

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce
Optimalizační úlohy v teorii portfolia

Plzeň 2017

Šárka Kopová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské práce.

V Plzni dne 25. 5. 2017

.....

Šárka Kopová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu Ing. Radkovi Cibulkovi, Ph.D. za pomoc při tvorbě práce, cenné rady, výbornou komunikaci a čas, který mi věnoval při konzultacích. V neposlední řadě bych také chtěla poděkovat svým rodičům a bratrovi za podporu po celou dobu studia.

Abstrakt

Předkládaná bakalářská práce je zaměřena na optimalizační úlohy v teorii portfolia. Práce obsahuje základní pojmy, jako jsou charakteristiky aktiva a portfolia, odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky náhodné veličiny popisující výnos aktiva za určitou dobu. Dále je formulována kvadratická a Pareto optimalizace včetně vět o existenci a jednoznačnosti řešení. Popsané úlohy jsou poté aplikovány na cenné papíry v ČR.

Klíčová slova

Teorie portfolia, optimalizační úloha, Markowitzův model, výnos, riziko, prodej nakrátko, efektivní množina, cenné papíry, portfolio, burza.

Abstract

The bachelor thesis is focused on optimization problems in portfolio models. Basic terms of portfolio theory, such as the characteristics of the asset and the portfolio, estimates of the mean value and standard deviation of the random variable describing the return of the asset over a certain period of time, are described in the introduction. Next part deals with quadratic and Pareto optimization including theorems about existence and uniqueness of the solution. The described problems are then applied to stocks in the Czech Republic.

Key words

Portfolio theory, optimization problem, Markowitz problem, return, risk, sell short, efficient set, stocks, portfolio, stock exchange.

Obsah

Značení	1
Úvod	3
1 Základní pojmy teorie portfolia	4
1.1 Model portfolia	4
1.1.1 Metody odhadů parametrů \bar{r}_i , σ_i a C_{ij}	5
1.2 Markowitzův model	8
1.2.1 Množina přípustných a efektivních portfolií	8
1.3 Model oceňování kapitálových aktiv CAPM	10
1.3.1 Polopřímka Capital Market Line CML	11
2 Základní pojmy matematické optimalizace	12
2.1 Existence a jednoznačnost řešení pro obecnou úlohu	12
2.2 Kvadratická optimalizace	13
2.3 Pareto optimalizace	18
2.4 Aplikace v teorii portfolia	19
3 Aplikace na cenné papíry v ČR	22
3.1 Výběr cenných papírů	22
3.2 Popis jednotlivých cenných papírů	23
3.3 Odhadnutí potřebných charakteristik	25
3.4 Řešení optimalizačních úloh	26
3.4.1 Hledání podílů akcií v portfoliu v Markowitzově smyslu	26
3.4.2 Vykreslení množin efektivních portfolií	28
3.4.3 Hledání podílů akcií v portfoliu pomocí skalarizace a vykreslení efektivní množiny	32
4 Další možné úlohy	34
4.1 Expertní metoda pro odhadování parametrů \bar{r}_i a σ_i	34
4.2 Optimalizační úloha s neúplnou informací o kovarianční matici	36
Závěr	37

Literatura	38
Seznam obrázků	39
Seznam tabulek	40

Značení

\mathbb{R}^n	množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel
\mathbb{R}_+^n	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}\}$
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	sloupcový vektor z množiny \mathbb{R}^n
$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$	$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \geq y_i$
$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$	$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i > y_i$
$\ \mathbf{x}\ $	norma vektoru \mathbf{x}
$\mathbf{1}$	vektor \mathbf{x} , pro který platí $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)^T$
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	reálná matice typu $m \times n$
$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	jednotková matice typu $n \times n$
$\min A$	minimum množiny A
$\max A$	maximum množiny A
$\sup A$	supremum množiny A
$A_1 \cap A_2$	průnik množin A_1 a A_2
$A_1 \setminus A_2$	rozdíl množin A_1 a A_2
$f(\mathbf{x})$	hodnota funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	limita funkce f v bodě x_0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciální derivace funkce f vzhledem k proměnné x
$\nabla f(\mathbf{x})$	gradient funkce f v bodě \mathbf{x}
$\mathcal{U}(\mathbf{x})$	okolí bodu \mathbf{x}

$E(\dots)$ střední hodnota

$D(\dots)$ rozptyl

$C(\dots)$ kovariance

Úvod

Cílem této bakalářské práce je zabývat se optimalizačními úlohami v teorii portfolia, kde se především zaměříme na kvadratickou a Pareto optimalizaci.

Práce je rozdělena do 4 částí. První kapitola obsahuje základní pojmy z teorie portfolia, jako jsou charakteristiky aktiva a portfolia, dále je popsána historická metoda pro odhadování očekávaného výnosu a rizika změny výnosu. Popsán je Markowitzův model, který je nezbytný pro zpracování optimalizačních úloh, zmíněn je i model CAPM. Další kapitola se zabývá kvadratickou optimalizací včetně vět o existenci a jednoznačnosti řešení. Následně popisujeme Pareto optimalizaci. Třetí kapitola je věnována aplikaci výše zmíněných úloh na cenné papíry v ČR. Pro různé hodnoty vstupních parametrů (např. minimální výnos portfolia a minimální zastoupení jednotlivých cenných papírů v portfoliu) je vypočítán procentuální podíl jednotlivých aktiv a vykresleny efektivní množiny v Markowitzově smyslu. Sestavení portfolií bude vždy při zakázaném „*sell short*“. K odhadům je použit doplněk *Řešitel dat* v softwaru Excel. V poslední kapitole jsou popsány úlohy, kterými bych se chtěla zabývat v budoucnosti.

Kapitola 1

Základní pojmy teorie portfolia

„Teorie portfolia je mikroekonomická disciplína, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je vhodné držet dohromady, aby takto vytvořené portfolio mělo určité, předem dané vlastnosti.“ [1, str. 9]

1.1 Model portfolia

Budeme uvažovat následující charakteristiky aktiva a daného portfolia skládajícího se z $n \in \mathbb{N}$ aktiv [1, str. 26].

Charakteristiky aktiva:

A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ... náhodná veličina charakterizující i -té aktivum (popisuje výnos i -tého aktiva za určitou dobu)

$\bar{r}_i = E(A_i)$... střední hodnota náhodné veličiny, která určuje očekávaný výnos aktiva za určitou dobu

$\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$... vektor očekávaných výnosností \bar{r}_i

$\sigma_i^2 = D(A_i)$... rozptyl náhodné veličiny

$\sigma_i = \sqrt{D(A_i)}$... směrodatná odchylka náhodné veličiny, která určuje riziko změny výnosu aktiva za určitou dobu

$C_{ij} = C(A_i, A_j)$... kovariance výnosností mezi aktivy i a j

O náhodné veličině popisující výnos i -tého aktiva budeme předpokládat, že má normální rozdělení se střední hodnotou r_i a rozptylem σ_i^2 , směrodatná odchylka σ_i měří riziko, že nebude očekávaného výnosu dosaženo.

Portfolio je tvořeno skupinou aktiv (např. akcií), která jsou v majetku jednoho investora.

Charakteristiky portfolia:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$... vektor, jehož složky odpovídají procentnímu zastoupení jednotlivých aktiv v portfoliu

x_i ... procentní podíl (váha), kterým je i -té aktivum zastoupeno v portfoliu

$d_i, (h_i)$... dolní (resp. horní) mez označující nejmenší (resp. největší) povolený procentuální podíl i -tého aktiva v portfoliu

$x_p = \sum_{i=1}^n x_i A_i$... výnos portfolia za určitou dobu

$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i C_{ij} x_j}$... riziko změny výnosu portfolia za určitou dobu

$r_p = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i$... očekávaný výnos portfolia za určitou dobu

r_{min} ... minimální přijatelný výnos portfolia

V optimalizaci portfolia se hledá nejlepší způsob, jak investovat kapitál do skupiny aktiv. Jestliže je brán v úvahu klasický model portfolia s n aktivy (akciemi) odloženými na určitou dobu, potom x_i označuje množství aktiva i držené po celou dobu investice za cenu, která byla na začátku období. Pro hledání nejlepší investice existuje široká škála omezujících podmínek, např. vzniká omezení na rozpočet nebo nezáporná investice $\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$, neboli je zakázán „*sell short*“ [2, str. 155]. Kdyby byl povolen „*prodej nakrátko*“, znamenalo by to držení záporného podílu i -tého aktiva v portfoliu. Investor si vypůjčí aktivum a prodá ho třetí straně, v době splatnosti vypůjčeného aktiva si aktivum koupí zpět a vrátí majiteli to, co si vypůjčil, rozdíl cen při prodeji aktiva třetí straně a jeho zpětného nákupu je základem investora zisku nebo ztráty [1, str. 23].

1.1.1 Metody odhadů parametrů \bar{r}_i, σ_i a C_{ij}

Stanovení co nejpřesnějších hodnot očekávaného výnosu a rizika změny výnosu portfolia je složité, protože tyto charakteristiky jsou ovlivněny velkým množstvím vlivů, které jdou jen těžko určit. Často se používá kombinace historické metody odhadu, která je založena na vývoji cen aktiv, současně s expertními odhady, které poskytují lidé, pohybuující se na finančních trzích,

kteří jsou schopni vyhodnocovat nejrůznější informace související s danou firmou a cenou její akcie. Expertní metoda je blíže popsána v kapitole 4, ale není v práci použita.

Historická metoda pro odhadování parametrů \bar{r}_i , σ_i a C_{ij}

Při tomto odhadu budeme používat následující proměnné a charakteristiky [1, str. 27 - 28]:

n ... počet aktiv v portfoliu

T ... počet období, neboli doba trvání portfolia vyjádřená v časových okamžicích (např. den, týden, měsíc)

k ... zvolená délka období, pro které chceme určit velikost změny tržní ceny aktiva ($1 \leq k < T$)

$P_{i,t}$... tržní cena i -tého aktiva v čase t , kde $t = 1, 2, 3, \dots, T$

$P_{i,t+k}$... tržní cena i -tého aktiva v čase $t + k$, kde $t = 1, \dots, T - k$

$D_{i,t+1}$... výše dividendy i -tého aktiva, na kterou má vlastník nárok, jestliže drží i -tou akcii před ex-date v čase t . Mělo by se jednat o „čistou“ dividendu, tj. po odečtení srážkové daně (v ČR je pro fyzické osoby sazba daně ve výši 15 %). Ex-date je nejdůležitější den pro investora, protože je to první den, kdy kupující již nemá nárok na nejbližší dividendu nebo také první den, kdy lze prodat akcie bez ztráty nároku na výplatu dividendy [10].

