

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
DIFÚZNÍ MODELY NA GRAFECH

PLZEŇ, 2017

JAN MATAS

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr bakalářského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 1. června 2017

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. za vstřícnost, trpělivost a odborné rady při konzultacích a psaní této práce. Děkuji i své rodině za podporu.

Abstrakt

V této práci se zabýváme matematickým modelováním difúze mezi oddělenými oblastmi, jejichž vzájemná propojení modelujeme grafy. S pomocí teorie grafů a obyčejných diferenciálních rovnic vytvoříme jednoduchý difúzní model nad grafem se dvěma vrcholy, který následně zobecníme pro libovolný souvislý neorientovaný graf.

Difúzi zde nechápeme pouze jako přesun z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací, ale jako obecnější proces přesunu daný difúzní funkcí. Je-li difúzní funkce lineární, modelujeme difúzi v již popsaném klasickém pojetí. Zvolíme-li ji ale nelineární, můžeme modelovat složitější procesy, např. shlukování a koexistence.

Po formálním vybudování modelů následují v případě grafu se dvěma vrcholy a lineární difúze pro libovolný graf poznatky o asymptotickém chování. Práce je doplněna numerickými experimenty i v případě shlukování a koexistence pro obecný graf, které nastiňují možné směry dalšího zdokonalování modelů a demonstrují několik nevyřešených otázek k analýze modelů představených v této práci.

Klíčová slova: difúze, matematická analýza, diferenciální rovnice, matematické modelování, autonomní dynamický systém, graf, spolupráce.

Abstract

In this thesis, we study diffusion among separated but connected regions. The mutual connection between those regions is modelled by graphs where vertices represent regions and edges connections among them. Firstly, we use the theory of differential equations and graph theory to create a simple diffusion model for graph with two vertices which is afterward generalised for any arbitrary connected undirected graph.

The term diffusion is treated more generally in this thesis. We do not regard it only as a movement from regions of high concentration to regions of low concentration but more likely as a general process of movement given by a specific diffusion function. If the diffusion function is linear, the common diffusion of uniform spread is modelled. But if the diffusion function is chosen as nonlinear, more complicated processes, i.e. clustering and coexistence can be considered.

After formal mathematical properties of models are ensured, the stability analysis follows in case of models on graph with two vertices and linear diffusion for arbitrary graph. For models of clustering and coexistence on an arbitrary graph have been done several numerical experiments to motivate further research.

Keywords: diffusion, mathematical analysis, differential equations, mathematical modelling, autonomous dynamical system, graph, cooperation.

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní pojmy	3
2.1	Obyčejné diferenciální rovnice	3
2.1.1	Existence řešení obyčejných diferenciálních rovnic	4
2.1.2	Stabilita	5
2.2	Teorie grafů	7
3	Difúzní modely na grafu se dvěma vrcholy	10
3.1	Lineární difúze	14
3.1.1	Stabilita	15
3.2	Shlukování	17
3.2.1	Stabilita	18
3.3	Koexistence	20
3.3.1	Stabilita	21
4	Difúzní modely na libovolném neorientovaném grafu	23
4.1	Lineární difúze	27
4.1.1	Stabilita	29
4.2	Shlukování a koexistence	31
5	Závěr	36

Kapitola 1

Úvod

Matematické modelování se v posledních letech rychle rozšiřuje, kromě klasických vědních oborů jako fyzika nebo chemie, i do oblastí společenských věd [16] nebo biologie [3], kde pomáhá ve výzkumu např. teorie her [11], teorie rozhodování [13], epidemiologie [7] nebo ekologie [1]. V této práci se budeme zabývat matematickým modelováním difúze s přesahem do několika z těchto nově rozvíjených oblastí.

Difúzi v této práci nemodelujeme ve spojitém prostoru, nýbrž na libovolně propojených oblastech, které modelujeme pomocí grafů. Jako první interpretace se tak naskýtá stěhování lidí nebo zvířat, představují-li vrcholy různé oblasti a hrany jejich propojení. To, ale není jediným možným výkladem. Reprezentují-li vrcholy grafu například různé názory, preference (volební, spotřební) nebo třeba strategie, a hrany možné změny těchto názorů, resp. preferencí, strategií, pak můžeme modelovat tendence v chování voličů, spotřebitelů, hráčů, zvířat, apod. V těchto případech ale nedává difúze v klasickém pojetí, tedy jako přesun z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí z nižší koncentrací, smysl. Proto pojem difúze v našich modelech rozšíříme na nějaký obecnější proces přesunu daný difúzní funkcí.

Volbou difúzní funkce můžeme ovlivňovat jaké tendence v chování modelujeme. Zvolíme-li ji jako lineární funkci, jedná se o model klasické difúze spějící k rovnoměrnému rozprostření. Dosadíme-li ale za difúzní funkci jiné nelineární funkce, které postupně představíme v této práci, můžeme modelovat shlukování, které spěje k seskupování do jednoho nebo i více oddělených vrcholů nebo koexistenci modelující složitější chování, kdy jedinci mají určité protichůdné motivace, například těží ze spolupráce a proto se chtějí shlukovat, zároveň však profitují i z více dostupných zdrojů z méně obydlených lokalit. Více o spolupráci z pohledu teorie her si čtenáři mohou přečíst v Nowak [14]. Pro jednoduchost a lepší srozumitelnost budeme v dalším textu používat terminologii prvně zmíněné interpretace modelu, tedy jakožto stěhování lidí nebo zvířat mezi různými lokalitami.

Přehled základních matematických definic a vět, které budeme potřebovat pro formální vytvoření a k analýze modelu, je uveden v kapitole 2, která je rozdělena na dvě hlavní podkapitoly. První z nich se zabývá teorií obyčejných diferenciálních rovnic, zejména existencí řešení a jeho vlastnostmi a teorií stability, která nám poskytuje aparát k analýze asymptotického chování vzniklých modelů. Ve druhé podkapitole definujeme pojmy z teorie grafů, které využijeme zejména při budování modelů pro obecný graf.

V kapitole 3 si představíme jednoduchý difúzní model pro graf se dvěma vrcholy, popsaný soustavou diferenciálních rovnic. Ukážeme, jaké podmínky a požadavky musí být splněny, aby model zachovával matematické vlastnosti, které nám umožní interpretovat jednotlivé funkce řešící soustavu popisující model, jako relativní četnosti celkové populace přebývající na příslušných lokalitách. Tyto požadavky nám také dají klíč k tomu, jaké konkrétní funkce volit jako difúzní. Odvodíme tak modely pro lineární difúzi, shlukování a koexistenci, u kterých následně provedeme analýzu asymptotického chování.

Jednoduchý model difúze pro graf se dvěma vrcholy zobecníme v kapitole 4 pro libovolný souvislý neorientovaný graf, který v podobném duchu formalizujeme. Opět pomocí konkrétních difúzních funkcí odvodíme modely pro lineární difúzi, shlukování a koexistenci, kde kompletní analýzu stability provedeme pouze u lineární difúze. Na numerických experimentech demonstrujeme rozdílné rychlosti konvergence řešení ke klidovým stavům, které zřejmě závisí na počtu hran v grafu a některé zajímavé situace pro modely shlukování a koexistence.

Kapitola 2

Základní pojmy

V této práci využíváme poznatky zejména ze dvou rozsáhlých oblastí matematiky, kterými jsou teorie obyčejných diferenciálních rovnic a teorie grafů. V následujících podkapitolách bude uveden stručný přehled definic a vět, ze kterých vycházíme v následujícím textu. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic využijeme zejména věty o existenci a jednoznačnosti řešení a dále poznatky z teorie stability autonomních dynamických systémů. Teorie grafů nám následně poslouží k zobecnění jednoduchého modelu pro graf se dvěma vrcholy, který představíme v Kapitole 3, pro libovolný neorientovaný graf bez smyček, popsany v Kapitole 4.

2.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Jelikož budeme zkoumat dynamiku migrace populace mezi různými lokalitami, kterou bude ovlivňovat zejména obydlenost daných lokalit, použijeme k vytvoření modelu aparát obyčejných diferenciálních rovnic, které dávají do souvislosti funkci popisující počet jedinců v daných lokalitách a její derivaci, vyjadřující okamžitou změnu v závislosti na čase.

Definice 1. Obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu je rovnice ve tvaru:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0,$$

kde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $x = x(t)$ je hledaná funkce.

My se budeme zabývat rovnicemi pouze prvního řádu, které můžeme zapsat jako

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

a jejich soustavami:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{2.1}$$

kde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ je vektor neznámých funkcí a $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorovou funkcí.

2.1.1 Existence řešení obyčejných diferenciálních rovnic

V této části se budeme zabývat existencí řešení soustav diferenciálních rovnic ve tvaru (2.1) a jeho vlastnostmi. Definice 2 a 3 jsou převzaty z Cibulka [2].

Definice 2. (Počáteční úloha) Necht' je dána funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, interval $I \subset [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ a bod $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Úloha najít funkci $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \in I, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

se nazývá počáteční úloha a funkce $\mathbf{x}(t)$, splňující (2.2) pro všechna $t \in I$, nazveme řešením počáteční úlohy (2.2) na intervalu I .

Definice 3. (Lipschitzovská spojitost) Funkce $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s definičním oborem $D = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ se nazývá lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné, existuje-li konstanta $L > 0$ taková, že pro každé $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in D$ platí:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (2.3)$$

Definice 4. (lokální lipschitzovská spojitost) Funkci $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s definičním oborem $D = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ nazveme lokálně lipschitzovsky spojitou, je-li lipschitzovsky spojitá na každé uzavřené podmnožině definičního oboru D .

Picardovu-Lindelöfovou větu a následující text o prodloužení intervalu existence řešení jsme převzali z Kelley, Peterson [8].

Věta 5. (Picardova-Lindelöfova, [8, Theorem 8.13]) Necht' $a, b > 0$ a vektorová funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, je lipschitzovsky spojitá v proměnné \mathbf{x} na množině

$$Q := \{(t, \mathbf{x}) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b\}.$$

Dále označme:

$$M := \max \{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| : (t, \mathbf{x}) \in Q\}$$

a

$$h := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Potom existuje právě jedno řešení \mathbf{x} počáteční úlohy (2.2) na intervalu $[t_0, t_0 + h]$ a navíc pro každé $t \in [t_0, t_0 + h]$ platí:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b.$$

Definice 6. (Maximální interval existence řešení, [8, Definition 8.31]) Necht' D je otevřená podmnožina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, funkce $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a $x(t)$ je řešení (2.2) na intervalu (a, b) . Tento interval (a, b) nazveme pravým maximálním intervalem existence řešení $x(t)$, pokud neexistuje $b_1 > b$ a funkce $y(t)$, která řeší (2.2) na intervalu (a, b_1) a zároveň platí, že $y(t) = x(t)$ pro $t \in (a, b)$. Levý maximální interval existence řešení je definován obdobně. Interval (a, b) nazveme maximálním intervalem existence řešení $x(t)$, je-li zároveň pravým i levým maximálním intervalem existence pro řešení $x(t)$.

Věta 7. [8, Corollary 8.35] Je-li funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a omezená, pak každé řešení soustavy $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ má maximální interval existence $(-\infty, \infty)$.

2.1.2 Stabilita

Tato část se zabývá teorií stability autonomních dynamických systémů, kterou rozpracoval ruský matematik Ljapunov a která nám pomůže analyzovat asymptotické chování populace v našem modelu. Pro bližší čtení viz Kelley, Peterson [8] nebo Strohatz [17]. Následující text je převzat z Cibulka [2].

Definice 8. Soustava obyčejných diferenciálních rovnic popisuje dynamický autonomní systém, je-li ve tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je funkce nezávislejší na čase t a $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný počáteční čas.

Dále nazveme:

- prostor \mathbb{R}^n fázovým (stavovým) prostorem,
- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ stavem systému v čase $t \geq t_0$,
- množinu

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} = \mathbf{x}(t), t \geq t_0\},$$

kde $\mathbf{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešení (2.4) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ trajektorií,

- množinu všech trajektorií fázovým portrétem.

V dalším textu budeme předpokládat, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ má příslušná počáteční úloha (2.4) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ jednoznačné řešení $\mathbf{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. To máme zaručeno, pokud je funkce \mathbf{f} lipschitzovsky spojitá na \mathbb{R}^n , viz Věta 5.

