambda v)=\lambda.f(u, v)$,

(iv) $\forall u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m \in V$ $\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m \in R$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k u_k, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k b_j\, f(u_k, v_j). \text{ [1]}$$

Nyní si ukážeme na konkrétním příkladu platnost čtvrté vlastnosti skalárního součinu, protože platnost ostatních se snadno nahlédne.

Příklad 3.4.

Ukažte, že je splněna čtvrtá vlastnost skalárního součinu, která se týká součinu lineárních kombinací polynomů, v jednoduchém případě, kdy:

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$; $f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=-3$, $f_3(x)=x^2-1$

$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$; $g_1(x)=-x^2+x$, $g_2(x)=2x+1$

Řešení:

$f(x)=x^2+x-3$

$g(x)=-x^2+3x+1$

Nejprve vypočteme skalární součin polynomů f(x) a g(x) podle levé strany rovnosti z (iv). Použijeme skalární součin definovaný integrálem.

$$L = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 3)(-\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 1)$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 8x - 3)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 4x^2 - 3x\right]_{-1}^{1} =$$

$$\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{7}{3} - 4 - 3\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{7}{3} - 4 + 3\right) = -\frac{26}{15}$$

Nyní vypočteme skalární součin daných polynomů podle pravé strany rovnosti z bodu (iv).

$$P = \int_{-1}^{1} f_1(x)g_1(x)dx \; + \int_{-1}^{1} f_1(x)g_2(x)dx + \int_{-1}^{1} f_2(x)g_1(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f_2(x)g_2(x)dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} f_3(x)g_1(x)dx + \int_{-1}^{1} f_3(x)g_2(x) = \int_{-1}^{1} (-x^3 + x)dx + \int_{-1}^{1} (2x^2 + 3x + 1)dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3x)dx + \int_{-1}^{1} (-6x - 3)dx + \int_{-1}^{1} (-x^4 + x^3 + x^2 - x)dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} (2x^3 + x^2 - 2x - 1)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} +$$

$$+ \left[x^3 - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + [-3x^2 - 3x]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} +$$

$$+ \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) +$$

$$+1 - \frac{3}{2} - \left(-1 - \frac{3}{2}\right) + (-3 - 3) - (-3 + 3) + -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} -$$

$$-\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 + 1\right) = -\frac{26}{15}$$

Pravá strana se rovná levé. Je tedy splněna čtvrtá vlastnost skalárního součinu.

Definice 3.5.(ortogonální vektory): Nechť V je unitární prostor. Řekneme, že vektory *u, v* $\in$ V jsou navzájem ortogonální (resp. kolmé), jestliže je jejich skalární součin roven nule. [1]

Příklad 3.6.

Je dán vektor *u*=x^3+2x^2+1. Najděte v $R_3[x]$ ortogonální vektor *v* k vektoru *u*.

Řešení:

Vektor *v* neznáme, ale budeme předpokládat, že *v*=$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

(a) využijeme standardní skalární součin

u.v=$1a_3+2a_2-a_1+1a_0$

Podle definice 3.5. jsou dva vektory ortogonální, jestliže je jejich skalární součin roven nule.

$a_3++2a_2-a_1+a_0=0$

Jedním z řešení rovnice je např. čtveřice $a_3=1$, $a_2=0$, $a_1=1$, $a_0=0$. Jedním z ortogonálních vektorů je například *v*=x^3+x.