$r_{i,t}$... relativní přírůstek tržní ceny i -tého aktiva v čase $(t + k)$ oproti tržní ceně v čase t , který je definován takto:

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t+k} - P_{i,t}}{P_{i,t}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T - k. \quad (1.1)$$

Jestliže budeme uvažovat za aktiva akcie, u kterých budou vypláceny dividendy, budou tyto akcie převedeny na bezdividendové pomocí multiplikátoru:

$$M_{i,t} = 1 - \frac{D_{i,t+1}}{P_{i,t}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T - 1. \quad (1.2)$$

Postup převedení akcií na bezdividendové je znázorněn na následujícím příkladu:

Příklad 1. Jestliže je k datu 18. 2. 2017 (ex-date) čistá dividendy 40 Kč a k 17. 2. 2017 je cena akcie (Close) v hodnotě 423 Kč, potom je multiplikátor vypočten takto $M = (1 - \frac{40}{423}) = 0,905$.

V Tabulce 1.1 jsou zobrazeny hodnoty cen akcií (Close) a jejich následná úprava (Adjusted close):

Datum	Close [Kč]	Dividenda[Kč]	Adjusted close [Kč]
19.2.2017	431		431
18.2.2017	425	40 (ex-date)	425
17.2.2017	423		$423 * 0,905 = 382,82$
16.2.2017	422		$422 * 0,905 = 381,91$

Tabulka 1.1: Ukázka přepočtu na bezdividendové akcie

Jestliže je portfolio bráno na 2 roky (např. rok 2016 a 2017) a v každém roce dojde k vyplácení dividend, potom se v roce 2017 vypočte k danému dni multiplikátor M_1 a dojde k přenásobení odpovídajících cen (Close) daného aktiva, které jsou před ex-date (viz Tabulka 1.1). V roce 2016 se vypočte k danému dni multiplikátor M_2 a ceny akcie, které jsou před datem ex-date, jsou přenásobeny multiplikátory M_1 i M_2 . Ceny, které jsou za tímto datem, jsou přenásobeny pouze multiplikátorem M_1 [8].

Očekávaný výnos i -tého aktiva za celou dobu trvání portfolia T je vypočten aritmetickým průměrem relativních přírůstků tržních cen:

$$\bar{r}_{i,k} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} r_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Koeficient k je vždy pevně zvolen. Jestliže $k = 1$, potom se jedná o jednodenní změnu tržní hodnoty a zkráceně se píše $\bar{r}_{i,k} = \bar{r}_i$.

Riziko změny výnosů i -tého aktiva za celou dobu trvání portfolia T je vypočteno pomocí výběrové směrodatné odchylky:

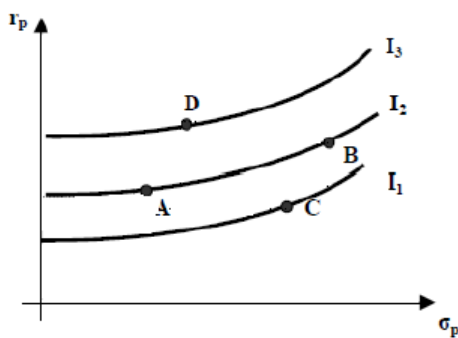
$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-k-1} \sum_{t=1}^{T-k} (r_{i,t} - \bar{r}_{i,k})^2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Abychom mohli vypočítat riziko změny výnosu celého portfolia, musíme znát kovarianci mezi dvojicemi náhodných veličin A_i a A_j . Historická metoda umožňuje v podstatě jako jediná kvantifikovat kovarianci mezi náhodnými veličinami, které popisují výnos jednotlivých aktiv, a to pro $k = 1$ ve tvaru:

$$C_{ij} = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^{T-1} (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

1.2 Markowitzův model

Model vychází z toho, že investor se zajímá o očekávaný výnos portfolia r_p a riziko změny výnosu portfolia σ_p . Kombinace výše zmíněných charakteristik znázorňují v rovině $\sigma_p - r_p$ tzv. *indiferenční křivky*. Indiferenční křivky obsahují jednotlivá portfolia, která znázorňujeme také v rovině $\sigma_p - r_p$, kde konkrétnímu portfoliu odpovídá konkrétní bod.



Obrázek 1.1: Indiferenční křivky

Každá křivka představuje všechny kombinace portfolií, které investor bere za stejně žádoucí. Tato vlastnost je vysvětlena na Obrázku 1.1, kde portfolia A a B jsou pro investora stejně dobrá, ikdyž mají různé očekávané výnosnosti a rizika. Portfolio B má vyšší riziko než portfolio A a mělo by být pro investora méně výhodné. To však neplatí, protože toto riziko kompenzuje zisk z vyšší očekávané výnosnosti portfolia B vzhledem k portfoliu A . Investorovu preferenci lze vyjádřit pomocí „*utility function* $u(r_p, \sigma_p)$ “. Funkce přiřadí dvojici výnos - riziko danou preferenci investora

$$(\sigma_p, r_p) \rightarrow u(\sigma_p, r_p). \quad (1.6)$$

Indiferenční křivky jsou potom hladiny této funkce. Další vlastností je, že investor bude chtít více portfolio, které leží na křivce, jež je umístěna výše než ostatní indiferenční křivky. Tvar křivek závisí na investorově postoji k danému riziku [5, str. 18].

1.2.1 Množina přípustných a efektivních portfolií

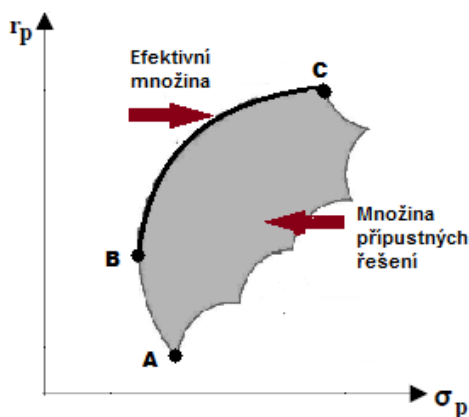
Množina efektivních portfolií u rizikových aktiv

Množinu všech možných portfolií, která lze vytvořit z daných aktiv změnou jejich procentuálního zastoupení, nazýváme *množinou přípustných řešení*, zkráceně *přípustnou množinou*.

Pro množinu *efektivních portfolií*, která slouží investorovi k výběru *efektivního portfolia* z množiny přípustných portfolií, musí platit následující předpoklady [5, str. 27]:

- (i) „Portfolia nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika.“
- (ii) „Portfolia nabízejí minimální riziko při různých očekávaných úrovních výnosnosti portfolia.“

Znamená to, že investor chce maximalizovat průměrný výnos z portfolia, tato vlastnost se nazývá *nenasycenost*. Pokud by mělo více portfolií stejný výnos, investor si vybere to s menším rizikem změny výnosu, neboli investor je k *riziku averzní*.



Obrázek 1.2: Efektivní a přípustná množina rizikových aktiv

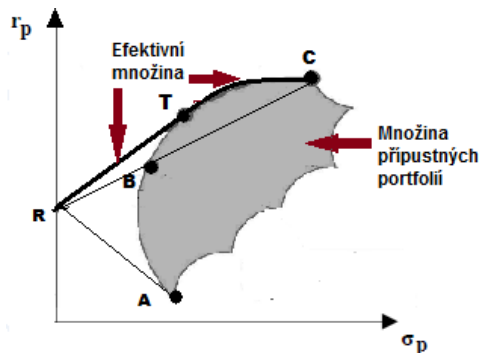
Aplikace těchto podmínek je vidět na Obrázku 1.2, kdy efektivní množina obsahuje portfolia B a C. Označme B portfolio, které vznikne tak, že se minimalizuje riziko s maximálním výnosem a označme C portfolio, které maximalizuje výnos při minimálním riziku. Množina efektivních portfolií je popsána křivkou mezi body B a C. Portfolio A je neefektivní, protože při nižší výnosnosti je jeho riziko vyšší než u portfolia B [1, str. 47].

Tvorba optimálního portfolia je popsána v kapitole 2.3.

Množina efektivních portfolií u bezrizikových aktiv

Riziko změny výnosu *bezrizikového aktiva* je nulové, očekávaný výnos $r_f \in \mathbb{R}$, který je předem dán, je roven např. výnosu státních dluhopisů, pokladničních poukázek nebo termínovaných vkladů. V naší další práci bude r_f bráno jako kladné.

Každé portfolio z efektivní množiny obsahuje nejvýše jedno bezrizikové aktivum, protože bezrizikové aktivum s nejvyšším výnosem dominuje všechna ostatní. Při zařazení aktiva do portfolia dojde ke změně efektivní množiny.



Obrázek 1.3: Efektivní a přípustná množina s bezrizikovým aktivem

Na Obrázku 1.3 je vidět, jak se změnila efektivní množina, která je v tomto případě tvořena polopřímkou danou bodem R a portfoliem T a křivkou obsahující portfolia T a C . Tečný bod T se nazývá *tangenciální portfolio*, protože směrnice přímky je rovna tangentě úhlu, kterou svírá přímka s osou σ_p [1, str. 32].

1.3 Model oceňování kapitálových aktiv CAPM

Model CAPM (Capital Asset Pricing Model) je speciálním případem portfolia, který obsahuje nejen riziková aktiva, ale i bezrizikové aktivum (bezriziková půjčka, nákup státního dluhopisu, atd.). Jedná se tedy o úlohu nalezení množiny efektivních portfolií, kdy portfolio je složeno z výše zmíněných aktiv. Model používá opět statistické charakteristiky a navazuje na Markowitzův model.

Předpoklady CAPM jsou takové, že všichni investoři jsou rizikově averzní, mají stejné období na sestavení portfolia, stejnou bezrizikovou sazbu, všechna aktiva jsou nekonečně dělitelná a veškeré informace jsou pro všechny investory stejně dostupné.

Model CAPM je rovnovážným model. Jestliže všichni investoři budou investovat do portfolia T a jeho kombinací s bezrizikovým aktivem, musí na trhu existovat rovnováha. To znamená, že portfolio T obsahuje nenulový podíl všech rizikových aktiv na daném trhu. Výsledné portfolio T se nazývá *tržní portfolio* a je tvořeno investicemi do všech aktiv v takovém poměru, kde míra investovaná do jednotlivého aktiva odpovídá jeho relativní tržní hodnotě. Hlavním předpokladem umožňujícím stanovení *tržního portfolia* je, že všichni investoři jsou si rovni v tom smyslu, že mají stejná očekávání o budoucnosti,

předpokládají tedy stejnou hodnotu parametrů σ_i a \bar{r}_i . Pro hledání tohoto portfolia se využívá konstrukce polopřímky CML [5, str. 58].

