Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd
Katedra Matematiky

Bakalářská Práce

Odhady parametru zobecněného exponenciálního rozdělení pomocí Bayesovského přístupu

Plzeň 2017

Lukáš Šašek

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Tato práce je upravenou verzí bakalářské práce Bayesovské odhady parametru zobecněného exponenciálního rozdělení, kterou jsem vypracoval v roce 2015 avšak nebyla obhájena.

V Plzni dne ....

Lukáš Šašek

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Michalu Frieslovi, Ph.D. za odborné vedení této práce, cenné rady a nápady, a čas věnovaný této práci.

Abstrakt

Cílem této práce je seznámit se s bayesovským přístupem a aplikovat ho na odhad parametru zobecněného exponenciálního rozdělení nebo na jeho parametrické funkce. Dále pro zvolená apriorní rozdělení popsat odvození odhadů. Pomocí simulace se vyšetří vlastnosti odhadů.

Klíčová slova: Bayesovské odhady, zobecněné exponenciální rozdělení ,spolehlivostní funkce, ztrátová funkce, Kolmogorov-Smirnov test dobré shody, simulace

Abstrakt

This work explores Bayes estimation of the unknown parameter or parametrical function for the generalized exponencial disribution. For chosen conjugate prior describe descripiton of derived estimations. Examine properties of the derived estimations by simulation study.

Keywords: Bayes estimate, generalized exponencial disribution, Kolmogorov-Smirnov goodness of fit test, Loss function, reliability function, simulation

Obsah

1 Úvod

Předkládaná bakalářská práce popisuje zobecněné exponenciální rozdělení a následně odhady jeho parametrů s užitím bayesovského přístupu. Příloha této práce obsahuje simulaci této problematiky.

Tato bakalářská práce je rozdělena na dvě části.V první části je rozebráno zobecněné exponenciální rozdělení a pro zvolená apriorní rozdělení odvození bayesovských odhadů. Druhá část se zabývá simulací problému v programu MATLAB. Na základě simulace jsou vyšetřeny vlastnosti jednotlivých odhadů.

Teoretická část začíná popisem zobecněného exponenciálního rozdělení, jeho hustotou, distribuční funkci a jeho využitím. Poté rovnou přistupuje k bayesovskému přístupu, kde je vysvětleno apriorní a aposteriorní rozdělení a vztah mezi nimi. Dále vysvětluje spolehlivostní funkci a čtyři ztrátové funkce. Posledním bodem teoretické části je výpočet odhadů parametrů zobecněného exponenciálního rozdělení θ a $R(t)$ při různých ztrátových funkcích a kvantily daného rozdělení.

Simulace, které je věnována druhá část práce, obsahuje tabulky vybraných simulací, které jsou následně vyhodnoceny. Dále jsou z nich odvozeny vlastnosti jednotlivých odhadů.

2 Zobecněné exponenciální rozdělení

V této kapitole se budeme zabývat zobecněným exponenciálním rozdělením(GE). Rozdělení bylo poprvé použito autory Gupta a Kundu (1999) [7]. GE se hlavně využívá v analýze opotřebení produktu. Pro analýzu takovýchto dat se také velice často užívá Gama a Weibullovo rozdělení viz[1].

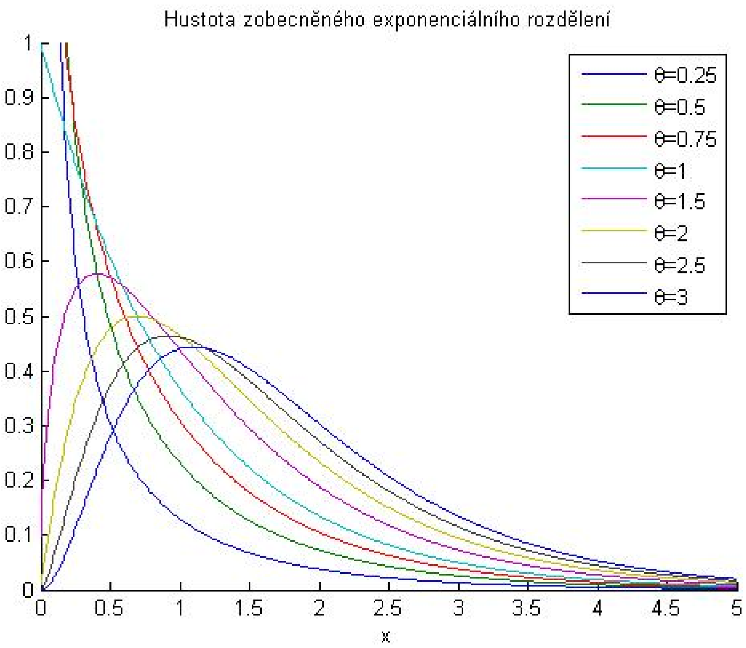
Nechť X_1,X_2,…,X_n jsou i.i.d(náhodné proměnné z nezávislého stejnoměrného rozdělení), pak distribuční funkce zobecněného exponenciálního rozdělení s parametrem $\theta > 0, x > 0, \lambda = 1$ a středním hodnotou rovnou nule je dána následovně:

$$F(x;\theta) = (1 - e^{-x})^{\theta}, \tag{1}$$

hustota daného rozdělení je za daných podmínek následující:

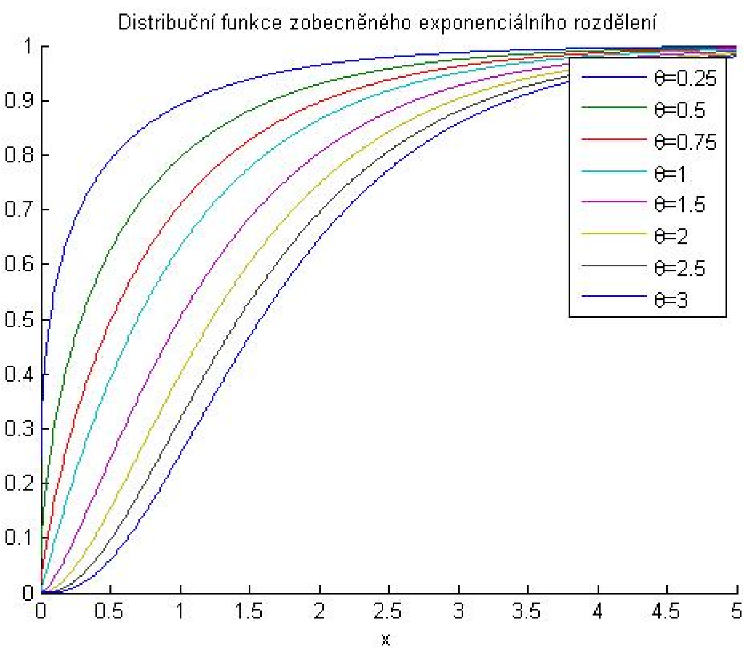
$$f(x;\theta) = \theta e^{-x}(1 - e^{-x})^{\theta - 1}. \tag{2}$$

Pro větší názornost jsou na obr.1 a obr.2 zobrazeny grafy hustoty zobecněného exponenciálního rozdělení i jeho distribuční funkce. Jako první je hustota daného rozdělení. V této práci se počítá s tím, že $\lambda = 1$ a proto grafy jsou jen pro danou hodnotu λ.