Definice 9. Klidovým (stacionárním) stavem dynamického autonomního systému (2.4) nazveme stav $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Definice 10. (Stabilita klidového stavu) Necht' je dán autonomní dynamický systém (2.4). O klidovém stavu $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ říkáme, že:

- (i) je (ljapunovsky) stabilní, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pro které platí, že $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \delta$, a pro řešení $\mathbf{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ rovnice (2.4) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ platí, že

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \text{ pro všechna } t \geq t_0,$$

- (ii) je (ljapunovsky) nestabilní, jestliže není stabilní,

- (iii) je atraktivní (přitahuje řešení), jestliže existuje $\beta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pro které platí, že $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \beta$, a pro řešení $\mathbf{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ rovnice (2.4) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

(iv) asymptoticky (ljapunovsky) stabilní, jestliže je stabilní a atraktivní.

Poznámka 11. Je-li klidový stav $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ asymptoticky stabilní, potom se množina

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}^*) := \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \right\}$$

nazývá oblastí přitažlivosti klidového stavu \mathbf{x}^* . Klidový stav $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ se nazývá globálně asymptoticky stabilní, jestliže jeho oblastí přitažlivosti je celý fázový prostor, tj. je-li $\mathcal{B}(\mathbf{x}^*) = \mathbb{R}^n$.

Text o stabilitě nelineárních autonomních systémů vychází z Kelley, Peterson [8], str. 113. Chování řešení systému (2.4) blízko klidových stavů \mathbf{x}^* je možné zkoumat pomocí lineari- zace, tj. aproximováním nelineárních rovnic na okolí klidových stavů \mathbf{x}^* rovnicemi lineár- ními. Je-li funkce \mathbf{f} diferencovatelná v bodě \mathbf{x}^* , můžeme soustavu (2.4) zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.5)$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je konstantní matice a pro funkci $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, která vyjadřuje členy vyšších řádů platí:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|} = 0.$$

Maticí \mathbf{A} v soustavě (2.5) je Jacobiho matice parciálních derivací vektorové funkce \mathbf{f} v bodě \mathbf{x}^* , tj.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}.$$

Pokud mají všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} nenulové reálné části, pak chování řešení soustavy rovnic (2.4) na okolí bodu \mathbf{x}^* je podobné chování řešení linearizované soustavy rovnic

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.6)$$

blízko počátku.

Předchozí text shrnuje následující věta o stabilitě.

Věta 12. [8, Theorem 3.26] Je-li \mathbf{x}^* klidovým stavem systému (2.4) a funkce \mathbf{f} je diferencovatelná v bodě \mathbf{x}^* , platí následující tvrzení.

- (i) Mají-li všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} zápornou reálnou část, pak je klidový stav \mathbf{x}^* asymptoticky stabilní.
- (ii) Existuje-li vlastní číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, pak je klidový stav \mathbf{x}^* nestabilní.

Poznámka 13. Máme-li místo soustavy pouze skalární diferenciální rovnici

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.7)$$

pak o stabilitě klidového stavu $x^* \in \mathbb{R}$ rozhodujeme podle znaménka derivace funkce f v bodě x^* .

(i) Je-li $f'(x^*) < 0$, klidový stav x^* je asymptoticky stabilní.

(ii) Je-li $f'(x^*) > 0$, klidový stav x^* je nestabilní.

Věta 14. [8, Theorem 2.49] Mějme soustavu rovnic (2.6) popisující autonomní dynamický systém a necht' je \mathbf{A} konstantní matice. Pak platí následující tvrzení.

(i) Existuje-li vlastní číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, pak je klidový stav \mathbf{x}^* nestabilní.

(ii) Pokud jsou všechna vlastní čísla s nulovou reálnou jednonásobná, pak je klidový stav \mathbf{x}^* stabilní.

(iii) Pokud mají všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} záporné reálné části, klidový stav \mathbf{x}^* je globálně asymptoticky stabilní.

2.2 Teorie grafů

Graf je základním matematickým objektem teorie grafů. Tvoří ho množina vrcholů a hran, které reprezentují propojení vrcholů. Pomocí této diskrétní struktury budeme modelovat migraci populace mezi libovolným počtem navzájem různě propojených lokalit. Následující text o grafech jsme převzali z Holub [6]

Definice 15. Graf G je uspořádaná dvojice množin $(V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je množina vrcholů a $E(G)$ je množina hran. Hranou rozumíme dvojici vrcholů u a v , kterou budeme značit $\{u, v\}$. Záleží-li na uspořádání vrcholů ve hraně, pak nazveme graf G *orientovaným* a pokud ne, budeme ho nazývat *neorientovaným*.

Dále se budeme zabývat pouze grafy neorientovanými. U neorientovaných grafů nepřípouštíme smyčky, tj. hrany, které spojují jeden a ten samý vrchol.

Definice 16. (okolí) Necht' G je graf. Jsou-li vrcholy $u, v \in V(G)$ propojeny hranou $\{u, v\} \in E(G)$ říkáme, že vrchol v je sousedem vrcholu u a naopak. Dále označme $\mathcal{N}(v)$ množinu všech sousedů vrcholu $v \in V(G)$, tj. všech vrcholů $u \in V(G)$, pro které platí, že jsou spojeny hranou $\{u, v\} \in E(G)$ s vrcholem v , tj.

$$\mathcal{N}(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}. \quad (2.8)$$

Tato množina se nazývá okolím vrcholu v .

Definice 17. Necht' G je graf a $v \in V(G)$. Pak se číslo

$$\deg(v) = |\mathcal{N}(v)| \quad (2.9)$$

nazývá *stupněm vrcholu* v .

Definice 18. Necht' G, G' jsou grafy. Zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(G')$ nazveme *homomorfizmus* grafu G do G' , jestliže platí, že hrana $\{u, v\} \in E(G)$ se zobrazí na hranu $f\{u, v\} \in E(G')$. Zkráceně značíme $f : G \rightarrow G'$.

Definice 19. Necht' G_1, G_2 jsou grafy. Řekneme, že G_1 je *podgrafem* grafu G_2 , což budeme značit jako $G_1 \subseteq G_2$, jestliže $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ a současně $E(G_1) \subseteq E(G_2)$.

Poznámka 20. Označme některé speciální grafy na množině vrcholů $V = \{1, 2, \dots, n\}$:

- Úplný graf $K_n = (V, \binom{V}{2})$,
- Kružnice (cyklus) délky $n \geq 3$, $C_n = (V, \{\{i, i+1\}, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{n, 1\})$,
- Cesta délky $n \geq 2$, $P_n = (V, \{\{i, i+1\}, i = 1, \dots, n-1\})$.

Definice 21. Necht' G je graf a $f : P_n \rightarrow G$ je homomorfizmus, kde $V(P_n) = 1, 2, \dots, n$ a platí, že $f(1) = u$ a $f(n) = v$. Potom podgraf $f(P_n)$ nazveme *sled* mezi vrcholy u a v .

Poznámka 22. Necht' f je homomorfizmus. Jestliže ve sledu $f(P_n)$ z vrcholu u do vrcholu v nedochází k opakování hran, pak ho nazveme *tahem* mezi u a v , a pokud nedochází k opakování vrcholů, říkáme, že jde o *cestu* mezi u a v .

Definice 23. Graf G nazveme *souvislým*, pokud pro každé $u, v \in V(G)$ existuje sled mezi u a v .

Libovolný graf můžeme elegantně reprezentovat maticí, například pokud ho potřebujeme uložit do paměti počítače. Následující definici jsme převzali z Godsila, Royle [5].

Definice 24. Necht' G je neorientovaný graf s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Pak matici $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$, jejíž členy a_{ij} jsou dány předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{i, j\} \in E(G), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2.10)$$

nazveme *maticí sousednosti grafu* G .

Poznámka 25. Protože G je neorientovaný graf bez smyček, matice sousednosti \mathbf{A}_G má na diagonále nuly a navíc je symetrická.

Následující text je převzat z Mohar [12]

Definice 26. (Laplaceova (Kirchhoffova) matice) Necht' G je neorientovaný graf s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Matici $\mathbf{L}_G = (l_{ij})_{n \times n}$, jejíž členy jsou dány předpisem:

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j, \\ -1 & \text{pro } i \neq j : \{i, j\} \in E(G), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nazveme *Laplaceovu matici grafu* G .

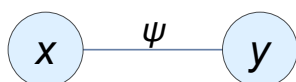
Věta 27. [12, Theorem 2.1] Necht' G je graf, \mathbf{L}_G je Laplaceova matice grafu G a λ_k je k -té nejmenší vlastní číslo matice \mathbf{L}_G . Potom platí:

- (i) matice \mathbf{L}_G má pouze reálná vlastní čísla,
- (ii) matice \mathbf{L}_G je pozitivně semidefinitní,
- (iii) nejmenší vlastní číslo $\lambda_1 = 0$ a k němu příslušný vlastní vektor je $[1, 1, \dots, 1]^T$. Násobnost nulového vlastního čísla λ_1 je rovna počtu komponent grafu G .

Kapitola 3

Difúzní modely na grafu se dvěma vrcholy

Mějme dvě místa (lokality), na kterých může přebývat nějaká populace a která jsou navzájem propojena. Jedinci populace se tak mohou libovolně přemísťovat z jednoho místa do druhého. Tuto situaci můžeme znázornit grafem se dvěma vrcholy x a y , které představují jednotlivé lokality, a neorientovanou hranou, reprezentující jejich propojení.



Obrázek 3.1: Dvě propojené lokality x a y reprezentované grafem se dvěma vrcholy. Difúzní funkce ψ určuje pravidla, podle kterých se populace stěhuje.

Dynamiku migrace populace mezi jednotlivými lokalitami můžeme popsat následující soustavou diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \phi_1(x(t), y(t)), \\y'(t) &= \phi_2(y(t), x(t)),\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ reprezentují množství jedinců populace přebývajících na jednotlivých lokalitách a $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou difúzní funkce, které charakterizují vnitřní tendence pohybu populace, tj. pravidla, podle kterých se populace stěhuje. Uvažujme, že tyto pravidla, podle kterých se jedinci stěhují, nezávisí na tom, ve které lokalitě se zrovna nachází, tj. $\phi_1 = \phi_2$. Máme tedy pouze jednu difúzní funkci, kterou označme $\phi(u, v)$.

Jelikož konkrétní počty jedinců můžeme vždy dopočítat z relativních četností, známe-li množství celkové populace, budeme dále uvažovat $x(t), y(t)$ jako relativní četnosti jedinců přebývajících v lokalitách x, y v čase t .

Migrace mezi lokalitami závisí v našem modelu pouze na proměnných $x(t), y(t)$. Například přebývá-li jedinec v lokalitě x , kde se ve stejný okamžik nachází i čtvrtina celkové populace, a tento jedinec maximalizuje svůj užitek tak, že se stěhuje na více obydlená místa,

přestěhuje se na základe srovnání obydlivosti do lokality y . Toto porovnání obydlivosti jednotlivých lokalit můžeme vyjádřit jako rozdíl relativních četností jedinců, např. $x(t) - y(t)$. Zavedme proto novou difúzní funkci, která bude nyní funkcí jedné proměnné a jejím argumentem bude zmíněný rozdíl. Označíme-li ji jako $\psi(s)$, můžeme soustavu (3.1) zapsat jako

$$\begin{aligned}x'(t) &= \psi(x(t) - y(t)), \\y'(t) &= \psi(y(t) - x(t)),\end{aligned}\tag{3.2}$$

kde $x(t), y(t)$ jsou relativní četnosti jedinců v lokalitách x, y a difúzní funkce je nyní $\psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Volbou konkrétních funkcí za difúzní funkci $\psi(s)$, získáme různé modely, kterými se budeme zabývat v dalších podkapitolách. V následujícím textu formalizujeme představený model a ukážeme, jak tyto konkrétní funkce volit.

Abychom mohli funkce $x(t), y(t)$ pokládat za relativní četnosti, musí pro každé $t \in [0, \infty)$ platit:

$$\begin{aligned}0 &\leq x(t) \leq 1, \\0 &\leq y(t) \leq 1, \\x(t) + y(t) &= 1.\end{aligned}$$

Toto jsou základní matematické vlastnosti modelu, které potřebujeme zajistit. Aby funkce ψ byla pro následující část textu korektně definována, zavedme funkci $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$\tilde{\psi}(s) = \begin{cases} \psi(s) & \text{pro } s \in [-1, 1], \\ \psi(-1) & \text{pro } s \in (-\infty, -1), \\ \psi(1) & \text{pro } s \in (1, \infty). \end{cases}\tag{3.3}$$

Nejprve formulujme lemma o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy dané soustavou (3.2)

Lemma 28. *(Existence a jednoznačnost řešení) Je-li funkce $\tilde{\psi}(s)$ lokálně lipschitzovsky spojitá, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že počáteční úloha*

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{\psi}(x(t) - y(t)), \\ y'(t) = \tilde{\psi}(y(t) - x(t)), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}\tag{3.4}$$

má pro $0 \leq t \leq \varepsilon$ právě jedno řešení $x(t), y(t)$. Tento interval označme:

$$I := [0, \varepsilon].\tag{3.5}$$

Důkaz. Jde o přímý důsledek Věty 5. □

Nyní máme na intervalu $I = [0, \varepsilon]$ zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení a můžeme proto na tomto intervalu formulovat následující věty, které nám při určitých požadavcích na funkci $\tilde{\psi}(s)$ zajistí, že si řešení $x(t), y(t)$ počáteční úlohy (3.4) zachová vlastnost $x(t) + y(t) = 1$, tedy že součet jeho složek je vždy rovna jedné a dále, že jednotlivé složky $x(t), y(t)$ nabývají vždy hodnot z intervalu $[0, 1]$.