1.3.1 Polopřímka Capital Market Line CML

Model CAPM lze odvodit pomocí polopřímky CML, která znázorňuje rovnováhu mezi očekávanou výnosností a směrodatnou odchylkou efektivních portfolií za předpokladu zavedení bezrizikového aktiva s výnosností r_f a rizikovostí $\sigma_f = 0$. Při tvorbě efektivní množiny, která je tvořena polopřímkou vycházející z bodu $R = [0, r_f]$ a procházející bodem $M = [\sigma_M, r_M]$, se snažíme maximalizovat velikost tangenty úhlu, který svírá polopřímka s osou σ_p (viz Obrázek 1.4). *Tangenciální portfolio* M bude za předpokladů uvedených v kapitole 1.3 odpovídat *tržnímu portfoliu* T . Polopřímka musí obsahovat alespoň jeden bod z množiny přípustných portfolií. Jestliže je „*sell short*“ zakázán, pak místo polopřímky CML získáme úsečku spojující body R a M .

Polopřímka CML má tvar

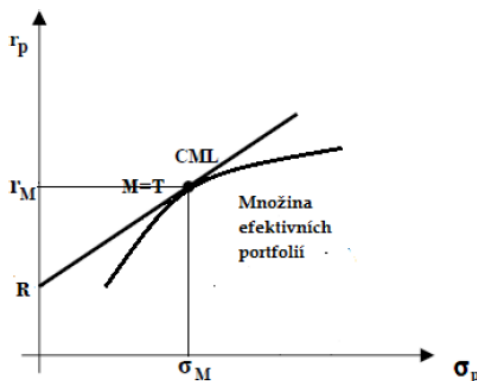
$$r_p = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \sigma_p, \quad \sigma_p \geq 0, \quad (1.7)$$

kde

r_f ... očekávaný výnos bezrizikového aktiva,

r_M ... očekávaný výnos tržního portfolia,

σ_M ... riziko změny výnosu tržního portfolia [5, str. 58].



Obrázek 1.4: Capital Market Line

Kapitola 2

Základní pojmy matematické optimalizace

2.1 Existence a jednoznačnost řešení pro obecnou úlohu

Stejně jako v [3, str. 24] bude zapsána základní minimalizační úloha ve tvaru

$$\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}, \quad (2.1)$$

kde funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *účelová funkce* a množina $V \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *množina přípustných řešení*.

Definice 1. [3, str. 24] Necht' f je reálná funkce definovaná na množině $V \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x}_{opt} \in V$ se nazývá bodem *globálního minima*, resp. *ostrého globálního minima* funkce f na množině V , jestliže pro každé $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_{opt}\}$ platí

$$f(\mathbf{x}_{opt}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad f(\mathbf{x}_{opt}) < f(\mathbf{x}).$$

Definice 2. [3, str. 26] Necht' f je reálná funkce definovaná na množině $V \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x}_{opt} \in V$ se nazývá bodem *lokálního minima* účelové funkce f na množině V , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(\mathbf{x}_{opt})$ bodu \mathbf{x}_{opt} takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_{opt}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in V \cap \mathcal{U}(\mathbf{x}_{opt}).$$

Maximalizační úlohu [3, str. 24] budeme zapisovat ve tvaru

$$\max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}, \quad (2.2)$$

kde funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a množina $V \subset \mathbb{R}^n$ jsou dány.

Definice 3. [3, str. 24] Necht f je reálná funkce definovaná na množině $V \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x}_{opt} \in V$ se nazývá bodem *globálního maxima*, resp. *ostrého globálního maxima* funkce f na množině V , jestliže pro každé $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_{opt}\}$ platí

$$f(\mathbf{x}_{opt}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad f(\mathbf{x}_{opt}) > f(\mathbf{x}).$$

Definice 4. [3, str. 26] Necht f je reálná funkce definovaná na množině $V \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x}_{opt} \in V$ se nazývá bodem *lokálního maxima* účelové funkce f na množině V , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(\mathbf{x}_{opt})$ bodu \mathbf{x}_{opt} takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_{opt}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in V \cap \mathcal{U}(\mathbf{x}_{opt}).$$

Následující věta obsahuje postačující podmínky pro existenci globálního minima a maxima na kompaktní množině.

Věta 1 (Weierstrassova věta [3, str. 42]). Necht funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na neprázdne a kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině přípustných řešení $V \subset \mathbb{R}^n$. Potom f nabývá na V svého globálního minima a maxima.

Jestliže množina přípustných řešení není omezená, potom lze použít následující důsledek Věty 1:

Věta 2. Necht funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na množině přípustných řešení $V \subset \mathbb{R}^n$, která je neprázdna a uzavřená, a platí

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (\textit{koersivita}). \quad (2.3)$$

Potom f nabývá na V svého globálního minima.

Věta 3. [3, Věta 5.4.1.] Je-li funkce f spojitá a konvexní na neprázdne, kompaktní a konvexní množině V , potom platí

- (i) každé lokální minimum funkce f na množině V je globálním minimem f na V ,
- (ii) je-li funkce f ostře konvexní, potom existuje nejvýše jeden bod minima.

2.2 Kvadratická optimalizace

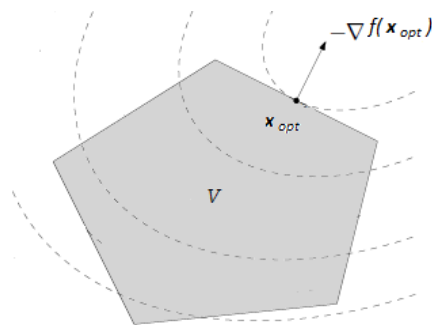
Definice 5 (Úloha kvadratické optimalizace [2, str. 152]). Necht jsou dány matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, symetrická matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Úlohou *kvadratické optimalizace* rozumíme úlohu najít vektor $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$f(\mathbf{x}_{opt}) = \min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}, \quad (2.4)$$

kde

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{a} \quad V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{G} \mathbf{x} \succeq \mathbf{h}\}. \quad (2.5)$$

Funkce v (2.5) je kvadratická a množina přípustných řešení je určena lineárními podmínkami (viz Obrázek 2.1). Přípustná množina V je mnohostěn, hladiny účelové funkce, která je konvexní kvadratická, jsou znázorněny jako přerušované křivky a bod \mathbf{x}_{opt} je bodem optima.



Obrázek 2.1: Geometrické zobrazení kvadratické optimalizace

Abychom mohli formulovat nutné podmínky ve tvaru, který bude popsán ve Větě 4, musíme zavést *podmínku regularity*, která říká, že gradienty aktivních vazeb musí být lineárně nezávislé [3, str. 124]. V případě úlohy obsahující pouze *rovnostní* vazby stačí předpokládat, že matice \mathbf{A} má hodnost p . V úloze, kde jsou pouze *nerovnostní* vazby, musí být lineárně nezávislé gradienty aktivních vazeb, neboli musí být lineárně nezávislé odpovídající řádky matice \mathbf{G} .

Definice 6. [3, str. 105] Pro dané $i \in \{1, \dots, m\}$ a prvky $\{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}\}$ matice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ z (2.5) říkáme, že i -tá nerovnostní vazba je *aktivní* v bodě \mathbf{x} , jestliže

$$g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + \dots + g_{in}x_n = h_i. \quad (2.6)$$

Pro nutné a postačující podmínky existence minima kvadratické funkce z Definice 5 musíme sestavit Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{v}^T (\mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{h}), \quad (2.7)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ jsou vektory Lagrangeových multiplikátorů příslušející odpovídajícím omezujícím podmínkám [4, Definice 17].

Věta 4 (Karushovy-Kuhnovy-Tuckerovy podmínky [3, str. 123 - 124]). Předpokládejme, že vektor $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ splňuje (2.4), a také podmínku regularity.

Potom existují vektory Lagrangeových multiplikátorů $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ takové, že platí následující podmínky

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}\mathbf{x}_{opt} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{G}\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{h} \succeq \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{G}\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{h}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v} \succeq \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Podmínky (2.8) - (2.10) jsou podmínky stacionárnosti Lagrangeovy funkce, speciálně vztahy (2.9) - (2.10) vyjadřují podmínky přípustnosti, dále podmínka (2.11) je podmínka komplementarity a (2.12) je podmínkou nezápornosti.

V případě portfolia, kde máme podmínku nezápornosti ve tvaru $\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$, pro matici $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ platí, že $m = n$. Matice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je jednotková a vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ je nulový. Tvar K - K - T podmínek je následující

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}\mathbf{x}_{opt} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}_{opt} \succeq \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x}_{opt} = 0, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{v} \succeq \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Věta 5. [3, str. 154] Jestliže matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (i) je *pozitivně semidefinitní*, potom K - K - T podmínky jsou i podmínkami postačujícími, neboli jestliže $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ splňuje (2.8) - (2.12), potom řeší úlohu minimalizace (2.4),
- (ii) je *pozitivně definitní*, potom účelová funkce z úlohy (2.4) je ostře konvexní a bod minima je nejvýše jeden.

Příklad 2. [3, Příklad 4.4.6] Naším úkolem je minimalizovat funkci

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

s těmito omezujícími podmínkami

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - x_3 &\geq -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lagrangeovu funkci sestavíme ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, u_1, v_1) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + u_1(x_1 + x_2 + x_3 - 3) \\ &+ v_1(-2x_1 + x_2 - x_3 + 5).\end{aligned}$$

Nutné podmínky (2.8) mají tvar

$$\begin{aligned}2x_1 + u_1 - 2v_1 &= 0, \\ 2x_2 + u_1 + v_1 &= 0, \\ 2x_3 + u_1 - v_1 &= 0,\end{aligned}$$

dále pak podmínka komplementarity a nezápornosti (2.11) - (2.12) je ve tvaru

$$\begin{aligned}v_1(-2x_1 + x_2 - x_3 + 5) &= 0, \\ v_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

Z podmínky $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ vyjádříme x_1 , tedy $x_1 = 3 - x_2 - x_3$ a dosadíme do první nutné podmínky.

Nutné podmínky jsou potom následující

$$\begin{aligned}6 - 2x_2 - 2x_3 + u_1 - 2v_1 &= 0, \\ 2x_2 + u_1 + v_1 &= 0, \\ 2x_3 + u_1 + v_1 &= 0.\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice vyjádříme v_1 ve tvaru $v_1 = -2x_3 - u_1$ a dosadíme to do zbývajících rovnic

$$\begin{aligned}6 - 2x_2 + 2x_3 + 3u_1 &= 0, \\ 2x_2 - 2x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne, že $x_2 = x_3$, a tedy z první rovnice plyne $u_1 = -2$.