(b) využijeme skalární součin definovaný integrálem

$$\int_{-1}^{1} u.v\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3+2x^2-x+1)(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} [a_3x^6+(a_2+2a_3)x^5+(a_1+2a_2-a_3)x^4+(a_0+2a_1-a_2+a_3)x^3+$$

$$+(2a_0-a_1+a_2)x^2+(-a_0+a_1)x+a_0]\,dx = a_3\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1}+(a_2+2a_3)\frac{1}{6}[x^6]_{-1}^{1}+$$

$$+(a_1+2a_2-a_3)\frac{1}{5}[x^5]_{-1}^{1}+(a_0+2a_1-a_2+a_3)\frac{1}{4}[x^4]_{-1}^{1}+$$

$$+(2a_0-a_1+a_2)\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1}+(-a_0+a_1)\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{1}+a_0[x]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{2}{7}a_3+(a_1+2a_2-a_3)\frac{2}{5}+(2a_0-a_1+a_2)\frac{2}{3}+2a_0$$

Určitý integrál je roven nule např. pro $a_3=0$, $a_2=0$, $a_1=25$, $a_0=2$, a tedy $v=25x+2$ a u jsou ortogonální vektory.

Definice 3.7. (ortogonální podmnožina): Podmnožina M prostoru V se nazývá ortogonální, jestliže jsou každé dva její různé vektory navzájem ortogonální. [1]

Příklad 3.8.

Ověřte, že je množina $M = \{x^3 - 1, x^2 + x, x^3 + x^2 - x + 1\}$ v $R_3[x]$ ortogonální.

Řešení:

Označíme si *u, v, w*:

$u=x^3-1$

$v=x^2+x$

$w=x^3+x^2-x+1$

Podle definice 3.11. je množina ortogonální, jestliže jsou každé dva její různé vektory navzájem ortogonální. Proto provedeme skalární součiny mezi vektory.

$f(u, v)=f(x^3-1, x^2+x)=1.0+0.1+0.1+1.0=0$

$f(u, w)=f(x^3-1, x^3+x^2-x+1)=1.1+0.1+0.(-1)+(-1).1=0$

$f(v, w)=f(x^2+x, x^3+x^2-x+1)=0.1+1.11.(-1)+0.1=0$

Skalární součiny jsou rovny nule, proto jsou ortogonální. Množina M je tedy ortogonální.

Definice 3.9. (ortogonální báze): Ortogonální, resp. ortonormální bází unitárního prostoru budeme rozumět každou bázi tohoto prostoru, která je ortogonální, resp. ortonormální množinou. [1]

Definice 3.10.(Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces): Nechť $\{u_1, \dots u_n\}$je báze unitárního prostoru V. Jestliže

$v_1=u_1$,

$v_2=u_2 - \frac{f(u_2,v_1)}{f(v_1,v_1}.v_1$,

v_3=$u_3$$-\frac{f(u_3,v_1)}{f(v_1,v_1)}.v_1-\frac{f(u_3,v_2)}{f(v_2,v_2)}.v_2,$

….

v_n=$u_n$$-u_n-\frac{f(u_n,v_1)}{f(v_1,v_1)}.v_1-\cdots-\frac{f(u_n,v_{n-1})}{f(v_{n-1},v_{n-1})}.v_{n-1},$

potom$\{v_1,\dots v_n\}$ je ortogonální báze prostoru V. [1]

Příklad 3.11.

Je dána báze M=$\{x+1,-2x+3\}$. Najděte Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem ortogonální bázi pro $R_1[x]$.

Řešení:

Označíme si u_1, u_2:

u_1=x+1

u_2=-2x+3

(a) využijeme standardní skalární součin

Podle definice 3.8.:

1. krok: v_1=u_1
2. krok: v_2=u_2-$\lambda_1 u_1$; $\lambda_1=\frac{f(v_1,u_2)}{f(v_1,v_1)}$

Vypočteme neznámé:

f(v_1,v_1)=f(x+1, x+1)=1.1.+1.1=2

f(v_1,u_2)=f(x+1, -2x+3)=1.(-2)+1.3=1

$\lambda_1=\frac{1}{2}$

Dosadíme a vypočteme v_2:

$$v_2=-2x+3-\frac{1}{2}.(x+1)$$

$$v_2=-2x+3-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$

$$v_2=-\frac{5x}{2}-\frac{5}{2}$$

Ortogonální báze je tedy $O=\left\{x+1,-\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}\right\}$.