Věta 29. (zachování populace) *Je-li funkce $\tilde{\psi}(s)$ lichá, lokálně lipschitzovsky spojitá a počáteční hodnoty jsou zvoleny tak, že $x_0 + y_0 = 1$, potom pro každé $t \in I$ platí, že součet jednotlivých složek řešení soustavy (3.2) je*

$$x(t) + y(t) = 1.$$

Důkaz. Zvolme $z(t) := x(t) + y(t)$. Potom

$$z'(t) = x'(t) + y'(t) = \tilde{\psi}(x(t) - y(t)) + \tilde{\psi}(y(t) - x(t)).$$

Jelikož je funkce $\tilde{\psi}(s)$ lichá, pro každé $r, s \in \mathbb{R}$ platí:

$$\tilde{\psi}(r - s) + \tilde{\psi}(s - r) = \tilde{\psi}(r - s) - \tilde{\psi}(r - s) = 0,$$

a tedy $z'(t) = 0$. Jelikož je derivace $z(t)$ nulová, řešením je konstanta, tj. $z(t) = C, C \in \mathbb{R}$. Počáteční podmínky jsou zvoleny tak, že $x_0 + y_0 = 1$, pak

$$z(0) = x(0) + y(0) = x_0 + y_0 = 1, \quad (3.6)$$

a proto $z(t) = 1$ je řešení počáteční úlohy. Po zpětném rozepsání dostáváme $x(t) + y(t) = 1$, což platí pro každé $t \in I$, tedy intervalu, na kterém máme zajištěnou existenci a jednoznačnost tohoto řešení díky Lemmatu 28. \square

Důsledek 30. (redukce rovnic) *Platí-li předchozí věta, pak je počáteční úloha (3.4) ekvivalentní počáteční úloze:*

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{\psi}(2x(t) - 1), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Důkaz. Protože si proměnnou $y(t)$ můžeme díky platnosti Věty 29 vyjádřit jako $y(t) = 1 - x(t)$, tedy i $y_0 = 1 - x_0$, a po dosazení do soustavy, ze dvou rovnic o dvou neznámých, vznikne pouze jedna rovnice o jedné neznámé. \square

Další věta nám zajistí, že funkce $x(t)$, která řeší počáteční úlohu (3.7) nikdy v čase neopustí interval $[0, 1]$, tedy ani funkce $y(t) = 1 - x(t)$ nepřesáhne interval $[0, 1]$.

Věta 31. (invariance intervalu $[0, 1]$) *Uvažujme funkci $\tilde{\psi}(s)$ lokálně lipschitzovsky spojitou. Je-li počáteční hodnota x_0 zvolena z intervalu $[0, 1]$ a navíc platí, že*

$$\tilde{\psi}(-1) \geq 0 \text{ a zároveň } \tilde{\psi}(1) \leq 0, \quad (3.8)$$

pak pro každé $t \in I$ platí, že funkce $x(t)$, řešící počáteční úlohu (3.7), nabývá hodnot z intervalu $[0, 1]$.

Důkaz. Předpokládejme, že se pro nějaké $\tilde{t} \in I$ řešení $x(t)$ dostane mimo interval $[0, 1]$, tj. $x(\tilde{t}) < 0$ resp. $x(\tilde{t}) > 1$. Pak, protože funkce $x(t)$ je spojitá, musí existovat okamžik $0 < \hat{t} < \tilde{t}$, takový, že $x(\hat{t}) = 0$ resp. $x(\hat{t}) = 1$. Dosadíme-li do rovnice (3.7), platí následující:

$$(i) \text{ Je-li } x(\hat{t}) = 0, \text{ pak } x'(\hat{t}) = \psi(2x(\hat{t}) - 1) = \psi(-1) \geq 0.$$

$$(ii) \text{ Je-li } x(\hat{t}) = 1, \text{ pak } x'(\hat{t}) = \psi(2x(\hat{t}) - 1) = \psi(1) \leq 0.$$

Je-li $x(\hat{t}) = 0$ a zároveň $x'(\hat{t}) \geq 0$, pak ale pro $t > \hat{t}$ platí, že $x(t) \geq 0$, tedy neexistuje čas $\tilde{t} \in I$ takový, že $x(\tilde{t}) < 0$.

Stejným způsobem zjistíme, že neexistuje čas $\tilde{t} \in I$ takový, že $x(\tilde{t}) > 1$. Řešení $x(t)$ tedy nikdy neopustí interval $[0, 1]$, což je spor s předpokladem. \square

Nyní sice máme zajištěné všechny požadované matematické vlastnosti, díky kterým můžeme funkce $x(t), y(t)$ interpretovat jako relativní četnosti celkové populace, zatím však pouze na intervalu $I = [0, \varepsilon]$, na kterém máme, díky Lemmatu 28, zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení. Tyto vlastnosti bychom ale chtěli mít zaručeny ideálně na celém intervalu $[0, \infty)$. Z Věty 7 o prodloužení intervalu existence řešení víme, že pokud by byla funkce $\tilde{\psi}(s)$ spojitá a omezená, pak by maximálním intervalem existence řešení byl celý interval $[0, \infty)$. Spojitost, dokonce lokální lipschitzovskou, již předpokládáme. Navíc, protože je funkce $\tilde{\psi}(s)$ definována pro $s \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ jako konstantní funkce, je i omezená.

Lemma 32. *Je-li funkce $\tilde{\psi}(s)$ lokálně lipschitzovsky spojitá, pak každé řešení počáteční úlohy (3.7) má maximální interval existence $[0, \infty)$.*

Důkaz. Jde o přímý důsledek Věty 7. \square

Díky předchozímu Lemmatu víme, že řešení počáteční úlohy (3.7) existuje na celém intervalu $[0, \infty)$. Použijeme-li zpětně znovu Lemma 28, máme na tomto maximálním intervalu navíc zajištěnou i jednoznačnost řešení a proto platí i Věty 29 a 31 na celém intervalu $[0, \infty)$.

Protože za výše uvedených předpokladů platí, že funkce $x(t), y(t)$ nikdy neopustí interval $[0, 1]$, argument funkce $\tilde{\psi}(s)$, jenž je rozdílem $x(t), y(t)$, bude vždy z intervalu $[-1, 1]$ a můžeme proto zúžit její definiční obor pouze na tento interval. Pak je ale funkce $\tilde{\psi} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ekvivalentní původní funkci $\psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a všechny předchozí poznatky platí i pro ni.

Následující poznámka shrnuje předchozí text, který se věnoval formálnímu zavedení modelu.

Poznámka 33. V předchozím textu jsme ukázali, jakými požadavky na počáteční hodnoty a funkci $\psi(s)$ lze zajistit, aby obecný model difúze, popsany soustavou rovnic (3.2), zachovával základní matematické vlastnosti, kterými jsou existence a jednoznačnost řešení na $[0, \infty)$, zachování populace a invariance intervalu $[0, 1]$. Díky těmto vlastnostem můžeme řešení $x(t), y(t)$ interpretovat jako relativní četnosti jedinců přebývajících v jednotlivých lokalitách. Požadavky na počáteční hodnoty a funkci $\psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tedy jsou:

1. lokální lipschitzovská spojitost funkce ψ na intervalu $[-1, 1]$,

2. lichost funkce ψ ,
3. $\psi(-1) \geq 0$ a zároveň $\psi(1) \leq 0$
4. $0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1$,
5. $x_0 + y_0 = 1$.

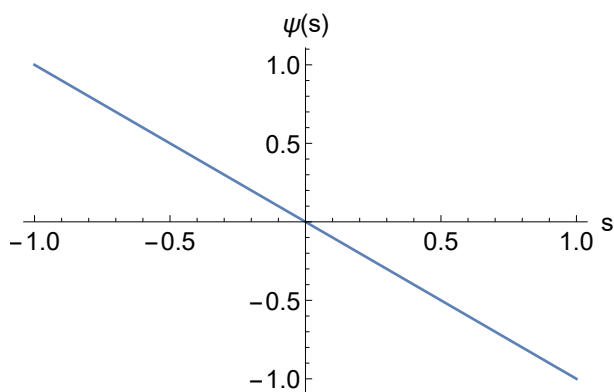
V dalších podkapitolách budou popsány a interpretovány některé možnosti volby funkce $\psi(s)$ na základě výše uvedených kritérií.

3.1 Lineární difúze

V předchozí kapitole bylo ukázáno, jakou funkci je za $\psi(s)$ vhodné volit tak, aby si model zachoval požadované matematické vlastnosti. Zvolme-li $\psi(s)$ jako lineární funkci, která splňuje požadavky shrnuté v Poznámce 33, dostaneme $\psi(s) = -rs$, kde $r > 0$. Soustava diferenciálních rovnic (3.2) popisující dynamický model je pak ve tvaru:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -rx(t) + ry(t), \\ y'(t) &= rx(t) - ry(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tento model popisuje situaci, kdy si jedinci celkové populace mohou vybrat, na které ze dvou rovnocenných lokalit budou přebývat. Obě lokality mají totožné atributy, ale pro jedince je atraktivnější ta, která je méně obydlená. Můžeme to vysvětlit tak, že jedincům neplyne žádný užitek ze spolupráce, nýbrž pouze maximalizují svůj užitek z rovnoměrně rozdělených zdrojů. Pro bližší čtení o spolupráci pohledem teorie her viz Nowak [14].



Obrázek 3.2: Graf funkce $\psi(s) = -rs$ pro $r = 1$.

Parametr r udává jakou rychlostí bude probíhat migrace mezi lokalitami. Budeme ho proto dále nazývat *intenzitou migrace*. Interpretace může být taková, že parametr r popisuje kvalitu propojení dvou míst. Je-li r vysoké, spojení mezi místy má velký průtok a migrace tak může probíhat rychleji.

Výše popsané chování jedinců je nápadně podobné známému fyzikálnímu procesu difúze, kdy látky mají tendenci se rozpínat do celého pro ně dostupného prostoru a vyrovnávat tak koncentraci. Budeme proto pojem *difúze* používat i pro náš model. Pro bližší čtení o tomto tématu viz de Vries [3] nebo Drábek, Holubová [4].

Využijeme-li dále Důsledku 30 o redukci rovnic a přidáme-li počáteční podmínku, získáme počáteční úlohu:

$$\begin{cases} x'(t) = -r(2x(t) - 1), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Jelikož je (3.10) počáteční úloha s nehomogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu s konstantním koeficientem, můžeme ji analyticky vyřešit.

Nejprve nalezneme řešení homogenní rovnice

$$x'(t) + 2rx(t) = 0,$$

pomocí charakteristické rovnice. Výsledkem je funkce $x(t) = Ce^{-2rt}$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$x'(t) + 2rx(t) = r,$$

budeme hledat konstantní, tedy ve tvaru $x(t) = D$, $D \in \mathbb{R}$. Dosazením do nehomogenní rovnice získáme $D = \frac{1}{2}$. Pak obecným řešením (3.10) je funkce

$$x(t) = Ce^{-2rt} + \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}.$$

Zohledníme-li počáteční podmínku $x(0) = x_0$, dostaneme řešení počáteční úlohy (3.10) ve tvaru

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-2rt} + \frac{1}{2}.$$

Řešení pro proměnnou $y(t)$ lze dopočítat ze vztahu $y(t) = 1 - x(t)$, tj.

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-2rt} + \frac{1}{2}.$$

3.1.1 Stabilita

Důležitou součástí popisu dynamického modelu je analýza stability.