Obr. 1: Hustota zobecněného exponenciálního rozdělení.

Na obrázku 2 je vidět distribuční funkce zobecněného exponenciálního rozdělení.



Obr. 2: Distribuční funkce zobecněného exponenciálního rozdělení

Zobecněné exponenciální rozdělení má následující momentovou vytvořující funkci:

$$M(t) = E(e^{tx}) = \theta \int_0^{\infty} (1 - e^{-xt})^{\theta-1} e^{(t-1)x} dx$$

Použitím substituce $y = e^{-x}$ získáme

$$M(t) = \theta \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{-t} dy = \frac{\Gamma(\theta+1)\Gamma(1-t)}{\Gamma(\theta-1+t)}$$

Pro podrobnější popis viz [1]. Pokud zderivujeme zlogaritmovanou M(t) a stanovíme $t = 0$, získáme střední hodnotu a rozptyl zobecněného exponenciálního rozdělení

$$E(X) = \Psi(\theta+1) - \Psi(1) \quad a \quad Var(X) = \Psi'(1) - \Psi'(\theta-1),$$

kde Ψ je digama funkce a Ψ' je derivací digama funkce.

Zobecněné exponenciální rozdělení je transformací exponenciálního rozdělení. Transformace distribuční funkce je popsána následovně:

$$F(x) = G(x)^{\theta}, \quad \theta > 0,$$

kde F(x) je distribuční funkce zobecněného exponenciálního rozdělení a G(x) je exponenciálního rozdělení. Pro hustotu pak platí následující:

$$f(x) = \theta G(x)^{\theta-1} g(x),$$

kde $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$, $g(x)$ je tedy o hustota exponenciálního rozdělení.

3 Bayesovský přístup

„Bayesovské metody představují jeden ze základních přístupů teoreticko-pravděpodobnostních myšlení i matematicko statistických vyhodnocovacích metod.“ [3, p. 5]

Metody jsou založené na předpokladu, že hodnotu neznámého parametru můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnostního rozdělení viz [3].

Apriorní informaci vyjadřuje hustota daného parametru která je značena $\pi(\theta)$. Tato informace je známa už před testováním a je vytvářena na základě zkušenosti nebo subjektivně, což často vede k diskuzím o správnosti. Je zřejmé, že daná apriorní informace je závislá na pozorovaných X, ale nezávisle získaná, jelikož před pokusem byla zadána.

Oproti normálnímu přístupu chápeme $f(x;\theta)$ jako podmíněnou pravděpodobnost a je značena jako $f(x|\theta)$ viz [5]. Pokud nám jde o konkrétní hodnoty odhadu parametru a nepotřebujeme odhady studovat teoreticky, můžeme zvolit apriorní hustotu, která věrně odráží apriorní informace a poté využít simulaci k hledání odhadu pro daná data.

Pro zobecněné exponenciální rozdělení s parametrem θ budeme uvažovat stejné apriorní rozdělení jako je uvedeno v článku [1]. Jedná se tedy o gama rozdělení tj. $\theta \sim gama(\alpha, \beta)$

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \theta > 0, \tag{3}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$. V případech, kdy $\alpha = 0$ a $\beta = 0$, apriorní rozdělení přejde v Jeffreysovo apriorní rozdělení viz [1], které je dáno následovně:

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}, \theta > 0. \tag{4}$$

K vytvoření odhadů potřebujeme aposteriorní rozdělení parametru θ. Vztah se vyjadřuje pomocí Bayesovy věty.

Má-li vektor (X, Y) sdruženou hustotu $f(x, y)$, pak podmíněná hustota složky Y za podmínky, že $X = x$, je

$$f(y|x) = \frac{f(x|y)f(y)}{f(x)},$$

kde $f(x|y)$ značí podmíněnou hustotu X při daných hodnotách složky Y, $f(x)$ a $f(y)$ jsou marginální hustoty složek [5].

Odtud

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{f(x)} \propto f(x|\theta) \cdot \pi(\theta),$$

pro vypočítání aposteriorního rozdělení GE musíme nejprve spočítat $V(\mathbb{X}, \theta)$. Předpokládejme, že $\mathbb{X}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ je napozorovaná životnost n prvků. Pokud se všechny prvky porouchají test skončí. Funkce maximální věrohodnosti je pro zobecněné exponenciální rozdělení je následující:

$$V(\mathbb{X}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-x_i}(1 - e^{-x_i})^{\theta-1} =$$
$$= \theta^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{x_i}}{1 - e^{x_i}} \right) e^{-\theta - \sum\limits_{i=1}^{n} ln(1-e^{x_i})}.$$

Pro zpřehlednění vytvoříme pomocný parametr $s(\mathbb{X})$

$$s(\mathbb{X}) = -\sum_{i=1}^{n} ln(1 - e^{x_i}).$$

Po upravení má spolehlivostní funkce následující tvar

$$V(\mathbb{X}, \theta) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{x_i}}{1 - e^{x_i}} \right) e^{-\theta s(\mathbb{X})}. \tag{5}$$

Nyní můžeme spočítat aposteriorní rozdělení pro GE.

$$\pi(\theta|x) = V(\mathbb{X}, \theta)) \cdot \Gamma(\alpha, \beta) =$$
$$= \frac{(s(\mathbb{X}) + \beta)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n)} \theta^{\alpha-1+n} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta}, \theta > 0.$$

Jedná se tedy o $\Gamma(n + \alpha, \beta + s(\mathbb{X}))$. Pokud se jedná o Jeffresovo apriorní rozdělení je aposteriorní rozdělení $\Gamma(n, s(\mathbb{X}))$.