(b) využijeme skalární součin definovaný integrálem

Budeme postupovat obdobně.

Vypočteme neznámé:

$$f(v_1, v_1) = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 1)dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + [x^2]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$f(v_1, u_2) = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + x + 3)dx = -\frac{2}{3}[x^3]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{1} + 3[x]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3} + 6 =$$

$$= \frac{14}{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{7}{4}$$

Dosadíme:

$$v_2 = -2x + 3 - \frac{7}{4}.(x+1)$$

$$v_2 = -2x + 3 - \frac{7x}{4} - \frac{7}{4}$$

$$v_2 = -\frac{15x}{4} - \frac{5}{4}$$

Ortogonální báze je tedy $O = \left\{x + 1, -\frac{15x}{4} + \frac{5}{4}\right\}$.

Příklad 3.12.

Je dána báze M=$\{x + 1, -x^2 + 1, 2x - 1\}$. Najděte Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem ortogonální bázi pro $R_2[x]$.

Řešení:

Označíme si u_1, u_2, u_3:

u_1=x+1

u_2=-x^2+1

u_3=2x-1

(a) využijeme standardní skalární součin

Podle definice 3.8.:

1.krok: $v_1 = u_1$

2.krok: $v_2 = u_2 - \lambda_1 u_1$; $\lambda_1 = \frac{f(v_1, u_2)}{f(v_1, v_1)}$

Vypočteme neznámé:

$f(v_1,v_1)$=f(x+1, x+1)=0.0+1.1+1.1=2

$f(v_1,u_2)$=f(x+1, $-x^2+1$)=0.(-1)+1.0+1.1=1

$\lambda_1=\frac{1}{2}$

Dosadíme a vypočteme v_2:

$$v_2=-x^2+1-\frac{1}{2}.(x+1)$$

$$v_2=-x^2+1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$

$$v_2=-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

3.krok: $v_3=u_3-\lambda_1.v_1-\lambda_2.v_2$,

$$\lambda_1=\frac{f(v_1,u_3)}{f(v_1,v_1)}$$

$$\lambda_2=\frac{f(v_2,u_3)}{f(v_2,v_2)}$$

Vypočteme neznámé:

$f(v_1,u_3)$=f(x+1, 2x-1)=0.0+1.2+1.(-1)=1

$f(v_2,v_2)=f(-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}, -x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$f(v_2,u_3)=f(-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}, 2x-1)=(-1).0-\frac{1}{2}.2+\frac{1}{2}.(-1)=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

$\lambda_1=\frac{1}{2}$

$\lambda_2=-1$

Dosadíme a vypočteme v_3:

$$v_3=2x-1-\frac{1}{2}.(x+1)+1.(-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$$

$$v_3=2x-1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

$$v_3=-x^2+x-1$$

Ortogonální báze je tedy $O=\left\{x+1,-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2},-x^2+x-1\right\}$.

(b) využijeme skalární součin definovaný integrálem

Budeme postupovat obdobně.

Vypočteme neznámé:

$$f(v_1,u_2) = \int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - (-1) = \frac{4}{3}$$

$$f(v_1,v_1) = \int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + [x^2]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dosadíme a vypočteme v_2:

$$v_2 = -x^2+1 - \frac{1}{2}.(x+1)$$

$$v_2 = -x^2+1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$v_2 = -x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

3.krok: $v_3 = u_3 - \lambda_1 . v_1 - \lambda_2 . v_2$, $\lambda_1 = \frac{f(v_1,u_3)}{f(v_1,v_1)}$, $\lambda_2 = \frac{f(v_2,u_3)}{f(v_2,v_2)}$

Vypočteme neznámé:

$$f(v_1,u_3) = \int_{-1}^{1}(2x^2+x-1)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - [x]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$f(v_2,v_2) = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - x^3 - \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{4}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} +$$

$$+ \left[\frac{x}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$f(v_2,u_3) = \int_{-1}^{1}\left(-2x^3 + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = -\left[\frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{3x^2}{4}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = -1$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}} = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