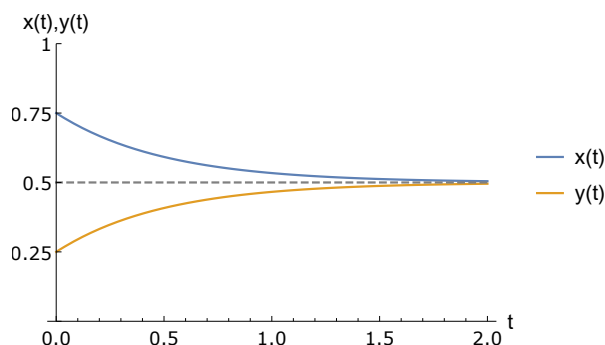
Nejprve nalezneme všechny klidové stavy rovnice (3.10). Budeme tedy řešit rovnici

$$f(x^*) = 0,$$

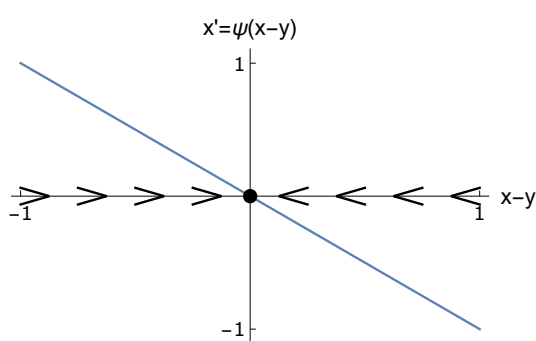
kde $f(x) = -r(2x - 1)$, tj.

$$-r(2x^* - 1) = 0.$$

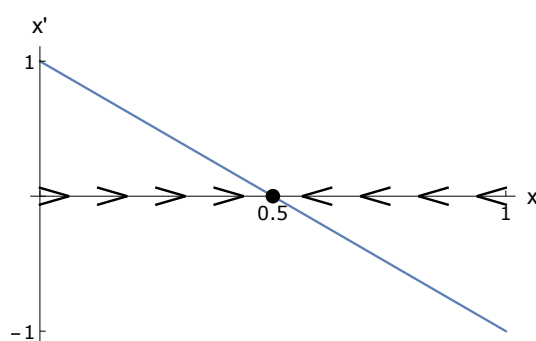
Pro $r > 0$ je řešením vždy pouze jeden klidový stav $x^* = \frac{1}{2}$.



Obrázek 3.3: Řešení počáteční úlohy (3.4) s počátečními hodnotami $x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{3}{4}$ a $r = 1$.



Obrázek 3.4: Fázový portrét modelu lineární difúze popsaného soustavou rovnic (3.9) z pohledu lokality x , tedy rovnice $x'(t) = \psi(x - y)$, kde $\psi(s) = -rs$ s parametrem $r = 1$.



Obrázek 3.5: Fázový portrét modelu lineární difúze, popsaného rovnicí $x' = -r(2x - 1)$, pro parametr $r = 1$.

Věta 34. Mějme rovnici (3.10) popisující model lineární difúze. Potom příslušný klidový stav $x^* = \frac{1}{2}$ je asymptoticky stabilní.

Důkaz. Derivací funkce $f(x) = -r(2x - 1)$ získáme:

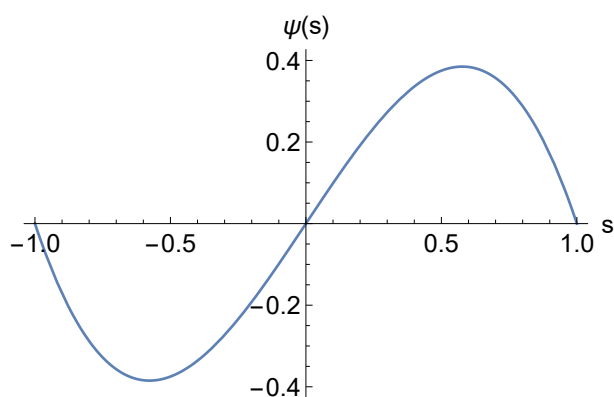
$$f'(x) = -2r. \quad (3.11)$$

Jelikož $r > 0$ je intenzita migrace, výraz (3.11) je záporný pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro klidový stav $x^* = \frac{1}{2}$ platí, že

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) < 0,$$

a proto podle Věty 12 je klidový stav $x^* = \frac{1}{2}$ asymptoticky stabilní. \square

Poznámka 35. Dopočítáním hodnoty y^* pomocí vztahu $y^* = 1 - x^*$, kde $x^* = \frac{1}{2}$ je klidovým stavem redukované rovnice (3.10), získáme vektor $\mathbf{x}^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$, který je asymptoticky stabilním klidovým stavem soustavy (3.9).



Obrázek 3.6: Graf funkce $\psi(s) = -rs(s-1)(s+1)$ pro $r = 1$.

Poznámka 36. O stabilitě klidového stavu $x^* = \frac{1}{2}$ vypovídá i fázový portrét (Obrázek 3.5). Pro každé $r > 0$ je fázovým portrétem modelu (3.10) klesající přímka, která protíná osu x v $\frac{1}{2}$. Pokud $x < \frac{1}{2}$ je x' vždy kladná, a tedy řešení x je rostoucí funkce. Pro $x > \frac{1}{2}$ je x' vždy naopak záporná, proto řešením x je klesající funkce. Klidový stav $x^* = \frac{1}{2}$ je tedy globálně asymptoticky stabilní.

Výsledky analýzy potvrzují, že jedinci mezi lokalitami budou vždy migrovat tak, že se rozdíl v osídlení míst budou stále zmenšovat, tzn. relativní četnosti $x(t), y(t)$ konvergují k hodnotě $\frac{1}{2}$.

3.2 Shlukování

Volbou jiných funkcí $\psi(s)$, které splňují předpoklady Věty 29 a Věty 31, tentokrát ale nelineárních, dostaneme modely nelineární difúze.

Zvolíme-li funkci

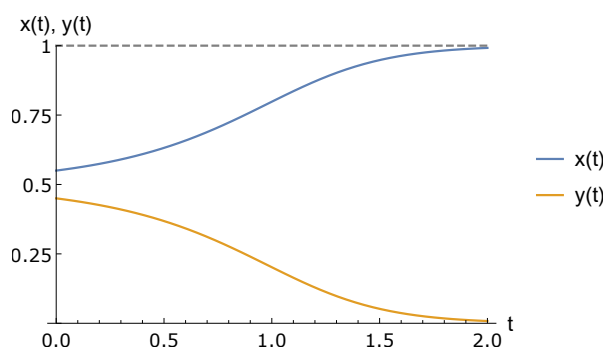
$$\psi(s) := -rs(s-1)(s+1),$$

kde $r > 0$ je intenzita migrace, bude soustava (3.2) popisovat situaci, kdy se jedinci mají tendence shlukovat. Celková populace se tedy nerozprostře rovnoměrně mezi dvě lokality, ale naopak se postupně všichni jedinci přemístí do jedné z nich. Dosazením zvolené funkce $\psi(s)$ do soustavy (3.2), získáme soustavu nelineárních diferenciálních rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -r(x(t) - y(t))(x(t) - y(t) - 1)(x(t) - y(t) + 1), \\ y'(t) &= -r(y(t) - x(t))(y(t) - x(t) - 1)(y(t) - x(t) + 1), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

stručněji:

$$\begin{aligned} x' &= -r(x - y)(x - y - 1)(x - y + 1), \\ y' &= -r(y - x)(y - x - 1)(y - x + 1). \end{aligned} \quad (3.13)$$



Obrázek 3.7: Řešení soustavy (3.12) pro počáteční hodnoty $x_0 = 0.55, y_0 = 0.45$ a intenzitu migrace $r = 1$. Populace se celá shlukuje do lokality x .

Průběh řešení soustavy (3.12) pro $r = 1$ a počáteční podmínky $x_0 = 0.55$ a $y_0 = 1 - x_0 = 0.45$ získaného numericky je zaznamenáno na Obrázku 3.7, kde můžeme pozorovat tendenci přesunu všech jedinců populace do lokality x , kde bylo již na počátku větší osídlení. To můžeme interpretovat tak, že na rozdíl od prvního modelu lineární difúze, kde jedinci netěžili ze spolupráce a naopak maximalizovali svůj užitek z rovnoměrně rozdělených zdrojů, zde jedincům plyne užitek ze spolupráce.

3.2.1 Stabilita

Využijeme-li opět Důsledku 30, redukuje soustavu (3.12) na jednu rovnici ve tvaru:

$$x'(t) = -4rx(t)(x(t) - 1)(2x(t) - 1), t \geq 0, \quad (3.14)$$

stručně:

$$x' = -4rx(x - 1)(2x - 1).$$

Všechny klidové stavy modelu popsaného diferenciální rovnicí (3.14) získáme řešením rovnice

$$f(x^*) = 0,$$

kde $f(x) = -4rx(x - 1)(2x - 1)$, tedy:

$$f(x^*) = -4rx^*(x^* - 1)(2x^* - 1) = 0.$$

Řešením jsou tři klidové stavy $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{2}$ a $x_3^* = 1$.

Věta 37. *Mějme rovnici (3.14) popisující model shlukování s intenzitou migrace $r > 0$. Potom pro příslušné klidové stavy platí:*

- (i) klidový stav $x_1^* = 0$ je asymptoticky stabilní,
- (ii) klidový stav $x_2^* = \frac{1}{2}$ je nestabilní,

(iii) klidový stav $x_3^* = 1$ je asymptoticky stabilní.

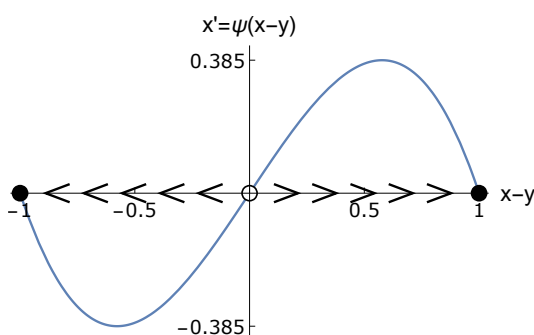
Důkaz. Derivací $f(x) = -4rx(x-1)(2x-1)$ získáme:

$$f'(x) = -24rx^2 + 24rx - 4r. \quad (3.15)$$

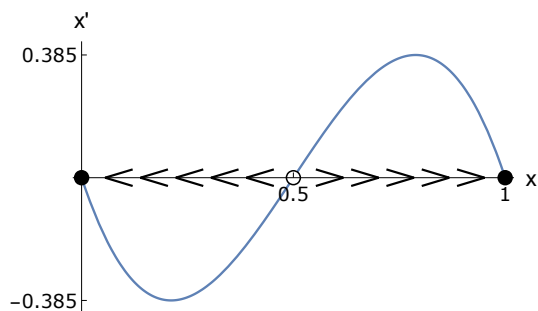
Klidové stavy dosadíme do (3.15) a jelikož $r > 0$ platí, že

$$\begin{aligned} f'(x_1^*) &= f'(0) = -4r < 0, \\ f'(x_2^*) &= f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2r > 0, \\ f'(x_3^*) &= f'(1) = -4r < 0. \end{aligned}$$

Proto podle Věty 12 jsou klidové stavy x_1^*, x_3^* asymptoticky stabilní a klidový stav x_2^* nestabilní. \square



Obrázek 3.8: Fázový portrét modelu shlukování popsaného soustavou rovnic (3.12) z pohledu lokality x , tedy rovnice $x'(t) = \psi(x-y)$, kde $\psi(s) = -rs(s-1)(s+1)$ s parametrem $r = 1$.



Obrázek 3.9: Fázový portrét modelu shlukování, popsaného rovnicí $x' = -4rx(x-1)(2x-1)$, pro parametr $r = 1$.

Poznámka 38. Na fázových portrétech (Obrázek 3.8 a 3.9) můžeme pozorovat dynamiku chování populace z pohledu lokality x .

Na fázovém portrétu na Obrázku 3.8 vidíme jak se rozdíl relativních četností jedinců obývajících jednotlivé lokality $x-y$ ustálí v jednom ze dvou stabilních stavů -1 nebo 1 , podle volby počátečních hodnot. Je-li $x-y = -1$, pak $x = 0$ a je-li $x-y = 1$, $x = 0$. Proměnnou y lze dopočítat vztahem $y = 1 - x$.

Oproti případu lineární difúze je zde přítomen nestabilní klidový stav, kterým je $x-y = 0$, tedy pokud by počáteční hodnoty byly zvoleny jako $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$, systém by zůstal v tomto stavu. Malou perturbací by se ale systém vychýlil a řešení by konvergovala k jednomu z asymptoticky stabilních klidových stavů. Perturbaci můžeme interpretovat jako náhodný přechod jedince z jedné lokality do druhé, i když byly původně obě lokality stejně osídlené.

Tímto přechodem ale vznikne nerovnováha a jedna lokalita se stane více osídlená než druhá, a tím také atraktivnější pro další, kteří pak následují onoho průkopnického jedince. Celá populace se začne shlukovat do jedné lokality.

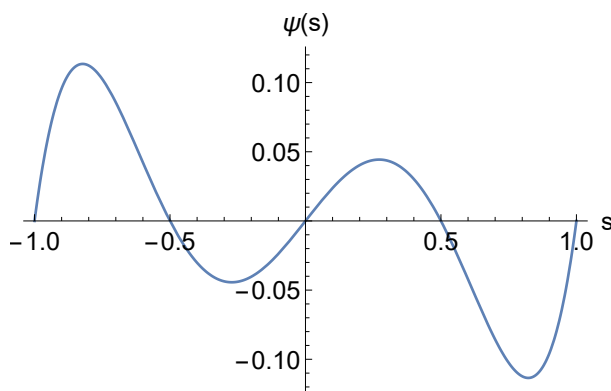
Na obrázku 3.9 můžeme sledovat stejnou situaci jen z pohledu redukované rovnice (3.14).

3.3 Koexistence

Jako další volba funkce $\psi(s)$ se nabízí polynom pátého stupně. Tím získáme další model nelineární difúze, který bude modelovat situaci, kdy bude pro jedince výhodné spolupracovat jen do určité míry. Touto funkcí je konkrétně:

$$\psi(s) := rs(1-s)(1+s)(s-a)(s+a),$$

kde $r > 0$ je intenzita migrace a parametr $0 < a < 1$ je bod, kde dojde k průsečíku s horizontální osou a vzniknou tak další dva klidové stavy.



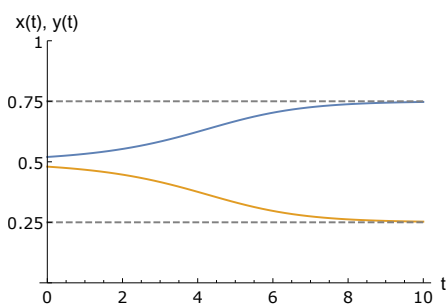
Obrázek 3.10: Graf funkce $\psi(s) = rs(1-s)(1+s)(s-a)(s+a)$ pro $r = 1$ a $a = \frac{1}{2}$.

Soustava diferenciálních rovnic popisující model koexistence je ve stručném zápisu ve tvaru:

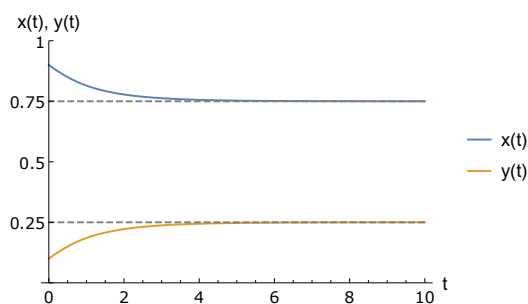
$$\begin{aligned} x' &= -r(x-y)(1-x+y)(1+x-y)(x-y-a)(x-y+a), \\ y' &= -r(y-x)(1-y+x)(1+y-x)(y-x-a)(y-x+a). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Průběh řešení soustavy (3.16) pro $r = 1$, $a = 0.5$ a počáteční hodnoty $x_0 = 0.52$, $y_0 = 1 - x_0 = 0.48$ je zaznamenán na Obrázku 3.11 a pro počáteční hodnoty $x_0 = 0.9$, $y_0 = 0.1$ na Obrázku 3.12. Z obrázků je patrné, že systém se pro obě volby počátečních hodnot v čase ustálí ve stavu, kdy populace není ani rovnoměrně rozdělena mezi lokality ani nedochází ke kompletnímu shlukování.

To může být interpretováno tak, že jedinci mají dva protichůdné zájmy. Na jednu stranu těžší ze spolupráce, ale na druhou stranu se snaží maximalizovat užitek z rovnoměrně rozdělených zdrojů. Alternativní interpretace protichůdného zájmu ke spolupráci je averze k přílišnému osídlení, popř. jako přítomnost motivace k odlišnosti.



Obrázek 3.11: Řešení soustavy rovnic (3.16) pro $r = 1, a = 0.5$ a počáteční podmínky $x_0 = 0.52, y_0 = 0.48$.



Obrázek 3.12: Řešení soustavy rovnic (3.16) pro $r = 1, a = 0.5$ a počáteční podmínky $x_0 = 0.9, y_0 = 0.1$.

To, nakolik jsou jedinci nakloněni ke spolupráci vyjadřuje parametr a . Zvětšuje-li se parametr a , roste i případný užitek ze spolupráce a populace se proto začíná shlukovat do jedné z lokalit.

3.3.1 Stabilita

Pro zjednodušení analýzy stability využijeme Důsledek 30 a zredukujeme soustavu (3.16) na jednu rovnici, kterou stručně zapíšeme jako

$$x' = 4rx(x-1)(2x-1)(2x-1-a)(2x-1+a). \quad (3.17)$$

Všechny klidové stavy modelu popsaného diferenciální rovnicí (3.17) získáme řešením vztahu

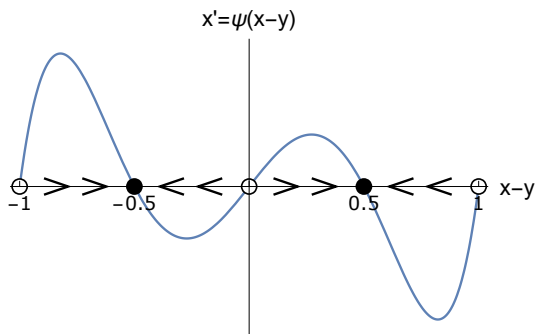
$$f(x^*) = 4rx^*(x^*-1)(2x^*-1)(2x^*-1-a)(2x^*-1+a) = 0.$$

Takto získáme pět klidových stavů:

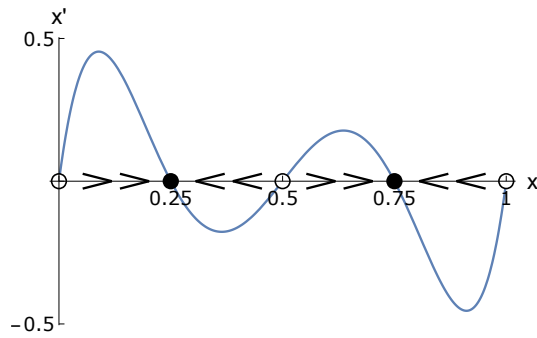
$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_2^* &= \frac{1-a}{2}, \\ x_3^* &= \frac{1}{2}, \\ x_4^* &= \frac{1+a}{2}, \\ x_5^* &= 1. \end{aligned}$$

Věta 39. Mějme rovnici (3.17) popisující model koexistence. Pro příslušné klidové stavy platí:

- (i) klidový stav $x_1^* = 0$ je nestabilní,
- (ii) klidový stav $x_2^* = \frac{1-a}{2}$ je asymptoticky stabilní,
- (iii) klidový stav $x_3^* = \frac{1}{2}$ je nestabilní,



Obrázek 3.13: Fázový portrét modelu koexistence popsaného soustavou rovnic (3.16) z pohledu lokality x , tedy rovnice $x'(t) = \psi(x - y)$, kde $\psi(s) = rs(1 - s)(1 + s)(s - a)(s + a)$ pro $a = 0.5$ a intenzitu migrace $r = 1$.



Obrázek 3.14: Fázový portrét modelu koexistence, popsaného rovnicí $x' = 4rx(x - 1)(2x - 1)(2x - 1 - a)(2x - 1 + a)$, pro $a = 0.5$ a intenzitu migrace $r = 1$.

(iv) klidový stav $x_4^* = \frac{1+a}{2}$ je asymptoticky stabilní,

(v) klidový stav $x_5^* = 1$ je nestabilní.

Důkaz. Derivací $f(x) = 4rx(x - 1)(2x - 1)(2x - 1 - a)(2x - 1 + a)$ získáme:

$$f'(x) = -4r(a^2(1 - 6x + 6x^2) - (1 - 2x)^2(1 - 10x + 10x^2)). \quad (3.18)$$

Klidové stavy dosadíme do (3.18), a jelikož $r > 0$ a $a \in (0, 1)$, platí:

$$f'(x_1^*) = f'(0) = -4r(a^2 - 1) > 0,$$

$$f'(x_2^*) = f'\left(\frac{1-a}{2}\right) = 4a^2r(a^2 - 1) < 0,$$

$$f'(x_3^*) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2a^2r > 0,$$

$$f'(x_4^*) = f'\left(\frac{1+a}{2}\right) = 4a^2r(a^2 - 1) < 0,$$

$$f'(x_5^*) = f'(1) = -4r(a^2 - 1) > 0.$$

Proto podle Věty 12 jsou klidové stavy x_1^*, x_3^* a x_5^* nestabilní, zatímco klidové stavy x_2^*, x_4^* jsou asymptoticky stabilní. \square

Kapitola 4

Difúzní modely na libovolném neorientovaném grafu

Doposud jsme uvažovali model difúze pouze na jednoduchém grafu se dvěma vrcholy. V této části model zobecníme na libovolný souvislý neorientovaný graf, kde opět vrcholy reprezentují jednotlivé lokality a hrany představují jejich propojení, resp. možnost migrace mezi nimi.

Opět se budeme v dalším textu zabývat formalizací modelu a předpoklady na difúzní funkci $\phi(u, v)$, abychom za ni mohli volit konkrétní funkce. Jelikož nyní máme více než dvě lokality, které mohou být navzájem libovolně propojené a součet relativních četností lokalit, které spolu v daný okamžik interagují, nemusí být jedna, nelze již funkci dvou proměnných $\phi(u, v)$ zjednodušit na funkci $\psi(s)$, jejíž argumentem byl rozdíl relativních četností. Budeme proto nadále pracovat s funkcí $\phi(u, v)$, $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, kde definiční obor Ω je dán předpisem:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}. \quad (4.1)$$

Máme-li obecný souvislý neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$ popsany maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$, můžeme soustavu rovnic popisující model difúze na grafu zapsat následovně:

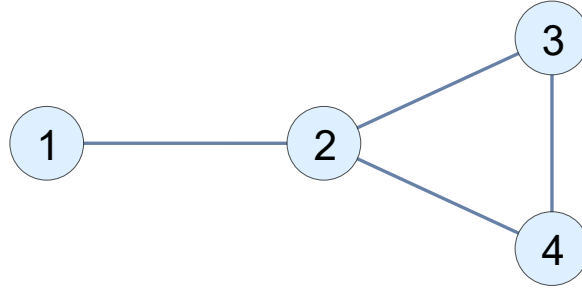
$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi(x_i(t), x_j(t)), \quad i \in V(G), t \geq 0, \quad (4.2)$$

což alternativně můžeme zapsat pomocí okolí vrcholu i jako:

$$x'_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \phi(x_i(t), x_j(t)), \quad i \in V(G), t \geq 0, \quad (4.3)$$

kde $\mathcal{N}(i)$ je okolí vrcholu $i \in V(G)$.

Příklad 40. Mějme graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ a množinou hran $E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Graf G můžeme reprezentovat maticí sousednosti \mathbf{A}_G ve tvaru:



Obrázek 4.1: Graf G .

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Vskutku, matice sousednosti \mathbf{A}_G grafu G má nuly na diagonále a je symetrická. Soustava rovnic obecného modelu difúze je pak ve stručném zápisu:

$$\begin{aligned} x_1' &= \phi(x_1, x_2), \\ x_2' &= \phi(x_2, x_1) + \phi(x_2, x_3) + \phi(x_2, x_4), \\ x_3' &= \phi(x_3, x_2) + \phi(x_3, x_4), \\ x_4' &= \phi(x_4, x_2) + \phi(x_4, x_3). \end{aligned}$$

Nyní opět chceme, aby model zachovával vlastnosti tak, abychom mohli funkce $x_i(t)$ v čase t považovat za relativní četnosti. Tedy aby se součet $\sum_{i=1}^n x_i(t)$ pro $t \geq 0$ rovnal jedné a aby pro žádný vrchol i funkce $x_i(t)$ nikdy neopustila interval $[0, 1]$.

Aby bylo možné korektně formulovat následující věty, rozšířme lokálně lipschitzovskou funkci $\phi(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou na konvexní trojúhelníkové oblasti Ω dané předpisem (4.1), na celou rovinu \mathbb{R}^2 tak, že každému bodu \mathbb{R}^2 přiřadíme funkční hodnotu ϕ v bodě množiny Ω , který je mu nejbližší.