Ze vzorce (5) neboli funkce maximální věrohodnosti vytvoříme odhad, se kterým budeme poměřovat Bayesovské odhady. Odhad má následující tvar

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{s(\mathbb{X})}.$$

3.1 Spolehlivostní funkce

Spolehlivostní funkce udává pravděpodobnost, že bude operace určitou dobu t fungovat bez poruchy. Jedná se tedy o funkci času. Někdy se spolehlivostní funkci říká bezporuchovost. Jedná se o doplněk distribuční funkce. Spolehlivostní funkce se značí R(t),kde t je určitá doba.

$$R(t) = F(t) - 1.$$

Pro zobecněné exponenciální rozdělení je potom následující:

$$R(t, \theta) = 1 - (1 - e^{-t})^{\theta}.$$

Odhad spolehlivostní funkce metodou maximální věrohodnostní funkce je

$$R(t)_{MLE} = 1 - (1 - e^{-t})^{\theta_{MLE}}.$$

3.2 Ztrátová funkce

Ztrátová funkce číselně určuje ztrátu (chybu) při odhadu $\hat{\theta}$. Dále bude ztrátová funkce označována $L(\hat{\theta}, \theta)$.

V této práci využijeme čtyři ztrátové funkce. Měříme-li ztrátovou funkci jako rozdíl čtverců parametru θ jedná se o čtvercovou ztrátovou chybu

$$L_1(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2, \tag{6}$$

kde $\hat{\theta}$ je odhad a θ je přesná hodnota. Pro absolutní ztrátovou funkci je vzorec následující:

$$L_2(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|. \tag{7}$$

Další možnou ztrátovou funkcí je logaritmická chyba.

$$L_3(\hat{\theta}, \theta) = \left(ln \frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^2 = (ln(\hat{\theta} - \theta))^2. \tag{8}$$

Poslední je ztrátová chyba založená na entropii.

$$L_4(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - ln \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - 1. \tag{9}$$

3.3 Odhady

V této části budeme odhadovat parametry při ztrátových funkcích, které jsou definovány v druhé kapitole této práce. Nejprve odhadneme samotný parametr θ, poté každému odhadu vytvoříme odhad spolehlivostní funkce při dané ztrátové funkci a nakonec kvantil zobecněného exponenciálního rozdělení.

3.3.1 Odhad parametru θ

Pro různé ztrátové funkce se odhad počítá různým způsobem.

První odhad parametru θ je za pomoci ztrátové čtvercové funkce (6). $\hat{\theta}_1$ je střední hodnota aposteriorního rozdělení $\pi(\theta|\mathbb{X})$, které je zde $\Gamma(n+\alpha, \beta + s((\mathbb{X}))$.

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 = E(\theta|(\mathbb{X}) = E(\Gamma(n+\alpha, \beta + s(\mathbb{X}))) = \\ = \int_0^\infty \theta \frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta\end{aligned}$$

Nyní použijeme substituci $y = (\beta + s(\mathbb{X}))\theta$, to znamená $dy = (\beta + s(\mathbb{X}))d\theta$.

$$\hat{\theta}_1 = \int_0^\infty \frac{y}{\beta + s(\mathbb{X})} \frac{(\beta + s(\mathbb{X})^{\alpha+n-1}}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{y}{\beta + s(\mathbb{X})}\right)^{\alpha+n-1} \frac{1}{\beta + s(\mathbb{X})} dy =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+n) \cdot (\beta + s(\mathbb{X}))} \int_0^\infty y^{\alpha+n} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n) \cdot (\beta + s(\mathbb{X}))} \cdot \Gamma(\alpha+n+1)$$

Nyní využijeme vztahu gama funkce $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n) \cdot (\beta + s(\mathbb{X}))} \cdot (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n) = \frac{n+\alpha}{\beta + s(\mathbb{X})}.$$

Pokud bychom odhad dělali s Jeffreysovým aposteriorní rozdělením (4) je jeho odhad stejný jako odhad maximální věrohodnosti (MLE).

Druhý odhad je za pomoci absolutní ztrátové funkce (7). Jedná se o medián aposteriorního rozdělení (3).

$$\int_0^m \frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta = 0.5$$

Vzorec pro aproximaci mediánu gama rozdělení, při známé střední hodnotě, je vytvořen na základě skutečnosti, že $\mu/(\mu - m)$ je přibližně lineární funkce parametru $\alpha \geq 1$, kde μ je střední hodnota gama rozdělení [9]. Medián lze aproximovat následovně:

$$m \approx \mu \frac{3\alpha - 0,8}{3\alpha + 0,2}$$

Následně po dosazení

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_2 \approx E(\theta|(\mathbb{X}) \cdot \frac{3(n+\alpha) - 0.8}{3(n+\alpha) + 0.2} = \\ = \frac{n+\alpha}{\beta + s(\mathbb{X})} \frac{3(n+\alpha) - 0.8}{3(n+\alpha) + 0.2} = \\ = \frac{1}{2 * \beta + s(\mathbb{X})} \cdot (n+\alpha) \left(1 - \frac{2}{9(n+\alpha)}\right)^2 = \\ = \frac{m_{2(n+\alpha)}}{2(\beta + s(\mathbb{X})},\end{aligned}$$

kde $m_{2(n+\alpha)}$ je medián χ^2 rozdělení, kde $2(n+\alpha)$ jsou stupně volnosti a je zajištěno, že tato hodnota je celé číslo viz [1].

Další odhad je přes kvadraticko-logaritmickou ztrátovou funkci (8), který získáme následovně:

$$\hat{\theta}_3 = exp[E(ln\theta|(\mathbb{X}))].$$

Zde vycházíme z faktu, že gama rozdělení je rozdělení z exponenciální třídy a stačí tedy zderivovat vztah $E(ln\theta|(\mathbb{X}))$ podle $(n+\alpha)$. Po dosazení dostaneme:

$$\hat{\theta}_3 = exp[E(ln\theta|(\mathbb{X}))] = \frac{e^{\Psi(n+\alpha)}}{\beta + s(\mathbb{X}))}$$

,kde $\Psi(x) = \frac{d}{dx} ln\Gamma(x)$ je digama funkce.