Dosadíme a vypočteme v_3:

$$v_3 = 2x - 1 + \frac{1}{4}.(x+1) + \frac{5}{2}.\left(-x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$v_3 = 2x - 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5x^2}{2} - 5x + \frac{5}{4}$$

$$v_3 = -\frac{5x^2}{2} - \frac{11x}{4} + \frac{1}{2}$$

Ortogonální báze je tedy $O = \left\{x + 1, -\mathrm{x}^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{5x^2}{2} - \frac{11x}{4} + \frac{1}{2}\right\}$.

Definice 3.13. (norma): Nechť V je unitární prostor. Normou (též délkou vektoru $v \in$ V budeme rozumět reálné číslo $\|u\| = \sqrt{f(u,u)}$. Vektor v se nazývá normovaný (též jednotkový), jestliže je $\|u\| = 1$. [1]

Poznámka:Znormováním vektoru $u \in$ V rozumíme úpravu $\frac{u}{\|u\|}$.

Příklad 3.14.

Znormujte ortogonální bázi $O = \left\{x + 1, -\frac{5x}{2} + \frac{5}{2}\right\}$ z příkladu 3.9.

Řešení:

Označíme si u_1, u_2:

u_1=x+1

$u_2 = -\frac{5x}{2} + \frac{5}{2}$

(a) využijeme standardní skalární součin

Nejprve vypočteme normu u_1:

$\|u\| = \sqrt{f(u,u)}$

$$\|u_1\| = \sqrt{f(x+1, x+1)} = \sqrt{1.1. + 1.1} = \sqrt{2}$$

Znormujeme vektor u_1:

$\frac{u}{\|u\|}$

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nyní vypočteme normu *u_2:*

$$\|u_2\| = \sqrt{f\left(-\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}, -\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}.\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}.\frac{5}{2}\right)} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Znormujeme vektor u_2:

$$\frac{-\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}.(-x+1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+1) = -\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Znormovaná báze je tedy $O = \left\{\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

(b) využijeme skalární součin definovaný integrálem

Nejprve vypočteme normu u_1:

$$\|u\| = \sqrt{f(u,u)}$$

$$f(u_1,u_1) = \int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + [x^2]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Znormujeme vektor *u_1:*

$$\frac{u}{\|u\|}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Nyní vypočteme normu *u_2:*

$$f(u_2,u_2) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{25x^2}{4} - \frac{25x}{2} + \frac{25}{4}\right)dx = \left[\frac{25x^3}{12}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{25x^2}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{25x}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{25}{12} - \left(-\frac{25}{12}\right) + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + \frac{25}{4} - \left(-\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{6} + \frac{25}{2} = \frac{50}{3}$$

$\|u_2\| = \sqrt{\frac{50}{3}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$

Znormujeme vektor u_2:

$$\frac{-\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}}{5\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{-\frac{5x}{2}}{5\sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{\frac{5}{2}}{5\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}x$$

Znormovaná báze je tedy $O = \left\{\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}+, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}x\right\}$.

Závěr

Tato práce byla věnovaná vektorovým prostorům polynomů.

V první kapitole jsme si definovali vektorový prostor. Dokázali jsme, že polynomy jedné neurčité stupně nejvýše dva tvoří vektorový prostor. Ukázali jsme, co vektorový prostor není. Dále jsme definovali vektorový podprostor a na příkladu jsme ukázali, že daná množina W je vektorovým podprostorem daného vektorového prostoru V. Dále jsme definovali další pojmy, jako je lineární kombinace, lineární obal, lineárně závislá množina, množina generátorů, báze a dimenze vektorového prostoru. Všechny tyto pojmy jsme si též předvedli na konkrétních příkladech. V první části jsme se věnovali vektorovým prostorům polynomů jedné neurčité. V druhé části této kapitoly jsme se věnovali vektorovým prostorům polynomů dvou neurčitých.