Nutné podmínky se díky získaným řešením zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned}2x_1 - 2v_1 &= 2, \\ 2x_2 + v_1 &= 2, \\ 2x_2 - v_1 &= 2.\end{aligned}$$

Dopočtením této soustavy získáme $v_1 = 0$ a $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Matice \mathbf{S} je pozitivně definitní, protože je ve tvaru $2\mathbf{I}$. Vyplyvá z toho, že bod $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ 1)^T$ je jediným bodem minima.

Jestliže neuvažujeme podmínku regularity, můžeme psát Lagrangeovu funkci ve tvaru [3, str. 123]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \right) + \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{v}^T (\mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{h}), \quad (2.18)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \geq 0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

Věta 6. [3, str. 123 - 124] Předpokládejme, že vektor $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ splňuje (2.4). Potom existuje číslo $u_0 \geq 0$ a vektory Lagrangeových multiplikátorů $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ (ne všechny nulové) takové, že platí následující podmínky

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_0 \mathbf{S} \mathbf{x}_{opt} + u_0 \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{x}_{opt} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{G} \mathbf{x}_{opt} - \mathbf{h} \succeq \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{G} \mathbf{x}_{opt} - \mathbf{h}) = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{v} \succeq \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Lagrangeova funkce z Příkladu 2 je potom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, u_0, u_1, v_1) &= u_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + u_1(x_1 + x_2 + x_3 - 3) \\ &+ v_1(-2x_1 + x_2 - x_3 + 5). \end{aligned}$$

Sestavíme nutné podmínky

$$2u_0x_1 + u_1 - 2v_1 = 0,$$

$$2u_0x_2 + u_1 + v_1 = 0,$$

$$2u_0x_3 + u_1 - v_1 = 0,$$

dále pak podmínku komplementarity a nezápornosti

$$v_1(-2x_1 + x_2 - x_3 + 5) = 0,$$

$$v_1 \geq 0.$$

Dopočtením řešení zjistíme, že když položíme $u_0 = \frac{1}{2}$, potom bude platit $u_1 = -1$, $v_1 = 0$ a $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Jestliže zvolíme $u_0 = 0$, potom $u_1 = 0$ a $v_1 = 0$.

2.3 Pareto optimalizace

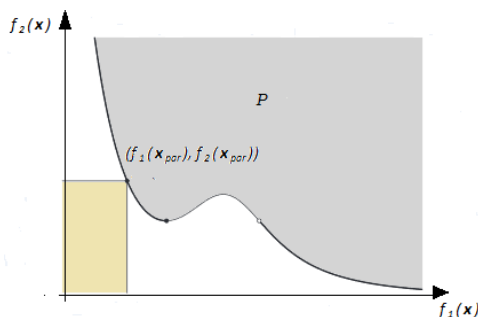
O Pareto optimalizaci hovoříme, jestliže máme zadáno více kritérií, což znamená alespoň dvě účelové funkce (např. v našem případě f_1 a f_2) a chceme tyto funkce optimalizovat současně. Není většinou možné najít všechna řešení úlohy, hledá se pouze konečná aproximace množiny řešení.

Definice 7. [2, str. 182] Mějme funkce $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a přípustnou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{x}_{par} \in \mathbb{R}^n$ je *Pareto optimální* pro f_1 a f_2 na množině V jestliže

- (i) $\mathbf{x}_{par} \in V$,
- (ii) jestliže $\mathbf{x} \in V$ a $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}_{par})$ pro $i = 1, 2$, potom $f_i(\mathbf{x}_{par}) = f_i(\mathbf{x})$ pro $i = 1, 2$.

Vektor $\mathbf{x}_{par} \in \mathbb{R}^n$ je Pareto optimální právě tehdy, když nelze najít jiný vektor, který by zlepšil obě kritéria současně. Geometrický význam je ilustrován na Obrázku 2.2, kde platí následující:

$$((f_1(\mathbf{x}_{par}), f_2(\mathbf{x}_{par})) - \mathbb{R}_+^2) \cap \mathcal{P} = \{(f_1(\mathbf{x}_{par}), f_2(\mathbf{x}_{par}))\}, \quad \text{kde} \\ \mathcal{P} = \{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in V\}.$$



Obrázek 2.2: Geometrické zobrazení Pareto optimalizace

Příkladem množiny V je množina daná lineárními rovnostmi a nerovnostmi z (2.5) ve tvaru $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{G}\mathbf{x} \succeq \mathbf{h}\}$, kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ jsou dány.

Pareto optimální vektory lze najít řešením minimalizační úlohy ve tvaru

$$\min\{z_1 f_1(\mathbf{x}) + z_2 f_2(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}, \quad (2.24)$$

kde $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$ je pevně zvolený vektor [2, str. 178 - 179]. Tomuto postupu říkáme *skalarizace*.

Jestliže f_1 a f_2 jsou konvexní, potom funkce

$$f_z(\mathbf{x}) = z_1 f_1(\mathbf{x}) + z_2 f_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.25)$$

je konvexní. Pro různé volby vektoru $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$ dostaneme obvykle jiný Pareto optimální vektor \mathbf{x}_{par} .

2.4 Aplikace v teorii portfolia

Řešení optimalizační úlohy v Markowitzově smyslu

Model 1. Stejně jako v [2, str. 155] je úloha definována tak, že při známé kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vektoru očekávaných výnosností $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$ a $r_{min} \in \mathbb{R}$ hledáme vektor $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že funkce

$$\sigma_p(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i C_{ij} x_j} = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.26)$$

nabývá svého minima v bodě \mathbf{x}_{opt} za podmínek

$$r_p(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{x} \geq r_{min}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

V účelové funkci je symetrická matice \mathbf{S} z Definice 5 nahrazena kovarianční maticí $2\mathbf{C}$, vektor \mathbf{c} je zde nulový. Při tvorbě matic \mathbf{A} a \mathbf{G} a odpovídajících pravých stran \mathbf{b} a \mathbf{h} záleží na tom, jestli podmínky z (2.27) jsou rovnostního nebo nerovnostního tvaru. Jestliže jsou podmínky rovnostního tvaru, potom spadají do prvního vztahu v definici množiny V ve (2.5). Naopak, jestliže jsou nerovnostního tvaru, spadají do druhého vztahu. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je tvořena řádkem samých jedniček a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ je tvořen jedničkou. Matice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ je jednotková matice až do řádku n , řádek $n+1$ je tvořen očekávanými výnosy. Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n+1}$ je nulový až do řádku n , poslední řádek je tvořen minimálním očekávaným výnosem.

V tomto modelu dochází k minimalizování rizika portfolia σ_p , a zároveň je přitom kladen požadavek na určitou minimální výši očekávaného výnosu portfolia r_p , neboli volba portfolia \mathbf{x}_{opt} zahrnuje kompromis mezi očekávaným výnosem a rizikem. Předpokladem je, že se bude investovat do rizikových aktiv [2, str. 155].

Účelová funkce (2.26) vyjadřuje minimalizaci rizika změny výnosu za určitou dobu. První vztah v omezující podmínce (2.27) zaručuje dosažení alespoň minimální přijatelné výnosnosti portfolia r_{min} , která je stanovená předem. Druhý vztah v (2.27) zajišťuje, aby součet relativních podílů jednotlivých aktiv v portfoliu se rovnal jedné, neboli zajištění toho, že investor využije právě tu částku, která je pro tento účel stanovená. Poslední nerovnost v (2.27) znamená, že není povolen prodej nakrátko tzv. „sell short“ [2, str. 155].

Množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu

V této úloze dochází současně k maximalizování funkce očekávané výnosnosti r_p a zároveň k minimalizování funkce rizika změny výnosnosti σ_p , neboli hledáme *Pareto optimální portfolio*. S touto úlohou koresponduje množina přípustných a efektivních portfolií z kapitoly 1.2.1.

Model 2. Stejně jako v [2, str. 186] je úloha definována tak, že při známé kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a výnosnosti $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$ hledáme Pareto optimální vektor $\mathbf{x}_{par} \in \mathbb{R}^n$ ve smyslu Definice 7, kde

$$f_1(\mathbf{x}) = \sigma_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad f_2(\mathbf{x}) = -r_p(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{x}, \quad (2.28)$$

a množina

$$V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}\}. \quad (2.29)$$

Vektor \mathbf{x}_{par} lze sestrojít použitím *skalarizace* ve tvaru

$$z_1 \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} - z_2 \bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{x}, \quad (2.30)$$

za podmínek

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Volba multiplikátorů $z_1 > 0$ a $z_2 > 0$ závisí na tom, jak moc investor preferuje výnos nad rizikem nebo naopak, jak moc chce mít investici bezpečnou. Čím větší je z_1 , tím má kvadratická část funkce (2.30) větší vliv, neboli když hledáme minimum, hledáme portfolio s nižším rizikem. Když se naopak zvětšuje z_2 , dochází k maximalizování výnosnosti.

Pomocí skalarizace a zvolením konkrétních multiplikátorů $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$ převedeme úlohu (2.28) - (2.29) na úlohu kvadratické optimalizace (2.4) - (2.5), kde $\mathbf{S} = 2z_1 \mathbf{C}$ a $\mathbf{c} = -z_2 \bar{\mathbf{r}}$.

Jestliže zvolíme $z_2 = 1$, potom v úloze (2.30) - (2.31) dostaneme všechny Pareto optimální portfolia s výjimkou dvou případů $z_1 \rightarrow 0^+$ a $z_1 \rightarrow +\infty$, kde v prvním případě dostaneme maximální očekávanou výnosnost bez ohledu na riziko a v druhém případě dostaneme minimální riziko bez ohledu na očekávaný výnos (viz portfolia B a C z Obrázku 1.2) [2, str. 186].

Tyto varianty můžeme nadefinovat následujícím způsobem:

Množina přípustných portfolií \mathcal{P} má tvar

$$\mathcal{P} = \{(\sigma_p, r_p) \mid \sigma_p = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad r_p = \bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{0} \preceq \mathbf{x}\}. \quad (2.32)$$

Z (2.31) vyplývá, že $\mathbf{0} \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{1}$. Tuto podmínku můžeme nahradit obecnou podmínkou $\mathbf{d} \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{h}$, kde vektory $\mathbf{d}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ budou předem zadané.