Definujme proto projekci $P_\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$ předpisem:

$$P_\Omega(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \Omega : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \text{ pro všechna } \mathbf{z} \in \Omega\}.$$

Díky tomu, že množina Ω je konvexní, víme, že existuje vždy právě jeden nejbližší bod a projekce P_Ω je spojitě zobrazení [15, Kapitola 1.2] a můžeme tedy spojitě dodefinovat funkci $\phi(u, v)$ na celou rovinu \mathbb{R}^2 , čímž dostaneme globálně lipschitzovskou funkci $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\tilde{\phi}(u, v) = \phi(P_\Omega(u, v)). \quad (4.5)$$

Dále formulujme tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení systému (4.2).

Lemma 41. (*existence a jednoznačnost řešení*) Je-li funkce $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně lipschitzovsly spojitá na celé rovině \mathbb{R}^2 a všechny počáteční hodnoty $x_{i,0}$ jsou z intervalu $[0, 1]$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že počáteční úloha

$$\begin{cases} x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\phi}(x_i(t), x_j(t)), & i = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0, \\ x_i(0) = x_{i,0}, \end{cases} \quad (4.6)$$

má pro $0 \leq t \leq \varepsilon$ právě jedno řešení $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tento interval označme:

$$I := [0, \varepsilon].$$

Následující věty nám na intervalu I zajistí výše uvedené matematické vlastnosti modelu, které chceme mít zachovány. Jsou vlastně obdobou Vět 29 (zachování populace) a 31 (invariance intervalu $[0, 1]$) pro obecný graf a obecnou difúzní funkci.

Věta 42. (*zachování populace*) Uvažujme souvislý neorientovaný graf G , který neobsahuje smyčky, zadaný maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$ a difúzní funkci $\tilde{\phi}(u, v)$ lokálně lipschitzovskou na intervalu $[0, 1]$, pro kterou navíc platí:

$$\tilde{\phi}(u, v) = -\tilde{\phi}(v, u). \quad (4.7)$$

Jsou-li počáteční podmínky $x_{i,0}$ zvoleny tak, že platí:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1,$$

potom pro každé $t \in I$ platí, že součet řešení soustavy (4.2) s počátečními podmínkami $x_{i,0}$ je roven jedné, tj.:

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1.$$

Důkaz. Zvolme $z(t) := \sum_{i=1}^n x_i(t)$. Potom

$$z'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\phi}(x_i, x_j) \quad (4.8)$$

Protože graf G neobsahuje smyčky, na diagonále matice sousednosti \mathbf{A}_G jsou nuly. Rovnost (4.8) proto můžeme přepsat jako:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} \tilde{\phi}(x_i, x_j) + a_{ji} \tilde{\phi}(x_j, x_i)). \quad (4.9)$$

Jelikož je graf G navíc neorientovaný, matice sousednosti \mathbf{A}_G je symetrická. Proto výraz (4.9) je roven:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} \tilde{\phi}(x_i, x_j) + a_{ij} \tilde{\phi}(x_j, x_i)).$$

Zohledníme-li dále požadavek (4.7) na funkci $\tilde{\phi}(u, v)$, platí:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_{ij}\tilde{\phi}(x_i, x_j) - a_{ij}\tilde{\phi}(x_i, x_j)) = 0,$$

a tedy $z'(t) = 0$. Protože derivace $z(t)$ je nulová, řešením je konstanta, tj. $z(t) = C, C \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že volba počátečních hodnot splňuje: $\sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1$, potom

$$z(0) = \sum_{i=1}^n x_i(0) = \sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1,$$

a proto funkce $z(t) = 1$ je řešením počáteční úlohy. Rozepíšeme-li zpětně $z(t)$, získáme rovnost

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

která platí pro každé $t \in I$, tedy na intervalu, na kterém máme zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení z Lemmatu 41. \square

Věta 43. (invariance intervalu $[0, 1]$) Jsou-li splněny předpoklady předchozí Věty 42 a navíc pro difúzní funkci $\phi(u, v)$ platí, že

$$\phi(0, v) \geq 0 \quad (4.10)$$

pro každé $v \in [0, 1]$, potom pro každé $t \in I$ a $i = 1, 2, \dots, n$ platí, že řešení $x_i(t)$ soustavy (4.2) s počátečními podmínkami zvolenými dle předpokladu je z intervalu $[0, 1]$.

Důkaz. Díky Lemmatu 41 máme z předpokladů zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení na intervalu $I = [0, \varepsilon]$. Z předpokladů také platí, že řešení $x_i(t)$ soustavy (4.2) zachovávají součet pro každé $t \in I$, tj. platí, že $\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1$. Stačí proto ukázat, že nenastane okamžik, kdy řešení $x_i(t) < 0$. Předpokládejme, že existuje $\tilde{t} \in I$ takové, že nějaké $x_i(\tilde{t}) < 0$. Protože funkce $x_i(t)$ jsou spojitě, musí existovat okamžik $0 < \hat{t} < \tilde{t}$ takový, že $x_i(\hat{t}) = 0$. Dosadíme-li \hat{t} do i -té rovnice soustavy (4.2), získáme:

$$x_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi(x_i(\hat{t}), x_j(\hat{t})) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi(0, x_j(\hat{t})). \quad (4.11)$$

Protože $a_{ij} \geq 0$ jsou členy matice sousednosti a platí předpoklad (4.10), je výraz (4.11) nezáporný, tedy $x_i' \geq 0$. Je-li $x_i(\hat{t}) = 0$ a zároveň $x_i'(\hat{t}) \geq 0$, pak ale pro $t > \hat{t}$ platí, že $x_i(t) \geq 0$, tedy neexistuje čas $\tilde{t} \in I$ takový, že $x_i(\tilde{t}) < 0$, což je spor s předpokladem. \square

Předchozí věty nám sice zajišťují všechny výše uvedené požadované matematické vlastnosti, pouze však na intervalu $I = [0, \varepsilon], \varepsilon > 0$. Jelikož ale předpokládáme, že funkce $\hat{\phi}(u, v)$ je lokálně lipschitzovsky spojitá, a je definována předpisem (4.5), tudíž omezená, je podle Věty 7 maximálním intervalem existence řešení celý interval $[0, \infty)$.

Lemma 44. Je-li funkce $\hat{\phi}$, definovaná předpisem (4.5), lokálně lipschitzovsky spojitá, pak každé řešení počáteční úlohy (4.6) má maximální interval řešitelnosti $[0, \infty)$.

Důkaz. Jedná se o přímý důsledek Věty 7. □

Máme tedy zajištěno, že řešení počáteční úlohy (4.6) existuje na celém intervalu $[0, \infty)$ a s opětovným použitím Lemmatu 41, máme na tomto maximálním intervalu navíc zajištěnou i jednoznačnost řešení, a proto následně platí i Věty 42 (zachování populace), 43 (invariance intervalu $[0, 1]$) na celém intervalu $[0, \infty)$.

Protože nyní víme, že zadaných předpokladů funkce $x_i(t)$ nikdy neopustí interval $[0, 1]$, argument funkce $\hat{\phi}(u, v)$ je tak vždy z množiny Ω dané předpisem (4.1) a můžeme tak zúžit definiční obor funkce $\hat{\phi}$ na množinu Ω . Potom je ale funkce $\hat{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ekvivalentní původní funkci $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a všechna předchozí tvrzení platí i pro ni.

Následující poznámka shrnuje předchozí text, který se věnoval formálnímu zavedení difúzních modelů na obecném souvislém neorientovaném grafu.

Poznámka 45. V této poznámce shrneme výše popsané požadavky na graf G řádu n , počáteční hodnoty a funkci $\phi(u, v)$, které jsou potřebné pro zachování určitých matematických vlastností obecného modelu difúze, popsaného soustavou rovnic (4.2). Těmito vlastnostmi jsou existence a jednoznačnost řešení na $[0, \infty)$, zachování populace a invariance intervalu $[0, 1]$. Díky těmto vlastnostem můžeme funkce $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, interpretovat jako relativní četnosti jedinců přebývajících v jednotlivých lokalitách. Požadavky na graf G , počáteční hodnoty $x_{i,0}$ a funkci $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, kde množina Ω je dána předpisem (4.1), jsou následující:

1. $\phi(u, v)$ je lokálně lipschitzovsky spojitá na uzavřené množině Ω ,
2. $\phi(0, v) \geq 0$,
3. graf G je souvislý neorientovaný a bez smyček,
4. $0 \leq x_{i,0} \leq 1$, pro každé $i = 1, 2, \dots, n$,
5. $\sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1$.

Na základě výše shrnutých požadavků budeme v následujících podkapitolách volit konkrétní difúzní funkce a představíme si zobecněné modely lineární difúze, shlukování a koexistence.

4.1 Lineární difúze

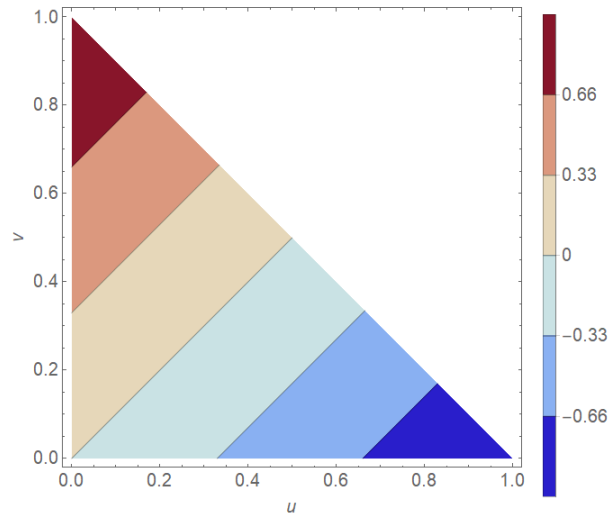
Chceme-li zobecnit model lineární difúze popsaný v kapitole 3.1 pro obecný graf, zvolme difúzní funkci $\phi(u, v) := -r(u - v)$, která splňuje požadavky sepsané v Poznámce 45. Mějme tedy souvislý neorientovaný graf G bez smyček s n vrcholy, který je popsaný maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$. Soustava obecných diferenciálních rovnic popisující model pak je ve tvaru:

$$x_i'(t) = -r \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.12)$$

alternativně zapsáno pomocí okolí vrcholu i :

$$x'_i(t) = -r \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_i(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.13)$$

kde $r > 0$ je intenzita migrace.



Obrázek 4.2: Hladiny difúzní funkce pro model lineární difúze $\phi(u, v) = -r(u - v)$, pro $r = 1$.

Model popisuje situaci, kdy si jedinci mohou vybrat, na které z n lokalit budou přebývat. Všechny lokality mají totožné atributy a jejich atraktivitu ovlivňuje pouze to, jaká část populace už danou lokalitu obývá. V případě lineární difúze je pro jedince atraktivnější vždy ta lokalita, která je méně osídlená a v důsledku toho se do ní stěhují.

Poznámka 46. Soustavu rovnic (4.12) popisující model lineární difúze nad grafem G můžeme zapsat také pomocí Laplaceovy matice. Soustavu (4.12) lze tedy ekvivalentně zapsat jako

$$\mathbf{x}'(t) = -r\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{x}(t), \quad (4.14)$$

kde \mathbf{L}_G je Laplaceova matice grafu G a $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ je vektor neznámých. Více o Laplaceově matici si čtenáři mohou přečíst v Merris [9] nebo v Mohar [10].

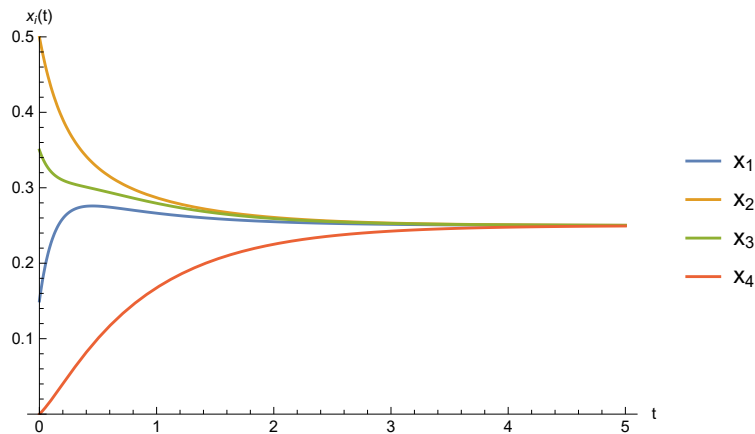
Příklad 47. Pokračujme v Příkladu 40 volbou difúzní funkce $\phi(u, v) := -r(u - v)$. Soustava rovnic popisující model lineární difúze na grafu G je po algebraických úpravách ve tvaru:

$$\begin{aligned} x'_1 &= r(-x_1 + x_2), \\ x'_2 &= r(x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4), \\ x'_3 &= r(x_2 - 2x_3 + x_4), \\ x'_4 &= r(x_2 + x_3 - 2x_4). \end{aligned}$$

Zapíšeme-li tuto soustavu pomocí Laplaceovy matice, dostaneme:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Přidáme-li k soustavě (4.15) počáteční podmínku, např. $\mathbf{x}_0 = [0.15, 0.5, 0.35, 0]^T$, můžeme vzniklou počáteční úlohu vyřešit. Tato řešení $x_i(t)$ pak můžeme interpretovat jako relativní četnosti jedinců populace, jenž přebývají v i -té lokalitě. Na Obrázku 4.3 je zachycen průběh těchto řešení pro výše zmíněnou počáteční podmínku, kde můžeme pozorovat, že všechny funkce $x_i(t)$ konvergují k hodnotě 0.25. Také je z obrázku patrné, že řešením nemusí být pouze monotónní funkce. Asymptotickým chováním se budeme dále zabývat v následující podkapitole.