Ve druhé kapitole jsme se nejprve věnovali lineárnímu zobrazení, které jsme si definovali a následně na příkladu ukázali, že dané zobrazení je homomorfismus. Dále jsme si definovali další pojmy jako je jádro, obraz, hodnost a defekt homomorfismu. Tyto pojmy jsme si ukázali na příkladu.

V další části jsme se věnovali dělení polynomů. Nejprve jsme si řekli, jak dělení polynomů funguje a předvedli jsme to na konkrétním příkladě. A dále jsme ukázali, že příkladem homomorfismu vektorových prostorů polynomů je i zobrazení φ, které polynomu jedné neurčité přiřazuje zbytek po dělení daným polynomem.

V poslední části této kapitoly jsme definovali matici homomorfismu, skládání homomorfismu a matici přechodu. Všechny tyto pojmy jsme si předvedli na konkrétních příkladech.

V poslední kapitole jsme se věnovali vektorovému prostoru polynomů se skalárním součinem. Nejprve jsme si definovali skalární součin. Ukázali jsme, že může být definovaný dvěma způsoby a to buď jako standardní skalární součin, nebo pomocí integrálu. Na příkladu jsme dokázali platnost definičních vlastností. Dále jsme si definovali ortogonální vektor, ortogonální bázi, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální podmnožinu a normu. Tyto pojmy jsme předvedli na příkladech

Resumé

This bachelor thesis was devoted to the vector space of polynomials.

In the first chapter we defined the vector space. We proved that polynomials a vague degree no more than two forms a vector space. We showed what is not a vector space. Furthermore , we defined linear subspace and on the example we showed that the given set W is a vector subspace of a vector space V. We defined other concepts such as linear combination, linear span, linearly dependent set, a set of generators, basis and dimension of vector space. All these notions, we also performed on examples. In the first part we focused on vector spaces polynomials of one indeterminate. In the second part of this chapter we focused on vector spaces of polynomials two indeterminate .

In the second chapter we first gave a linear view, which we defined and we showed that the representation is a homomorphism. Furthermore, we defined other concepts such as the nucleus, picture, rank and defect homomorphism. These concepts we shown in the example.
In the next part we focused division of polynomials. First, we discussed how the division of polynomials works and we showed it on a concrete example.
In the last section of this chapter we defined the matrix homomorphism, homomorphism and folding gradient matrix. All these concepts we demonstrated on specific examples.

In the last chapter we focused on the vector space of polynomials with scalar product. First, we defined the scalar product. We shown that it can be defined in two ways, either as a standard scalar product, or using the integral. On the example we were able to force the defining characteristics. Furthermore, we defined orthogonal vector orthogonal basis, Gram - Schmidt orthogonalization, orthogonal subset and standard. These concepts we demonstrated in the examples.

Seznam literatury

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Druhé vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2002. ISBN 80-85863-92-8.

[2] COX, David, John LITTLE a Donald O´SHEA. *Ideals, varieties, and algorithms*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1998. ISBN 0-387-94680-2.

[3] OLŠÁK, Petr. *Lineární algebra* [online]. Praha, 2010 [cit. 2016-06-24]. Dostupné z: http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal.pdf

[4] ŘEHÁKOVÁ, Hana. Soustavy polynomiálních rovnic se dvěma neznámými. Bakalářská práce, FPE ZČU, 2014.

[5] DRÁBEK, Jaroslav a Jaroslav HORA. *Algebra. Polynomy a rovnice*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001. ISBN 80-7082-787-4.

[6] BUDÍNOVÁ, Irena. *Polynomy* [online]. Brno, 2013 [cit. 2016-06-24]. Dostupné z: http://www.ped.muni.cz/wmath/interma/budinova_cz.pdf

[7] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1953, 488 s.