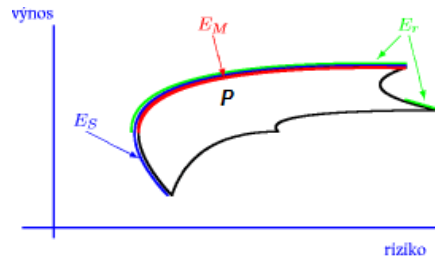
Jestliže hledáme extrémní hodnoty efektivních portfolií, tak nejdříve nadefinujeme množinu E_r portfolií maximalizujících očekávaný výnos ve tvaru:

$$E_r = \{(\sigma_r, r_r) \in \mathcal{P} \mid r_r = \max_{(\sigma_p, r_p) \in \mathcal{P}} r_p\} \quad (2.33)$$

a potom množinu E_s , která obsahuje portfolia s minimálním rizikem (množina efektivních portfolií v Sharpeho smyslu) ve tvaru:

$$E_s = \{(\sigma_s, r_s) \in \mathcal{P} \mid \sigma_s = \min_{(\sigma_p, r_p) \in \mathcal{P}} \sigma_p\}. \quad (2.34)$$

Průnikem těchto množin E_r a E_s získáme množinu efektivních portfolií E_M , neboli množinu Pareto optimálních vektorů pro úlohu (2.28) - (2.29), což je ilustrováno na Obrázku 2.3 [6, str. 45].



Obrázek 2.3: Markowitzova množina efektivních portfolií [6, str. 45]

Kapitola 3

Aplikace na cenné papíry v ČR

3.1 Výběr cenných papírů

Pro ilustrování výše zmíněných úloh jsem si vybrala 5 aktiv obchodovaných na Burze cenných papírů Praha, kde se zpravidla obchodují nejlikvidnější emise cenných papírů. Do portfolia jsou zařazena tato aktiva: ČEZ, a.s., KOMERČNÍ BANKA, a.s., ERSTE GROUP BANK, UNIPETROL, a.s. a CETV CME. Výběr aktiv byl ovlivněn délkou historie dostupných kurzů, protože portfolio je bráno na 5 let.

Data byla stažena ze zdroje [10], kde je možné dohledat uzavírací ceny, ale i další potřebné informace. U dat byla následně překontrolována jejich úplnost a byly upraveny případné nedostatky (vymazání datumů, u kterých chyběla informace o ceně). Akcie byly dále převedeny na bezdividendové pomocí vzorce (1.2), výše dividend a dny ex-date BCPP jsou brány ze zdroje [9]. Všechny ceny daných aktiv a další výsledky, které budou v práci uvedeny jsou k nalezení v excelovském souboru *bakalarskapracekopova*.

Název cenného papíru	ISIN	Kurz [Kč]	Objem obchodu [Kč]
ČEZ, a.s.	CZ0005112300	429,5	210 675 835
ERSTE GROUP BANK, a.s.	AT0000652011	867,6	152 190 894
KOMERČNÍ BANKA, a.s.	CZ0008019106	949,7	39 759 904
UNIPETROL, a.s.	CZ0009091500	285,9	16 955 712
CETV CME	BMG200452024	101,1	6 616 879

Tabulka 3.1: Přehled aktiv a odpovídajících dat k 5. 5. 2017

3.2 Popis jednotlivých cenných papírů

ČEZ, a.s.

ČEZ, a.s. je česká společnost zabývající se produkcí a prodejem elektřiny. Dalším předmětem podnikání je také produkce, distribuce a prodej tepla. Společnost provozuje různé typy elektráren a poskytuje i zařízení generující elektřinu nebo telekomunikační služby. Skupina ČEZ má aktivně fungující společnosti např. v Polsku, Bulharsku, Německu a na Slovensku [11]. Podrobné informace k nalezení v excelovském souboru na listu *ČEZ*.



Obrázek 3.1: Graf vývoje kurzu akcií společnosti ČEZ, a.s.

ERSTE GROUP BANK

ERSTE GROUP BANK je rakouská společnost, která nabízí celou řadu bankovních a finančních dlužeb, např. spoření, investiční fondy, spotřebitelské a hypoteční úvěry, atd.. Společnost působí v Rakousku, České republice, Slovensku a Chorvatsku prostřednictvím svých dceřinných společností [11]. Podrobné informace k nalezení v excelovském souboru na listu *ERSTE GROUP BANK*.



Obrázek 3.2: Graf vývoje kurzu akcií společnosti ERSTE GROUP BANK

KOMERČNÍ BANKA, a.s.

KOMERČNÍ BANKA, a.s. je banka se sídlem v České republice nabízející finanční služby a produkty pro jednotlivce, podnikatele a malé podniky. Hlavní činností je poskytování úvěrů, záruk a bankovních služeb prostřednictvím pobočkových sítí po celé ČR, ale také poskytuje zahraniční operace a investiční bankovníctví. Banka vlastní několik dceřinných společností [11]. V roce 2016 (konkrétně 12. 5.) proběhlo štěpení cen akcií (split) v poměru 1:5, pro porovnání z předchozími roky je nutné všechny kurzy před tímto datem vydělit 5. Podrobné informace k nalezení v excelovském souboru na listu *KOMERČNÍ BANKA*.



Obrázek 3.3: Graf vývoje kurzu akcií společnosti KOMERČNÍ BANKA, a.s.

UNIPETROL, a.s.

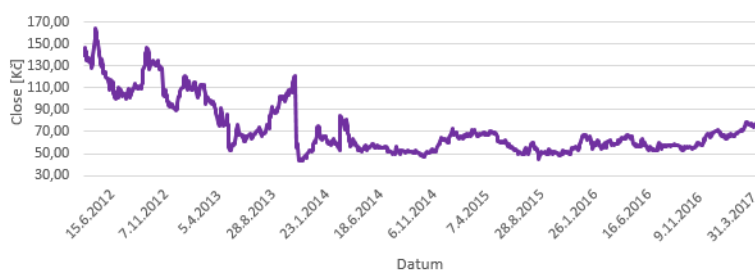
UNIPETROL, a.s. je holdingová společnost se sídlem v České republice. Působí v sektoru rafinérií, a to v těchto oblastech: zpracování ropy a velkoobchod ropy, petrochemická výroba a její prodej, maloobchodní prodej motorových paliv. Podílí se také na distribuci pohonných hmot a provozování čerpacích stanic [11]. Podrobné informace k nalezení v excelovském souboru na listu *UNIPETROL*.



Obrázek 3.4: Graf vývoje kurzu akcií společnosti UNIPETROL, a.s.

CETV CME

CETV CME je mediální skupina, která provozuje televizní vysílání a podniká v oblasti internetu a televize v 7 zemích střední a východní Evropy. Televizní kanály společnosti jsou např. v České republice (TV NOVA), Slovensku (TV Markíza) a Chorvatsku (NOVA TV) [11]. Podrobné informace k nalezení v excelovském souboru na listu *CETV CME*.



Obrázek 3.5: Graf vývoje kurzu akcií společnosti CETV CME

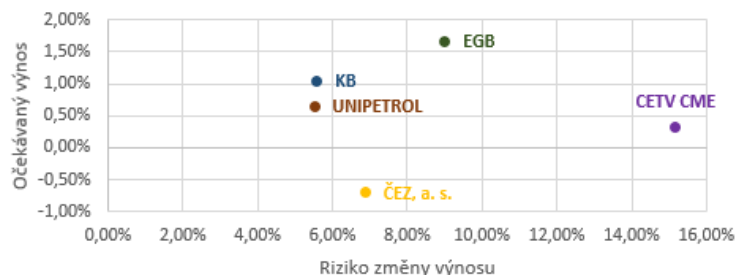
3.3 Odhadnutí potřebných charakteristik

Základem pro optimalizační úlohy je odhadnutí očekávané výnosnosti \bar{r}_i , rizika změny výnosu σ_i v portfoliu, a také určení kovarianční matice \mathbf{C} . Odhady provedeme z historických dat od dubna roku 2012 až do března roku 2017, doba trvání portfolia je $T = 1252$ dní. Všechny odhady byly provedeny ke dni 31. 3. 2017. Abychom mohli tyto charakteristiky odhadnout, musíme nejdříve ze vzorce (1.1) vypočítat relativní přírůstky tržních cen pro hodnoty $k = 21$ (1 měsíc) a $k = 63$ (3 měsíce), protože předpokládáme, že měsíc má v průměru 21 obchodních dní. Očekávanou měsíční (resp. tříměsíční) výnosnost \bar{r}_i odhadneme pomocí vzorce (1.3) a ze vzorce (1.4) odhadneme riziko změny měsíčního (resp. tříměsíčního) výnosu σ_i . Jednotlivé výpočty a odhady jsou na listu *Úprava dat 1 měsíc*, resp. *Úprava dat 3 měsíce*.

Aktiva	Očekávaný výnos		Riziko změny výnosu	
	Časová řada 1 měsíc	Časová řada 3 měsíce	Časová řada 1 měsíc	Časová řada 3 měsíce
ČEZ	-0,70%	-1,94%	6,88%	12,40%
KB	1,04%	3,06%	5,59%	7,84%
EGB	1,67%	5,06%	9,01%	14,11%
UNIPETROL	0,64%	1,44%	5,51%	8,76%
CETV CME	0,31%	-0,47%	15,17%	22,65%

Tabulka 3.2: Tabulka odhanutých charakteristik pro jeden (resp. tři) měsíce

Z Tabulky 3.2 je vidět, že nejvyšší měsíční (resp. tříměsíční) výnos plyne z akcií ERSTE GROUP BANK, zároveň se však jedná i o jedno z nejrizikovějších aktiv. Největší riziko plyne z cenných papírů CETV CME.



Obrázek 3.6: Prostor Riziko - Výnos, časová řada 1 měsíc

Pro vytvoření množiny efektivních portfolií a dalších potřebných výpočtů budou dále brány pouze historické jednoměsíční výnosnosti.

K tomu abychom zjistili vztahy mezi jednotlivými aktivy nám poslouží kovarianční matice C , kde jednotlivé prvky matice byly vypočteny podle vzorce (1.5). Kovarianční matice je symetrická a na hlavní diagonále jsou rozptýly daných aktiv.

Kovarianční matice					
	ČEZ	KB	EGB	UNIPETROL	CETV CME
ČEZ	0,00473	0,00157	0,00137	0,00025	-0,00089
KB	0,00157	0,00313	0,00204	0,00019	0,00035
EGB	0,00137	0,00204	0,00812	0,00107	0,00087
UNIPETROL	0,00025	0,00019	0,00107	0,00304	0,00123
CETV CME	-0,00089	0,00035	0,00087	0,00123	0,02302

Tabulka 3.3: Kovarianční matice C

3.4 Řešení optimalizačních úloh

Jestliže máme určené potřebné charakteristiky, můžeme začít řešit optimalizační úlohy, kde bude za úkol zjistit procentuální podíl jednotlivých aktiv, a také vytvoření efektivních množin portfolia.