Poslední odhad je tvořen za pomoci ztrátové funkce vycházející z entropie (9). Jedná se o převrácenou hodnotu střední hodnoty aposteriorního rozdělení, kde θ je umocněna na minus prvou.

$$\hat{\theta}_4 = \frac{1}{E(\theta^{-1}|(\mathbb{X})} =$$
$$= \left(\int_0^\infty \theta^{-1} \frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta \right)^{-1}.$$

Dále budeme počítat pouze jmenovatel pro lepší pochopení, znovu použijeme substituci $y = (\beta + s((\mathbb{X})))\theta$, což znamená $dy = (\beta + s((\mathbb{X})))d\theta$.

$$\frac{1}{\hat{\theta}_4} = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta + s(\mathbb{X})} \right)^{-1} \frac{(\beta + s(\mathbb{X})^{\alpha+n-1}}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{y}{\beta + s(\mathbb{X})} \right)^{\alpha+n-1} \frac{1}{\beta + s(\mathbb{X}} dy =$$
$$= \frac{(\beta + s(\mathbb{X})}{\Gamma(\alpha+n)} \int_0^\infty y^{\alpha+n-2} e^{-y} dy \frac{(\beta + s(\mathbb{X})}{\Gamma(\alpha+n)} \cdot \Gamma(\alpha+n-1)$$

a opět využijeme vztahu $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\frac{1}{\hat{\theta}_4} = \frac{(\beta + s(\mathbb{X})}{(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)} \cdot \Gamma(\alpha+n-1) = \frac{\beta + s(\mathbb{X})}{n+\alpha-1}.$$

Jelikož postup je psaný pro jmenovatel, musí se výsledek ještě umocnit na minus prvou.

$$\hat{\theta}_4 = \frac{n+\alpha-1}{\beta + s(\mathbb{X})}.$$

3.3.2 Odhad spolehlivostní funkce

Nyní máme všechny odhady pro parametr θ. V této části vypočteme pro jednotlivé ztrátové funkce odhad spolehlivostní funkce v čase t. První spolehlivostní funkci odhadneme pro čtvercovou ztrátovou funkci (6). Jedná se o stejný postup jako při odhadu parametru θ při čtvercové ztrátové funkci. To znamená, že je se jedná o střední hodnotu podmíněné pravděpodobnosti spolehlivostní funkce $R(t)$ za podmínky $\mathbb{X}$.

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(t) = E[R(t)|\mathbb{X}] = \\ = \int_0^\infty (1-(1-e^{-t})^\theta)\pi(\theta|s(\mathbb{X}))d\theta = \\ = \int_0^\infty (1-(1-e^{-t})^\theta)\cdot\frac{(\beta+s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta}d\theta = \\ = \int_0^\infty (\frac{(\beta+s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta}d\theta - \\ - \int_0^\infty (1-e^{-t})^\theta\cdot\frac{(\beta+s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta}d\theta \\ = 1-\int_0^\infty ((1-e^{-t})^\theta)\cdot\frac{(\beta+s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Zde jsem využili toho, že $(1-e^t)^\theta$ můžeme přespat následovně:

$$(1-e^t)^\theta = e^{ln(1-e^{-t})\theta}.$$

Z toho vyplývá, že integrál, který počítáme je vlastně vytvořující momentovou funkcí gama rozdělení. Momentová vytvořující funkce má obecný zápis následující:

$$M(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{t\mathbb{X}}f(x)dx.$$

Vytvořující momentová funkce pro gamma rozdělení je následující:

$$M(t) = \left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad pro \quad t < \beta.$$

Po dosazení našich parametrů gamma rozdělení je odhad spolehlivostní funkce pro čtvercovou ztrátovou funkci následující:

$$\hat{R}_1(t) = 1 - M_{\theta|\mathbb{X}}[ln(1-e^{-t})] = 1 - \left[1-\frac{ln(1-e^{-t})}{\beta+s(\mathbb{X})}\right]^{-(n+\alpha)}.$$

Další odhad spolehlivostní funkce je pro absolutní ztrátovou funkci (7). Tento odhad je jednoduchý na vytvoření, jelikož $\hat{\theta}_2$ je mediáqn aposteriorního rozdělení a spolehlivostní funkce je monotonní [1]. Odhad je pak následující:

$$\hat{R}_2(t) = 1 - (1 - e^{-t})^{\hat{\theta}_2}.$$

Třetí odhad je pro logaritmickou čtvercovou ztrátovou funkci (8). Zde si nejprve uvědomíme, že $ln[1 - (1 - e^t)^\theta]$ můžeme převést na řadu.

$$ln[1 - (1 - e^{-t})^\theta] = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\theta ln(1-e^{-t})}}{m}.$$

Využijeme stejný postup jako u odhadu $\hat{\theta}_3$.

$$\hat{R}_3(t) = exp[\ln(E(R(t))|(\mathbb{X}))]$$

Pro lepší přehlednost budeme dále počítat pouze exponent .

$$\begin{aligned}
\ln(\hat{R}_3(t)) &= \int_0^\infty ln(1 - (1 - e^{-t})^\theta) \cdot \frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta = \\
&= \int_0^\infty -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\theta ln(1-e^t)}}{m} \cdot \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta = \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{e^{m\theta ln(1-e^t)}}{m} \cdot \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta
\end{aligned}$$

Nyní použijeme substituci $y = \theta(m \cdot ln(1 - e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))$, to znamená $dy = \theta(m \cdot ln(1 - e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))d\theta$.

$$\begin{aligned}
\ln(\hat{R}_3(t)) = -\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{m} \cdot \frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{y}{m \cdot ln(1 - e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))}\right)^{n+\alpha-1} e^{-y} \\
\left(\frac{1}{m \cdot ln(1 - e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))}\right) dy = \\
= -\frac{(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1 - e^{-t})]^{n+\alpha}} \int_0^\infty y^{n+\alpha-1} e^{-y} dy =
\end{aligned}$$

$$\hat{R}_3(t) = \exp\left[-(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1 - e^{-t})]^{n+\alpha}}\right].$$

Při výpočtu je ještě důležité zjistit, zda řada obsažená v odhadu konverguje. Využijeme, zde srovnávací kritérium:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1 - e^{-t})]^{n+\alpha}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+\alpha+1}}$$

Jelikož $n + a$ je vždy větší než jedna, řada konverguje. Nyní provedeme odhad chyby při aproximaci řady konečným součtem viz [8]. Zde využijeme následujícího vztahu. Jestliže existuje řada b_k reálných čísel a celé číslo N takové, že $|ak| \leq bk$ pro $k > N$, pak

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{m=1}^{N} a_m\right| \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} b_k,$$

kde N představuje počet členů řady. Pro danou řadu je vztah následující:

$$\sum_{m=1}^{N+1} \frac{1}{m[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1-e^{-t})]^{n+\alpha}} \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{(m\ln(1-e^{-t}))^{n+\alpha+1}}$$
$$= \zeta(n+\alpha+1) - \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m\ln(1-e^{-t}))^{n+\alpha+1}},$$

kde $\zeta(n+\alpha+1)$ je riemannova zeta funkce. V simulaci je za N dosazeno 1000 a chyba je ovlivněna parametry α a n. Maximální chyba součtu řady v simulaci
při parametrech α a n, které byly využity a jsou vidět v příloze je $1.43 \cdot 10^{-13}$.