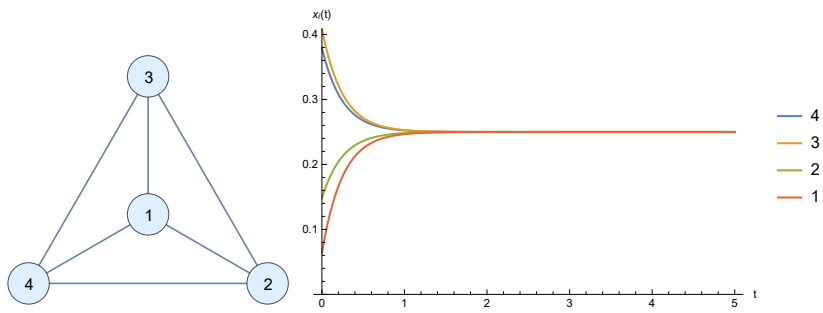
Obrázek 4.3: Graf řešení soustavy (4.15) pro počáteční hodnotu $\mathbf{x}_0 = [0.15, 0.5, 0.35, 0]^T$.

4.1.1 Stabilita

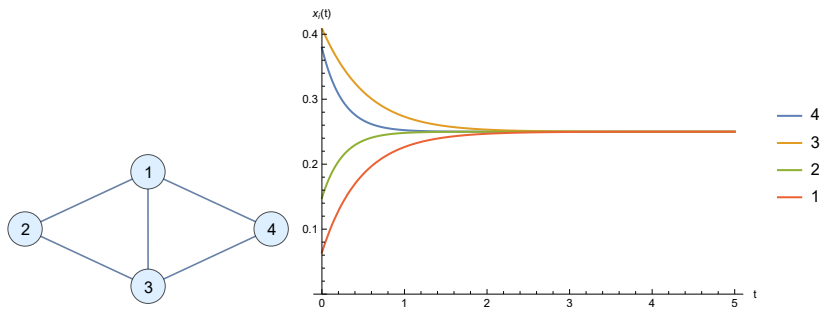
Jedinci se stěhují z míst z vyšší koncentrací osídlení do míst s nižší koncentrací. Intuitivně tušíme, že všichni jedinci se v dlouhém období rovnoměrně rozprostřou mezi všemi lokalitami. Máme-li n lokalit, asymptotické relativní četnosti budou ve všech lokalitách $\frac{1}{n}$. Ukažme nyní, že asymptoticky stabilním klidovým stavem systému je $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$, a žádný další neexistuje.

Věta 48. *Mějme autonomní dynamický systém popsany soustavou rovnic (4.12) na souvislém neorientovaném grafu G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$, který je reprezentován maticí sousednosti \mathbf{A}_G . Potom existuje právě jeden klidový stav*

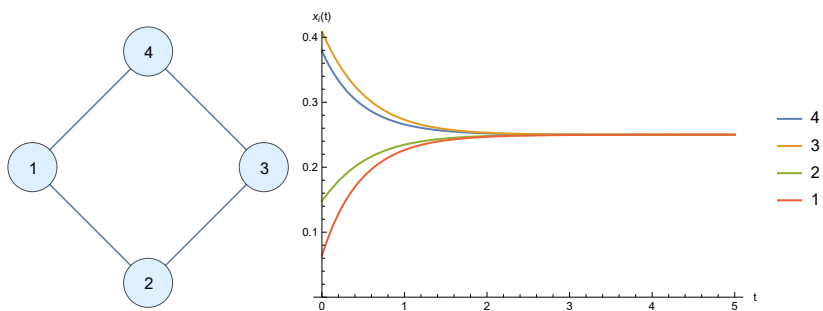
$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]^T,$$



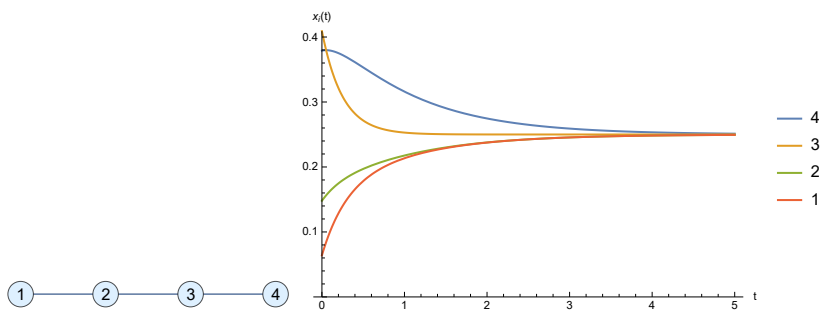
(a) Úplný graf K_4



(b) Graf s pěti hranami



(c) Cyklus C_4



(d) Cesta P_4

Obrázek 4.4: Porovnání průběhů řešení soustavy pro lineární difúzi (4.12) nad různými grafy pro stejné počáteční hodnoty $\mathbf{x}_0 = [0.379, 0.409, 0.148, 0.064]^T$ a intenzitu migrace $r = 1$.

který je asymptoticky stabilní.

Důkaz. Nejprve dokažme, že vektor $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$ je klidovým stavem. Z definice klidového stavu plyne, že derivace musí být v čase nulové, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Dosazením \mathbf{x}^* do soustavy (4.12) získáme:

$$-r \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

což platí pro každé $i \in V(G)$. Vektor \mathbf{x}^* tedy je klidovým stavem. Dále jelikož musí platit, že

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1,$$

pro každé $t \in [0, \infty)$, žádný další konstantní klidový stav neexistuje.

Nyní předpokládejme, že kromě konstantního klidového stavu $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$ existuje ještě nekonstantní klidový stav $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}^*$, tj. existuje vrchol $m \in V(G)$ takový, že $\bar{x}_m = \max(\bar{\mathbf{x}})$ a zároveň se v jeho okolí $\mathcal{N}(m)$ nachází vrchol $k \in V(G)$ pro který platí, že $\bar{x}_k < \bar{x}_m$. Pak ale dosazením do (4.13) pro $r > 0$ získáme:

$$\bar{x}'_m = f_i(\bar{x}_m) = -r \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\bar{x}_m - \bar{x}_j) < 0,$$

tedy $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, z čehož plyne, že $\bar{\mathbf{x}}$ není klidový stav.

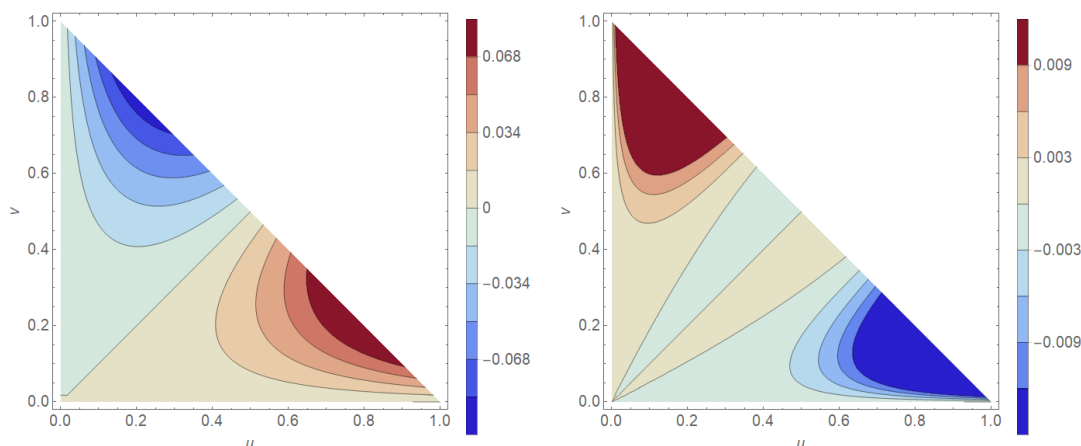
Dále rozhodneme o stabilitě klidového stavu $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$. Jelikož soustavu (4.12) můžeme zapsat pomocí Laplaceovy matice \mathbf{L}_G , tj. ve tvaru (4.14), o stabilitě rozhodneme podle vlastních čísel matice $-\mathbf{L}_G$. Z Věty 27 víme, že \mathbf{L}_G má kromě jednonásobného nulového vlastního čísla všechna vlastní čísla kladná. Vlastní čísla matice přenásobené (-1) mají opačná znaménka. Proto podle Věty 14 je klidový stav \mathbf{x}^* stabilní.

Navíc vlastní vektor příslušející nulovému vlastnímu číslu je podle Věty 27 konstantní vektor $[1, 1, \dots, 1]^T$. Všechny perturbace zachovávající součet $\sum_{i \in V(G)} x_i$ jsou pak kombinací vlastních vektorů příslušejícím vlastním číslům se zápornou reálnou částí, a proto je stav $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$ asymptoticky stabilní. \square

Ted' již víme, že řešení systému (4.12) nad neorientovaným souvislým grafem G vždy konvergují ke klidovému stavu $\mathbf{x}^* = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]^T$, kde $n = |V(G)|$ je počet vrcholů, viz 4.4, kde můžeme dále pozorovat různé průběhy řešení soustavy popisující systém, které k tomuto klidovému stavu konvergují. Jelikož hrany mezi vrcholy reprezentují propojení mezi lokalitami, v grafech s vyšším počtem hran (za stejného počtu vrcholů) bude konvergence řešení ke klidovému stavu rychlejší nebo alespoň stejná, než u grafů s menším počtem hran.

4.2 Shlukování a koexistence

Jinými volbami funkce $\phi(u, v)$ můžeme modelovat i další situace nad obecným grafem podobně, jako pro graf se dvěma vrcholy, viz kapitola 3, tedy shlukování a koexistenci. Volené



(a) Hladiny difúzní funkce pro model shlukování $\phi(u, v) = -ruv(u - v)$ s intenzitou migrace $r = 1$.
 (b) Hladiny difúzní funkce pro model koexistence $\phi(u, v) = ruv(u - v)(v - (2u - u^2))(u - (2v - v^2))$ s intenzitou migrace $r = 1$

Obrázek 4.5: Hladiny difúzních funkcí pro modely shlukování a koexistence.

funkce za $\phi(u, v)$ musí pro zajištění matematických vlastností modelu splňovat všechny požadavky, shrnuté v Poznámce 45. Zvolíme-li difúzní funkci například jako

$$\phi(u, v) := ruv(u - v),$$

kde $r > 0$ je intenzita migrace, budeme modelovat shlukování. Hladiny této funkce jsou vykresleny na obrázku 4.5(a). Soustava rovnic nad grafem G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$, popsaným maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$ pak bude stručně zapsaná ve tvaru:

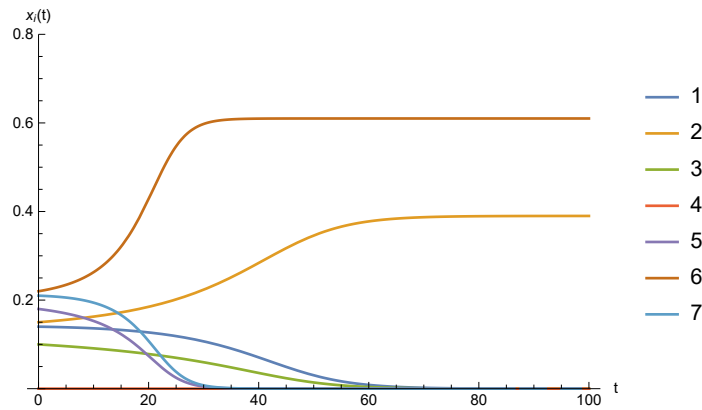
$$x'_i = r \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j (x_i - x_j), \quad i \in V(G), \quad (4.16)$$

alternativně:

$$x'_i = r \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_i x_j (x_i - x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.17)$$

Tendence v chování jedinců jsou stejné jako v případě dvou lokalit. Jednotlivci maximalizují svůj užitek tím, že se přemisťují z řídkěji osídlených lokalit do lokalit s větší koncentrací osídlení. Co je ale rozdílné mezi modelem nad grafem se dvěma vrcholy a modelem nad obecným souvislým neorientovaným grafem je, že ne vždy se nutně celá populace shlukne do jediné lokality. Tento případ je zachycen na Obrázku 4.6, kde se vhodnou volbou počátečních hodnot zamezilo kompletnímu shluknutí.

Může také nastat situace, kdy se populace neshlukne do lokality, která byla na počátku nejosídlenější. Obrázek 4.7 zachycuje takovou situaci, kdy početná migrace z ostatních lokalit převáží shluknutí ve prospěch druhé nejosídlenější lokality.



(a) Průběh řešení soustavy rovnic (4.16) modelující shlukování.



(b) Cesta na sedmi vrcholech P_7 .

Obrázek 4.6: Průběh řešení soustavy rovnic (4.16) nad cestou P_7 pro počáteční hodnotu $\mathbf{x}_0 = [0.14, 0.15, 0.10, 0, 0.18, 0.22, 0.21]^T$ a intenzitu migrace $r = 1$. Vlivem volby počátečních hodnot se populace shlukne do dvou lokalit 2 a 6.

Další rozdíl je v počtu klidových stavů. Zatímco model se dvěma vrcholy měl tři klidové stavy, model nad obecným grafem může mít klidových stavů nekonečně mnoho. Tato skutečnost je zformulována do následující věty.

Věta 49. *Mějme soustavu rovnic (4.17) popisující model shlukování a graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$, kde $n \geq 3$. Uvažujme navíc, že graf G není úplným grafem, tj. velikost množiny hran $|E(G)| < \binom{|V(G)|}{2}$. Potom existuje nekonečně mnoho klidových stavů tohoto systému.*

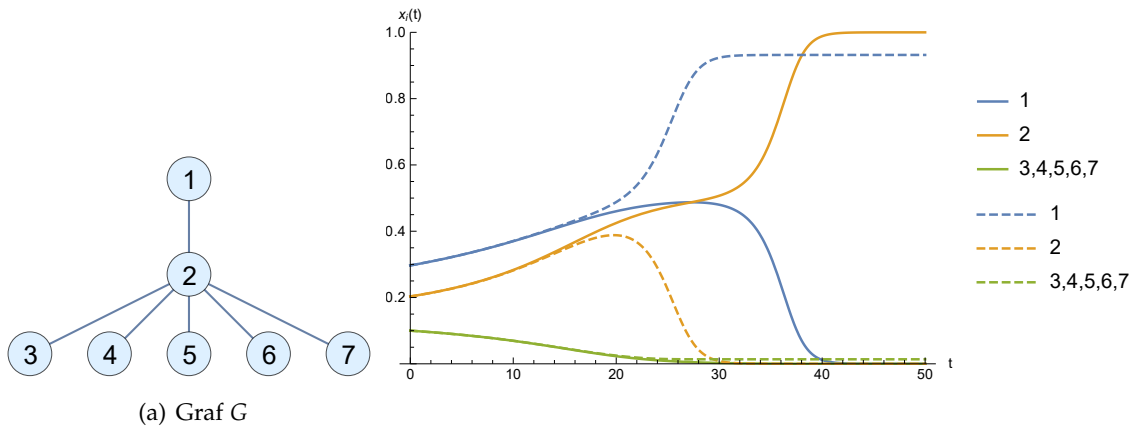
Důkaz. Jelikož graf G není úplným grafem, existují dva různé vrcholy $u, v \in V(G)$, které nejsou propojeny hranou. Potom například vektor \mathbf{x}^* daný předpisem:

$$x_i^* = \begin{cases} p & \text{pokud } i = u, \\ 1 - p & \text{pokud } i = v, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde parametr $p \in (0, 1)$, splňuje podmínku klidového stavu $f_i(x_i^*) = 0$ pro každé $i \in V(G)$, kde $f_i(x)$ je pravou stranou rovnosti (4.17), tj. $f_i(x) = r \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_i x_j (x_i - x_j)$, protože díky nulovým složkám vektoru \mathbf{x}^* bude součin $x_i x_j$ pro libovolné $p \in (0, 1)$ vždy nulový. \square

Ještě složitější chování jedinců inklinujících ke koexistenci můžeme modelovat volbou difúzní funkce například:

$$\phi(u, v) := ruv(u - v)(v - (2u - u^2))(u - (2v - v^2)), \quad (4.18)$$



Obrázek 4.7: Průběhy řešení soustavy rovnic (4.16) nad grafem G pro počáteční hodnoty \mathbf{x}_0^1 (plně) a \mathbf{x}_0^2 (šrafovaně), obojí s intenzitou migrace $r = 1$. Průsečík funkcí x_1 a x_2 je v čase 27.29.

Počáteční hodnoty jsou dány:

$$\mathbf{x}_0^1 = [0.2967, 0.2033, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]^T, \mathbf{x}_0^2 = [0.2968, 0.2032, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]^T.$$

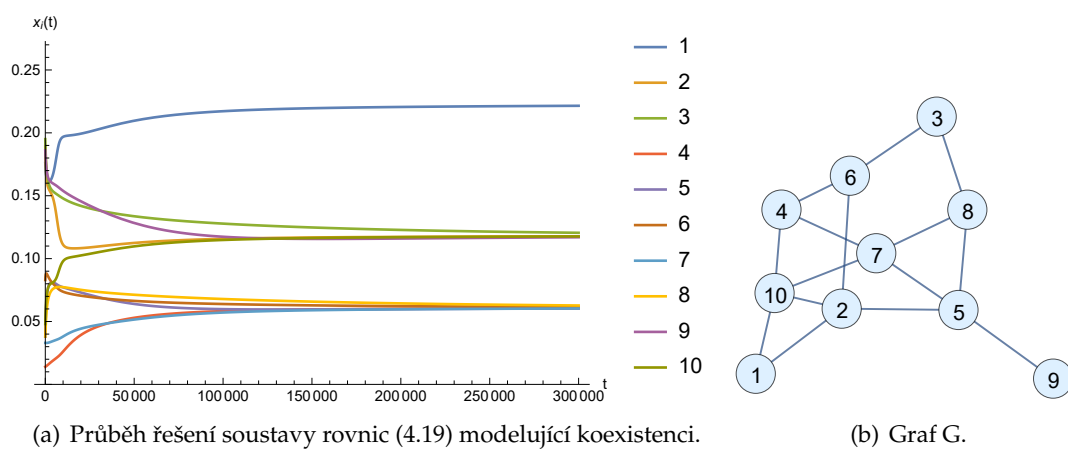
kde $r > 0$ je intenzita migrace. Na obrázku 4.5(b) jsou vykresleny hladiny této funkce. Dosazením difúzní funkce do soustavy rovnic obecného modelu difúze (4.2), získáme:

$$x'_i = r \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j (x_i - x_j) (x_j - (2x_i - x_i^2)) (x_i - (2x_j - x_j^2)), \quad i \in V(G), \quad (4.19)$$

tedy soustavu diferenciálních rovnic popisující model koexistence na obecném souvislém neorientovaném grafu G , zadaného maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})$.

Poznámka 50. Na obrázku 4.8 je zachyceno řešení soustavy vzniklé dosazením difúzní funkce (4.18) do obecné soustavy difúzních rovnic (4.2) nad grafem s deseti vrcholy. Z obrázku je patrná složitost tohoto modelu, který je citlivý na volbu počátečních hodnot. Tyto výsledky můžeme interpretovat tak, že pro jedince je na jednu stranu výhodné přebývat v lokalitách, kde je hustější osídlení například z důvodu spolupráce. Na druhou stranu však získávají užitek i z volně rozdělených zdrojů. Výsledkem pomalého vybalancování těchto protichůdných zájmů je křehká rovnováha, kdy jsou užítky všech jedinců maximální.

V průběhu psaní této kapitoly vyvstalo několik otázek ohledně chování modelů shlukování a koexistence. Některé tyto problémy jsou zmíněny v závěru této práce, kde jsou dále nastíněny i další možné směry a návrhy na zdokonalení modelů.



Obrázek 4.8: Průběh řešení soustavy rovnic s difúzní funkcí pro koexistenci nad grafem G pro počáteční hodnotu $\mathbf{x}_0 = [0.176, 0.189, 0.195, 0.014, 0.038, 0.083, 0.033, 0.038, 0.186, 0.048]^T$ a intenzitu migrace $r = 1$. Můžeme pozorovat složité chování, které se velmi pomalu ustaluje.

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsme představili nejprve jednoduchý difúzní model pro graf se dvěma vrcholy. Analýzou matematických vlastností modelu jsme získali potřebné předpoklady pro volbu difúzní funkce. Následně jsme nalezením konkrétních vhodných difúzních funkcí představili model lineární difúze, shlukování a koexistence, u kterých jsme provedli analýzu stability a tendence v chování interpretovali pomocí vlivu užitečné spolupráce.

V další kapitole jsme jednoduchý difúzní model rozšířili pro libovolný souvislý neorientovaný graf, který jsme formalizovali v podobném duchu, jako model pro graf se dvěma vrcholy. Opět jsme podle získaných předpokladů zajišťující základní matematické vlastnosti modelu našli vhodné konkrétní difúzní funkce a rozšířili tak modely lineární difúze, shlukování a koexistence. U modelu lineární difúze jsme se zabývali analýzou asymptotického chování. V části věnované zobecněným modelům shlukování a koexistence jsme naznačili složitost další analýzy těchto modelů.

Výše představené modely by mohli být dále zdokonalovány například orientací nebo navíc i ohodnocením hran grafu, které by umožňovalo modelovat jednosměrný přesun a různou kvalitu propojení jednotlivých lokalit. Vraťme se nyní zpětně k alternativním výkladům modelů, o kterých jsme se zmínili v úvodu této práce. Uvažovali jsme o možné interpretaci vrcholů jako preferencí (spotřebitelských, volebních), názorů nebo strategií. Orientací a ohodnocením hran, například pravděpodobnostmi přechodu změn názorů preferenci nebo strategií, by pak mohlo být modelováno možné chování voličů, spotřebitelů, hráčů, zvířat, apod.

Další zdokonalení modelů by se mohlo odvíjet od modelování různých úrovní bohatství pro jednotlivé lokality, resp. výhody plynoucí z preferencí, strategií, apod., čímž bychom získali pro jednotlivce různě atraktivní místa, resp. preference, strategie, apod. Vznikly by tak další nové problémy zejména z oblasti analýzy asymptotického chování, tj. např. počet a stabilita klidových stavů.

V neposlední řadě vyvstávají otázky ohledně asymptotického chování představených modelů shlukování a koexistence pro obecný graf, tj. počet a stabilita klidových stavů v závislosti na volbě počátečních podmínek. Dalším předmětem by rovněž mohla být rychlost konvergence řešení ke klidovým stavům v závislosti na počtu hran grafu.

Literatura

- [1] L. J. S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson, 2007.
- [2] R. Cibulka, *Přednášky k předmětu KMA/ODR*, ZČU, 2016, [dostupné na: <https://almamather.zcu.cz/ODR>].
- [3] G. de Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Müller, B. Schönfisch, *A Course in Mathematical Biology*, SIAM, 2006.
- [4] P. Drábek, G. Holubová, *Parciální diferenciální rovnice – Úvod do klasické teorie*, ZČU, 2001.
- [5] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.
- [6] P. Holub, *Přednášky k předmětu KMA/DMA*, ZČU, 2015 [dostupné na: <https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kma/dma/studijni-materialy.html>].
- [7] M. J. Keeling, P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases*, Princeton University Press, 2008.
- [8] W. Kelley, A. Peterson, *The Theory of Differential Equations*, Springer, 2010.
- [9] R. Merris *Laplacian Matrices of Graphs: A Survey*, California State University, 1993.
- [10] B. Mohar *Laplace Eigenvalues of Graphs: A Survey*, University of Ljubljana, 1991.
- [11] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, MIT, 1994.
- [12] B. Mohar *The Laplacian Spectrum of Graphs*, University of Ljubljana, 1991.
- [13] R. B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, 1991.
- [14] M. A. Nowak, et al., *Five Rules for the Evolution of Cooperation*, Science 314(2016), 1560–1563.
- [15] Schneider R., *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, 2014.
- [16] H. Sedaghat, *Nonlinear Difference Equations: Theory with Applications to Social Science Models*, Springer, 2003.
- [17] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.