3.4.1 Hledání podílů akcií v portfoliu v Markowitzově smyslu

Pro zjištění procentuálního podílu jednotlivých aktiv v portfoliu uvažujeme úlohu z Modelu 1, kde je tedy zakázán „*sell short*“ a podmínka, že se investuje vše. Musíme znát kovarianční matici C , a také si musíme zvolit minimální

očekávaný výnos r_{min} . Pro odhad bylo zjištěno, že kovarianční matice je pozitivně definitní (všechna vlastní čísla matice C jsou kladná), bod minima je tedy nejvýše jeden.

Odhad byl proveden v softwaru Excel pomocí doplňku *Řešitel dat* na listu *Podíly jednotlivých aktiv* a pro porovnání bylo zvoleno několik možností s různým minimálním očekávaným výnosem r_{min} .

Minimální očekávaný výnos r_{min} je nulový

Minimální očekávaný výnos je nulový, neboli nastává situace, kdy investor neprodělá. Při tomto výnosu má největší procentuální podíl v portfoliu společnost UNIPETROL, a.s., naopak nejmenší podíl připadá společnosti ERSTE GROUP BANK.

Minimální očekávaný výnos r_{min} je zvýšen na 1 %

Při tomto výnosu se procentuální podíl jednotlivých aktiv změní a největší podíl bude mít KOMERČNÍ BANKA, a.s.. Naopak společnost ČEZ, a.s. nebude mít podíl žádný.

Minimální očekávaný výnos r_{min} je zvolen na 1,67 %

Minimální výnos byl zvolen největší možný, kdy ještě má optimalizační úloha řešení. V tomto případě největší (skoro 100 %) podíl připadá společnosti ERSTE GROUP BANK. Ostatní společnosti mají podíl nulový nebo minimální.

Optimální portfolio *neexistuje*, jestliže minimální očekávaný výnos přesáhne hodnotu 1,67 %.

r_{min}	0	r_{min}	0,005	r_{min}	0,01	r_{min}	0,015	r_{min}	0,017
r_p	0,005274	r_p	0,005270	r_p	0,010000	r_p	0,015000	r_p	0,016660
σ_p^2	0,001466	σ_p^2	0,001466	σ_p^2	0,001823	σ_p^2	0,005359	σ_p^2	0,008064
σ_p	0,038294	σ_p	0,038294	σ_p	0,042701	σ_p	0,073203	σ_p	0,089802
Aktiva	Váhy	Aktiva	Váhy	Aktiva	Váhy	Aktiva	Váhy	Aktiva	Váhy
$x_{\text{ČEZ}}$	18,02%	$x_{\text{ČEZ}}$	18,03%	$x_{\text{ČEZ}}$	0,00%	$x_{\text{ČEZ}}$	0,00%	$x_{\text{ČEZ}}$	0,00%
x_{KB}	34,63%	x_{KB}	34,63%	x_{KB}	47,02%	x_{KB}	26,99%	x_{KB}	0,44%
x_{EGB}	0,24%	x_{EGB}	0,23%	x_{EGB}	16,68%	x_{EGB}	73,01%	x_{EGB}	99,56%
$x_{\text{UNIPETROL}}$	42,87%	$x_{\text{UNIPETROL}}$	42,86%	$x_{\text{UNIPETROL}}$	35,55%	$x_{\text{UNIPETROL}}$	0,00%	$x_{\text{UNIPETROL}}$	0,00%
$x_{\text{CETV CME}}$	4,24%	$x_{\text{CETV CME}}$	4,25%	$x_{\text{CETV CME}}$	0,75%	$x_{\text{CETV CME}}$	0,00%	$x_{\text{CETV CME}}$	0,00%
Suma x_i	100,00%	Suma x_i	100,00%	Suma x_i	100,00%	Suma x_i	100,00%	Suma x_i	100,00%

Tabulka 3.4: Zvolené varianty minimální očekávané výnosnosti r_{min} a k nim odhadnuté procentuální podíly

3.4.2 Vykreslení množin efektivních portfolií

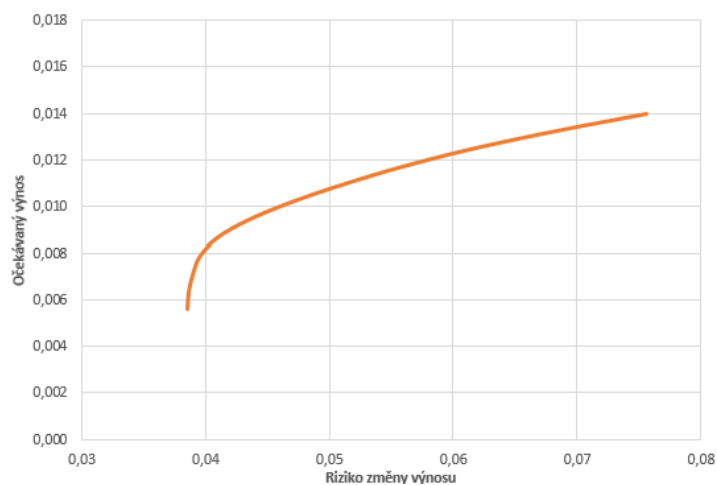
Vykreslení množiny efektivních portfolií bez zavedení bezrizikového aktiva za podmínky $0,05 \leq x \leq 1$

Pro aproximaci množiny efektivních portfolií uvažujeme úlohu z Modelu 2, kde je zakázán „sell short“. Byla zavedena podmínka $x \geq 0,05$, aby bylo investováno do všech aktiv v portfoliu, protože při aproximaci polopřímky CML a tvoření optimálního (tržního) portfolia, musí mít každý cenný papír nenulový podíl. Nejprve byly pomocí doplňku *Řešitel dat* v softwaru Excel nalezeny váhy jednotlivých krajních portfolií *A* a *B*, kdy u portfolia *A* bylo minimalizováno riziko změn výnosů aktiv $\sigma_{p,min}$ a dále dopočten minimální očekávaný výnos $r_{p,min}$. Naopak u portfolia *B* byl maximalizován očekávaný výnos $r_{p,max}$ a dopočteno riziko $\sigma_{p,max}$. Poté byl spočítán interval možných hodnot očekávaného výnosu r_p , pomocí vhodně zvoleného ekvidistantního kroku, který je mezi portfoliem s nejmenším rizikem a největší výnosností ($krok\ r_p = \frac{r_{p,max} - r_{p,min}}{11}$). Následně bylo vytvořeno 10 dalších efektivních portfolií, u kterých bylo při požadovaném výnosu minimalizováno riziko. Podrobné informace k nalezení na listu *Efektivní množina, CML*.

Váhy												
Body	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B
x_{ktz}	17,77%	13,33%	8,88%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%
x_{kb}	31,40%	35,41%	39,41%	42,98%	42,45%	41,92%	41,39%	40,86%	40,33%	29,32%	17,15%	5,00%
x_{geb}	5,00%	5,00%	5,00%	5,91%	13,53%	21,14%	28,76%	36,37%	43,98%	55,68%	67,85%	80,00%
$x_{UNIPETROL}$	40,82%	41,26%	41,70%	41,12%	34,02%	26,94%	19,85%	12,77%	5,70%	5,00%	5,00%	5,00%
$x_{CZTV\ CME}$	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%
Suma x_i	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Parametry												
r_p (požadované)	0,0056	0,0064	0,0072	0,0079	0,0087	0,0094	0,0102	0,0110	0,0117	0,0125	0,0132	0,0140
r_p (vypočtené)	0,0056	0,0064	0,0072	0,0079	0,0087	0,0094	0,0102	0,0110	0,0117	0,0125	0,0132	0,0140
σ_p^2	0,0015	0,0015	0,0015	0,0016	0,0017	0,0019	0,0022	0,0026	0,0031	0,0038	0,0046	0,0057
σ_p	0,0385	0,0386	0,0390	0,0395	0,0410	0,0435	0,0469	0,0511	0,0559	0,0615	0,0681	0,0756

Tabulka 3.5: Váhy a parametry jednotlivých efektivních portfolií

Jestliže není zavedeno bezrizikové aktivum, potom grafické znázornění množin efektivních portfolií vypadá následujícím způsobem.



Obrázek 3.7: Množina efektivních portfolií

Vykreslení efektivní množiny při zavedení bezrizikového aktiva za podmínky $0,05 \preceq x \preceq 1$

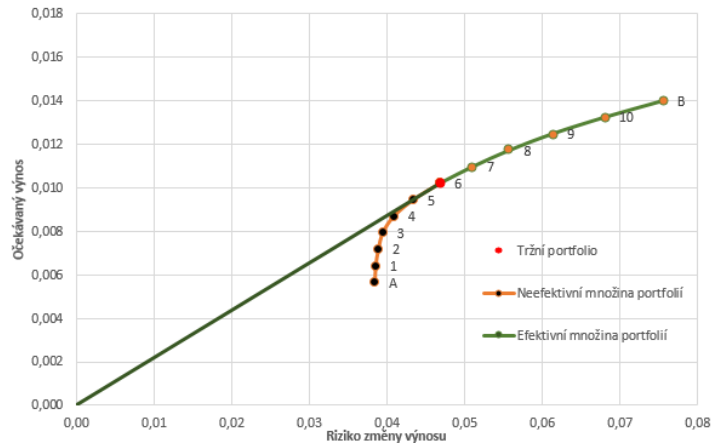
V našem případě je zakázán „sell short“, takže místo polopřímky CML získáme pouze úsečku spojující body R_f a M . Pro vykreslení úsečky CML a nalezení optimálního portfolia jsme museli zahrnout do portfolia bezrizikové aktivum. Byl vybrán termínovaný účet [7] Komerční banky s očekávaným výnosem bezrizikového aktiva $r_f = 0,01\%$. Počáteční bod R je známý při nulovém riziku a měsíční výnosnosti $r_f = 0,0008\%$. Úsečka CML bude aproximována bodem R_f a odhadnutým tečným bodem M . Při hledání tržního portfolia maximalizujeme směrnici úsečky CML, tedy $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$. Maximální hodnotu známe, protože z předchozí úlohy máme vytvořenou efektivní množinu. Největší hodnoty dosáhneme váhami portfolia č. 6. Toto portfolio bude tedy i tržní. Podrobné informace k nalezení na listu *Efektivní množina, CML*.

AKTIVA	VÁHY
x_{CEZ}	5,00%
x_{KB}	41,39%
x_{EGB}	28,76%
$x_{UNIPETROL}$	19,85%
$x_{CETV\ CME}$	5,00%
Suma x_i	100,00%

Tabulka 3.6: Váhy tržního portfolia č. 6

Ze znalosti počátečního bodu $R = [0; 0,000008]$ a dopočteného tečného bodu $M = [0,0469; 0,0102]$ je zkonstruována úsečka ve tvaru

$$r_p = 0,000008 + 0,217084 \sigma_p.$$



Obrázek 3.8: Množina efektivních a neefektivních portfolií

Na Obrázku 3.8 je znázorněna efektivní množina spolu s tržním portfoliem. Portfolia, která leží pod efektivní množinou na oranžové křivce, jsou neefektivní, jestliže je možné investovat do bezrizikového aktiva.