Poslední odhad R(t) je pro entropii ztrátové funkce (9), kde využijeme Maclaurovo řadu $(1-x)^{-1}$

$$[1-(1-e^t)^\theta]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{m\theta ln(1-e^{-t})}.$$

Poté dosadíme do stejného vzorce jako odhad parametru θ při entoropii.

$$\hat{R}_4(t) = \frac{1}{E(R(t)^{-1}|(\mathbb{X}))} =$$
$$= \frac{1}{E[(1-(1-e^{-t})^\theta)^{-1}(\mathbb{X}))]}$$

Budeme počítat pouze jmenovatel pro lepší pochopení a přehlednost

$$\frac{1}{\hat{R}_4(t)} = \int_0^\infty (1-(1-e^t)^\theta)^{-1}\pi(\theta|\mathbb{X})d\theta =$$
$$= \int_0^\infty (1-(1-e^t)^\theta)^{-1} \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta =$$
$$= \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} e^{m\theta ln(1-e^{-t})} \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{m\theta ln(1-e^{-t})} \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta =$$
$$= \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{m\theta ln(1-e^{-t})} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+s(\mathbb{X}))\theta} d\theta$$

Nyní použijeme substituci $y = \theta(m \cdot ln(1-e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))$, to znamená $dy = \theta(m \cdot ln(1-e^t) - (\beta + s(\mathbb{X}))d\theta$.

$$\frac{1}{\hat{R}_4(t)} = \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{-mln(1-e^{-t} + (\beta + s(\mathbb{X}))} \right)^{n+\alpha-1}$$
$$e^{-y} \frac{1}{-mln(1-e^{-t} + (\beta + s(\mathbb{X})}) dy =$$

$$= \frac{(\beta + s(\underline{x}))^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1-e^{-t})]^{n+\alpha}} \int_0^{\infty} y^{n+\alpha-1} e^{-y} dy =$$
$$\frac{1}{\hat{R}_4(t)} = (\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1-e^{-t})]^{n+\alpha}}$$

Jedním z posledních kroků je umocnit vzorec na minus prvou, jelikož jsme počítali jenom jmenovatel. Výsledný odhad je tedy:

$$\hat{R}_4(t) = \left[(\beta + s(\mathbb{X}))^{n+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[\beta + s(\mathbb{X}) - mln(1-e^{-t})]^{n+\alpha}} \right]^{-1}$$

Nakonec je zde stejný problém jako u odhadu pomocí logaritmické ztrátové chyby. V odhadu je řada, ovšem jedná se o stejnou řadu jako u předchozího odhadu, s tím rozdílem, že se k ní musí přičíst $(\beta + s(\mathbb{X})^{-1})$. Je to z toho důvodu, že řada začíná od nuly. Maximální chyba součtu řady v simulaci při parametrech α a n, které byly využity a jsou vidět v příloze je $1.23 \cdot 10^{-11}$.

3.3.3 Odhad kvantil GE

Nejprve si z daného rozdělení vyjádříme kvantil jako funkci parametru θ tohoto rozdělení, kde q je hodnota kvantilu a p říká o jaký percentil se jedná.

$$q = -\ln(1 - p^{\frac{1}{\theta}})$$

V programu, přiloženém k práci, byly příslušné střední hodnoty odhadů vytvořeny simulačně. Nyní vytvoříme odhad kvantilu pro čtvercovou ztrátovou chybu (6), kde místo parametru θ dosadíme do střední hodnoty $-\ln(1-p^{\frac{1}{\theta}})$

$$\hat{q}_1 = E[q|\mathbb{X}] = \int_0^{\infty} -\ln(1-p^{\frac{1}{\theta}})\pi(\theta|\mathbb{X})d\theta.$$

Druhý odhad kvantilu bude za pomoci absolutní ztrátové chyby (7), který je stejně jako u spolehlivostní funkce jednodušší, díky jeho monotonnosti q a toho, že $\hat{\theta}_2$ je medián aposteriorního rozdělení. Odhad je tedy následovný:

$$\hat{q}_2 = -\ln(1 - \sqrt[\hat{\theta}_2]{a}).$$

Odhad kvantilu logaritmické čtvercové ztrátové funkce (8)

$$\hat{q}_3 = \exp[E(\ln(q)|\mathbb{X})] = \exp \int_0^\infty \ln(-\ln(1 - p^{\frac{1}{\theta}})\pi(\theta|\mathbb{X}))d\theta$$

Posledním odhadem je kvantil při entropické ztrátové funkci (9).

$$\hat{q}_4 = \frac{1}{E[q^{-1}|\mathbb{X}]} = \left(\int_0^\infty (-\ln(1 - p^{\frac{1}{\theta}}))^{-1}\pi(\theta|\mathbb{X})d\theta\right)^{-1}$$

3.4 Testování shodnosti odhadu

V této části pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu dobré shody vyšetříme validitu hypotézy, která tvrdí, že náhodný výběr X_1,X_2,...,X_n je ze zobecněného exponenciálního rozdělení. Dané rozdělení má distribuční funkci $F^*(x)$, která je následující:

$$F^*(x) = (1 - e^{-x})^{\theta^*},$$

kde θ^* je námi vybraný odhad parametru θ.

Budeme tedy testovat nulovou hypotézu $H_0 : F(x) = F^*(x)$ proti alternativní hypotéze $H_1 : F(x) \neq F^*(x)$. Proto definujme náhodnou veličinu D_n, která se vypočte následovně:

$$D_n = sup_x \big|(F^*(x) - F_n(x))\big|$$

Hodnota veličiny D_n udává maximální rozdíl mezi empirickou distribuční funkcí $F_n(x)$ a neznámým rozdělením $F^*(x)$. Daný test provádíme při zadané hladině významnosti $\alpha = 5\%$. Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody má tabulky kritické hodnoty pro dané hladiny významnosti α. Nulovou hypotézu zamítneme v případě, že dané D_n překročí kritickou hodnotu 1-α.