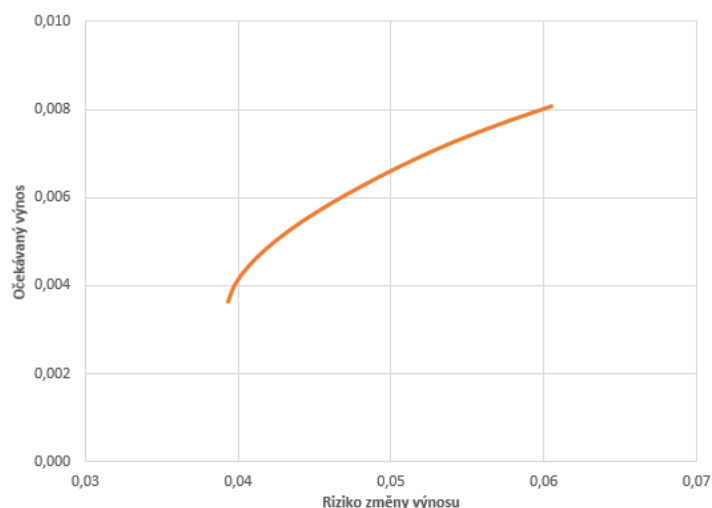
Vykreslení efektivní množiny bez zavedení bezrizikového aktiva za podmínky $0,3 \leq x_{CEZ} \leq 1$

Pro aproximaci množiny efektivních portfolií uvažujeme modifikovanou úlohu z Modelu 2, kdy v množině přípustných řešení $\mathbf{0}, \mathbf{05} \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{1}$ je podmínka $0,05 \leq x_{CEZ} \leq 1$ nahrazena nerovnicí $0,3 \leq x_{CEZ} \leq 1$. Tato podmínka je přidána, protože investor může chtít v portfoliu větší procentuální podíl od známé a velké společnosti jako je ČEZ, a.s.. Dojde tedy k přepočtení vah. Podrobné informace k nalezení na listu *Efektivní množina, CML, ČEZ*.

Váhy												
Body	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B
x_{CEZ}	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%	30,00%
x_{KB}	22,60%	25,61%	25,33%	25,05%	24,77%	24,49%	24,21%	23,92%	23,64%	17,86%	11,43%	5,00%
x_{EG8}	5,00%	7,75%	11,78%	15,81%	19,84%	23,87%	27,90%	31,93%	35,96%	42,14%	48,57%	55,00%
$x_{UNIPETROL}$	37,40%	31,65%	27,90%	24,15%	20,40%	16,65%	12,90%	9,15%	5,40%	5,00%	5,00%	5,00%
$x_{CETV CME}$	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%
Suma x_i	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Parametry												
$r_{p(požadované)}$	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0052	0,0057	0,0061	0,0065	0,0069	0,0073	0,0077	0,0081
$r_{p(vypočtené)}$	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0052	0,0057	0,0061	0,0065	0,0069	0,0073	0,0077	0,0081
σ_p^2	0,0015	0,0016	0,0017	0,0018	0,0019	0,0020	0,0022	0,0024	0,0027	0,0029	0,0033	0,0037
σ_p	0,0393	0,0398	0,0407	0,0419	0,0433	0,0451	0,0470	0,0492	0,0515	0,0541	0,0571	0,0605

Tabulka 3.7: Váhy a parametry jednotlivých efektivních portfolií

Grafické znázornění aproximace křivky tvořené množinou efektivních portfolií bylo vytvořeno vynesemím požadovaných výnosů a dopočtených rizik.



Obrázek 3.9: Množina efektivních portfolií

Vykreslení efektivní množiny při zavedení bezrizikového aktiva za podmínky $0,3 \leq x_{CEZ} \leq 1$

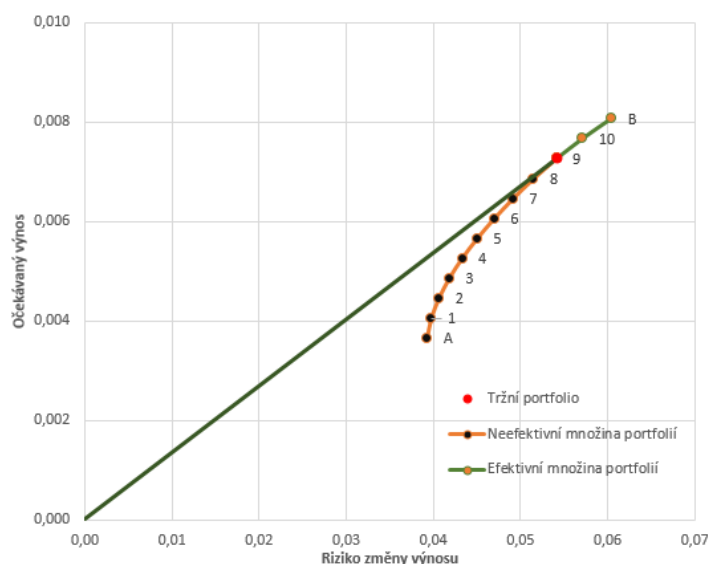
V tomto případě je i při zavedení nové podmínky stále zakázán „sell short“, budeme tedy sestrojovat pouze úsečku. Pro její vykreslení bylo vybráno stejné bezrizikové aktivum jako v předešlé úloze při aproximaci úsečky CML. Pro hledání tržního portfolia musíme najít maximální hodnotu směrnice úsečky CML. Největší hodnoty dosáhne směrnice při použití vah cenných papírů portfolia č. 9. Podrobné informace k nalezení na listu *Efektivní množina, CML, ČEZ*.

AKTIVA	VÁHY
x_{CZT}	30,00%
x_{KB}	17,86%
x_{EGB}	42,14%
$x_{\text{UNIPETROL}}$	5,00%
$x_{\text{CETV CME}}$	5,00%
Suma x_i	100,00%

Tabulka 3.8: Váhy tržního portfolia č. 9

Pomocí počátečního bodu $R = [0; 0,00008]$ a dopočteného tečného bodu $M = [0,0541; 0,0073]$ je zkonstruována úsečka ve tvaru

$$r_p = 0,000008 + 0,133938 \sigma_p.$$



Obrázek 3.10: Množina efektivních a neefektivních portfolií

Na Obrázku 3.10 je znázorněna efektivní i neefektivní množina spolu s tržním portfoliem.

3.4.3 Hledání podílů akcií v portfoliu pomocí skalarizace a vykreslení efektivní množiny

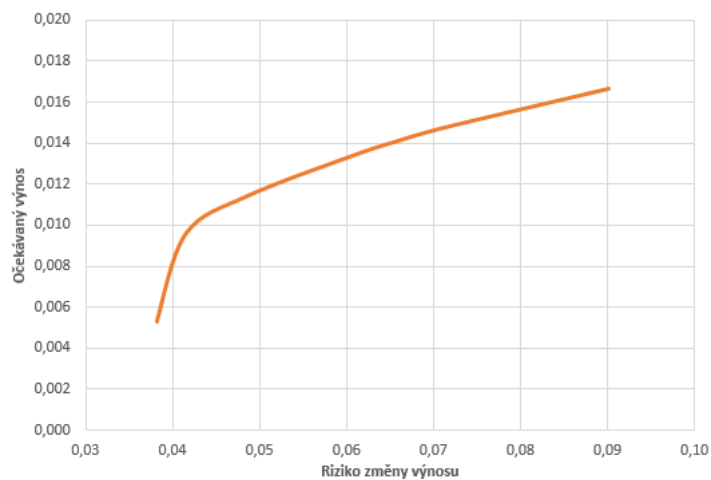
Procentuální podíly jednotlivých akcií v portfoliu zjišťujeme pomocí skalarizační úlohy ve tvaru (2.30) - (2.31), kde $z_2 = 1$ a $z_1 > 0$ budeme libovolně volit. Všechny tyto portfolia spadají do efektivní množiny portfolií. V Tabulce 3.9 jsou znázorněny Pareto optimální portfolia pro jednotlivé volby z_1 ,

a také dopočtené jednotlivé parametry σ_p a r_p . Odhad byl proveden pomocí doplňku *Řešitel dat*. Podrobné informace k nalezení na listu *Skalarizace*.

Váhy										
Body	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{CEZ}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	17,62%	17,73%	17,83%	17,99%
x_{KB}	0,00%	30,29%	41,20%	44,91%	46,27%	47,05%	34,91%	34,83%	34,76%	34,61%
x_{EGB}	100,00%	69,71%	58,80%	50,19%	30,66%	13,02%	0,38%	0,34%	0,31%	0,31%
$x_{UNIPETROL}$	0,00%	0,00%	0,00%	4,90%	23,07%	38,50%	42,90%	42,89%	42,88%	42,86%
$x_{CETV.CME}$	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,44%	4,20%	4,21%	4,22%	4,23%
Suma x_i	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Parametry										
$f_z(x)$	-0,0166	-0,0107	-0,0098	-0,0090	-0,0067	-0,0009	0,7279	1,0212	1,4612	14,6592
z_1	1,00E-02	0,8	1	1,2	2	5	500	700	1000	10000
r_p	0,0166872	0,0147938	0,0141121	0,0133775	0,0114291	0,0096031	0,0053540	0,0053314	0,0053115	0,0052840
σ_p^2	0,0081172	0,0050932	0,0043262	0,0036636	0,0023647	0,0017317	0,0014665	0,0014665	0,0014665	0,0014665
σ_p	0,0900957	0,0713664	0,0657737	0,0605276	0,0486277	0,0416135	0,0382953	0,0382948	0,0382944	0,0382943

Tabulka 3.9: Váhy a parametry jednotlivých aktiv při různých volbách multiplikátoru z_1

Grafické znázornění aproximace křivky tvořené množinou efektivních portfolií bylo vytvořeno vynesemím parametrů σ_p a r_p .



Obrázek 3.11: Množina efektivních portfolií

Kapitola 4

Další možné úlohy

V budoucnosti bych se chtěla zaměřit na další způsob odhadu charakteristik \bar{r}_i a σ_i a níže popsanou optimalizační úlohu, která pracuje s neúplnou kova-
rianční maticí. Tato úloha není snadno implementovatelná v softwaru Excel,
pro numerický výpočet bude muset být použit jiný softwarový nástroj.

4.1 Expertní metoda pro odhadování parametrů \bar{r}_i a σ_i

Tato metoda je vhodnější než historická metoda, protože respektuje člověka
a jeho očekávání ohledně budoucnosti. Jedná se o expertní odhad tržních cen
jednotlivých aktiv v okamžiku realizace (nákupu) portfolia. Každý expert
udělá odhad tržní ceny pro všechna aktiva, která budou zařazena do port-
folia. Kvůli přehlednému značení nebude uvažováno úročení a diskontování
toků výnosů, které plynou z portfolia během jeho trvání [1, str. 30].

Stejně jako u [1, str. 30] budeme při tomto používat následující proměnné
a charakteristiky:

n ... počet aktiv v portfoliu

P_i ... tržní cena i -tého aktiva v době vzniku portfolia

N_e ... počet expertů

$TC_{i,j}$... velikost tržní ceny i -tého aktiva podle předpovědi j -tého experta
v době vzniku portfolia

$D_{i,j}$... velikost dividendy, kterou získá vlastník z i -tého aktiva podle j -tého
experta v době trvání portfolia

$Y_{i,j}$... relativní výnos z i -tého aktiva předpovídaný j -tým expertem za dobu trvání portfolia:

$$Y_{i,j} = \frac{TC_{i,j} + D_{i,j} - P_i}{P_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_e. \quad (4.1)$$

$y_{i,j}, (y_{i,j,m})$... daná realizace (funkční hodnota) veličiny $Y_{i,j}$

$tc_{i,j}, (tc_{i,j,m})$... daná realizace (funkční hodnota) veličiny $TC_{i,j}$

$d_{i,j}, (d_{i,j,m})$... daná realizace (funkční hodnota) veličiny $D_{i,j}$

A_i ... *diskrétní* náhodná veličina, popisující výnos i -tého aktiva za celou dobu trvání portfolia

Od expertů můžeme také získat informaci o pravděpodobnosti, s kterou odhadují velikost tržní ceny i -tého aktiva v době realizace portfolia.

$N_{i,j}$... celkový počet odhadů budoucí tržní ceny $tc_{i,j,m}$ i -tého aktiva, který provedl j -tý expert

$p_{i,j,m}$... pravděpodobnost, že i -té aktivum podle j -tého experta dosáhne v okamžiku realizace portfolia m -tého výnosu

Pro určení rozdělení pravděpodobnosti a následného odhadnutí parametrů \bar{r}_i a σ_i známe současné tržní ceny aktiv, které jsou zařazeny v době vzniku portfolia. Dále experti zadají potřebné hodnoty $tc_{i,j,m}$ a $d_{i,j,m}$ a pravděpodobnost $p_{i,j,m}$ tak, aby platilo:

$$\sum_{m=1}^{N_{i,j}} p_{i,j,m} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_e. \quad (4.2)$$

Poté vyjdeme ze vzorce (4.1) a vypočteme m -tý výnos i -tého aktiva za dobu trvání portfolia, který odhaduje j -tý expert:

$$y_{i,j,m} = \frac{tc_{i,j,m} + d_{i,j,m} - P_i}{P_i}, \quad (4.3)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_e, \quad m = 1, \dots, N_{i,j}.$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je potom dáno předpisem:

$$P[A_i = y_{i,m} = y_{i,j,m}] = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} p_{i,j,m}, \quad (4.4)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N_{i,j}.$$

Očekávaný výnos \bar{r}_i a riziko změny výnosu portfolia σ_i můžeme definovat:

$$\bar{r}_i = \sum_{m=1}^{N_{i,j}} p_{i,m} y_{i,m}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{m=1}^{N_{i,j}} p_{i,m} (y_{i,m})^2 - \left(\sum_{m=1}^{N_{i,j}} p_{i,m} y_{i,m}\right)^2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

4.2 Optimalizační úloha s neúplnou informací o kovarianční matici

V optimalizační úloze s neúplnou informací o kovarianční matici budeme uvažovat, že známe portfolio \mathbf{x}_{opt} a o kovarianční matici \mathbf{C} máme jen částečné informace. Matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ohraničená maticemi $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tedy každá hodnota C_{ij} je ohraničená horní a dolní mezí $L_{ij} \leq C_{ij} \leq U_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Pro stanovení kovarianční matice \mathbf{C} může být využito např. známých rozptylů daných portfolií, informací o korelačních koeficientech, a nebo také může být matice odhadnuta pomocí faktorových modelů [2, str. 171 - 173].

Model 3. Úlohou je při známém vektoru $\mathbf{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$, maticích $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ najít kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takovou, že funkce

$$\mathbf{x}_{opt}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{opt} \quad (4.7)$$

nabývá svého maxima za podmíněk

$$\mathbf{L} \preceq \mathbf{C} \preceq \mathbf{U} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} \succeq \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Druhá část podmínky (4.8) říká, že matice \mathbf{C} musí být pozitivně semidefinitní. Optimální kovarianční matice \mathbf{C} je „nejhorší“ kovarianční matice v souladu s daným intervalem, kde „nejhorší“ je ve smyslu toho, že díky ní vznikne největší riziko změny výnosu portfolia \mathbf{x}_{opt} . Pro řešení této optimalizační úlohy bude využita modifikovaná semidefinitní optimalizace, která je popsána v [2, str. 168].

Závěr

V práci jsou shrnuty dvě optimalizační úlohy z teorie portfolia a matematické optimalizace, a to kvadratická a Pareto optimalizace. K těmto úlohám byly sestaveny nutné a postačující podmínky existence minima a na jednoduchém příkladu byly také ilustrovány.

Optimalizační úlohy jsou využity v kapitole 3, kde jsou aplikovány na cenné papíry v ČR. Bylo vybráno 5 společností z Burzy cenných papírů Praha (ČEZ, a.s., KOMERČNÍ BANKA, a.s., ERSTE GROUP BANK, UNIPETROL, a.s. a CETV CME). Pomocí doplňku *Řešitel dat* v softwaru Excel byly odhadnuty procentuální podíly jednotlivých aktiv a zjišťovalo se, při jakém minimálním očekávaném výnosu nebude mít úloha řešení. V softwaru Matlab by pro tuto úlohu byla využita funkce *quadprog()*. Úloha Pareto optimalizace je využita při hledání Pareto optimálních portfolií, a také při aproximaci efektivních množin, kdy jsou dány různé omezující podmínky. Po zavedení bezrizikového aktiva byla aproximována polopřímka CML (resp. úsečka, protože je ve všech případech zakázán „*sell short*“).

V poslední kapitole je popsán další odhad charakteristik aktiva, a také optimalizační úloha s neúplnou kovarianční maticí, těmito úlohami bych se chtěla v budoucnosti dále zabývat.

Literatura

- [1] BRADA, Jaroslav. *Teorie portfolia*. Praha: Ediční oddělení VŠE Praha, 1996. ISBN 80-7079-259-0.
- [2] BOYD, Stephen a VANDENBERGHE, Lieven. *Convex optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [3] MÍKA, Stanislav. *Matematická optimalizace*. Plzeň: Vydavatelství ZČU Plzeň, 1997. ISBN 80-7082-319-4.
- [4] MARTINÁKOVÁ, Martina. *Úloha komplementarity a její aplikace*. Olomouc, 2010. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [5] ČÁMSKÝ, František. *Přednášky k předmětu ESF/PFTEPO vyučovaném na Masarykově univerzitě v Brně* [online]. 2008 [cit. 15. 3. 2017]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1456/jaro2008/PFTEPO>
- [6] FRIESEL, Michal a ŠEDIVÁ, Blanka. *Finanční matematika HYPERTEXTOVĚ* [online]. 2003 [cit. 20. 3. 2017]. Dostupné z: <https://home.zcu.cz/friestl/hfim/hFimS.pdf>
- [7] BANKY.CZ. *Přehled a porovnání termínovaných vkladů* [online]. © 2017 [cit. 25. 4. 2017]. Dostupné z: <http://www.banky.cz/pruvodce-financnimi-produkty/terminovany-vklad/>
- [8] FINANCE HELP. *Yahoo Finance* [online]. © 2014 [cit. 31. 4. 2017]. Dostupné z: <https://help.yahoo.com/kb/finance/sln28256.html>
- [9] FIO BANKA. *Dividendy* [online]. © 2017 [cit. 12. 4. 2017]. Dostupné z: <https://www.fio.cz/zpravodajstvi/dividendy>
- [10] KURZY.CZ. *Akcíe online* [online]. © 2000 [cit. 12. 4. 2017]. Dostupné z: <http://www.kurzy.cz/>
- [11] PATRIA ONLINE. *Detail akcie* [online]. © 2000 [cit. 15. 4. 2017]. Dostupné z: <https://www.patria.cz/akcie/detail/online.html>

Seznam obrázků

1.1	Indiferenční křivky	8
1.2	Efektivní a přípustná množina rizikových aktiv	9
1.3	Efektivní a přípustná množina s bezrizikovým aktivem	10
1.4	Capital Market Line	11
2.1	Geometrické zobrazení kvadratické optimalizace	14
2.2	Geometrické zobrazení Pareto optimalizace	18
2.3	Markowitzova množina efektivních portfolií [6, str. 45]	21
3.1	Graf vývoje kurzu akcií společnosti ČEZ, a.s.	23
3.2	Graf vývoje kurzu akcií společnosti ERSTE GROUP BANK	23
3.3	Graf vývoje kurzu akcií společnosti KOMERČNÍ BANKA, a.s.	24
3.4	Graf vývoje kurzu akcií společnosti UNIPETROL, a.s.	24
3.5	Graf vývoje kurzu akcií společnosti CETV CME	25
3.6	Prostor Riziko - Výnos, časová řada 1 měsíc	26
3.7	Množina efektivních portfolií	29
3.8	Množina efektivních a neefektivních portfolií	30
3.9	Množina efektivních portfolií	31
3.10	Množina efektivních a neefektivních portfolií	32
3.11	Množina efektivních portfolií	33

Seznam tabulek

1.1	Ukázka přepočtu na bezdividendové akcie	7
3.1	Přehled aktiv a odpovídajících dat k 5. 5. 2017	22
3.2	Tabulka odhanutých charakteristik pro jeden (resp. tři) měsíce	25
3.3	Kovarianční matice \mathbf{C}	26
3.4	Zvolené varianty minimální očekávané výnosnosti r_{min} a k nim odhadnuté procentuální podíly	27
3.5	Váhy a parametry jednotlivých efektivních portfolií	28
3.6	Váhy tržního portfolia č. 6	29
3.7	Váhy a parametry jednotlivých efektivních portfolií	31
3.8	Váhy tržního portfolia č. 9	32
3.9	Váhy a parametry jednotlivých aktiv při různých volbách mul- tiplikátoru z_1	33