4 Simulace

V této kapitole se budeme věnovat simulaci odhadu parametru θ zobecněného exponenciálního rozdělení, které získáme pomocí Bayesovského přístupu při různých ztrátových funkcích, které jsou popsány v předchozích kapitolách. Tato simulace byla vytvořena v programu MATLAB. Spouští se pomocí programu Bayes1.m a program je přílohou bakalářské práce.

4.1 Popis programu

V této kapitole se budeme zabývat popisem programu, který je přílohou. Program funguje je následovně:

1. Programu se musí zadat hodnoty α a β, jelikož apriorní funkcí parametru θ, je gama rozdělení s parametry α a β viz 3. Vygenerujeme tedy z $\pi(\theta)$ parametr θ, který budeme brát jako přesnou hodnotu daného parametru.

2. Díky předchozímu kroku víme hodnotu parametru θ. Vygenerujeme náhodný výběr zobecněného exponenciálního rozdělení o velikosti n, které na začátku zvolíme a zjistíme také jeho kvantil o velikosti jež zadáme před spuštěním programu a jeho spolehlivostní funkci v časech t, kde t je také určeno předem. Vygenerování náhodného výběru je dosazení do distribuční funkce (1) s pevným parametrem θ a vybrání náhodných X_1,X_2,...,X_n.

3. V následujícím kroku budeme vytvářet odhady parametru θ a spolehlivostní funkci v časech t a také kvantilů, které jsou popsány v kapitole 3.

4. Po vypočtení odhadů použijeme Kolmogorovova-Smirnovova testu dobré shody, který rozhodne, zda jsou odhady vhodnou aproximací zobecněného exponenciálního rozdělení.

5. Z těchto kroků vytvoříme cyklus, který budeme opakovat podle námi vybraného počtu opakování, jež si můžeme zvolit. Pro následující výsledky je počítáno s 5000 opakováními.

V příloze jsou tabulky, které obsahují nasimulované hodnoty. Jelikož se cyklus opakuje 5000 krát, jsou hodnoty v tabulkách průměrné hodnoty, kde $t = 1; 1.5; 2$ a je počítám dvacátý percentil. V prvním řádku jsou názvy daných odhadů. V prvním sloupci jsou 4 zkratky chyb a to MSE, ABS, LOG a ENT ty ukazují chybu odhadu parametru. MSE je zkratka pro střední čtvercovou chybu počítá následovně :

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\theta_t - \hat{\theta}_t)^2.$$

ABS je zkratka pro absolutní chybu

$$ABS = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}|\theta - \hat{\theta}_t|.$$

Předposlední je střední logaritmická chyba (LOG)

$$LOG = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(\ln\frac{\hat{\theta}_t}{\theta}\right)^2$$

Poslední je chyba za pomoci entropie

$$ENT = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\hat{\theta}_t}{\theta_t} - \ln\frac{\hat{\theta}_t}{\theta_t} - 1\right)$$

Pro spuštění programu se využije programové prostředí MATLAB. Skript, který slouží ke spuštění, se jmenuje Bayes1.m. Počet simulací, velikost náhodného výběru ze zobecněného exponenciálního rozdělení, α a β k vytvoření apriorního rozdělení se musí změnit přímo v kódu programu. Následně výsledek uloží do souboru ba1.xlsx.

4.2 Zhodnocení výsledků

Z tabulek uvedených v příloze je z Kolmogorovova-Smirnova testu vidět, že odhad pomocí maximální spolehlivostní funkce (MLE) a Bayesovo odhady jsou dobrou aproximací parametru, kvantilu a jeho spolehlivostní funkce. Z tabulek 1-6 je vidět, že při zvýšení prvků (n) je MLE slabší, jelikož jeho přijetí rychleji klesá.

Pro dané α a β jsme zjistili pro parametr θ, že nejlepším odhadem při střední čtvercové chybě (MSE), je zde bayesovský odhad při kvadratické ztrátové funkci. Pokud vezmeme odhad při absolutní chybě je pak nejvhodnějším odhadem bayesovský odhad při kvadraticko-logaritmické ztrátové chybě. Při logaritmické chybě má nejmenší chybu odhad při ztrátové funkci za pomoci entropie a při entropické chybě je znovu nejlepší odhad kvadraticko-logaritmické ztrátové funkce.

Pro spolehlivostní funkce jsme zjistili, že při MSE má nejmenší chybu odhad odvozen z kvadratické ztrátové funkce. Nejmenší absolutní chybu má odhad vytvořen z absolutní ztrátové funkce. Pro kvadraticko-logaritmickou chybu jsou nejméně chybové odhady čtvercové a absolutní ztrátové funkce. Pro ENT je nejvhodnější stejnojmenný odhad ztrátové funkce.

U kvantilů je nejmenší střední čtvercová chyba v bayesovském odhadu při kvadratické ztrátové funkci. Pro ABS je nejlepší odhad vytvořen z absolutní ztrátové funkce.

Pro dané odhady při zadaných parametrech apriorního rozdělení $\alpha \quad a \quad \beta$ jsme zjistili, že bayesovské odhady podhodnotily parametr θ a odhad metodou maximální věrohodnosti naopak daný parametr nadhodnotil.

5 Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s bayesovským přístupem a aplikovat ho na odhad parametru zobecněného exponenciálního rozdělení nebo jeho parametrických funkcí, čehož bylo dosaženo v první části této práce. Dále bylo zvoleno gama rozdělení jako apriorní rozdělení pro parametr θ, z kterého byly vytvořeny odhady. Byl vytvořen odhad metodou maximální věrohodnosti a poté odhady při čtyřech různých ztrátových funkcích. Totéž bylo provedeno pro spolehlivostní funkci a pro kvantil byl vytvořen jen odhad při ztrátových funkcích.

Simulace byla vytvořena na základě výše uvedených odhadů. Z výsledků simulace byly vyšetřeny vlastnosti odhadů. Simulace byla naprogramována v programu MATLAB a její kód je součástí této práce v elektronické podobě.

6 Přílohy

Tabulka.1: Výsledná tabulka pro n =10 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4958	4981	4983	4984	4988
Parametr	1.5197	1.6809	1.5097	1.5097	1.4520	1.3936
MSE		0.5039	0.2321	0.2321	0.2384	0.2530
ABS		0.4356	0.3390	0.3390	0.3387	0.3450
LOG		0.1074	0.0831	0.0831	0.0817	0.0835
ENT		0.0601	0.0451	0.0451	0.4273	0.0419
Spolehlivost t=1	0.4648	0.4829	0.4639	0.4646	0.4556	0.4468
MSE		0.0123	0.0077	0.0077	0.0079	0.0089
ABS		0.0777	0.0690	0.0689	0.0694	0.0704
LOG		0.0506	0.0431	0.0429	0.0426	0.0431
ENT		0.0265	0.0232	0.0232	0.0224	0.0221
Spolehlivost t=1.5	0.3026	0.3207	0.3016	0.2994	0.2941	0.2863
MSE		0.0075	0.0050	0.0050	0.0050	0.0052
ABS		0. 0631	0.0537	0.0536	0.0538	0.0547
LOG		0.0696	0.0574	0.0569	0.0566	0.0574
ENT		0.0037	0.0310	0.0310	0.0298	0.0293
Spolehlivost t=2	0.1918	0.2062	0.1910	0.1883	0.1853	0.1795
MSE		0.0043	0.0025	0.0026	0.0026	0.0027
ABS		0.0454	0.0374	0.0374	0.0375	0.0381
LOG		0.0832	0.0670	0.0670	0.0662	0.06712
ENT		O.3248	0.3220	0.3317	0.3412	0.3621

Tabulka.2: Výsledná tabulka pro n =50 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4989	4993	4992	4992	4990
Parametr	1.4933	1.5666	1.4875	1.4875	1.4553	1.4228
MSE		0.2000	0.1297	0.1297	0.1315	0.1360
ABS		0.2876	0.2524	0.2524	0.2525	0.2553
LOG		0.0524	0.0456	0.0456	0.0452	0.0458
ENT		0.0277	0.0238	0.0238	0.0231	0.0229
Spolehlivost t=1	0.4591	0.4670	0.4581	0.4585	0.4535	0.4488
MSE		0.0050	0.0042	0.0043	0.0043	0.0044
ABS		0.0546	0.0514	0.0513	0.0516	0.0521
LOG		0.0260	0.0239	0.02381	0.0237	0.02390
ENT		0.0132	0.0124	0.0124	0.0122	0.0121
Spolehlivost t=1.5	0.2984	0.3066	0.2976	0.2963	0.2934	0.2992
MSE		0.0035	0.0027	0.0027	0.0028	0.0028
ABS		0.0434	0.0399	0.0399	0.0400	0.0404
LOG		0.0351	0.0316	0.0315	0.0314	0.0317
ENT		0.0181	0.0164	0.0163	0.0161	0.0158
Spolehlivost t=2	0.1890	0.1955	0.1883	0.1868	0.1851	0. 1819
MSE		0.0019	0.0014	0.0014	0.0014	0.0015
ABS		0.0308	0.0278	0.0278	0.0279	0.0282
LOG		0.0414	0.0368	0.0366	0.0366	0.0370
ENT		0.3309	0.3276	0.3331	0.3384	0.3497

Tabulka.3: Výsledná tabulka pro n =50 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4986	4988	4988	4986	4987
Parametr	1.5047	1.5304	1.4992	1.4992	1.4850	1.4709
MSE		0.0663	0.5622	0.05622	0.0567	0.0578
ABS		0.1734	0.1639	0.1639	0.1637	0.1645
LOG		0.0200	0.1901	0.1901	0.0190	0.0191
ENT		0.0010	0.0097	0.0097	0.0096	0.0096
Spolehlivost t=1	0.4620	0.4648	0.4611	0.4613	0.4591	0.4571
MSE		0. 0019	0.0017	0.0017	0.0018	0.0018
ABS		0.0034	0.0032	0.0032	0.0033	0.0033
LOG		0.	0.0103	0.0100	0.0100	0.0101
ENT		0.0052	0.0050	0.0050	0.0051	0.0050
Spolehlivost t=1.5	03004.	0.3033	0.2996	0.2991	0.2978	0.2960
MSE		0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012
ABS		0.0267	0.0257	0.0257	0.0258	0.0028
LOG		0.0137	0.0132	0.0131	0.0132	0.0132
ENT		0.0070	0.0068	0.0067	0.0068	0.0067
Spolehlivost t=2	01903.	0.1926	0.1897	0.1891	0.1883	0.1870
MSE		0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
ABS		0.0188	0.0180	0.0180	0.0181	0.0179
LOG		0.0160	0.0154	0.0153	0.0153	0.0154
ENT		0.3303	0.3291	0.3314	0.3337	0.3385

Tabulka.4: Výsledná tabulka pro n =10 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4966	4969	4971	4970	4973
Parametr	0.7591	0.8396	0.7541	0.7542	0.7253	0.6961
MSE		0.1230	0.0555	0.0555	0.0569	0.0605
ABS		0.2175	0.1693	0.1693	0.1693	0.1724
LOG		0.1068	0.0821	0.0821	0.0808	0.0827
ENT		0.0599	0.0446	0.0446	0.0423	0.0415
Spolehlivost t=1	0.2805	0.2978	0.2792	0.2768	0.2720	0.2645
MSE		0.0070	0.0044	0.0044	0.0045	0.0047
ABS		0.0601	0.0509	0.0508	0.0511	0.0520
LOG		0.0715	0.0587	0.0552	0.0580	0.0589
ENT		0.0384	0.0317	0.0310	0.0304	0.0230
Spolehlivost t=1.5	0.1695	0.1828	0.1686	0.1660	0.1634	0.1581
MSE		0.0036	0.0020	0.0020	0.0021	0.0022
ABS		0.0411	0.0337	0.0337	0.0338	0.0344
LOG		0.0853	0.0682	0.0674	0.0672	0.0684
ENT		0.0465	0.0369	0.0352	0.0352	0.0345
Spolehlivost t=2	0.1027	0.1118	0.1021	0.1001	0.0987	0.0952
MSE		0.0016	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009
ABS		0.0267	0.0214	0.0214	0.0215	0.0218
LOG		0.0937	0.0737	0.0728	0.0726	0.0741
ENT		0.3784	0.3797	0.0393	0.4023	0.4267

Tabulka.5: Výsledná tabulka pro n =20 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4950	4951	4952	4953	4955
Parametr	0.7598	0.7932	0.7530	0.7530	0.7366	0.7202
MSE		0.0494	0.0322	0.0322	0.0323	0.0340
ABS		0.1434	0.1264	0.1264	0.1268	0.1285
LOG		0.0508	0.0443	0.0443	0.0441	0.0449
ENT		0.0269	0.0232	0.0232	0.0226	0.0225
Spolehlivost t=1	0.2009	0.2880	0.2788	0.2788	0.2748	0.2707
MSE		0.0031	0.0024	0.0025	0.0025	0.0026
ABS		0.0412	0.0378	0.0378	0.0380	0.03845
LOG		0.0350	0.316	0.0314	0.0314	0.0318
ENT		0.0182	0.0165	0.0163	0.0162	0.0161
Spolehlivost t=1.5	0.1697	0.1752	0.1683	0.1669	0.1654	0.1625
MSE		0.0015	0.0012	0.0012	0.0013	0.0012
ABS		0.0278	0.0251	0.0251	0.0252	0.0255
LOG		0.0412	0.0367	0.0365	0.0365	0.0371
ENT		0.0216	0.0192	0.0189	0.0187	0.0187
Spolehlivost t=2	0.1028	0.1066	0.1020	0.1009	0.1000	0.0981
MSE		0.0007	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006
ABS		0.0179	0.0160	0.0160	0.0161	0.0162
LOG		0.0450	0.0397	0.0395	0.0396	0.0402
ENT		0.3840	0.3845	0.3920	0.3972	0.4104

Tabulka.6: Výsledná tabulka pro n =50 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

KS	Přesné	MLE	L_1	L_2	L_3	L_4
přijetí H_o		4931	4932	4933	4934	4935
Parametr	0.7413	0.7574	0.7428	0.7428	0.7378	0.7288
MSE		0.0164	0.0133	0.0133	0.01334	0.0135
ABS		0.0872	0.0820	0.0820	0.0818	0.0821
LOG		0.0205	0.0193	0.0193	0.0195	0.0192
ENT		0.0105	0.0099	0.0098	0.0097	0.0096
Spolehlivost t=1	0.2756	0.2791	0.2757	0.2752	0.2740	0.2723
MSE		0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0011
ABS		0.0259	0.0249	0.02484	0.0248	0.0249
LOG		0.0145	0.0138	0.0138	0.0139	0.0138
ENT		0.0074	0.0071	0.0070	0.0070	0.0070
Spolehlivost t=1.5	0.1661	0.1688	0.1630	0.1657	0.1651	0.1638
MSE		0.0006	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
ABS		0.0172	0.0164	0.0164	0.0164	0.0165
LOG		0.0169	0.0160	0.0159	0.0160	0.0160
ENT		0.0086	0.0082	0.0081	0.0081	0.0080
Spolehlivost t=2	0.1005	0.1024	0.1007	0.1002	0.0998	0.0990
MSE		0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
ABS		0.0110	0.0104	0.0104	0.0103	0.0104
LOG		0.0184	0.0173	0.0172	0.0172	0.0172
ENT		0.3894	0.3891	0.3923	0.3945	0.4001

Tabulka.7: Výsledná tabulka pro n =10 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.4020	0.3997	0.3929	0.3725	0.3380
MSE		0.0218	0.0219	0.0227	0.0261
ABS		0.1102	0.1098	0.1112	0.1197
LOG		0.4876	0.4193	0.3808	0.4197
ENT		0.4959	0.4043	0.4555	0.3772

Tabulka.8: Výsledná tabulka pro n =20 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.3937	0.3918	0.3881	0.3771	0.3606
MSE		0.0120	0.0121	0.0123	0.0132
ABS		0.0817	0.0815	0.0821	0.0850
LOG		0.2951	0.2455	0.2409	0.2485
ENT		0.2613	0.2283	0.1922	0.1992

Tabulka.9: Výsledná tabulka pro n =50 $\alpha = 3$ $\beta = 2$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.3974	0.3957	0.3941	0.3894	0.3829
MSE		0.0051	0.0051	0.0051	0.0053
ABS		0.0524	0.0524	0.0526	0.0534
LOG		0.1030	0.0953	0.0942	0.1002
ENT		0.0774	0.0615	0.6927	0.0657

Tabulka.10: Výsledná tabulka pro n =10 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.1456	0.1435	0.1344	0.1228	0.0943
MSE		0.0073	0.0074	0.0079	0.0105
ABS		0.0580	0.0575	0.0586	0.0683
LOG		0.8977	0.7304	0.7076	0.7441
ENT		0.7125	0.7004	0.7005	0.7008

Tabulka.11: Výsledná tabulka pro n =20 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.1456	0.1434	0.1383	0.1319	0.1187
MSE		0.0041	0.0042	0.0044	0.0051
ABS		0.0430	0.0429	0.0435	0.0468
LOG		0.8778	0.6754	0.6284	0.6935
ENT		0.6934	0.6747	0.5620	0.5529

Tabulka.12: Výsledná tabulka pro n =50 $\alpha = 3$ $\beta = 4$

	Přesné	L_1	L_2	L_3	L_4
kvantil	0.1389	0.1399	0.1377	0.1350	0.1299
MSE		0.0017	0.0017	0.0018	0.0018
ABS		0.0275	0.0273	0.0274	0.0280
LOG		0.3076	0.2719	0.2701	0.2972
ENT		0.3008	0.2199	0.2002	0.1985

Reference

[1] ASGHARZADEH, A a R REZAEI:. The generalized exponential distribution as a lifetime modul under different loo function data. Science Journal. 2009, : 217-225.

[2] ANDĚL, J. Matematická statistika. Praha: SNTL, 1985.

[3] HUŠKOVÁ, M. Bayesovské metody: skripta. Univerzita Karlova, 1985.

[4] J. Reif: Metody matematické statistiky, Západočeská univerzita, Plzeň, 2004.

[5] FRIESL, M. Bayesovské odhady v některých modelech. Západočeská univerzita.

[6] FERGUSON, T. S. A Bayesian analysis of some nonparametric problems. Ann. Statist. 1. 1973, : 209–230.

[7] GUPTA, R a D KUNDU. Generalized Exponential Distributions: Statistical Inferences: Technical Report. 1999b. The University of New Brunswick: Saint John.

[8] ČVUT. Sčítání a aproximace řad: Přehled metod: Aproximace řad: Přehled metod [online]. [cit. 2015-05-27]. Dostupné z:$http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/1/txc3eb1d.htm$

[9] Gamma distribution. Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-05-27]. Dostupné z: $http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution$