

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování proudění kapalin

Plzeň, 2017

Bc. Klára Vitáková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce a s použitím uvedené literatury.

V Plzni dne:

Podpis:

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce prof. Ing. Jiřímu Křenovi, CSc., za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování diplomové práce.

Abstrakt

Diplomová práce se věnuje modelování proudění kapalin. Je zde řešeno stacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny a neneutonských kapalin, konkrétně čistě viskózní časově nezávislé kapaliny a viskoelastické kapaliny. Proudění těchto kapalin je popsáno Navierou-Stokesovou rovnicí, rovnicí kontinuity a příslušnými konstitutivními vztahy. Numerická simulace proudění Newtonovy a čistě viskózní neneutonské kapaliny byla provedena v trojrozměrných kanálech. Proudění viskoelastické kapaliny bylo modelováno ve dvourozměrném kanálu. Všechny tyto problémy byly řešeny pomocí metody konečných prvků a výpočet byl proveden v programech MATLAB a GNU Octave.

Klíčová slova: kapaliny, Newtonova kapalina, neneutonské kapaliny, metoda konečných prvků, Navierova-Stokesova rovnice, rovnice kontinuity, konstitutivní vztahy.

Abstract

This master's thesis is aimed at modelling of fluid flow. It deals with a stationary laminar isothermal flow of incompressible Newtonian and non-Newtonian fluids. For a purpose of this work only non-elastic time-independent and viscoelastic fluids were considered. Flow of these fluids can be described through Navier-Stokes equations, equation of continuity and by corresponding constitutive equations. Flow of previously mentioned fluids was simulated by finite element software MATLAB and GNU Octave. Flow through three dimensional canal was simulated for a Newtonian fluid and a non-elastic non-Newtonian fluid. In case of viscoelastic fluid two dimensional model of a canal was used.

Keywords: fluids, Newtonian fluid, non-Newtonian fluid, finite element analysis, Navier-Stokes equations, equation of continuity, constitutive equations

Obsah

1	Úvod	1
2	Rozdělení kapalin	2
3	Modelování newtonských kapalin	3
3.1	Rovnice proudění kapalin v kartézských souřadnicích	5
3.1.1	Numerická realizace problému	6
3.1.2	Výsledky	14
3.2	Rovnice proudění kapalin v kovariantním tvaru	22
3.2.1	Kovariantní tvar rovnice kontinuity	23
3.2.2	Kovariantní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice	25
3.2.3	Numerická realizace problému	31
3.2.4	Výsledky	35
4	Modelování neneutonských kapalin	39
4.1	Řídící rovnice čistě viskózních kapalin	39
4.2	Konstitutivní vztahy	40
4.2.1	Mocninový model	41
4.2.2	Carreauův model	43
4.2.3	Binghamův model	43
4.3	MKP model čistě viskózních kapalin	43
4.3.1	Numerická realizace problému	43
4.3.2	Výsledky	46
4.4	Řídící rovnice viskoelastických kapalin	54
4.4.1	Rovnice zachování	54
4.4.2	Konstitutivní vztahy	54
4.5	MKP model viskoelastické kapaliny	59
4.5.1	Numerická realizace problému	60
4.5.2	Výsledky	63
5	Závěr	66
	Seznam literatury	68

Seznam nejčastěji použitého značení

Symbol	Jednotka	Název
F_i	$[\text{N m}^{-3}]$	složky objemové síly
f_i	$[\text{N kg}^{-1}]$	měrná objemová síla vztažená na jednotku hmotnosti
G^{il}		algebraický doplněk ke g_{ij}
g_{ij}		kovariantní složky metrického tenzoru
g^{ij}		kontravariantní složky metrického tenzoru
H		sloupcová matice kvadratických interpolačních funkcí
$\mathbf{H}_\xi, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{H}_\zeta$		derivace matice izoparametrických funkcí podle lokálních proměnných ξ, η, ζ
$\mathbf{H}_\xi^s, \mathbf{H}_\eta^s$		parciální derivace matice \mathbf{H}^s podle lokálních souřadnic ξ, η
I_1, I_2, I_3		invarianty tenzoru rychlosti deformace V_{ij}
J		Jacobiova matice
J_{ij}^{-1}		příslušný prvek inverzní Jacobiho matice
K		konzistentní parametr
L_{ij}	$[\text{s}^{-1}]$	rychlostní gradient
MKP		metoda konečných prvků,
N		sloupcová matice lineárních interpolačních funkcí
n		index toku
p	$[\text{Pa}]$	tlak
p	$[\text{Pa}]$	sloupcová matice globálních složek tlaku v uzlech prvků
$\mathbf{R}^{(r)}$		reziduální vektor v r -tém iteračním kroku
Re		Reynoldsovo číslo
Re^p		Reynoldsovo číslo pro elastickou složku kapaliny
Re^s		Reynoldsovo číslo pro čistě viskózní složku kapaliny
T_{ij}	$[\text{Pa}]$	disipační část tenzoru napjatosti
T_{ij}	$[\text{Pa}]$	viskózní tenzor napjatosti
T_{ij}^p	$[\text{Pa}]$	viskoelastická složka tenzoru napjatosti
T_{ij}^s	$[\text{Pa}]$	čistě viskózní složka tenzoru napjatosti
T	$[\text{Pa}]$	smykové napětí
T_0	$[\text{Pa}]$	mez tečení
t	$[\text{s}]$	okamžitý čas
t'	$[\text{s}]$	počáteční čas
u, v, w	$[\text{m s}^{-1}]$	sloupcové matice hledaných globálních složek rychlosti v uzlových bodech
v^i	$[\text{m s}^{-1}]$	kontravariantní složky vektoru rychlosti
${}^0\hat{v}_i$	$[\text{m s}^{-1}]$	počáteční rychlost
V_{ij}	$[\text{s}^{-1}]$	tenzor rychlosti deformace

Γ_{jk}^i		Christoffelův symbol druhého druhu
$\dot{\gamma}$	[s ⁻¹]	smyková rychlost
δ_{ij}		Kroneckerovo delta
η	[Pa s]	dynamická viskozita
η_B	[Pa s]	dynamická viskozita Binghamovy kapaliny
η_N	[Pa s]	dynamická viskozita Newtonovy kapaliny
η^p	[Pa s]	dynamická viskozita elastické části kapaliny
η^s	[Pa s]	dynamická viskozita čistě viskózní kapaliny
η_0	[Pa s]	limitní dynamická viskozita pro ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$)
η_∞	[Pa s]	limitní dynamická viskozita pro ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$)
λ	[Pa s]	druhá viskozita
λ	[s]	konstanta materiálu u Carreauova modelu
λ	[s]	relaxační čas
λ'	[s]	retardační čas
ρ	[kg m ⁻³]	měrná hmotnost
$\sum_{\xi\eta\zeta}$		lokální souřadnicový systém
\sum_{xyz}		globální souřadnicový systém
τ_{ij}	[Pa]	Cauchyův tenzor napjatosti
Φ		sloupcová matice lineárních interpolačních funkcí
$\Phi(t)$		relaxační funkce
∇_i		kovariantní derivace

1 Úvod

K modelování proudění kapalin je v této práci ve všech případech použita metoda konečných prvků. Tato přibližná numerická metoda je založena na diskretizaci spojitého kontinua do předem daného počtu prvků, v jejichž uzlových bodech určujeme diskrétní hodnoty hledaných funkcí řešené úlohy [14]. Principy této metody jsou známé ze 40. let 20. století, její popularita ale vzrostla až v dobách rozvoje moderní výpočetní techniky [5].

Potřeba vyřešit komplexní problémy pružnosti a strukturální analýzy v inženýrství byla počátkem vývoje metody konečných prvků. První záznamy o metodě konečných prvků se objevily na počátku 40. let 20. století v pracích Alexandera Hrennikoffa [5] a Richarda Couranta [19]. Jejich práce měly různý přístup k metodě, ale jednu základní věc měli společnou - diskretizace kontinua do diskrétních subdomén (prvků). Zatímco Hrennikoff používal k rozdělení oblasti čtvercovou síť, Courant použil trojúhelníkové prvky.

V 50. a 60. letech pokračoval vývoj MKP. Podílela se na něm například vědecká skupina Johna Argyrise z univerzity ve Stuttgartu a Raye W. Clougha z univerzity Berkeley [19]. V roce 1960 publikoval R. W. Clough článek, kde byl poprvé použit termín „konečný prvek“ [7]. První kniha, kterou lze považovat za učebnici MKP, byla vydána v roce 1967 Zienkiewiczem a Cheungem [2].

S rozvojem výpočetní techniky vzrůstala popularita metody konečných prvků. V letech 1958-1967 proběhl ve spolupráci General Motors a IBM průlomový vývoj v oblasti prvního počítačového grafického systému. Byl označen jako DAC-1 (CAD pozpátku). Základem tohoto systému byl počítač IBM 704, který měl menší výkon než dnešní kapesní kalkulačka, ale zabíral celou místnost [6]. Na konci 60. let NASA vyvinula software NASTRAN, jehož název je zkratkou NASA structure analysis [5]. To je první software pracující na principu metody konečných prvků. V roce 1970 zveřejnil John Swanson kód ANSYS předpovídající napětí a posunutí v systémech jaderných reaktorů, který vyvinul z obecně použitelného kódu konečnoprvkové analýzy [1]. V roce 1971 byl vyvinut softwarový balíček MARC skupinou výzkumníků na Brown University. Všechny tyto programy byly vyvinuty v tzv. pre-PC éře.

V PC éře došlo k prudkému rozvoji. V roce 1977 začal Mike Riddle a John Walker pracovat na dnešním AutoCADu [6]. Tento software nebyl založen na MKP, ale zapříčinil, že vzrostla snaha o propracované grafické rozhraní u MKP programů. V roce 1978 vyvinuli 3 zaměstnanci společnosti MARC Analysis Research Corporation nový MKP software ABAQUS. Téhož roku vydal John Hallquist, inženýr z Lawrence Livermore National Laboratory, software DYNA3D [1].

I čeští matematici obohatili metodu konečných prvků teorií, která přispěla k jejímu rozvoji [3]. Za všechny jmenujme například Miloše Zlámala, který se zabýval apriorními odhady, aposteriorními odhady přispěl Ivo Babuška a teorii slabého řešení okrajových úloh a Sobolevových prostorů se věnoval Jindřich Nečas.

2 Rozdělení kapalin

V bakalářské práci [20] jsme řešili numericky Newtonovy kapaliny. Tuto kapalinu lze popsat lineárním konstitutivním vztahem a její dynamická viskozita je $\eta = konst.$ Většina reálných kapalin se ale chová jako neneutonské kapaliny, které mají podstatně složitější konstitutivní vztahy. V technických aplikacích je tedy nutné zohlednit tuto skutečnost, a proto se usiluje o co nejlepší namodelování těchto kapalin i se všemi jejich efekty. U neneutonských kapalin je dynamická viskozita η obecně funkcí tenzoru rychlosti deformace V_{ij} . V jednorozměrném případě můžeme zjednodušeně říci, že dynamická viskozita η závisí na smykové rychlosti v kapalině.

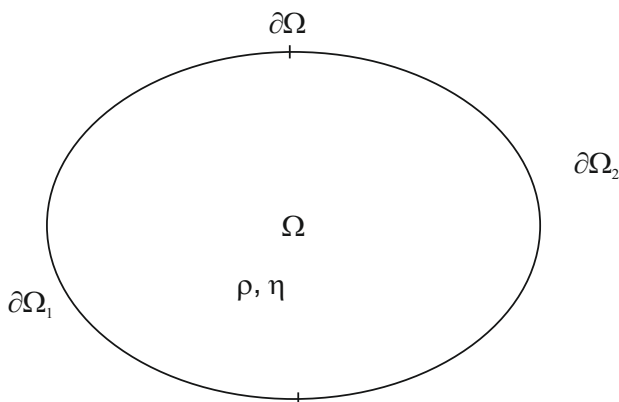
Neneutonské kapaliny se z pohledu modelování obecně dělí na 2 základní skupiny, a to čistě viskózní kapaliny a viskoelastické kapaliny. Čistě viskózní kapaliny se označují také jako neelastické kapaliny. Patří sem časově nezávislé (např. pseudoplastická, dilatantní, Binghamova a zobecněná Newtonova kapalina) a časově závislé (tixotropní a reopektické) kapaliny. Jsou to kapaliny bez paměťového efektu - po ukončení působení síly se vrací do původního stavu ve velmi krátké době. Neelastické kapaliny můžeme dělit i podle jiných hledisek, například na řídnoucí a houstnoucí. U řídnoucích kapalin se se zvyšujícím působením smykové síly snižuje dynamická viskozita η (tixotropní, pseudoplastická kapalina). Houstnoucí kapaliny se chovají přesně opačně, tj. se zvyšující se smykovou silou je dynamická viskozita η vyšší (dilatantní a reopektické kapaliny).

Paměťový efekt je naopak důležitou vlastností u viskoelastických kapalin. Viskoelastická deformace je kombinací jak elastické deformace částic kapaliny, tak i přetvoření vlivem viskózního toku. Tato deformace je dokonale vratná, ale není okamžitá. K dosažení původního stavu je třeba určité relaxační doby. Jako viskoelastické jsou označovány materiály, které se za určitých okolností chovají jako pružná tělesa a za jiných jako vazké kapaliny. Rozhodujícími faktory u těchto materiálů je délka trvání deformačního procesu ve srovnání s materiálovým časem. Tyto časové veličiny charakterizují pomíjivou paměť materiálu a jeho výchozí tvar. Obecně lze tyto okolnosti charakterizovat Debořiným číslem. Při malých hodnotách Debořina čísla se viskoelastické materiály chovají jako vazké kapaliny, při vysokých se chovají jako pružná tělesa. Lze tedy říci, že z tohoto pohledu jsou všechny materiály viskoelastické. To, zda je daná látka kapalná nebo pevná, souvisí s tím, jak je to posuzováno v lidském měřítku. Jako konkrétní příklad mohou posloužit například pohyby ledovců nebo skal. Díváme-li se na ně, nevidíme žádný pohyb a pokládáme je tedy za pevnou látku. Ovšem pokud uděláme jejich časosběrné video (například půl roku v případě ledovců), vidíme, jak se celá masa pohybuje a přitom se chová jako kapalina. Reologickým příkladem viskoelastických kapalin je například model Maxwellovy kapaliny.

3 Modelování newtonských kapalin

Rovnice popisující proudění kapalin můžeme uvádět v nejrůznějších tvarech v závislosti na typu zjednodušení úlohy a nebo na typu požadovaného souřadnicového systému, ve kterém danou úlohu řešíme. V této kapitole uvedeme nejprve obecné rovnice popisující proudění kapalin. V následujících odstavcích tyto rovnice upravíme do tvaru podle konkrétního řešeného problému.

Proudění Newtonovy kapaliny je definováno na otevřené a omezené množině Ω (obr. 3.1). Dále necht' je zadán časový interval $t \in (0, T)$. Uvažujme obecně nestacionární laminární izotermické proudění Newtonovy kapaliny s konstantní měrnou hmotností ρ a dynamickou viskozitou η . Lipschitzovská hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω je rozdělena na dvě disjunktní oblasti $\partial\Omega_1$ a $\partial\Omega_2$. Pro hranici množiny Ω platí $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Uzávěr množiny je potom definován vztahem $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Na části hranice Ω_1 je zadán vektor rychlosti $\hat{\mathbf{v}}$ a na části hranice $\partial\Omega_2$ je zadán vektor napětí $\hat{\mathbf{t}}$. Strážka označuje zadané veličiny.



Obr. 3.1: Obecná úloha hydromechaniky

Řídící rovnice pro popis proudění kapaliny jsou Navierova-Stokesova rovnice, rovnice kontinuity, konstitutivní vztah a okrajové a počáteční podmínky. Jejich tvar uvedeme pro obecnou úlohu hydromechaniky.

Nyní provedeme odvození Navierovy-Stokesovy rovnice. Vyjdeme z obecných podmínek rovnováhy v kartézských souřadnicích v Eulerově popisu. Platí [14]

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad (3.1)$$

kde τ_{ij} je Cauchyův tenzor napjatosti (celkový tenzor napjatosti v kapalině). Složky objemové síly F_i vyjádříme ve tvaru

$$F_i = -\rho \frac{Dv_i}{Dt} + \rho f_i, \quad (3.2)$$

kde první člen na pravé straně je dle d'Alemberta setrvačná síla jednotkového objemu kapaliny. Druhý člen je potom měrná objemová síla vztažená na jednotkový objem. Ve vztahu (3.2) vyjádříme materiálovou derivaci $\frac{Dv_i}{Dt}$ složek vektoru rychlosti a dosadíme do rovnice (3.1). Dostaneme základní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice v kartézských souřadnicích, pro který platí

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad t \in (0, T), x \in \Omega. \quad (3.3)$$

Za tenzor napjatosti τ_{ij} v posledním členu rovnice dosadíme konstitutivní vztah [4]

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta V_{ij}, \quad (3.4)$$

kde tenzor rychlosti deformace V_{ij} je definován vztahem

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.5)$$

Po dosazení výše uvedených vztahů do rovnice (3.3) dostáváme Navierovu-Stokesovu rovnici ve tvaru

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.6)$$

Základní tvar rovnice kontinuity platné pro kartézská souřadnice v Eulerově popisu kontinua má tvar [14]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \text{ pro } \rho = \text{konst.}: \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.7)$$

Okrajové podmínky definují následující vztahy [4]:

$$\text{Dirichletova podmínka} \quad v_i(x, t) = \hat{v}_i(x, t), \quad t \in (0, T), x \in \partial\Omega_1, \quad (3.8)$$

$$\text{Neumannova podmínka} \quad \tau_{ij} n_j = \hat{t}_i(x, t), \quad t \in (0, T), x \in \partial\Omega_2 \quad (3.9)$$

a počáteční podmínka je ve tvaru

$$v_i(x, 0) = {}^0\hat{v}_i(x), \quad t = 0, x \in \Omega. \quad (3.10)$$

Ve výše uvedených vztazích jsou v_i složky vektoru rychlosti v kapalině, p je tlak, τ_{ij} je Cauchyův tenzor napjatosti, T_{ij} je disipační tenzor, x_i jsou prostorové souřadnice kontinua a f_i jsou měrné objemové síly vztažené na jednotku hmotnosti a ${}^0\hat{v}_i$ je počáteční rychlost. Uvedené indexy nabývají obecně hodnot $i, j = 1, 2, 3$.

Neznámé v takto definované úloze jsou složky rychlosti $v_i(x, t)$ a tlak $p(x, t)$. Řešení této úlohy hledáme na časoprostorovém válci $\bar{D} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ a řešíme tzv. smíšenou úlohu. To znamená, že řešíme současně jak rozložení tlaku, tak i rozložení rychlosti na oblasti Ω .

3.1 Rovnice proudění kapalin v kartézských souřadnicích

Nyní uvažujme stacionární laminární izotermické proudění homogenní nestlačitelné vazké Newtonovy kapaliny v Eulerových souřadnicích. Předpokládáme tedy, že měrná hmotnost ρ a dynamická viskozita η jsou konstantní.

Úpravou vztahů (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) a (3.10) podle výše uvedených předpokladů získáváme následující vztahy:

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.11)$$

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega, \quad (3.12)$$

Dirichletova okrajová podmínka

$$v_i(x) = \hat{v}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (3.13)$$

Neumannova okrajová podmínka

$$\tau_{ij} n_j = \hat{t}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (3.14)$$

Budeme řešit smíšenou úlohu hydromechaniky. Hledané neznámé jsou tedy tlak $p(x)$ a složky vektoru rychlosti $v_i(x)$. Výsledkem bude rozložení tlaku a rychlosti na oblasti Ω .

Pro soustavu parciálních diferenciálních rovnic (3.12) a (3.11) odvodíme pomocí Galerkinovy metody slabé řešení dané úlohy [20]. Jako testovací funkce volíme δv_i a δp definované na uzávěru množiny $\bar{\Omega}$. Dle Galerkinovy metody nahradíme původní rovnice jejich integrálním tvarem. Testovací funkce samozřejmě splňují dané okrajové podmínky a platí

$$\begin{aligned} \delta v_i, \delta p : x \in \bar{\Omega}, \text{ kde } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \\ \delta v_i \in V_0, V_0 = \left\{ \delta v_i, \text{ ex. } \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i}; \delta v_i = 0, x \in \partial\Omega_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Výchozí integrální vztahy mají s ohledem na (3.12) a (3.11) následující tvar:

$$\int_{\Omega} \left[\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho f_i \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.17)$$

Na vztah (3.16) aplikujeme Greenovu větu [20] a provedeme úpravu s ohledem na platnost okrajových podmínek. Integrální identity přejdou na tvar:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\ = \int_{\Omega} \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\partial\Omega_2} \hat{t}_i \delta v_i dx, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.19)$$

Rovnice (3.18) a (3.19) jsou slabým řešením dané úlohy hydromechaniky.

3.1.1 Numerická realizace problému

Nyní provedeme numerickou realizaci problému. Nadále řešíme izotermické laminární stacionární proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny.

Zadanou úlohu, jejíž slabé řešení je popsáno rovnicemi (3.18) a (3.19), budeme řešit jako prostorovou úlohu proudění. Provedeme tedy diskretizaci problému 3D konečnými prvky. Složky rychlosti v_i , kde $i = 1, 2, 3$, budeme aproximovat polynomem druhého stupně a tlak p polynomem prvního stupně.

Pro aproximaci hledaných funkcí v libovolném konečném prvku platí [13]

$$\begin{aligned} u &= u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i H_i(\xi, \eta, \zeta) u_i = \mathbf{H}^T \mathbf{u}, \\ v &= v(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i H_i(\xi, \eta, \zeta) v_i = \mathbf{H}^T \mathbf{v}, \\ w &= w(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i H_i(\xi, \eta, \zeta) w_i = \mathbf{H}^T \mathbf{w}, \\ p &= p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_j N_j(\xi, \eta, \zeta) p_j = \mathbf{N}^T \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

kde pro 3D prvek ve tvaru pětistěny (prvek typu dort) a pro prvek typu brick obr. 3.2, resp. obr. 3.3, platí

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_1, u_2, \dots, u_N]^T, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T, \\ \mathbf{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_N]^T, \quad \mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_M]^T, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde $N = 15$ a $M = 6$ pro prvek typu dort a $N = 20$ a $M = 8$ pro prvek typu brick.

Ve vztazích (3.20) jsou u, v, w globální složky vektoru rychlosti a p je tlak v obecném bodu elementu. ξ, η, ζ jsou lokální a x, y, z jsou globální souřadnice konečného prvku. u_i, v_i, w_i a p_j jsou hledané globální složky rychlosti a tlaku v uzlech prvku, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a \mathbf{p} jsou jejich sloupcové matice. Matice \mathbf{N} je sloupcovou maticí lineárních interpolačních funkcí (3.22) a matice \mathbf{H} je sloupcovou maticí kvadratických interpolačních funkcí (3.23) příslušného prvku.

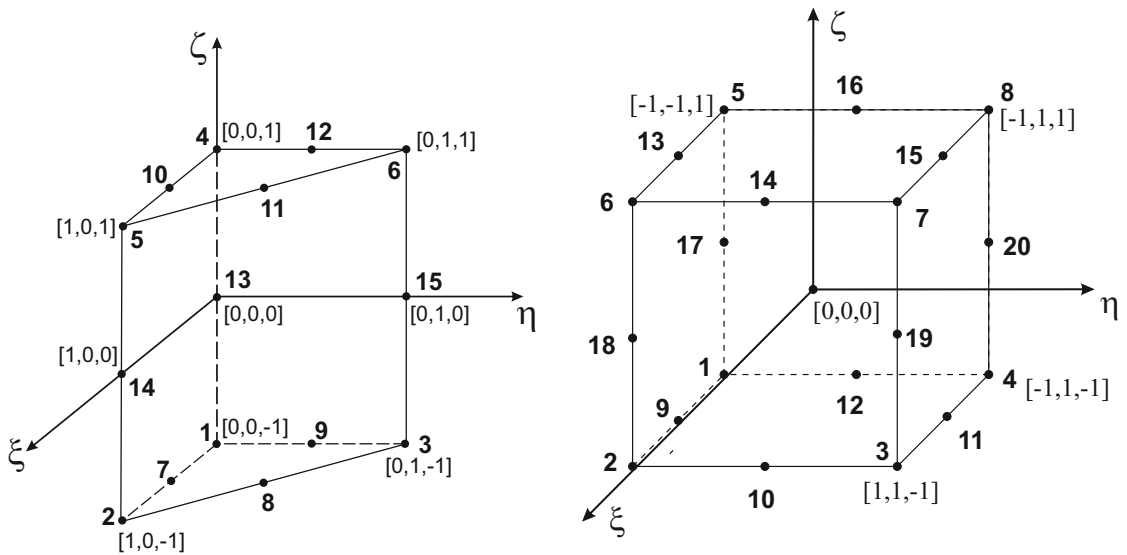
Matice izoparametrických funkcí uvažovaných konečných prvků mají tvar (index D - prvek typu dort, index B prvek typu brick) [15]

$$\mathbf{N}_D(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \\ \frac{1}{2}\xi(1 - \zeta) \\ \frac{1}{2}\eta(1 - \zeta) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \\ \frac{1}{2}\xi(1 + \zeta) \\ \frac{1}{2}\eta(1 + \zeta) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

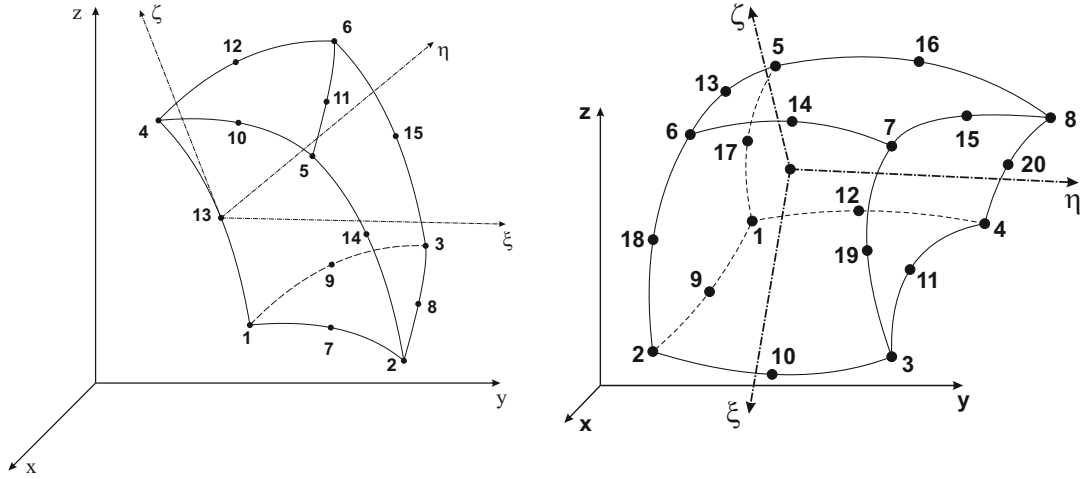
$$\mathbf{H}_D(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)(-2\xi - 2\eta - \zeta) \\ \frac{1}{2}\xi(1 - \zeta)(2\xi - \zeta - 2) \\ \frac{1}{2}\eta(1 - \zeta)(2\eta - \zeta - 2) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)(-2\xi - 2\eta + \zeta) \\ \frac{1}{2}\xi(1 + \zeta)(2\xi + \zeta - 2) \\ \frac{1}{2}\eta(1 + \zeta)(2\eta + \zeta - 2) \\ 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \\ 2\xi\eta(1 - \zeta) \\ 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \\ 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \\ 2\xi\eta(1 + \zeta) \\ 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \\ (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta^2) \\ \xi(1 - \zeta^2) \\ \eta(1 - \zeta^2) \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{N}_B(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{H}_B(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+2\zeta+1) \\ -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-2\zeta-1) \\ -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-2\zeta-1) \\ -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-2\zeta-1) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta+2\zeta-1) \\ \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta+2\zeta-1) \\ \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+2\zeta-1) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta+2\zeta-1) \\ -\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ -\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ -\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ -\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi) \\ \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi) \\ -\frac{\zeta}{2}(1-\xi)(1-\eta) \\ -\frac{\zeta}{2}(1+\xi)(1-\eta) \\ -\frac{\zeta}{2}(1+\xi)(1+\eta) \\ -\frac{\zeta}{2}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$



Obr. 3.2: Zobrazení konečného prvku dort a brick v souřadnicovém systému $\sum_{\xi\eta\zeta}$



Obr. 3.3: Zobrazení konečného prvku dort a brick v souřadnicovém systému Σ_{xyz}

Transformační vztahy mezi lokálním souřadnicovým systémem $\Sigma_{\xi\eta\zeta}$ a globálním souřadnicovým systémem Σ_{xyz} jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}^T \mathbf{x}, \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}^T \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ jsou globální souřadnice uzlů prvku.

Pro vyjádření derivací hledaných funkcí podle globálních souřadnic budeme potřebovat Jacobiovu funkcionální matici. Tato matice zobrazení má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{y} & \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{z} \\ \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{y} & \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{z} \\ \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{y} & \mathbf{H}_\zeta^T \mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Matice \mathbf{H}_ξ , \mathbf{H}_η a \mathbf{H}_ζ jsou derivace matice izoparametrických funkcí (3.23), resp. 3.25, podle lokálních proměnných ξ, η, ζ . Konstrukce matice \mathbf{J} je zřejmá z dosazení vztahů (3.26) do vztahu (3.27).

Dále vyjádříme parciální derivace matice interpolačních funkcí (3.23), resp. 3.25, podle globálních souřadnic x, y, z . Zohledněním předchozích vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = J_{11}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{12}^{-1} \mathbf{H}_\eta + J_{13}^{-1} \mathbf{H}_\zeta, \\ \mathbf{H}_y &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = J_{21}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{22}^{-1} \mathbf{H}_\eta + J_{23}^{-1} \mathbf{H}_\zeta, \\ \mathbf{H}_z &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = J_{31}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{32}^{-1} \mathbf{H}_\eta + J_{33}^{-1} \mathbf{H}_\zeta, \end{aligned} \quad (3.28)$$

kde J_{ij}^{-1} je příslušný prvek inverzní Jacobiho matice.

Nyní můžeme díky platnosti vztahů (3.28) a aproximačních vztahů (3.20) vyjádřit parciální derivace složek vektorů rychlostí a tlaku podle globálních souřadnic, které se vyskytují v rovnicích (3.18) a (3.19). Pro tyto parciální derivace platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= \mathbf{H}_z^T \mathbf{u}, & \frac{\partial \delta u}{\partial x} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_x, & \frac{\partial \delta u}{\partial y} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_y, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \mathbf{H}_z^T \mathbf{v}, & \frac{\partial \delta v}{\partial z} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_z, & \frac{\partial \delta v}{\partial x} &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_x, \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{w}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{w}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \mathbf{H}_z^T \mathbf{w}, & \frac{\partial \delta v}{\partial y} &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_y, & \frac{\partial \delta v}{\partial z} &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_z, \\
\delta u &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}, & \delta v &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}, & & & \frac{\partial \delta w}{\partial x} &= \delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}_x, & \frac{\partial \delta w}{\partial y} &= \delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}_y, \\
\delta w &= \delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}, & \delta p &= \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}, & & & \frac{\partial \delta w}{\partial z} &= \delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}_z,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

kde virtuální přírůstky $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{w}$ a $\delta \mathbf{p}$ jsou nezávislé.

Pro 3D problém proudění dostáváme z integrálních identit (3.18) a (3.19) čtyři rovnice pro neznámé $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p})$ na prvku. Po dosazení vztahů (3.29) získáme následující vztahy:

$$\begin{aligned}
& \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{u} + \\
& + \left[\eta \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{u} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \\
& = \rho \int_{\Omega^e} f_x \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_x ds,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{v} + \\
& + \left[\eta \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{v} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \\
& = \rho \int_{\Omega^e} f_y \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_y ds,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{w} + \\
& + \left[\eta \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{w} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_z \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \\
& = \rho \int_{\Omega^e} f_z \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_z ds,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_x^T dx \right] \mathbf{u} + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_y^T dx \right] \mathbf{v} + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_z^T dx \right] \mathbf{w} = 0 \tag{3.33}$$

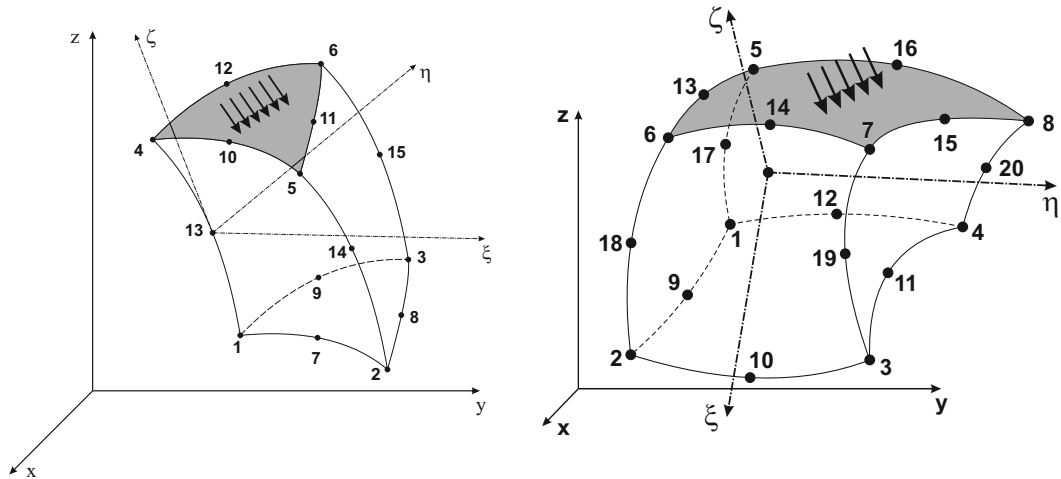
Tyto vztahy jsou definovány pro jeden konečný kapalinový prvek znázorněný na obr. 3.2 a obr. 3.3. Ve výše uvedených rovnicích je Ω^e objem uvažovaného elementu

a $\partial\Omega^e$ je plocha zatížené stěny prvku. Tyto vztahy můžeme vyjádřit v komprimovaném maticovém tvaru. Pokud provedeme sumaci ve smyslu MKP dostaneme soustavu rovnic (3.30) až (3.33) v následujícím tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{B} & \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Definice použitých matic vyplývají z předchozích vztahů. Naznačené integrace provedeme numericky s využitím Gaussových kvadraturních formulí. Poznamenejme, že členy $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ jsou nelineární. To je způsobeno konvektivním členem v Navierově-Stokesově rovnici.

Nyní je třeba určit vektor \mathbf{F} na pravé straně soustavy rovnic (3.34). Při řešení zanedbáme objemové síly f_x, f_y, f_z . Dále uvažujme, že např. stěna prvku s lokálními uzly $\{4, 10, 5, 11, 6, 12\}$ je zatížena konstantním tlakem p (obr. 3.4 vlevo).



Obr. 3.4: Zatížení konečného prvku v souřadnicovém systému Σ_{xyz}

Vydeme ze slabého řešení (3.18) a rozepsáním pravé strany tohoto vztahu pro $i = 1, 2, 3$ a zohledněním výše uvedených podmínek dostáváme (předpokládáme $\hat{t}_i = \hat{p}n_i$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_u = \int_{\partial\Omega_2} \hat{t}_x \delta u_s dx = \hat{p} \int_{\partial\Omega_2} n_u^s \delta u_s dx, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_v = \int_{\partial\Omega_2} \hat{t}_y \delta v_s dx = \hat{p} \int_{\partial\Omega_2} n_v^s \delta v_s dx, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}_w = \int_{\partial\Omega_2} \hat{t}_z \delta w_s dx = \hat{p} \int_{\partial\Omega_2} n_w^s \delta w_s dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

V těchto vztazích jsou n_u^s, n_v^s a n_w^s aproximace složek vektoru vnější normály zatížené stěny prvku a $\delta u_s, \delta v_s$ a δw_s jsou virtuální změny složek vektoru rychlosti. Pro

vyjádření pravé strany zavedeme matice složek vnější normály v uzlech prvku. Platí pro ně, že jsou nenulové pouze v uzlech, které leží na zatížené ploše konečného prvku. Obecně pro prvek typu dort ($N = 15$) (obr. 3.2) a prvek typu brick ($N = 20$)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_u &= [n_{u1}, n_{u2}, \dots, n_{uN}]^T, \\ \mathbf{n}_v &= [n_{v1}, n_{v2}, \dots, n_{vN}]^T, \\ \mathbf{n}_w &= [n_{w1}, n_{w2}, \dots, n_{wN}]^T.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Pro restrikcí aproximačních funkcí prvku na zatížené stěně v uvažovaném případě (obr. 3.4) platí

$$\mathbf{H}^s(\xi, \eta, 1) = \mathbf{H}(\xi, \eta, \zeta) |_{\zeta=1}\tag{3.37}$$

Pro aproximace složek vnější normály v bodě zatížené plochy prvku potom platí

$$\begin{aligned}n_u^s &= (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_u, \\ n_v^s &= (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_v, \\ n_w^s &= (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_w\end{aligned}\tag{3.38}$$

a virtuální změny rychlostí jsou aproximovány vztahy

$$\begin{aligned}\delta u_s &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}^s, \\ \delta v_s &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}^s, \\ \delta w_s &= \delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}^s.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Při výpočtu vektoru pravých stran prvku se integruje numericky pomocí Gaussových kvadraturních formulí. Je tedy třeba zavést funkce, které budou použity pro výpočet plošných integrálů přes zatíženou plochu. Funkce jsou ve tvaru

$$\varphi(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{x}, \quad \psi(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{y}, \quad \nu(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{z}\tag{3.40}$$

a diferenciální formy E , F , G potřebné pro výpočet jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \xi}\right)^2 = \left[(\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{x}\right]^2 + \left[(\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{y}\right]^2 + \left[(\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{z}\right]^2, \\ F &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \nu}{\partial \eta} = \\ &= (\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{x} (\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{x} + (\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{y} (\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{y} + (\mathbf{H}_\xi^s)^T \mathbf{z} (\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{z}, \\ G &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta}\right)^2 = \left[(\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{x}\right]^2 + \left[(\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{y}\right]^2 + \left[(\mathbf{H}_\eta^s)^T \mathbf{z}\right]^2.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Zde použité matice \mathbf{H}_ξ^s a \mathbf{H}_η^s jsou parciální derivace matice \mathbf{H}^s podle lokálních souřadnic ξ a η .

Dosažením vztahů (3.38), (3.39) a (3.41) do rovnic (3.35) získáme složky vektoru pravé strany \mathbf{F} zatíženého prvku ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_u &= \hat{p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{H}^s (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_u (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta, \\ \mathbf{f}_v &= \hat{p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{H}^s (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_v (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta, \\ \mathbf{f}_w &= \hat{p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{H}^s (\mathbf{H}^s)^T \mathbf{n}_w (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta,\end{aligned}\tag{3.42}$$

neboť virtuální změny $\delta \mathbf{u}^T$, $\delta \mathbf{v}^T$ a $\delta \mathbf{w}^T$ jsou nezávislé. Pokud je zatížena jiná stěna konečného prvku, než jak je tomu na obr. 3.4, postupuje se při výpočtu vektoru pravé strany analogicky.

Nyní máme vyjádřeny všechny členy maticové rovnice (3.34), která představuje soustavu nelineárních algebraických rovnic. Tím je kompletně popsána úloha stacionárního izotermického proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny v trojrozměrném prostoru. Dále se budeme věnovat numerickému řešení této úlohy pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody.

Rovnici (3.34) zapíšeme symbolicky ve tvaru

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F},\tag{3.43}$$

kde \mathbf{x} představuje neznámé v úloze, \mathbf{K} je „matice tuhosti“ a \mathbf{F} je vektor pravých stran. Iterační postup je potom řízen algoritmem

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{J}_{(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(r)},\tag{3.44}$$

kde $\mathbf{J}_{(r)}^{-1}$ je inverzní Jacobiova matice r -tého iteračního kroku a reziduální vektor $\mathbf{R}^{(r)}$ v tomtéž kroku má tvar

$$\mathbf{R}^{(r)} = \mathbf{K}^{(r)} \mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{F}.\tag{3.45}$$

Pro Jacobiovu matici v r -tém iteračním kroku platí

$$\mathbf{J}_{(r)} = \frac{\partial \mathbf{R}^{(r)}}{\partial \mathbf{x}_{(r)}^T} = \mathbf{K}^{(r)} + \frac{\partial \mathbf{K}^{(r)}}{\partial \mathbf{x}_{(r)}^T} \mathbf{x}^{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_v^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_w^{(r)} & \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}.\tag{3.46}$$

Submatice $\mathbf{A}_u^{(r)}$, $\mathbf{A}_v^{(r)}$, $\mathbf{A}_w^{(r)}$ zavedené v Jacobiho matici jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_u^{(r)} &= \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \mathbf{B} + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{u}^{(r)}, \\ \mathbf{A}_v^{(r)} &= \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \mathbf{B} + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{v}^{(r)}, \\ \mathbf{A}_w^{(r)} &= \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \mathbf{B} + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{w}^{(r)}.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Poslední člen těchto výrazů lze zapsat například pro vektor \mathbf{u} následovně

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{u}^{(r)} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v_1} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_1} \right) \mathbf{u}^{(r)}, \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_2} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v_2} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_2} \right) \mathbf{u}^{(r)}, \dots, \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_{15}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v_{15}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_{15}} \right) \mathbf{u}^{(r)} \right]. \quad (3.48)$$

Každý člen pravé strany tohoto vztahu definuje jeden sloupec čtvercové matice 15×15 , která je součástí Jacobiovy matice (3.46). Provedením příslušných derivací získáme pro i -tý sloupec uvažované matice vztah

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v_i} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_i} \right) \mathbf{u}^{(r)} = \left[\rho \int_{\Omega^e} H_i \left(\mathbf{H}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}_z^T \right) dx \right] \mathbf{u}^{(r)}. \quad (3.49)$$

Pro iterační řešení zadané úlohy je nutné určit počáteční vektor \mathbf{x}^0 . Ten je v našem případě získán z řešení zadané úlohy se zanedbáním konvektivního členu v Navierově-Stokesově rovnici. Pokud iterační proces konverguje, tak norma vektoru $\mathbf{J}_{(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(r)}$ ve vztahu (3.44) obecně limituje k nule. Iterační proces tedy můžeme zastavit například podmínkou

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(r+1)} - \mathbf{x}^{(r)}\|}{\|\mathbf{x}^{(r)}\|} \leq \varepsilon, \quad (3.50)$$

kde ε je zvolená přesnost.

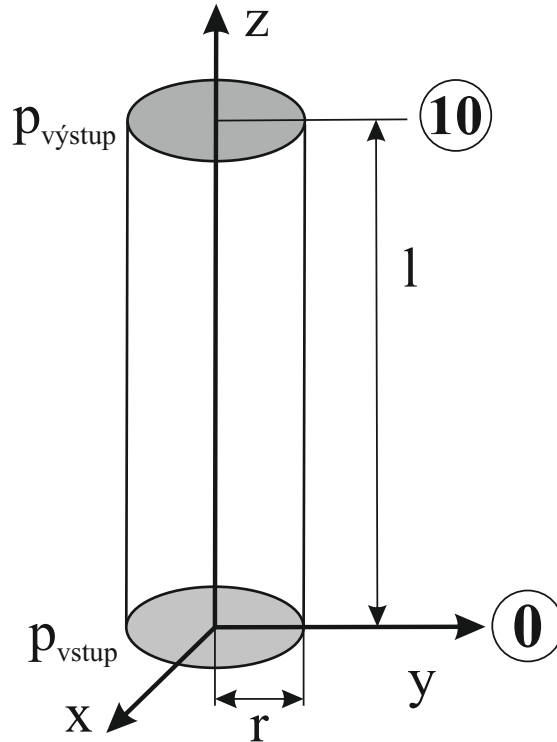
V následující kapitole uvedeme několik konkrétních řešeních příkladů pro stacionární proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s konvektivním členem v Navierově-Stokesově rovnici.

3.1.2 Výsledky

V tomto odstavci provedeme numerické řešení konkrétních úloh hydromechaniky. Řešíme stacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny v trojrozměrných kanálech. V předchozích odstavcích byla uvedena soustava rovnic, která tuto úlohu popisuje a zároveň byly definovány všechny členy těchto rovnic. Vidíme, že jednotlivé prvky matic jsou definovány jako určité integrály. Tyto integrály vypočítáme aplikací Gaussových kvadraturních formulí, jejichž konkrétní tvary a integrace jsou vyjádřeny například v [20], [11], [15]. Konkrétní výpočet ukážeme na přímém kanálu kruhového průřezu (obr. 3.5) a kanálu kruhového průřezu se střednicí ve tvaru půlkružnice (obr. 3.8).

Přímý kanál

Uvažovaný kanál je zobrazen na obr. 3.5.

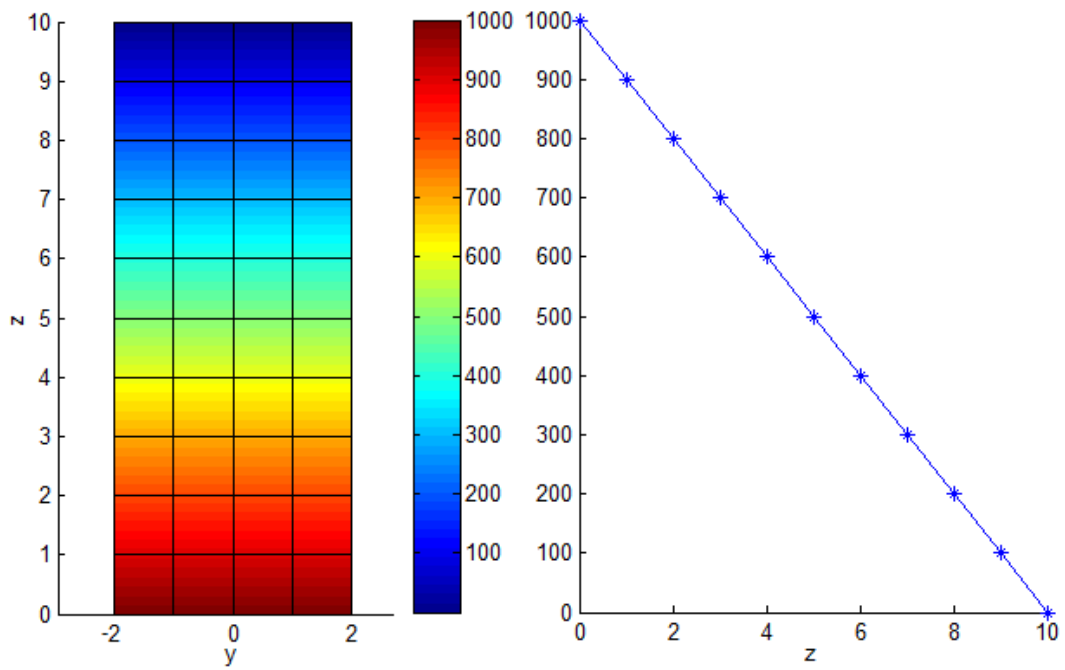


Obr. 3.5: Přímý kanál kruhového průřezu

Vstupní parametry jsou následující (bezrozměrné veličiny):

p_{vstup}	=	1000	[-]	tlak na vstupu kanálu,
p_{vystup}	=	0	[-]	tlak na výstupu kanálu,
Re	=	0,02	[-]	Reynoldsovo číslo (za η dosadíme $\frac{1}{Re}$),
ρ	=	1	[-]	hustota,
l	=	10	[-]	délka kanálu,
r	=	2	[-]	poloměr kanálu,
v_0	=	0	[-]	rychlost kapaliny na stěně kanálu.

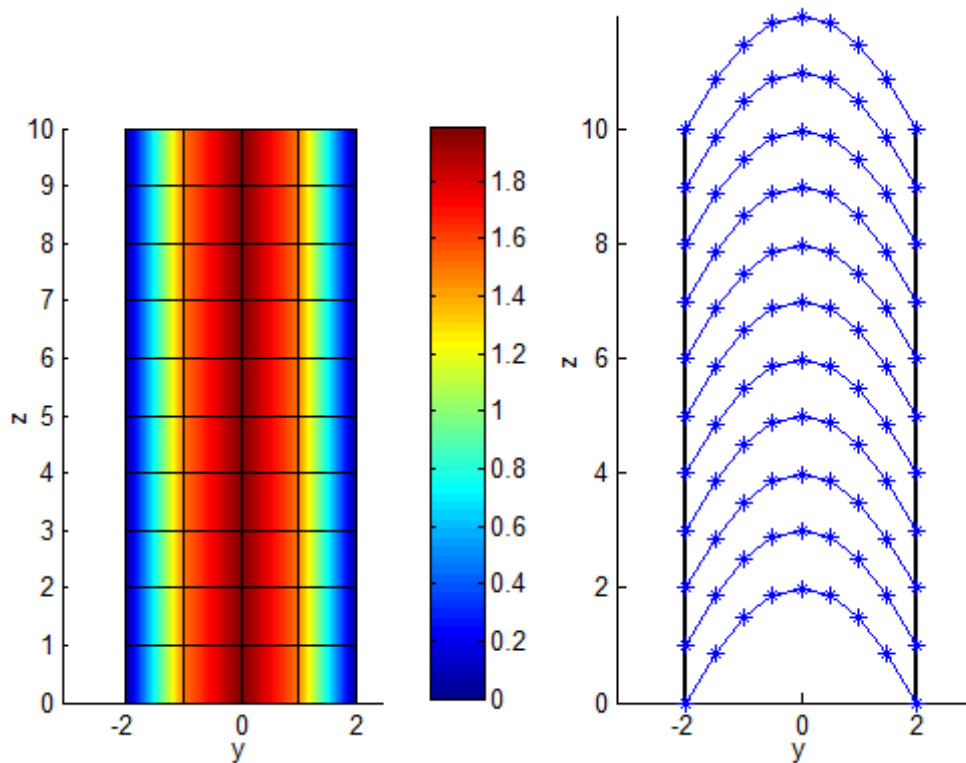
Sít, kterou je modelován tento kanál, je složena ze šestnácti prvků na průřezu v rovině x, y a deseti prvků na délku z . Pro model kanálu byla tedy použita síť se sto šedesáti prvky. Pro zadané hodnoty získáváme rozložení tlaku a rychlosti v uvažovaném kanálu. Tyto numerické výsledky jsou znázorněny na následujících obrázcích a tabulkách. Tento kanál je symetrický a výsledky jsou tedy zobrazeny v rovině xz .



Obr. 3.6: Rozložení tlaku v přímém kanálu v rovině yz

Tabulka 3.1: Hodnoty tlaku v přímém kanálu v rovině yz

z/y	-2	-1	0	1	2
0	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00
1	900,00	900,00	900,00	900,00	900,00
2	800,00	800,00	800,00	800,00	800,00
3	700,00	700,00	700,00	700,00	700,00
4	600,00	600,00	600,00	600,00	600,00
5	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
6	400,00	400,00	400,00	400,00	400,00
7	300,00	300,00	300,00	300,00	300,00
8	200,00	200,00	200,00	200,00	200,00
9	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00



Obr. 3.7: Rozložení rychlosti v přímém kanálu v rovině yz

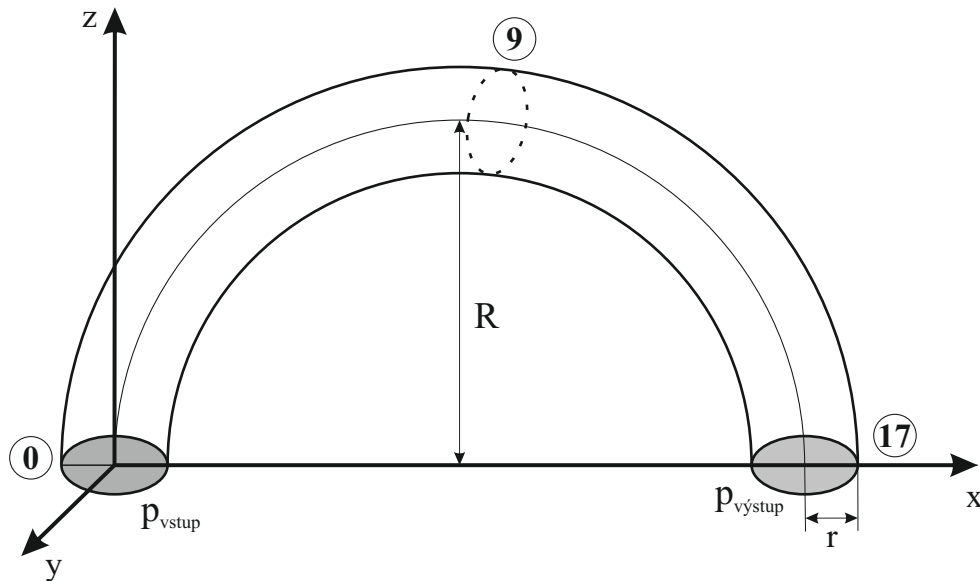
Tabulka 3.2: Hodnoty rychlosti v přímém kanálu v rovině yz

z/y	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
1	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
2	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
3	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
4	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
5	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
6	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
7	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
8	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
9	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00
10	0,00	0,87	1,49	1,88	1,99	1,88	1,49	0,87	0,00

Z obrázků je zřejmé, že rozložení tlaku lineárně klesá směrem od vstupu k výstupu. Na rozložení tlaku má tedy vliv pouze souřadnice z . Rozložení rychlosti v kanálu vidíme na obr. 3.7. Zde jsou znázorněny rychlosti v rovině řezu yz . Jak z tohoto obrázku, tak z tabulky 3.2 je zřejmé, že rychlostní profil v kapalině je symetrický a má parabolický tvar. Válec je rotačně symetrický, hodnoty rychlosti a tlaku ve všech rovinách tělesa rovnoběžných s osou z jsou shodné.

Kanál kruhového průřezu se střednicí tvaru půlkružnice

Uvažovaný kanál je zobrazen na obr. 3.8.

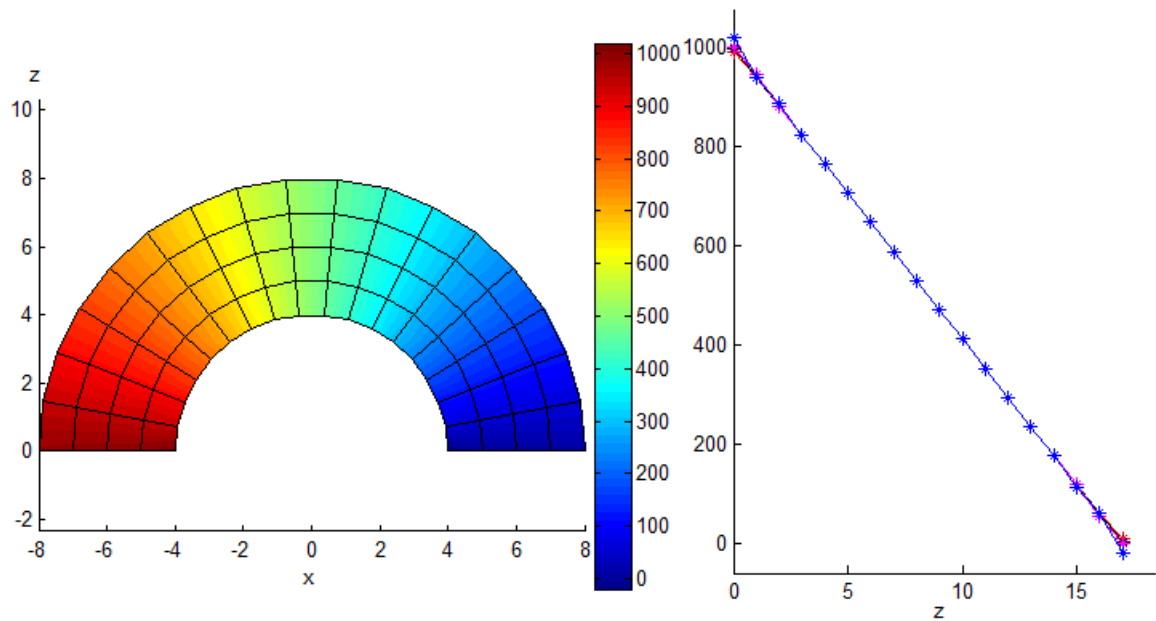


Obr. 3.8: Kanál ve tvaru půlkružnice o kruhovém průřezu

Parametry zadané úlohy jsou následující (bezrozměrné veličiny):

p_{vstup}	=	1000	[-]	tlak na vstupu,
$p_{výstup}$	=	0	[-]	tlak na výstupu,
Re	=	0,02	[-]	Reynoldsovo číslo (za η dosadíme $\frac{1}{Re}$),
ρ	=	1	[-]	hustota,
R	=	6	[-]	poloměr kanálu půlkruhového tvaru,
r	=	1	[-]	poloměr průřezu kanálu půlkruhového tvaru,
l	=	6π	[-]	střední délka kanálu,
v_0	=	0	[-]	rychlost kapaliny na stěně kanálu.

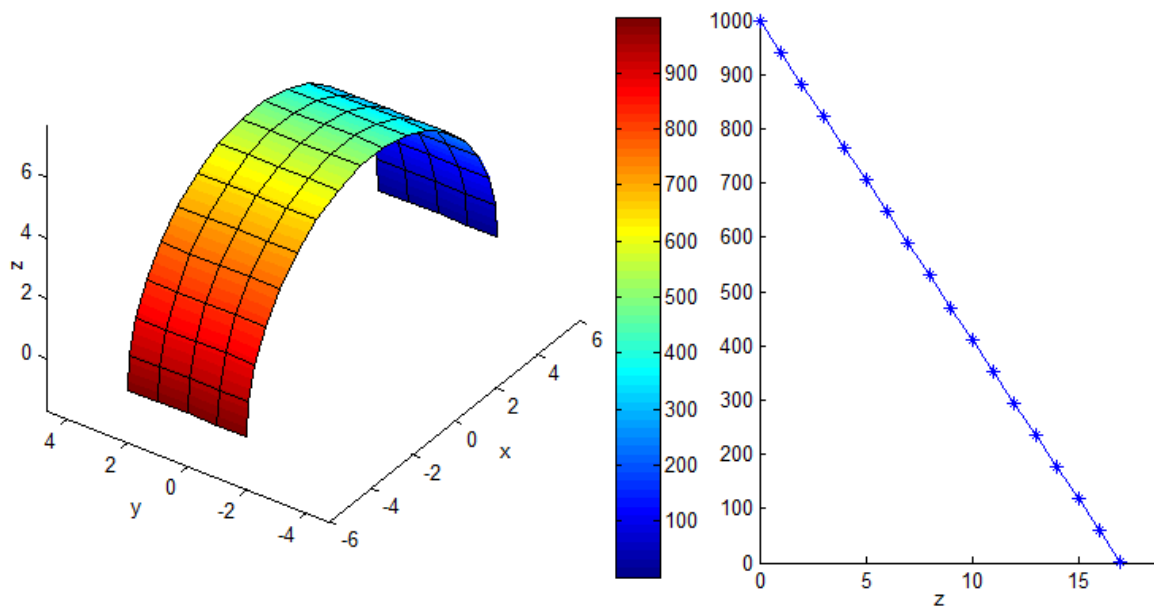
Sít tohoto kanálu je vytvořena celkem ze 272 prvků. Šestnáct prvků je na průřezu kanálu a sedmnáct prvků je po délce kanálu l . Stejně jako v předchozím příkladě hledáme rozložení tlaku a rychlosti v kapalině. Numerické výsledky tohoto příkladu jsou na následujících obrázcích a tabulkách.



Obr. 3.9: Rozložení tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině xz

Tabulka 3.3: Hodnoty tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině xz ve vybraných bodech

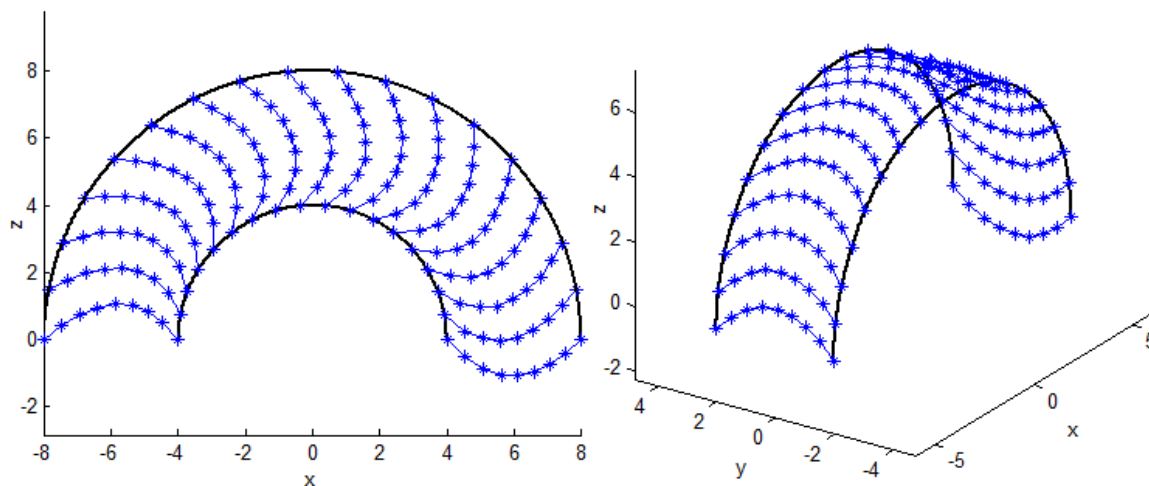
z/x	-2	-1	0	1	2
0	991,31	997,14	999,43	1000,43	1020,20
1	940,39	939,63	941,03	944,79	940,70
2	881,84	882,41	882,73	882,76	886,45
4	764,91	765,03	765,02	764,82	765,82
6	647,21	647,23	647,23	647,16	647,48
8	529,44	529,45	529,45	529,42	529,56
10	411,66	411,67	411,67	411,63	411,82
12	293,83	293,89	293,89	293,77	294,37
14	175,90	176,24	176,14	175,56	177,63
16	59,61	60,37	58,97	55,21	59,30
17	8,69	2,86	0,57	-0,43	-20,21



Obr. 3.10: Rozložení tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině yz

Tabulka 3.4: Hodnoty tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině yz ve vybraných bodech

z/y	-2	-1	0	1	2
0	999,99	999,39	999,43	999,39	999,00
1	941,32	941,24	941,03	941,24	941,32
2	882,56	882,69	882,73	882,69	882,56
4	764,99	765,01	765,02	765,01	764,99
6	647,22	647,23	647,23	647,23	647,22
8	529,44	529,45	529,45	529,45	529,44
10	411,66	411,66	411,67	411,66	411,66
12	293,87	293,88	293,89	293,88	293,87
14	176,05	176,12	176,14	176,12	176,05
16	58,68	58,76	58,97	58,76	58,68
17	1,00	0,61	0,57	0,61	1,00



Obr. 3.11: Rozložení rychlosti v půlkruhovém kanálu v rovině xz a yz

Tabulka 3.5: Vybrané hodnoty rychlosti v půlkruhovém kanálu v rovině xz

z/x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,00	0,42	0,79	0,96	1,06	1,04	0,86	0,52	0,00
1	0,00	0,38	0,70	0,93	1,05	1,05	0,89	0,58	0,00
2	0,00	0,38	0,70	0,93	1,04	1,06	0,90	0,57	0,00
4	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
6	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
8	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
10	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
12	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
14	0,00	0,39	0,70	0,93	1,04	1,05	0,90	0,57	0,00
16	0,00	0,38	0,70	0,93	1,05	1,05	0,89	0,58	0,00
17	0,00	0,42	0,74	0,96	1,06	1,04	0,86	0,52	0,00

Tabulka 3.6: Vybrané hodnoty rychlosti v půlkruhovém kanálu v rovině yz

z/y	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,00	0,46	0,79	1,00	1,06	1,00	0,79	0,46	0,00
1	0,00	0,46	0,79	0,99	1,05	0,99	0,79	0,46	0,00
2	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
4	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
6	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
8	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
10	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
12	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
14	0,00	0,46	0,79	0,99	1,04	0,99	0,79	0,46	0,00
16	0,00	0,46	0,79	0,99	1,05	0,99	0,79	0,46	0,00
17	0,00	0,46	0,79	1,00	1,06	1,00	0,79	0,46	0,00

Z obrázků 3.9, 3.10 je jasně vidět, že tlak klesá skoro lineárně po délce kanálu. Také je z těchto obrázků a z tabulek 3.3 a 3.4 zřejmé, že tlak na vstupu a výstupu nedosahuje zadaných hodnot $p_{vstup} = 1000 [-]$ a $p_{výstup} = 0 [-]$ a také, že v jednotlivých řezech nejsou hodnoty tlaku stejné. Tyto nepřesnosti jsou způsobeny jak samotnou geometrií kanálu, tak numerickou nepřesností při výpočtu pravé strany rovnice (3.34). Tyto skutečnosti by bylo možné odstranit jiným nadefinováním pravé strany nebo prodloužením vstupní a výstupní části kanálu.

Stejně jako u přímého kanálu má i zde rychlostní profil kapaliny parabolický tvar, což je nejvíce zřejmé z obrázků 3.11. Na těchto obrázcích si můžeme povšimnout vlivu geometrie na rychlostní profil kapaliny. Blíže ke středu půlkruhového kanálu proudí kapaliny rychleji než u vnější stěny. To dokazuje i porovnání hodnot ve druhém a osmém, třetím a sedmém a čtvrtém a šestém sloupci tabulky 3.5. V rovině řezu yz jsou jednotlivé paraboly symetrické, protože zde je vliv zakřivení kanálu na proudění kapaliny konstantní viz obr. 3.11 a tabulka 3.6.

V této kapitole jsme řešili stacionární laminární izotermické proudění Newtonovy kapaliny v přímém a půlkruhovém kanálu. V kapitole 4 se budeme zabývat řešením úloh proudění nenewtonské kapaliny v těchto kanálech a provedeme porovnání zjištěných výsledků.

3.2 Rovnice proudění kapalin v kovariantním tvaru

Kovariantní tvar řídicích rovnic proudění kapalin představuje obecný a jednotný tvar formulace zákonů zachování hmotnosti a hybnosti v kapalině, který je platný pro libovolné ortogonální křivočaré souřadnice. V této kapitole se omezíme na izo-

termické proudění homogenní viskózní Newtonovy kapaliny ($\rho = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$).

3.2.1 Kovariantní tvar rovnice kontinuity

Zabývejme se nejdříve rovnicí kontinuity. Při hledání kovariantního tvaru rovnice kontinuity vyjdeme z rovnice kontinuity (3.7) platné pro kartézské souřadnice v Eulerově popisu kontinua. Pro přechod do křivočarých souřadnic nahradíme v tomto vztahu parciální derivaci podle souřadnic kovariantní derivací, tj. dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v^i) = 0, \quad (3.51)$$

kde v^i jsou kontravariantní složky vektoru rychlosti v kapalině a ρ je hustota kapaliny. Předpis pro kovariantní derivaci kontravariantního vektoru má obecně tvar [14]

$$\nabla_j (\rho v^i) = \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial \xi^j} + \Gamma_{jk}^i \rho v^k, \quad (3.52)$$

kde symbol ∇_j značí kovariantní derivaci a Γ_{jk}^i je Christoffelův symbol II. druhu. Tuto derivaci upravíme s ohledem na rovnici (3.51), tj. provedeme zúžení indexů $j = i$.

Nejprve si vyjádříme ve vhodném tvaru Christoffelův symbol II. druhu, pro který obecně platí (g_{ij} jsou složky metrického tenzoru)

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right). \quad (3.53)$$

Ve vztahu (3.51) potřebujeme vyjádřit symbol Γ_{ik}^i . Provedeme tedy zúžení indexů, tj. položíme $j=i$, upravíme a vztah (3.53) přejde na tvar

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^l} \right) = \frac{1}{2} g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k}. \quad (3.54)$$

U ortogonálních křivočarých souřadnic se 2. a 3. člen v kulaté závorce navzájem ruší, protože vztah (3.54) je nenulový pouze pro $i = l$. Z toho plyne, že $\frac{\partial g_{lk}}{\partial \xi^l} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial \xi^l} = 0$. Derivaci kovariantního metrického tenzoru $\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k}$ ve vztahu (3.54) vyjádříme pomocí jeho determinantu. Pokud značíme $g = \det(g_{ij})$ (determinant g je funkcí všech prvků g_{ij} a každý prvek g_{ij} je obecně funkcí ξ^k), tak platí

$$\frac{\partial g}{\partial \xi^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{il}} \cdot \frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k} = g \cdot g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k} \Rightarrow \frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k} = \frac{1}{g \cdot g^{il}} \frac{\partial g}{\partial \xi^k} \quad (3.55)$$

Při úpravě vztahu (3.55) jsme využili

$$\frac{\partial g}{\partial g_{il}} = G^{il} \text{ a } G^{il} = g \cdot g^{il}, \quad (3.56)$$

kde G^{il} je algebraický doplněk ke g_{il} . Zde se vyjde z Laplaceovy věty o rozvedení determinantu podle prvků jedné řádky $g_{ik} \cdot G^{jk} = g\delta_i^j$. Pro sdružené báze platí $g_{ik} \cdot g^{jk} = \delta_i^j$ a předchozí vztah přejde do tvaru

$$g_{ik} \cdot G^{jk} = g \cdot g_{ik} \cdot g^{jk} \Rightarrow G^{jk} = g \cdot g^{jk}. \quad (3.57)$$

Je tedy dokázáno, že platí vztah (3.56).

Nyní vztah (3.55) dosadíme do (3.54) a upravíme na tvar

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial \xi^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial \xi^k}. \quad (3.58)$$

Vztah (3.58) se dále dosadí do vztahu (3.52), přeznačíme sčítací index $k = i$ a upravíme podle věty o derivaci součinu. Kovariantní derivace má potom tvar

$$\nabla_i (\rho v^i) = \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial \xi^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial \xi^i} \rho v^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \rho v^i). \quad (3.59)$$

Po dosazení vztahu (3.59) do rovnice (3.51) dostáváme rovnici kontinuity v kovariantním tvaru v libovolných ortogonálních křivočarých souřadnicích. Platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \rho v^i) = 0. \quad (3.60)$$

Tato rovnice kontinuity ale není rozměrově správná. Je tedy nutné zavést do ní fyzikální, resp. praktické složky vektoru rychlosti. Pro tyto složky platí [14]

$$v^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} v^i \Rightarrow v^i = \frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad (3.61)$$

kde index v kulaté závorce označuje praktickou složku. Dosazením (3.61) do rovnice (3.60) nakonec dostáváme rovnici kontinuity ve fyzikálně správném tvaru. Pro výsledný kovariantní tvar rovnice kontinuity platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{g} \rho \frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) = 0. \quad (3.62)$$

Jako konkrétní příklad aplikace této rovnice uveďme rovnici kontinuity pro polární souřadnice (r, φ) .

Nejprve zavedeme označení:

$$\begin{aligned} \xi^1 = r, \quad \xi^2 = \varphi, \quad v^{(1)} = v_r, \quad v^{(2)} = v_\varphi, \\ g_{11} = 1, \quad g_{22} = (\xi^1)^2 = r^2, \quad \sqrt{g} = r, \end{aligned} \quad (3.63)$$

kde v_r je rychlost ve směru r , v_φ rychlost ve směru φ a g_{11} , g_{22} jsou složky metrického tenzoru. Ze vztahu (3.62) plyne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\sqrt{g} \rho \frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\sqrt{g} \rho \frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} \right) = 0. \quad (3.64)$$

Po dosazení vztahů (3.63) a úpravě získáváme finální vztah rovnice kontinuity v polárních souřadnicích. Platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) = 0. \quad (3.65)$$

Analogicky bychom takto postupovali v případě dalších ortogonálních křivočarých souřadnic. Např. pro válcové souřadnice bychom pro označení

$$\begin{aligned} \xi^1 = r, \quad \xi^2 = \varphi, \quad \xi^3 = z, \quad v^{(1)} = v_r, \quad v^{(2)} = v_\varphi, \quad v^{(3)} = v_z, \\ g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad \sqrt{g} = r \end{aligned} \quad (3.66)$$

získali rovnici kontinuity v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0. \quad (3.67)$$

3.2.2 Kovariantní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice

Zabývejme se dále Navierovou-Stokesovou rovnicí. Vyjdeme z Navierovy-Stokesovy rovnice v kartézských souřadnicích v Eulerově popisu (3.3), která byla odvozena na začátku kapitoly 3. Tuto rovnici chceme opět vyjádřit v libovolných křivočarých souřadnicích, tj. v kovariantním tvaru. Stejně jako dříve, parciální derivace podle prostorových souřadnic nahradíme kovariantními derivacemi. Dostaneme [4]

$$\rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\nabla_j v^i) v^j \right] = \rho f^i + \nabla_j \tau^{ij}, \quad (3.68)$$

kde v^i jsou kontravariantní složky vektoru rychlosti. Parciální derivace jsme tedy nahradili kovariantními derivacemi a zvedli jsme oba volné indexy i a j . Pro kovariantní derivaci kontravariantního vektoru rychlosti platí nadále vztah [4]

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} + \Gamma_{mj}^i v^m, \quad (3.69)$$

kde Γ_{mj}^i je Christoffelův symbol druhého druhu. Dosazením kovariantní derivace (3.69) do rovnice (3.68) je určena levá strana této rovnice. Dále je třeba určit kovariantní derivaci $\nabla_j \tau^{ij}$ Cauchyova tenzoru napjatosti τ^{ij} na pravé straně rovnice. Podotkněme, že τ^{ij} je tenzor druhého řádu v kontravariantních složkách.

Vyjdeme z tenzoru napjatosti viskózních kapalin v kartézských souřadnicích. Obecně platí [4]

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{ll}\delta_{ij} + 2\eta V_{ij}, \quad (3.70)$$

kde $V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ je tenzor rychlosti deformace, η je dynamická viskozita a $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$ je druhá viskozita. V tomto vztahu reprezentuje člen $-p\delta_{ij}$ napjatost v ideální kapalině a tenzor T_{ij} představuje disipační část tenzoru napjatosti (také viskózní napjatost, přídavnou napjatost nebo extranapjatost). Rovnici (3.70) přepíšeme do obecného kovariantního tvaru, kde Kroneckerovo delta δ_{ij} je zastoupeno metrickým tenzorem g_{ij} . Dostaneme

$$\tau_{kl} = -g_{kl}p + \lambda g_{kl}V_{mm} + \eta (\nabla_k v_l + \nabla_l v_k). \quad (3.71)$$

V tomto vztahu jsou g_{kl} kovariantní složky základního metrického tenzoru. S využitím metrického tenzoru sdružené báze g^{ik} , resp. g^{jl} , zvedneme oba volné indexy k a l na obou stranách rovnice (3.71). Protože platí $\tau^{ij} = g^{ik}g^{jl}\tau_{kl}$ a $V_{mm} = V_{ll}$ je první invariant tenzoru deformace, přejde (3.71) na tvar

$$\tau^{ij} = -g^{ik}g^{jl}g_{kl}p + \lambda g^{ik}g^{jl}g_{kl}(\nabla_l v^l) + \eta g^{ik}g^{jl}(\nabla_l v_k) + \eta g^{ik}g^{jl}(\nabla_k v_l). \quad (3.72)$$

V tomto vztahu platí následující relace:

$$\begin{aligned} g^{ik}g^{jl}g_{kl} &= g^{ik}\delta_k^j = g^{ij}, \\ g^{ik}g^{jl}(\nabla_l v_k) &= g^{jl}(\nabla_l g^{ik}v_k) = g^{jl}(\nabla_l v^i), \\ g^{ik}g^{jl}(\nabla_k v_l) &= g^{ik}(\nabla_k g^{jl}v_l) = g^{ik}(\nabla_k v^j). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Poznamenejme, že při derivování se metrický tenzor g_{ij} , resp. g^{ij} , chová jako konstanta. Zohledněním vztahů (3.73) v rovnici (3.72) dostaneme

$$\tau^{ij} = -g^{ij}p + \lambda g^{ij}(\nabla_l v^l) + \eta g^{ik}(\nabla_k v^j) + \eta g^{jl}(\nabla_l v^i). \quad (3.74)$$

Provedme nyní kovariantní derivaci tohoto kontravariantního tenzoru (derivujeme podle ξ^j , viz vztah (3.69)). Dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla_j \tau^{ij} &= -g^{ij}(\nabla_j p) + \lambda g^{ij}[\nabla_j(\nabla_l v^l)] + \\ &+ \eta g^{ik}[\nabla_j(\nabla_k v^j)] + \eta g^{jl}[\nabla_j(\nabla_l v^i)]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Nyní dosadíme $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$ a u třetího a čtvrtého členu pravé strany zaměníme pořadí derivací. Ve třetím členu dále přeindexujeme $j = l$, $k = j$ a sečteme druhý s třetím členem rovnice. Vztah (3.75) přejde na tvar

$$\nabla_j \tau^{ij} = -g^{ij}(\nabla_j p) + \frac{1}{3}\eta g^{ij}[\nabla_j(\nabla_l v^l)] + \eta g^{jl}[\nabla_l(\nabla_j v^i)]. \quad (3.76)$$

Dále je třeba vyjádřit kovariantní derivace v rovnici (3.76). Tlak p je skalární veličina, kovariantní derivace je tedy přímo rovna parciální derivaci, tj. platí

$$\nabla_j p = \frac{\partial p}{\partial \xi^j}. \quad (3.77)$$

Při vyjádření kovariantních derivací členů v hranatých závorkách je třeba si uvědomit, že derivujeme smíšený tenzor 2. řádu (jeden kovariantní a jeden kontravariantní index - hledáme kovariantní derivace členů v kulatých závorkách). Potřebujeme tedy druhou kovariantní derivaci kontravariantního vektoru v^i . V analogii se vztahem (3.69) můžeme tuto derivaci zapsat ve tvaru

$$\nabla_l (\nabla_j v^i) = \frac{\partial (\nabla_j v^i)}{\partial \xi^l} - \Gamma_{jl}^k (\nabla_k v^i) + \Gamma_{kl}^i (\nabla_j v^k). \quad (3.78)$$

Členy na pravé straně tohoto vztahu vyjádříme s ohledem na definici (3.69). Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla_j v^i)}{\partial \xi^l} &= \frac{\partial^2 v^i}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\Gamma_{mj}^i v^m), \\ \Gamma_{jl}^k (\nabla_k v^i) &= \Gamma_{jl}^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} + \Gamma_{mk}^i v^m \right), \\ \Gamma_{kl}^i (\nabla_j v^k) &= \Gamma_{kl}^i \left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^j} + \Gamma_{mj}^k v^m \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Dosazením vztahů (3.79) do předpisu (3.78) získáváme požadovanou druhou kovariantní derivaci kontravariantního vektoru. Platí

$$\begin{aligned} \nabla_l (\nabla_j v^i) &= \frac{\partial^2 v^i}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\Gamma_{mj}^i v^m) - \Gamma_{jl}^k \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{mk}^i v^m + \\ &+ \Gamma_{kl}^i \frac{\partial v^k}{\partial \xi^j} + \Gamma_{kl}^i \Gamma_{mj}^k v^m. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Tím máme vyjádřeny všechny potřebné kovariantní derivace. Dosazením výše odvozených vztahů do základní rovnice (3.68) získáme kovariantní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice platné v libovolných křivočarých souřadnicích. Dostaneme

$$\rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\nabla_j v^i) v^j \right] = \rho f^i - g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \frac{1}{3} \eta g^{ij} [\nabla_j (\nabla_l v^l)] + \eta g^{jl} [\nabla_l (\nabla_j v^i)]. \quad (3.81)$$

V tomto vztahu je samozřejmě nutno kovariantní tvar derivace tenzorů v hranatých závorkách vyjádřit podle předpisu (3.80).

Navierova-Stokesova rovnice (3.81) je opět rozměrově nehomogenní. Je tedy nutné ji převést do prostoru fyzikálních, resp. praktických složek. Tím se samozřejmě úloha komplikuje, a proto se omezíme na ortogonální křivočaré souřadnice, které se běžně používají v technické praxi.

Budeme uvažovat viskózní kapalinu s $\rho = konst.$, $\eta = konst.$ (třetí člen na pravé straně rovnice (3.81) je nulový - rovnice kontinuity). Navierova-Stokesova rovnice přejde na tvar

$$\rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\nabla_j v^i) v^j \right] = \rho f^i - g^{ii} \frac{\partial p}{\partial \xi^i} + \eta g^{jj} \left[\nabla_j (\nabla_j v^i) \right], \quad (3.82)$$

neboť složky $g^{ij} \neq 0$ pouze pro $i = j$. Kovariantní derivaci v posledním členu rovnice (3.82) vyjádříme podle vztahu (3.80), kde přeindexujeme $l = j$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \nabla_j (\nabla_j v^i) &= \frac{\partial^2 v^i}{\partial \xi^j \partial \xi^j} + \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{mj}^i v^m) - \Gamma_{jj}^k \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} - \Gamma_{jj}^k \Gamma_{mk}^i v^m + \\ &+ \Gamma_{kj}^i \frac{\partial v^k}{\partial \xi^j} + \Gamma_{kj}^i \Gamma_{mj}^k v^m. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Aplikaci obecné Navierovy-Stokesovy rovnice (3.82) ukážeme opět na proudění kapaliny v polárních souřadnicích. Rozepsáním rovnice (3.82) pro $i, j = 1, 2$ dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v^1}{\partial t} + (\nabla_1 v^1) v^1 + (\nabla_2 v^1) v^2 \right] &= \rho f^1 - g^{11} \frac{\partial p}{\partial \xi^1} + \eta g^{11} \left[\nabla_1 (\nabla_1 v^1) \right] + \\ &+ \eta g^{22} \left[\nabla_2 (\nabla_2 v^1) \right], \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v^2}{\partial t} + (\nabla_1 v^2) v^1 + (\nabla_2 v^2) v^2 \right] &= \rho f^2 - g^{22} \frac{\partial p}{\partial \xi^2} + \eta g^{11} \left[\nabla_1 (\nabla_1 v^2) \right] + \\ &+ \eta g^{22} \left[\nabla_2 (\nabla_2 v^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

V těchto rovnicích vyjádříme kovariantní derivace kontravariantních složek vektoru rychlosti a zohledníme následující vztahy:

$$g_{11} = 1, g_{22} = (\xi^1)^2, g^{11} = 1, g^{22} = (\xi^1)^{-2}, \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\xi^1}, \Gamma_{22}^1 = -\xi^1. \quad (3.86)$$

Kovariantní derivace v rovnicích (3.84) a (3.85) vyjádříme podle vztahu (3.69). Dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla_1 v^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 v^1 + \Gamma_{21}^1 v^2 = \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1}, \\ \nabla_2 v^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^1 v^1 + \Gamma_{22}^1 v^2 = \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} - \xi^1 v^2, \\ \nabla_1 v^2 &= \frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^2 v^1 + \Gamma_{21}^2 v^2 = \frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} + \frac{v^2}{\xi^1}, \\ \nabla_2 v^2 &= \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 + \Gamma_{22}^2 v^2 = \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + \frac{v^1}{\xi^1}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Další postup řešení ukážeme na rovnici (3.84). Druhé kovariantní derivace $\nabla_1 (\nabla_1 v^1)$ a $\nabla_2 (\nabla_2 v^1)$ vyjádříme pomocí vztahu (3.83), zohledníme vztahy (3.86) a upravíme.

Dostaneme

$$\begin{aligned}\nabla_1 (\nabla_1 v^1) &= \frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\Gamma_{11}^1 v^1 + \Gamma_{21}^1 v^2) - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^2 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} - \\ &\quad - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{m1}^1 v^m - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{m2}^1 v^m + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + \Gamma_{21}^1 \frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} + \\ &\quad + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{m1}^1 v^m + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{m1}^2 v^m = \frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^1 \partial \xi^1},\end{aligned}\tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}\nabla_2 (\nabla_2 v^1) &= \frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\Gamma_{12}^1 v^1 + \Gamma_{22}^1 v^2) - \Gamma_{22}^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{22}^2 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} - \\ &\quad - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 v^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1 v^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 v^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^1 v^2 + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} + \\ &\quad + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 v^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 v^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 v^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 v^2 = \\ &= \frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\xi^1 v^2) + \xi^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} - \xi^1 \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} - v^1\end{aligned}$$

Vztahy (3.86), (3.87) a (3.88) dosadíme do (3.84) a získáme tak tuto rovnici v polárních souřadnicích v tenzorových složkách. Platí

$$\begin{aligned}\rho \left[\frac{\partial v^1}{\partial t} + \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} v^1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} - \xi^1 v^2 \right) v^2 \right] &= \rho f^1 - \frac{\partial p}{\partial \xi^1} + \eta \left[\frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \right] + \\ &+ \eta (\xi^1)^{-2} \left[\frac{\partial^2 v^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\xi^1 v^2) + \xi^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} - \xi^1 \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} - v^1 \right].\end{aligned}\tag{3.89}$$

Tato rovnice je ale stále rozměrově nehomogenní, a proto se musí převést na praktické složky. Mezi tenzorovými a praktickými složkami vektoru rychlosti platí vztah (3.61) [4], [14] (indexy v závorce jsou praktické složky). Píšeme

$$v^1 = \frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} = v^{(1)}, \quad v^2 = \frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{v^{(2)}}{\xi^1}\tag{3.90}$$

a pro jejich derivace dále platí

$$\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^1}, \quad \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^2},\tag{3.91}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} = -\frac{\partial v^{(2)}}{\partial (\xi^1)^2} + \frac{1}{\xi^1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial (\xi^1)}, \quad \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\xi^1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial (\xi^2)}.$$

Po převedení tenzorů na praktické složky přejde rovnice (3.89) do tvaru

$$\begin{aligned}\rho \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^1} v^{(1)} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^2} \frac{v^{(2)}}{\xi^1} - \xi^1 \left(\frac{v^{(2)}}{\xi^1} \right)^2 \right] &= \rho f^{(1)} - \frac{\partial p}{\partial \xi^1} + \\ &+ \eta \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^1} \right) \right] + \frac{\eta}{(\xi^1)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\xi^1 \frac{v^{(2)}}{\xi^1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi^1 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^1} - \xi^1 \frac{1}{\xi^1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial (\xi^2)} - v^{(1)} \right].\end{aligned}\tag{3.92}$$

Pokud dále přeznačíme složky v polárních souřadnicích na obvykle používané symboly

$$\xi^1 = r, \xi^2 = \varphi, v^{(1)} = v_r, v^{(2)} = v_\varphi, f^{(1)} = f_r, f^{(2)} = f_\varphi, \quad (3.93)$$

tak rovnice (3.89) bude mít tvar

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \frac{v_\varphi}{r} - r \left(\frac{v_\varphi}{r} \right)^2 \right] &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] + \frac{\eta}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \frac{v_\varphi}{r} \right) + \right. & \\ \left. + r \frac{\partial v_r}{\partial r} - r \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - v_r \right], & \end{aligned} \quad (3.94)$$

resp. ještě ji upravíme do běžně používaného tvaru. Analogickým postupem vyjádříme a upravíme rovnici (3.85) a získáme tak výsledný tvar Navierových-Stokesových rovnic pro viskózní kapalinu s $\rho = konst.$ a $\eta = konst.$ v polárních souřadnicích ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right], & \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) &= \rho f_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right]. & \end{aligned} \quad (3.96)$$

Analogicky bychom postupovali při odvozování kovariantních tvarů příslušných řídicích rovnic proudění kapalin u dalších ortogonálních křivočarých souřadnic. Například pro válcové souřadnice by při označení

$$\begin{aligned} \xi^1 = r, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z, v^{(1)} = v_r, v^{(2)} = v_\varphi, v^{(3)} = v_z, & \quad (3.97) \\ f^{(1)} = f_r, f^{(2)} = f_\varphi, f^{(3)} = f_z & \end{aligned}$$

byly Navierovy-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\
+ \eta \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\
\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) &= \rho f_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\
+ \eta \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right], \\
\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\
+ \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Tyto rovnice samozřejmě souhlasí s běžně uváděnými Navierovými-Stokesovými rovnicemi v literatuře (např. [14]).

3.2.3 Numerická realizace problému

V této kapitole použijeme výše uvedené rovnice při hledání řešení úlohy hydromechaniky. Uvažujeme osově symetrické proudění nestlačitelné viskózní kapaliny s $\rho = konst.$ a $\eta = konst.$ v trojrozměrném přímém kanálu. Řešení provedeme ve válcových souřadnicích (r, φ, z) . Předpokládáme, že proudové pole je nezávislé na φ . Při řešení vyjdeme z podmínek rovnováhy ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= \rho \frac{\partial v_r}{\partial t}, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + F_z &= \rho \frac{\partial v_z}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.99}$$

které vznikly z rovnic (3.98) vynecháním závislosti na úhlu φ , dosazením vztahů pro složky Cauchyova tenzoru napjatosti [4]

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \frac{v_r}{r}, \\
\tau_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{rz} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r} \right)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

a úpravou. Dále pro řešení použijeme rovnici kontinuity (3.67) s tím, že opět vynecháme závislost na úhlu φ a rovnici upravíme podle výše uvedených předpokladů. Pro jednodušší zápis označíme fyzikální složky vektoru rychlosti $v_r = u$, $v_z = w$.

Výchozí řídicí rovnice proudění kapaliny mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + F_z &= \rho \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Dále zkonstruujeme slabé řešení uvedené úlohy v souladu s Galerkinovou metodou. Rovnice (3.2.3) vynásobíme váhovými funkcemi w_1, w_2, w_3 , provedeme integraci přes objem válce jednotkové výšky a aplikujeme Greenovu větu (viz [20]). Také použijeme vztahy pro složky vektoru napětí na příslušné části hranice $\partial\Omega^e$

$$\begin{aligned} t_r &= \tau_{rr}n_r + \tau_{rz}n_z, \\ t_z &= \tau_{rz}n_r + \tau_{zz}n_z, \end{aligned} \quad (3.102)$$

kde n_r, n_z jsou složky jednotkového vektoru vnější normály k hranici válcové oblasti. Slabé řešení má potom tvar

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{\Omega^e} \left[\rho w_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \tau_{rr} + w_1 \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \tau_{rz} - w_1 F_r \right] r dr dz - \\ &- 2\pi \int_{\partial\Omega^e} w_1 t_r r ds = 0, \\ &2\pi \int_{\Omega^e} \left[\rho w_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \tau_{rz} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \tau_{zz} - w_2 F_z \right] r dr dz - \\ &- 2\pi \int_{\partial\Omega^e} w_2 t_z r ds = 0, \\ &2\pi \int_{\Omega^e} \left[-w_3 \frac{\partial}{\partial r} (ru) - r w_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] dr dz = 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Do slabé formulace dosadíme složky napjatosti (3.100). Konstantu 2π můžeme vypustit a dostáváme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} \left[\rho w_1 \frac{\partial u}{\partial t} - p \frac{\partial w_1}{\partial r} + 2\eta \frac{\partial w_1}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{p w_1}{r} + 2\eta \frac{w_1}{r} \frac{u}{r} + \eta \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \\ &\left. + \eta \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} - w_1 F_r \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega^e} w_1 t_r r ds = 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} \left[\rho w_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \eta \frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} - p \frac{\partial w_2}{\partial z} + 2\eta \frac{\partial w_2}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \right. \\ &\left. - w_2 F_z \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega^e} w_2 t_z r ds = 0, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[\underbrace{-w_3 u - w_3 r \frac{\partial u}{\partial r}}_{\mathbf{K}^{31}} - \underbrace{r w_3 \frac{\partial w}{\partial z}}_{\mathbf{K}^{32}} \right] dr dz = 0. \quad (3.106)$$

Rovnice (3.104) a (3.105) ještě upravíme - dáme k sobě členy se stejnými složkami rychlosti a tlaku. Získáváme rovnici ve tvaru

$$\int_{\Omega^e} \left[\underbrace{\rho w_1 \frac{\partial u}{\partial t}}_{\mathbf{M}^{11}} + 2\eta \underbrace{\left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w_1}{r} \frac{u}{r} \right)}_{\mathbf{K}^{11}} + \eta \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \underbrace{\frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r}}_{\mathbf{K}^{12}} - \right. \quad (3.107)$$

$$\left. \underbrace{-p \frac{\partial w_1}{\partial r} - p \frac{w_1}{r}}_{\mathbf{K}^{13}} \right] r dr dz = \underbrace{\int_{\Omega^e} w_1 F_r r dr ds}_{\mathbf{F}^1} + \int_{\partial\Omega^e} w_1 t_r r ds,$$

$$\int_{\Omega^e} \left[\underbrace{\rho w_2 \frac{\partial w}{\partial t}}_{\mathbf{M}^{22}} + \eta \underbrace{\frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z}}_{\mathbf{K}^{21}} + \eta \underbrace{\frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r}}_{\mathbf{K}^{22}} + 2\eta \underbrace{\frac{\partial w_2}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}}_{\mathbf{K}^{22}} - p \underbrace{\frac{\partial w_2}{\partial z}}_{\mathbf{K}^{23}} \right] r dr dz = \quad (3.108)$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^e} w_2 F_z r dr dz + \int_{\partial\Omega^e} w_2 t_z r ds}_{\mathbf{F}^2}.$$

Nyní provedeme prostorovou a časovou diskretizaci pomocí konečných prvků s tím, že váhovou funkci w_1 položíme rovnu ψ_j u u , w_2 odpovídá ψ_j u w a w_3 potom odpovídá izoparametrické funkci ϕ_j u tlaku p . Semidiskrétní model konečného kapalinového prvku vyjádříme ve tvaru

$$u(r, z) = \sum_{j=1}^m u_j \psi_j(r, z) = \mathbf{H}^T(r, z) \mathbf{u},$$

$$w(r, z) = \sum_{j=1}^m w_j \psi_j(r, z) = \mathbf{H}^T(r, z) \mathbf{w}, \quad (3.109)$$

$$p(r, z) = \sum_{j=1}^m p_j \phi_j(r, z) = \mathbf{N}^T(r, z) \mathbf{p},$$

kde \mathbf{H} a \mathbf{N} jsou příslušné sloupcové matice izoparametrických funkcí, konkrétní tvary matic jsou uvedeny ve [20]. Z pohledu rovinné úlohy $r \approx x$, $z \approx y$ jsou to analogické funkce. \mathbf{u} , \mathbf{w} , \mathbf{p} jsou sloupcové matice uzlových hodnot složek rychlosti a tlaku na prvku. Rychlosti aproximujeme kvadratickým a tlaky lineárním polynomem. Analogicky k (3.109) platí pro časové derivace

$$\dot{u}(r, z) = \mathbf{H}^T(r, z) \dot{\mathbf{u}},$$

$$\dot{w}(r, z) = \mathbf{H}^T(r, z) \dot{\mathbf{w}}, \quad (3.110)$$

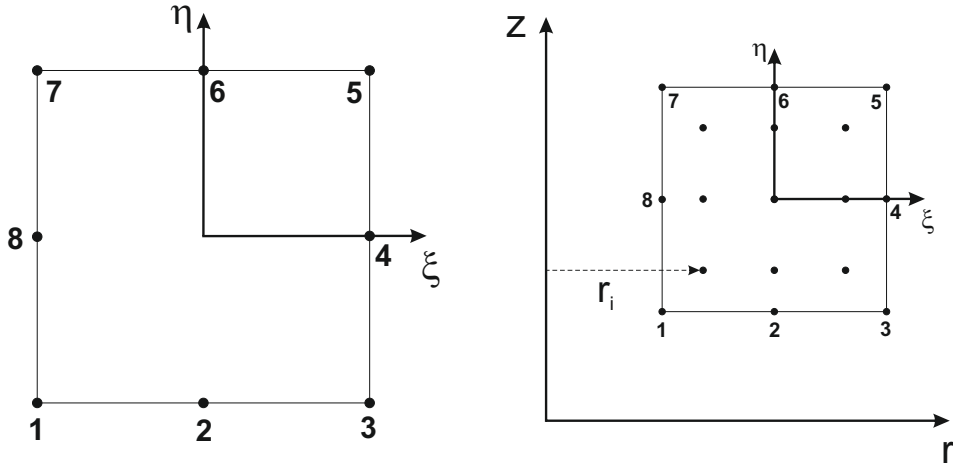
$$\dot{p}(r, z) = \mathbf{N}^T(r, z) \dot{\mathbf{p}}.$$

Vztahy (3.107), (3.108) a (3.106) zapíšeme do blokového maticového tvaru (platí pro 1 konečný prvek)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Matice M , K jsou symetrické a jejich jednotlivé submatice jsou s ohledem na (3.109), (3.110) definovány následovně

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{11} &= \mathbf{M}^{22} = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{H} \mathbf{H}^T r dr dz, \\
\mathbf{K}^{11} &= \int_{\Omega^e} \eta \left[2 \left(\mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T + \frac{1}{r^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \right) + \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T \right] r dr dz, \\
\mathbf{K}^{12} &= \left(\mathbf{K}^{21} \right)^T = \int_{\Omega^e} \eta \mathbf{H}_z \mathbf{H}_r^T r dr dz, \\
\mathbf{K}^{13} &= \left(\mathbf{K}^{31} \right)^T = - \int_{\Omega^e} \left(r \mathbf{H}_r \mathbf{N}^T + \mathbf{H} \mathbf{N}^T \right) dr dz, \\
\mathbf{K}^{22} &= \int_{\Omega^e} \eta \left(\mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T + 2 \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T \right) r dr dz, \\
\mathbf{K}^{23} &= \left(\mathbf{K}^{32} \right)^T = - \int_{\Omega^e} \mathbf{H}_z \mathbf{N}^T r dr dz, \\
\mathbf{F}^1 &= \int_{\Omega^e} \mathbf{H} F_r r dr dz + \int_{\partial \Omega^e} \mathbf{H} t_r r ds, \\
\mathbf{F}^2 &= \int_{\Omega^e} \mathbf{H} F_z r dr dz + \int_{\partial \Omega^e} \mathbf{H} t_z r ds, \\
\mathbf{M}^{33} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}^{33} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}^3 = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.112}$$



Obr. 3.12: Zobrazení konečného prvku v lokálních a globálních souřadnicích

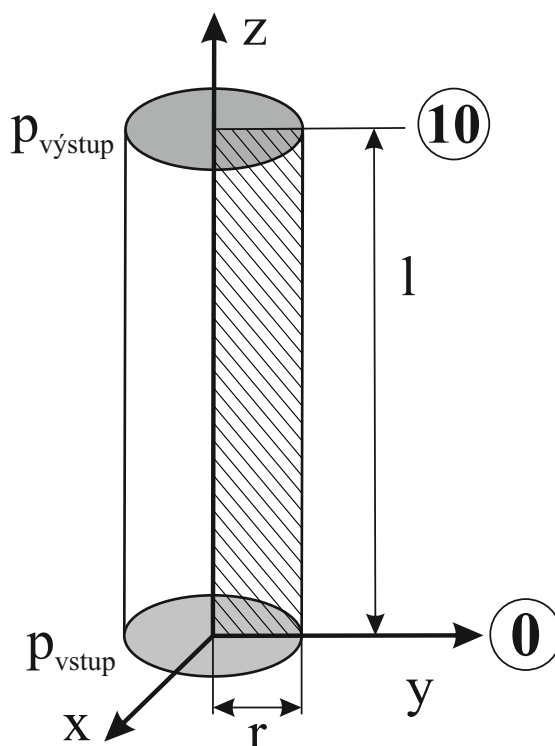
Index r a z u matice \mathbf{N} vyjadřuje derivaci izoparametických funkcí podle prostorových proměnných r a z . Proměnná r v těchto rovnicích je vzdálenost od osy souměrnosti (viz obr. 3.12) a platí pro ni vztah

$$r = \mathbf{H}^T \mathbf{r}. \tag{3.113}$$

Při řešení budeme postupovat analogicky jako ve [20]. Využijeme Jacobiovu matici, uvedené integrály (3.112) zintegrujeme numericky s využitím Gaussových kvadraturních vztahů. Souřadnici x odpovídá r a souřadnici y odpovídá z . Složky rychlosti aproximujeme polynomem 2. řádu a tlak aproximujeme polynomem 1. řádu.

3.2.4 Výsledky

V tomto odstavci provedeme numerické řešení konkrétní úlohy. Řešíme stacionární (pomalé plíživé) laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny v rotačně symetrickém přímém kanálu, můžeme tedy zanedbat matici \mathbf{M} z rovnice (3.111). Také vypadne první výraz na pravé straně ve vztazích pro \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 (viz (3.112)), protože měrnou objemovou sílu F_r , F_z zanedbáváme. Z výše uvedeného plyne, že tuto trojrozměrnou úlohu převedeme na dvourozměrnou a budeme ji řešit v rovině vyšrafované na obr. 3.13.



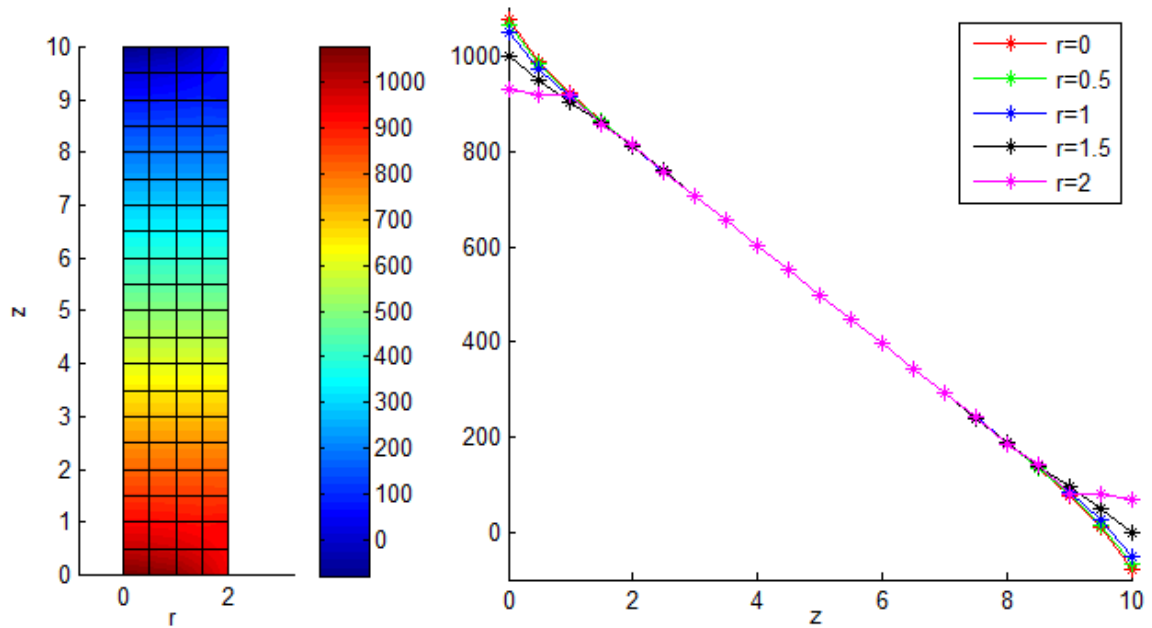
Obr. 3.13: Přímý kanál kruhového průřezu se znázorněnou rovinou

Vstupní parametry úlohy jsou následující (bezrozměrné veličiny):

p_{vstup}	=	1000	[-]	tlak na vstupu kanálu,
p_{vystup}	=	0	[-]	tlak na výstupu kanálu,
Re	=	0.02	[-]	Reynoldsovo číslo (za η dosadíme $\frac{1}{Re}$),
ρ	=	1	[-]	hustota,
l	=	10	[-]	délka kanálu,
r	=	2	[-]	poloměr kanálu,
\mathbf{v}_0	=	0	[-]	rychlost kapaliny na stěně kanálu,
$v_{0,r}$	=	0	[-]	rychlost kapaliny ve směru r ve středu kanálu.

Sít, kterou je modelován tento kanál obsahuje celkem 80 prvků - čtyři prvky

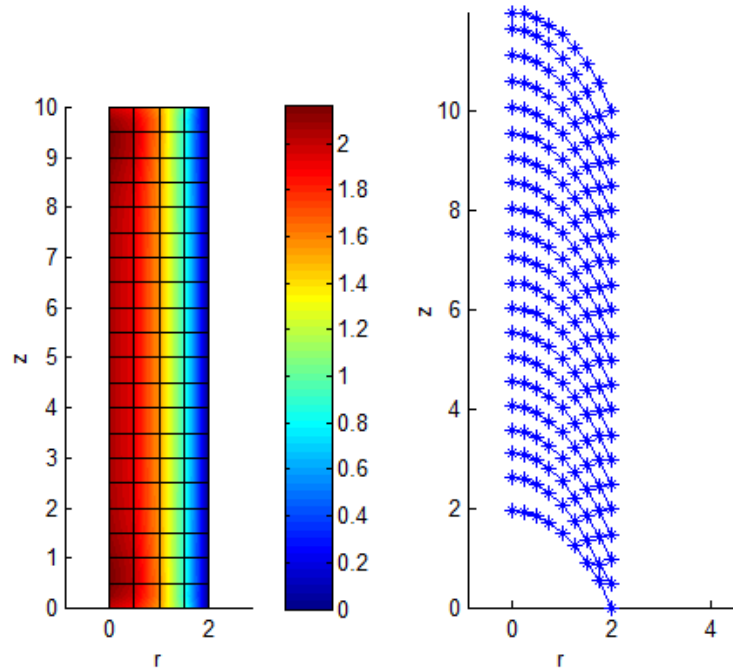
na šířku kanálu r a dvacet na délku z . Pro zadané hodnoty získáváme rozložení tlaku a rychlosti v uvažovaném kanálu. Tyto numerické výsledky jsou znázorněny na následujících obrázcích a tabulkách.



Obr. 3.14: Rozložení tlaku v přímém kanálu

Tabulka 3.7: Vybrané hodnoty tlaku v přímém kanálu

z/r	0	0,5	1	1,5	2
0	1077,20	1066,24	1053,14	1001,40	932,90
1	923,21	920,92	915,12	906,41	919,32
2	811,81	811,54	811,01	810,29	813,55
3	707,51	707,51	707,50	707,44	708,05
4	603,76	603,76	603,77	603,76	603,87
5	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
6	396,24	396,24	396,23	396,24	396,13
7	292,49	292,49	292,50	292,56	291,95
8	188,19	188,46	188,99	189,71	186,45
9	76,79	79,08	84,88	93,59	80,68
10	-77,20	-66,24	-53,14	-1,40	67,10



Obr. 3.15: Rozložení rychlosti v přímém kanálu

Tabulka 3.8: Vybrané hodnoty rychlosti v přímém kanálu

z/r	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
0	1,98	1,95	1,87	1,73	1,53	1,27	0,93	0,56	0,00
1	2,14	2,10	1,99	1,81	1,56	1,24	0,86	0,46	0,00
2	2,07	2,04	1,94	1,77	1,54	1,25	0,89	0,48	0,00
3	2,05	2,02	1,92	1,76	1,54	1,25	0,90	0,48	0,00
4	2,05	2,02	1,92	1,76	1,54	1,25	0,90	0,48	0,00
5	2,05	2,02	1,92	1,76	1,54	1,25	0,90	0,48	0,00
6	2,05	2,02	1,92	1,76	1,54	1,25	0,90	0,48	0,00
7	2,05	2,02	1,92	1,76	1,54	1,25	0,90	0,48	0,00
8	2,07	2,04	1,94	1,77	1,54	1,25	0,89	0,48	0,00
9	2,14	2,10	1,99	1,81	1,56	1,24	0,86	0,46	0,00
10	1,98	1,95	1,87	1,73	1,53	1,27	0,93	0,56	0,00

Z rozložení tlaku na obr. 3.14 je zřejmé, že tlak klesá skoro lineárně od vstupu k výstupu. Také vidíme, že tlak na vstupu a výstupu nedosahuje zadaných hodnot. Předpokladem při výpočtu je, že úloha je řešena dostatečně daleko od konců kanálu, protože tyto nesrovnalosti jsou způsobeny numerickou nepřesností při výpočtu pravé strany. Tabulka 3.7 potvrzuje, že daleko od konců nemají numerické nepřesnosti vliv - na průřezech 3 až 7 dosahují hodnoty tlaku konstantních hodnot.

Graf na obr. 3.15 zobrazuje parabolické tvary rychlostí. Z tohoto obrázku je také

vidět, že rychlost u vstupu a výstupu u $r \sim 0$ dosahuje jiných hodnot než pro $r \sim 0$ ve středu kanálu. To má stejnou příčinu jako u rozložení tlaků.

Porovnáním těchto hodnot s hodnotami z kapitoly 3.1.2 vidíme, že se hodnoty mírně liší, ale základní charakteristiky pro rozložení tlaku a rychlosti jsou shodné.

4 Modelování nenewtonských kapalin

V předchozí kapitole jsme řešili modelování Newtonské kapaliny. Nyní se zaměříme na modelování nenewtonských kapalin, které mají podstatně složitější konstitutivní vztahy. Z textu v kapitole 2 je zřejmé, že rozdílnost ve vlastnostech kapalin je důležitá jak z pohledu fyzikálního, tak i z pohledu výpočtového. Při modelování čistě viskózních kapalin (například zobecněné Newtonovy kapaliny) můžeme využít standardní konečnoprvkové modely pro popis Newtonovy kapaliny. Jediné, co je třeba, je tyto vztahy mírně upravit. To značně zjednodušuje problém modelování těchto kapalin.

Při modelování viskoelastických kapalin už to ale tak jednoduše nelze, protože tyto kapaliny mají paměťový efekt, který je nutno zahrnout do modelu. U viskoelastických kapalin je současný stav závislý na historii materiálu. To je důležitý fakt, který je třeba zahrnout do rovnic popisujících viskoelastickou kapalinu. Okamžitý deformační stav kapaliny závisí na předchozí deformační historii kapalinových částic. Tato závislost na historii způsobuje, že pro přesný popis kapaliny je třeba komplikovaných konstitutivních vztahů, a tím pádem i speciálních výpočtových algoritmů. Logickým a praktickým krokem je, že se omezíme na jednodušší viskoelastické kapaliny se slabou pamětí. Možné příklady jejich konstitutivních vztahů uvedeme v dalších odstavcích.

4.1 Řídící rovnice čistě viskózních kapalin

Dále se budeme zabývat čistě viskózními (neelastickými) časově nezávislými kapalinami. V tomto odstavci uvedeme rovnice, které popisují vlastnosti neelastických kapalin.

Pro čistě viskózní kapaliny jsou základní rovnice, tedy Navierova-Stokesova rovnice a rovnice kontinuity, stejné jako pro modelování Newtonovy kapaliny. I nadále řešíme izotermické laminární proudění nestlačitelné homogenní kapaliny. V kartézských souřadnicích má rovnice kontinuity tvar [14]

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.1)$$

a zákon zachování hybnosti (základní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice) píšeme ve tvaru

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (4.2)$$

V rovnicích (4.1) a (4.2) jsou v_i složky vektoru rychlosti a f_i jsou složky měrné objemové síly. Tenzor napjatosti τ_{ij} je definován konstitutivním vztahem

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta V_{ij}, \quad (4.3)$$

kde dynamická viskozita η je obecně funkcí tenzoru rychlosti deformace $\eta = \eta(V_{ij})$. Tenzor rychlosti deformace je definován ve [4] vztahem

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}), \quad (4.4)$$

kde $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ je rychlostní gradient. Výše uvedené vztahy platí obecně a popisují většinu praktických problémů proudění kapalin. Úlohy proudění nenewtonských čistě viskózních kapalin jsou u velkého množství reálných kapalin složité a komplikované problémy. Proto jsou často uvažovány zjednodušující předpoklady. Například pro nízké hodnoty Reynoldsova čísla můžeme zanedbat nelineární konvektivní člen v Navierově-Stokesově rovnici. I přesto ale zůstává systém rovnic popisujících problém nelineární, neboť viskozita η je nadále funkcí tenzoru rychlosti deformace V_{ij} .

Aby byla úloha kompletně definována, musíme ještě doplnit počáteční a okrajové podmínky. Okrajové podmínky zapíšeme symbolicky ve tvaru

$$\begin{aligned} v_i(s_k, t) &= \hat{v}_i(s_k, t), & t \in (0, T), s_k \in \partial\Omega_1, \\ \tau_{ij}n_j &= \hat{t}_i(s_k, t), & t \in (0, T), s_k \in \partial\Omega_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

a počáteční podmínka bude vypadat následovně

$$v_i(s_k, 0) = {}^0\hat{v}_i(s_k), \quad t = 0, s_k \in \partial\Omega. \quad (4.6)$$

Proměnná s_k jsou souřadnice bodů na hranici $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ (viz obr. 3.1), t je čas, n_j jsou složky vnější normály k hranici oblasti Ω a stříška označuje zadanou veličinu.

Aby rovnice co nejlépe popisovaly danou nenewtonskou kapalinu, je třeba se zaměřit na co nejlepší tvar konstitutivních vztahů. Na tom velmi závisí přesnost popisu reálného kontinua.

4.2 Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy reprezentují vlastnosti konkrétního kontinua. Jak již bylo dříve uvedeno, pro zobecněnou Newtonovu kapalinu má tenzor napjatosti obecně tvar

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}. \quad (4.7)$$

Dále se zaměříme na disipační část tohoto tenzoru

$$T_{ij} = 2\eta(V_{ij})V_{ij}. \quad (4.8)$$

Z tenzorového charakteru tohoto vztahu je zřejmé, že viskozita musí být skalární funkcí tenzoru rychlosti deformace V_{ij} , tedy funkcí jeho invariantů. Píšeme

$$\eta = \eta(V_{ij}) = \eta(I_1, I_2, I_3), \quad (4.9)$$

kde invarianty I_1, I_2, I_3 tenzoru rychlosti deformace V_{ij} mají základní tvar

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{V}) = V_{ii}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}^2) = V_{ij}V_{ji}, \\ I_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{V}^3) = V_{ij}V_{jk}V_{ki}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu je první invariant $I_1 = 0$, protože tento invariant je vázán s objemovou změnou. Závislost dynamické viskozity η na invariantu I_3 nebyla experimentálně potvrzena. Z výše uvedeného tedy plyne, že vztah (4.9) se redukuje na tvar

$$\eta = \eta(V_{ij}) = \eta(I_2). \quad (4.11)$$

Poznamenejme, že prostřednictvím tohoto vztahu se určují viskózní funkce pro speciální modely viskozit nenewtonských čistě viskózních kapalin. Dále uvedeme několik základních modelů viskozity, které se nejčastěji používají.

4.2.1 Mocninový model

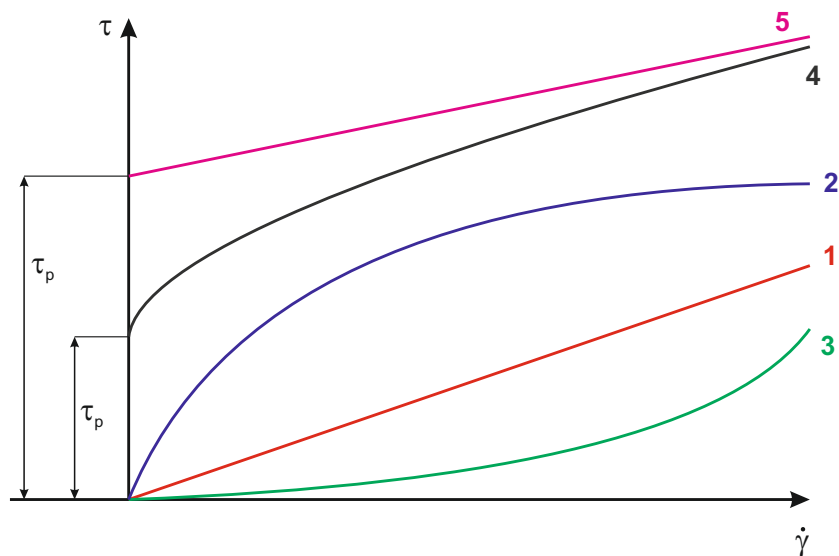
Nejjednodušší a hojně užívaný model je mocninový model pro zdánlivou viskozitu ve tvaru [20]

$$\eta = KI_2^{\frac{n-1}{2}}, \quad (4.12)$$

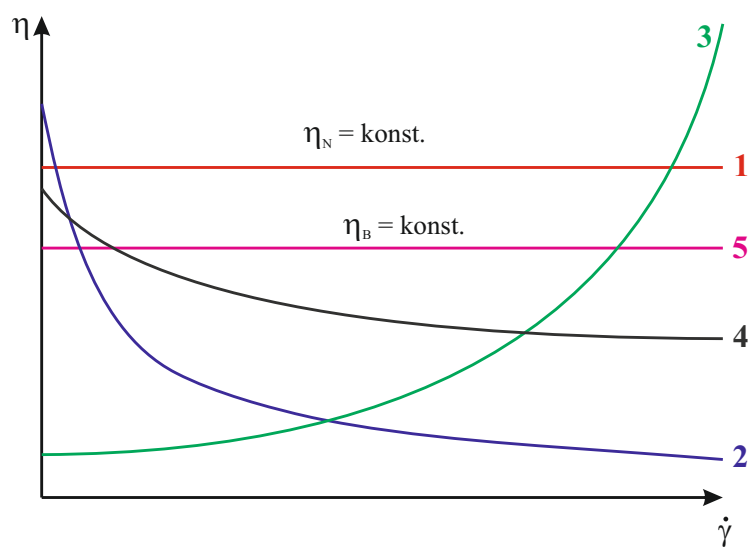
kde n a K jsou parametry nenewtonské kapaliny. n je index toku a K je konzistentní parametr. Pro index toku n platí následující:

- $n < 1$ smykově řídnoucí nebo pseudoplastické kapaliny,
- $n > 1$ smykově houstnoucí nebo dilatantní kapaliny,
- $n = 1$ Newtonova kapalina.

Indexy K a n souvisí s tvary tokových křivek. Znázornění tokových křivek neelastických kapalin a závislost dynamické viskozity η na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ je znázorněno na obr. 4.1 a obr. 4.2 [10].



Obr. 4.1: Tokové křivky: 1. Newtonova kapalina, 2. pseudoplastická kapalina, 3. dilatantní kapalina, 4. Cassonova (skutečná) plastická kapalina, 5. Binghamova (ideální) plastická kapalina



Obr. 4.2: Zdánlivá viskozita: 1. Newtonova kapalina, 2. pseudoplastická kapalina, 3. dilatantní kapalina, 4. Cassonova (skutečná) plastická kapalina, 5. Binghamova (ideální) plastická kapalina

Nevýhodou tohoto modelu je, že pro limitní hodnoty smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$) a ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) dává vztah (4.12) nereálné hodnoty.

4.2.2 Carreauův model

Nedostatky mocninového modelu odstraňuje např. Carreauův model. Používá se například pro výpočty toku tavenin plastů bez přísad. Tento model se udává ve tvaru

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \left(1 + (\lambda I_2)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (4.13)$$

Dynamická viskozita η_0 je limitní viskozita pro ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$), η_∞ je limitní viskozita pro ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) a λ je konstanta materiálu.

4.2.3 Binghamův model

Binghamova kapalina se obecně chová tak, že pro smykové napětí $T < T_0$ kapalina neteče a chová se jako tuhé těleso. Pro $T \geq T_0$ začíná kapalina téci a T je lineární funkcí smykové rychlosti $\dot{\gamma}$, respektive tenzoru rychlosti deformace V_{ij} . Poznamenejme ještě, že T_0 je označováno jako mez tečení. Obecná forma Binghamova modelu má tvar

$$T_{ij} = \left(\frac{T_0}{\sqrt{I_2}} + 2\eta \right) V_{ij} \quad \text{pro } \frac{1}{2} \text{tr}(T^2) \geq T_0^2, \quad (4.14)$$

$$T_{ij} = 0 \quad \text{pro } \frac{1}{2} \text{tr}(T^2) < T_0^2. \quad (4.15)$$

Kulatá závorka ve vztahu (4.14) zřejmě představuje zdánlivou viskozitu při tečení kapaliny. Nerovnosti v předchozích vztazích vyjadřují von Misesovo kritérium tečení.

Jiný tvar tohoto modelu získáme například z konstitutivního vztahu (4.14), pokud místo lineárního tečení použijeme například mocninový model (4.12). Tento model se v literatuře označuje jako Herschelův-Buckleyův model nebo také jako rozšířený mocninový zákon.

4.3 MKP model čistě viskózních kapalin

Při modelování čistě viskózních (neelastických) kapalin se omezíme pouze na časově nezávislé kapaliny (tzv. zobecněné Newtonovy kapaliny). Postup výpočtu s použitím MKP je podobný jako u Newtonovy kapaliny (viz kapitola 3). Pro vytvoření modelu může být např. použita i proudová funkce a funkce vířivosti. Řídící rovnice neelastických kapalin, viz odstavec 4.1, jsou vyjádřeny jako funkce složek rychlosti a tlaku jakožto závisle proměnných. V následujícím odstavci uvedeme MKP model na bázi primitivních proměnných a budeme řešit smíšenou úlohu, tj. řešíme opět současně neznámé složky vektoru rychlosti a tlaky v kapalině.

4.3.1 Numerická realizace problému

Pro odvození slabého řešení zadané úlohy hydromechaniky aplikujeme Galerkinovu metodu na rovnice (4.1), (4.2) popisující tuto úlohu. Předpokládáme, že pro testovací

funkce platí (3.15). Po úpravách pomocí Greenovy věty budou integrální identity ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_{\Omega} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} 2\eta(V_{ij}) V_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \quad (4.16) \\ = \int_{\Omega} \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\partial\Omega_2} \hat{t}_i \delta v_i dx, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (4.17)$$

Úlohu budeme řešit použitím mocninového zákona. Dosadíme tedy za $\eta(V_{ij})$ vztah (4.12).

Stejně jako úlohu proudění Newtonovy kapaliny budeme i tento problém řešit aplikací metody konečných prvků. Postup bude stejný jako v odstavci 3.1.1. Budeme řešit stacionární úlohu proudění neneutonské kapaliny. Použijeme tedy vztahy (3.20) až (3.29), uplatníme výše uvedené postupy a z integrálních identit (4.16) a (4.17) dostáváme následující vztahy:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{u} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} 2\eta(V_{ij}) \left(\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \frac{1}{2} \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \frac{1}{2} \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T \right) dx \right] \mathbf{u} + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_y \mathbf{H}_x^T) dx \right] \mathbf{v} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_z \mathbf{H}_x^T) dx \right] \mathbf{w} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \rho \int_{\Omega^e} f_x \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_x ds, \\ & \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{v} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} 2\eta(V_{ij}) \left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \frac{1}{2} \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T \right) dx \right] \mathbf{v} + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_y^T) dx \right] \mathbf{u} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_z \mathbf{H}_y^T) dx \right] \mathbf{w} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \rho \int_{\Omega^e} f_y \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_y ds, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{w}\mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{w} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} 2\eta(V_{ij}) \left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \frac{1}{2} \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T + \mathbf{H}_z \mathbf{H}_z^T \right) dx \right] \mathbf{w} + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{u} + \\ & + \left[\int_{\Omega^e} \eta(V_{ij}) (\mathbf{H}_y \mathbf{H}_z^T) dx \right] \mathbf{v} - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{H}_z \mathbf{N}^T dx \right] \mathbf{p} = \rho \int_{\Omega^e} f_z \mathbf{H} dx + \int_{\partial\Omega_2^e} \mathbf{H}_s \hat{t}_z ds, \end{aligned}$$

$$\left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_x^T dx \right] \mathbf{u} + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_y^T dx \right] \mathbf{v} + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{H}_z^T dx \right] \mathbf{w} = 0.$$

Je zřejmé, že tyto rovnice a rovnice pro popis proudění Newtonské kapaliny ((3.30) až (3.33)) se liší pouze vyjádřením dynamické viskozity. Pravé strany těchto

rovníc budou vyjádřeny stejně jako v kapitole 3.1.1 (opět uvažujeme nulové objemové síly). Výše uvedenou soustavu můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{F}_3 & \mathbf{A} + \mathbf{B}_3 & \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

kde matice $\mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{F}_i$ pro $i = 1, 2, 3$ jsou závislé na rychlostech $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a tenzoru V_{ij} . Matice \mathbf{A} je závislá na $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Tato soustava nelineárních algebraických rovnic pro neznámé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}$ v uzlových bodech konečných prvků je řešena výše uvedenou Newtonovou-Rapsonovou iterační metodou. Její princip popisují rovnice (3.43) až (3.45). Jacobiova matice $J_{(r)}$ v r -tém kroku je nyní vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{J}_{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{(r)} & \mathbf{J}_{12}^{(r)} & \mathbf{J}_{13}^{(r)} & \mathbf{J}_{14}^{(r)} \\ \mathbf{J}_{21}^{(r)} & \mathbf{J}_{22}^{(r)} & \mathbf{J}_{23}^{(r)} & \mathbf{J}_{24}^{(r)} \\ \mathbf{J}_{31}^{(r)} & \mathbf{J}_{32}^{(r)} & \mathbf{J}_{33}^{(r)} & \mathbf{J}_{34}^{(r)} \\ \mathbf{J}_{41} & \mathbf{J}_{42} & \mathbf{J}_{43} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

kde například $\mathbf{J}_{11}^{(r)}, \mathbf{J}_{21}^{(r)}, \mathbf{J}_{14}$ a \mathbf{J}_{41} jsou definovány následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{11}^{(r)} &= \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{u}^{(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{u}^{(r)} \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{v}^{(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{w}^{(r)}, \\ \mathbf{J}_{21}^{(r)} &= \mathbf{C}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^{(r)} + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{v}^{(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{v}^{(r)} \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{u}^{(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{v}^T} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{w}^T} \right) \mathbf{w}^{(r)}, \\ \mathbf{J}_{14} &= \mathbf{D}_1, \\ \mathbf{J}_{41} &= \mathbf{K}_1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Parciální derivace jednotlivých matic se provádějí obdobně jako u matice \mathbf{A} v odstavci 3.1.1, tedy analogicky podle vztahu (3.49). Z rovnic (4.18) vidíme, že všechny matice kromě \mathbf{A} jsou závislé na tenzoru rychlosti deformace a ten je závislý na rychlostech $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Parciální derivace například pro matici \mathbf{C}_1 bude ve tvaru

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial v_i} + \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial w_i} \right) \mathbf{v}^{(r)} = \\ &= \left[K \frac{n-1}{2} \int_{\Omega^e} I_2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial I_2}{\partial u_i} + \frac{\partial I_2}{\partial v_i} + \frac{\partial I_2}{\partial w_i} \right) \mathbf{H}_y \mathbf{H}_x^T dx \right] \mathbf{v}^{(r)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Konstanty K a n jsou parametry neneutonské kapaliny z mocninového modelu (4.12). Pro druhý invariant tenzoru rychlosti deformace I_2 po rozepsání a použití vztahů (3.29) potom platí

$$I_2 = (\mathbf{H}_x^T \mathbf{u})^2 + (\mathbf{H}_y^T \mathbf{v})^2 + (\mathbf{H}_z^T \mathbf{w})^2 + \frac{1}{2} \left((\mathbf{H}_y^T \mathbf{u} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{v})^2 + (\mathbf{H}_z^T \mathbf{u} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{w})^2 + (\mathbf{H}_z^T \mathbf{v} + \mathbf{H}_y^T \mathbf{w})^2 \right). \quad (4.23)$$

Pro vyjádření jeho parciální derivace použijeme taktéž rovnici (3.49).

Všechny výše uvedené vztahy byly aplikovány na numerické řešení stacionárního laminárního izotermického proudění nestlačitelné vazké neneutonské kapaliny v rovném trojrozměrném kanálu a v kanálu půlkruhového tvaru. Pro popis viskozity byl použit mocninový zákon. Výsledky také byly porovnány s výsledky z kapitoly 3.1.1.

4.3.2 Výsledky

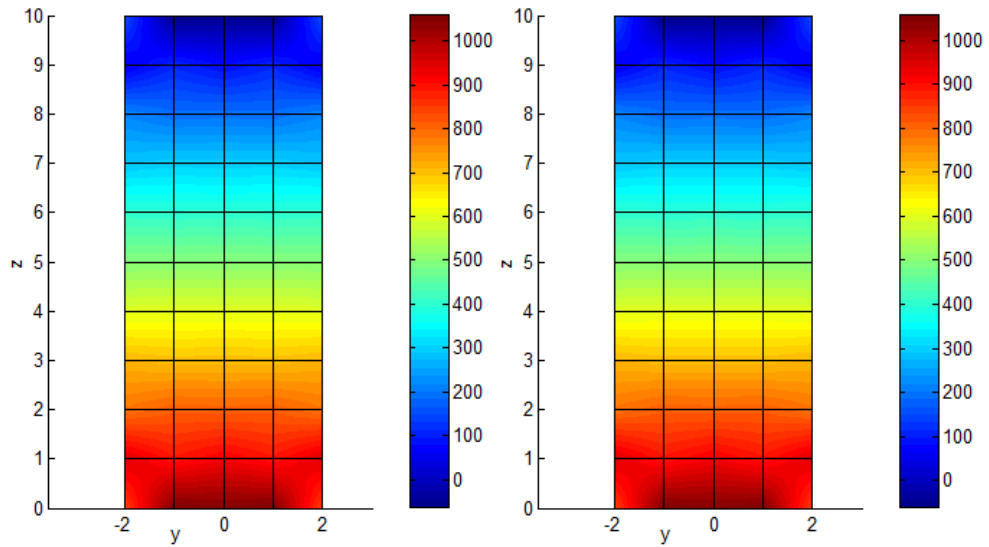
V tomto odstavci uvedeme konkrétní výpočty stacionárního laminárního izotermického proudění neneutonské kapaliny v kanálech. Postup je shodný s tím, co je uvedeno v úvodu odstavce 3.1.2. Konkrétní výpočty ukážeme na přímém kanálu kruhového průřezu a kanálu kruhového průřezu se střednicí tvaru půlkružnice.

Přímý kanál

Uvažovaný kanál je zobrazen na obr. 3.5 a vstupní parametry této úlohy a rozměry jsou následující:

p_{vstup}	=	1000	[-]	tlak na vstupu kanálu,
$p_{výstup}$	=	0	[-]	tlak na výstupu kanálu,
K	=	50	[-]	konzistentní parametr,
ρ	=	1	[-]	hustota,
l	=	10	[-]	délka kanálu,
r	=	2	[-]	poloměr kanálu,
\mathbf{v}_0	=	0	[-]	rychlost kapaliny na stěně kanálu.

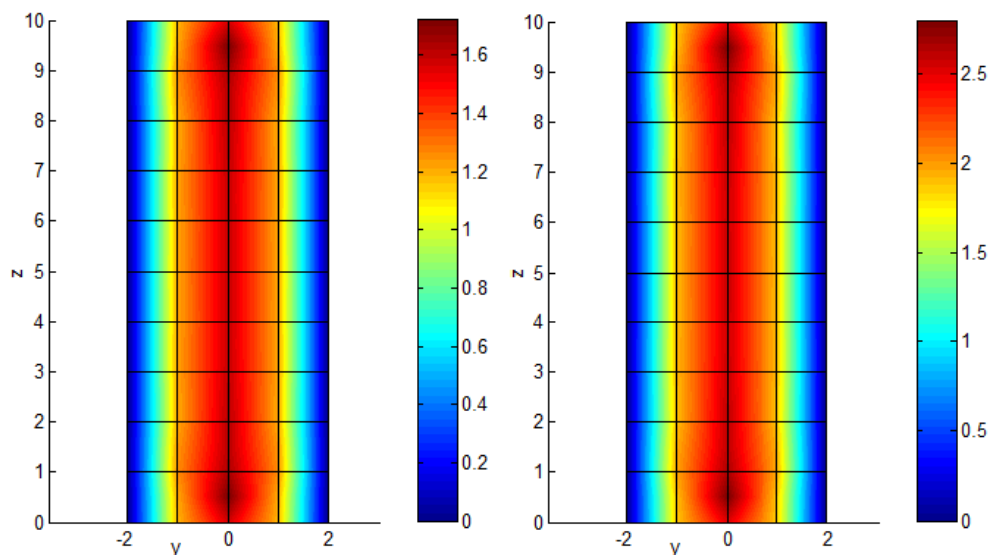
Kanál je řešen pro hodnoty indexu toku $n = 0,95$ a $n = 1,05$. Byl modelován stejnou sítí jako v odstavci 3.1.2. Sítí tedy měla celkem 160 prvků, 10 po délce přímého kanálu a 16 na průřezu. V následujících obrázcích a tabulkách jsou zobrazeny výsledky pro zadané hodnoty.



Obr. 4.3: Rozložení tlaku v přímém kanálu v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.1: Hodnoty tlaku v přímém kanálu v rovině yz

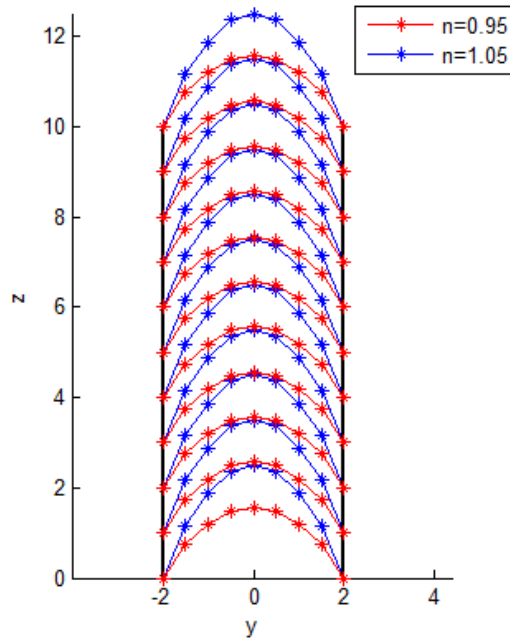
z/y	n	-2	-1	0	1	2
0	0,95	841,71	1061,60	1050,57	1061,60	841,71
	1,05	841,88	1060,53	1047,64	1060,53	841,88
1	0,95	947,70	890,03	920,89	890,03	947,70
	1,05	947,53	890,65	922,42	890,65	947,53
2	0,95	784,47	810,00	806,62	810,00	784,47
	1,05	784,96	810,54	805,83	810,54	784,96
3	0,95	712,22	701,25	702,77	701,25	712,22
	1,05	712,31	701,34	703,31	701,34	712,31
4	0,95	598,53	602,49	601,96	602,49	598,53
	1,05	598,65	602,60	601,90	602,60	598,65
5	0,95	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
	1,05	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
6	0,95	401,47	397,51	398,04	397,51	401,47
	1,05	401,35	397,40	398,10	397,40	401,35
7	0,95	287,78	298,75	297,23	298,75	287,78
	1,05	287,69	298,66	296,69	298,66	287,69
8	0,95	215,53	190,00	193,38	190,00	215,53
	1,05	215,04	189,46	194,17	189,46	215,04
9	0,95	52,30	109,97	79,11	109,97	52,30
	1,05	52,47	109,35	77,58	109,35	52,47
10	0,95	158,29	-61,60	-50,57	-61,60	158,29
	1,05	158,12	-60,53	-47,64	-60,53	158,12



Obr. 4.4: Rozložení rychlosti v přímém kanálu v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.2: Hodnoty rychlosti v přímém kanálu v rovině yz

z/y	n	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,95	0,00	0,75	1,18	1,49	1,56	1,49	1,18	0,75	0,00
	1,05	0,00	1,16	1,87	2,37	2,50	2,37	1,87	1,16	0,00
1	0,95	0,00	0,67	1,25	1,57	1,64	1,57	1,25	0,67	0,00
	1,05	0,00	1,03	1,97	2,50	2,66	2,50	1,97	1,03	0,00
2	0,95	0,00	0,72	1,20	1,53	1,62	1,53	1,20	0,72	0,00
	1,05	0,00	1,12	1,89	2,43	2,61	2,43	1,89	1,12	0,00
3	0,95	0,00	0,71	1,21	1,51	1,60	1,51	1,21	0,71	0,00
	1,05	0,00	1,10	1,91	2,42	2,58	2,42	1,91	1,10	0,00
4	0,95	0,00	0,71	1,21	1,51	1,59	1,51	1,21	0,71	0,00
	1,05	0,00	1,11	1,90	2,42	2,57	2,42	1,90	1,11	0,00
5	0,95	0,00	0,71	1,21	1,51	1,59	1,51	1,21	0,71	0,00
	1,05	0,00	1,10	1,91	2,42	2,57	2,42	1,91	1,10	0,00
6	0,95	0,00	0,71	1,21	1,51	1,59	1,51	1,21	0,71	0,00
	1,05	0,00	1,11	1,90	2,42	2,57	2,42	1,90	1,11	0,00
7	0,95	0,00	0,71	1,21	1,51	1,60	1,51	1,21	0,71	0,00
	1,05	0,00	1,10	1,91	2,42	2,58	2,42	1,91	1,10	0,00
8	0,95	0,00	0,72	1,20	1,53	1,62	1,53	1,20	0,72	0,00
	1,05	0,00	1,12	1,89	2,43	2,61	2,43	1,89	1,12	0,00
9	0,95	0,00	0,67	1,25	1,57	1,64	1,57	1,25	0,67	0,00
	1,05	0,00	1,03	1,97	2,50	2,66	2,50	1,97	1,03	0,00
10	0,95	0,00	0,75	1,18	1,49	1,56	1,49	1,18	0,75	0,00
	1,05	0,00	1,16	1,87	2,37	2,50	2,37	1,87	1,16	0,00



Obr. 4.5: Porovnání rychlosti v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Z obr. 4.3 a tabulky 4.1 vidíme, že hodnoty tlaku pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$ jsou téměř shodné a lineárně klesají od vstupu k výstupu. Stejně jako v odstavcích 3.1.2 a 3.2.4 jsou na vstupu a výstupu jisté odchylky od zadaných hodnot. Tabulka potvrzuje, že v dostatečné vzdálenosti od konců kanálu nemají numerické nepřesnosti vliv (ve středu kanálu dosahují hodnoty tlaku konstantních hodnot). Kanál je symetrický, hodnoty jsou shodné v ostatních rovinách se svislou osou z .

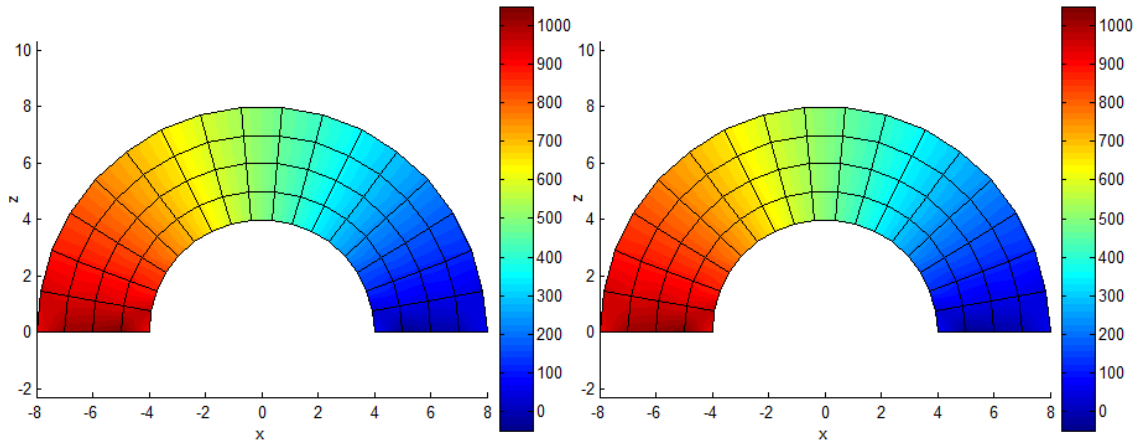
Z porovnání rozložení rychlostí na obr. 4.4, 4.5 a v tabulce 4.2 vidíme, že pro index toku $n = 0,95$ se jedná o pseudoplastickou kapalinu a parabola rozložení rychlosti je plošší než pro dilatantní kapalinu s indexem toku $n = 1,05$. Z tabulky je dále zřejmé, že numerické nepřesnosti nemají ve středu kanálu vliv na rozložení rychlosti, na rozdíl od konců přímého kanálu.

Kanál kruhového průřezu se střednicí tvaru půlkružnice

Uvažovaný kanál je zobrazen na obr. 3.8. Vstupní parametry a rozměry úlohy jsou:

p_{vstup}	=	1000	[-]	tlak na vstupu,
$p_{výstup}$	=	0	[-]	tlak na výstupu,
K	=	50	[-]	konzistentní parametr,
ρ	=	1	[-]	hustota,
R	=	6	[-]	poloměr kanálu půlkruhového tvaru,
r	=	1	[-]	poloměr průřezu kanálu půlkruhového tvaru,
l	=	6π	[-]	střední délka kanálu,
v_0	=	0	[-]	rychlost kapaliny na stěně kanálu.

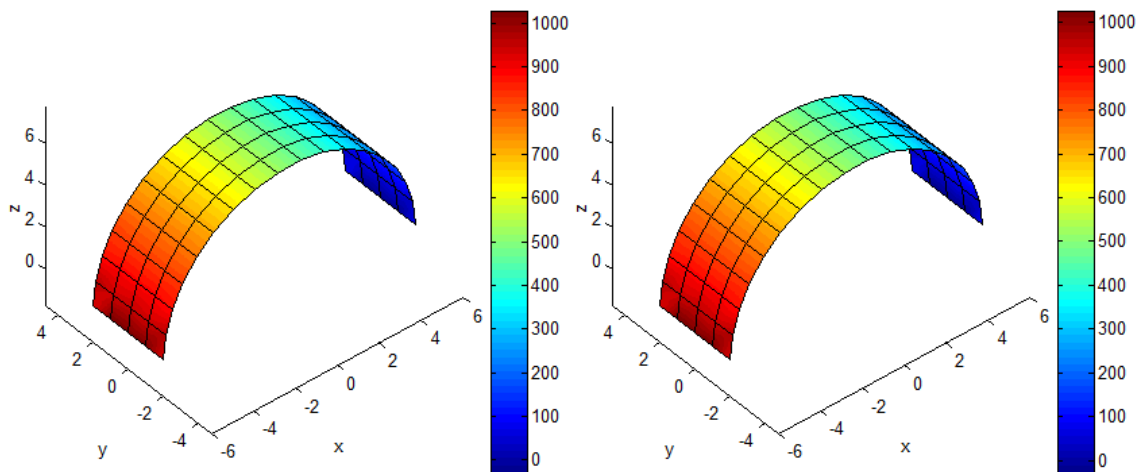
Kanál je řešen pro hodnoty indexu toku $n = 0,95$ a $n = 1,05$. Byl modelován stejnou sítí jako v odstavci 3.1.2, síť tedy měla celkem 272 prvků. V následujících obrázcích a tabulkách jsou zobrazeny výsledky pro zadané hodnoty.



Obr. 4.6: Rozložení tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině xz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.3: Hodnoty tlaku v kanálu v rovině xz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

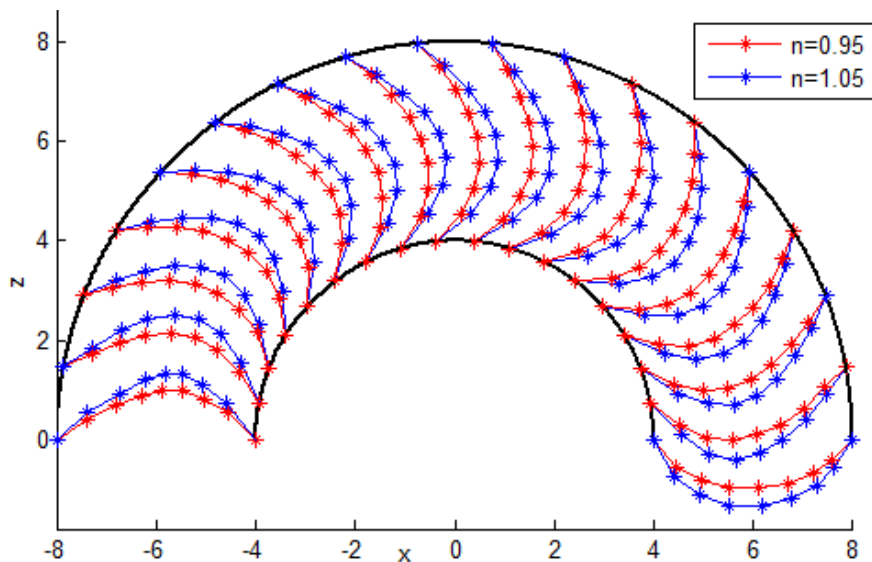
z/x	n	-2	-1	0	1	2
0	0,95	929,49	1014,27	1022,87	1050,93	917,38
	1,05	930,16	1014,15	1022,11	1050,00	916,03
1	0,95	958,39	937,46	950,50	937,74	976,51
	1,05	958,38	937,81	951,23	937,65	976,77
2	0,95	879,32	887,18	886,88	890,58	872,12
	1,05	879,71	887,46	886,70	890,85	872,28
4	0,95	766,40	767,57	767,53	768,19	764,07
	1,05	766,52	767,68	767,58	768,36	764,18
6	0,95	648,39	648,57	648,56	648,73	647,76
	1,05	648,45	648,63	648,61	648,80	647,82
8	0,95	529,68	529,71	529,71	529,77	529,45
	1,05	529,69	529,73	529,72	529,79	529,46
10	0,95	410,82	410,89	410,88	410,98	410,47
	1,05	410,79	410,86	410,85	410,95	410,45
12	0,95	291,66	292,12	292,10	292,44	290,49
	1,05	291,59	292,04	292,01	292,40	290,41
14	0,95	170,64	173,83	173,56	174,83	166,42
	1,05	170,56	173,68	173,36	174,90	166,25
16	0,95	41,61	62,53	49,47	62,25	23,48
	1,05	41,62	62,19	48,77	62,35	23,23
17	0,95	70,51	-14,26	-22,84	-50,93	82,65
	1,05	69,84	-14,15	-22,11	-50,00	83,97



Obr. 4.7: Rozložení tlaku v půlkruhovém kanálu v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.4: Hodnoty tlaku v kanálu v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

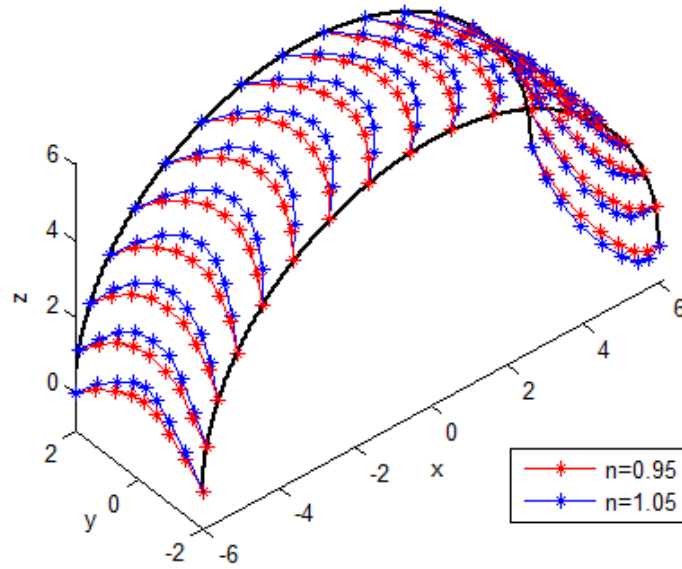
z/y	n	-2	-1	0	1	2
0	0,95	921,71	1028,16	1022,87	1028,16	921,71
	1,05	921,68	1027,76	1022,11	1027,76	921,68
1	0,95	965,14	937,17	950,50	937,17	965,14
	1,05	965,15	937,56	951,23	937,56	965,15
2	0,95	876,55	888,30	886,88	888,30	876,55
	1,05	876,89	888,60	886,70	888,60	876,89
4	0,95	765,72	767,74	767,53	767,74	765,72
	1,05	765,84	767,87	767,58	767,87	765,84
6	0,95	648,24	648,61	648,56	648,61	648,24
	1,05	648,30	648,67	648,61	648,67	648,30
8	0,95	529,63	529,72	529,71	529,72	529,63
	1,05	529,65	529,74	529,72	529,74	529,65
10	0,95	410,74	410,91	410,88	410,91	410,74
	1,05	410,71	410,88	410,85	410,88	410,71
12	0,95	291,34	292,20	292,10	292,20	291,34
	1,05	291,28	292,13	292,01	292,13	291,28
14	0,95	169,22	174,16	173,56	174,16	169,22
	1,05	169,12	174,06	173,36	174,06	169,12
16	0,95	34,85	62,83	49,47	62,83	34,85
	1,05	34,85	62,44	48,77	62,44	34,85
17	0,95	78,31	-28,16	-22,84	-28,16	78,31
	1,05	78,32	-27,76	-22,11	-27,76	78,32



Obr. 4.8: Porovnání rychlosti v rovině xz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.5: Hodnoty rychlosti v kanálu v rovině xz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

z/x	n	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,95	0,00	0,42	0,71	0,91	0,99	0,98	0,81	0,55	0,00
	1,05	0,00	0,56	0,96	1,24	1,35	1,34	1,10	0,74	0,00
1	0,95	0,00	0,34	0,69	0,91	1,03	1,05	0,91	0,55	0,00
	1,05	0,00	0,46	0,92	1,24	1,41	1,45	1,23	0,72	0,00
2	0,95	0,00	0,38	0,67	0,90	1,01	1,02	0,87	0,57	0,00
	1,05	0,00	0,51	0,90	1,22	1,39	1,40	1,18	0,75	0,00
4	0,95	0,00	0,38	0,68	0,90	1,00	1,01	0,86	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,51	0,91	1,22	1,38	1,39	1,17	0,74	0,00
6	0,95	0,00	0,38	0,68	0,90	1,00	1,01	0,86	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,50	0,92	1,22	1,38	1,39	1,17	0,74	0,00
8	0,95	0,00	0,38	0,68	0,90	1,00	1,01	0,86	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,50	0,92	1,22	1,38	1,39	1,17	0,74	0,00
10	0,95	0,00	0,38	0,68	0,90	1,00	1,01	0,86	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,50	0,92	1,22	1,38	1,39	1,17	0,74	0,00
12	0,95	0,00	0,38	0,68	0,90	1,00	1,01	0,86	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,50	0,92	1,22	1,38	1,39	1,18	0,74	0,00
14	0,95	0,00	0,37	0,68	0,90	1,01	1,01	0,87	0,56	0,00
	1,05	0,00	0,50	0,91	1,22	1,38	1,39	1,18	0,74	0,00
16	0,95	0,00	0,34	0,69	0,91	1,03	1,05	0,91	0,55	0,00
	1,05	0,00	0,46	0,92	1,24	1,41	1,45	1,23	0,72	0,00
17	0,95	0,00	0,42	0,71	0,91	0,99	0,98	0,81	0,55	0,00
	1,05	0,00	0,56	0,96	1,24	1,35	1,34	1,10	0,74	0,00



Obr. 4.9: Porovnání rychlosti v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

Tabulka 4.6: Hodnoty rychlosti v kanálu v rovině yz pro $n = 0,95$ a $n = 1,05$

z/y	n	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
0	0,95	0,00	0,47	0,76	0,94	0,99	0,94	0,76	0,47	0,00
	1,05	0,00	0,63	1,02	1,28	1,35	1,28	1,02	0,63	0,00
1	0,95	0,00	0,42	0,78	0,98	1,03	0,98	0,78	0,42	0,00
	1,05	0,00	0,56	1,06	1,33	1,41	1,33	1,06	0,56	0,00
2	0,95	0,00	0,45	0,76	0,96	1,01	0,96	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,60	1,02	1,30	1,39	1,30	1,02	0,60	0,00
4	0,95	0,00	0,45	0,76	0,95	1,00	0,95	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,60	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,60	0,00
6	0,95	0,00	0,45	0,76	0,95	1,00	0,95	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,60	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,60	0,00
8	0,95	0,00	0,45	0,76	0,95	1,00	0,95	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,59	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,59	0,00
10	0,95	0,00	0,45	0,76	0,95	1,00	0,95	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,59	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,59	0,00
12	0,95	0,00	0,45	0,76	0,95	1,00	0,95	0,76	0,45	0,00
	1,05	0,00	0,59	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,59	0,00
14	0,95	0,00	0,44	0,76	0,95	1,01	0,95	0,76	0,44	0,00
	1,05	0,00	0,59	1,03	1,30	1,38	1,30	1,03	0,59	0,00
16	0,95	0,00	0,42	0,78	0,98	1,03	0,98	0,78	0,42	0,00
	1,05	0,00	0,56	1,06	1,33	1,41	1,33	1,06	0,56	0,00
17	0,95	0,00	0,47	0,76	0,94	0,99	0,94	0,76	0,47	0,00
	1,05	0,00	0,63	1,02	1,28	1,35	1,28	1,02	0,63	0,00

Výsledky z půlkruhového kanálu jsou podobné výsledkům z přímého kanálu. Rovněž zde klesá tlak skoro lineárně od vstupu k výstupu (obr. 4.6 a obr. 4.7) a na koncích kanálu jsou numerické nepřesnosti. Z tabulek 4.3 a 4.4 vidíme, že hodnoty tlaku pro index toku $n = 0,95$ a $n = 1,05$ jsou téměř shodné.

Stejně jako u přímého kanálu je i zde parabola rychlosti pro dilatantní kapalinu s indexem toku $n = 1,05$ více zakřivená než u pseudoplastické kapaliny s $n = 0,95$. Z obrázku 4.8 vidíme, že kapalina proudí rychleji u vnitřní stěny půlkruhového kanálu, což je způsobeno vlivem geometrie. To dokazují i hodnoty ve sloupcích tabulky 4.5. V rovině řezu yz jsou jednotlivé paraboly symetrické, protože je vliv zakřivení kanálu na proudění kapaliny konstantní viz obr. 4.9 a tabulka 4.6.

4.4 Řídící rovnice viskoelastických kapalin

Jak již bylo uvedeno v úvodu, má neneutonské chování kapalin obecně mnoho podob. V předchozích kapitolách jsme modelovali závislost viskozity na smykové rychlosti, neřešili jsme problém viskoelasticity kapalin a jejich paměti. Nyní se budeme zabývat modelováním proudění viskoelastických kapalin. Stejně jako v předchozích případech bude použita metoda konečných prvků.

4.4.1 Rovnice zachování

Popis proudění uvažovaných kapalin je obecně založen na bázi zachování hmotnosti, hybnosti a energie, odpovídající stavové rovnici a konstitutivních vztazích. Dále se omezíme na homogenní, izotropní, nestlačitelné, viskózní kapaliny a laminární izotermické proudění. Budeme se zabývat řešením 2D problému (rozšíření na 3D je analogické, ale výpočtově podstatně náročnější) a jednoduchými kapalinami se „slabou“ pamětí. Řešení budeme hledat v kartézských souřadnicích v Eulerově popisu.

Nadále platí zákon zachování hmotnosti vyjádřený rovnicí kontinuity (3.11) a zákon zachování hybnosti ve tvaru Navierovy-Stokesovy rovnice (3.3). Tyto rovnice řešíme společně s konstitutivními vztahy pro příslušnou kapalinu a s počátečními a okrajovými podmínkami. Vzhledem k rozmanitosti uvedeme konstitutivní vztahy viskoelastických materiálů v samostatném odstavci.

4.4.2 Konstitutivní vztahy

Tensor napjatosti pro nestlačitelné kapaliny má tvar

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}, \quad (4.24)$$

kde p je tlak a T_{ij} je viskózní tenzor napjatosti. Poznamenejme, že u viskózního tenzoru napjatosti není stopa nulová, a tedy tlak p není hlavní normálové napětí

jako u Newtonovy kapaliny. Klíčovou otázkou pro konstrukci konstitutivního vztahu viskoelastických kapalin je výběr vztahů mezi viskózním napětím a kinematikou kapalinových částic při proudění. Pro jednoduché kapaliny se obecný konstitutivní vztah vyjadřuje ve funkcionálním tvaru, kde aktuální napětí je vázáno na historii deformace částic kapaliny. Typickou relací je

$$T_{ij} = \mathcal{T}_{ij} [G_{kl}(s), 0 < s < \infty], \quad (4.25)$$

kde \mathcal{T}_{ij} je funkcionál tenzorového charakteru, G_{kl} tz. „konečný“ deformační tenzor (má přímou vazbu na pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace), $s = t - t'$ je časový úsek z času t' do okamžitého času t . Obecná forma (4.25) musí být pro konkrétní kapalinu samozřejmě konkretizována. Existuje celá řada konstitutivních vztahů pro jednoduché kapaliny. Žádný vztah není univerzální, vždy je vázán na konkrétní typ kapaliny. Konstitutivní vztahy lze rozdělit do dvou základních skupin na integrální a diferenciální modely.

Integrální modely jsou reprezentovány integrálem přes uplynulý čas a integruje se „historie“ deformace kapaliny. Je to tedy model reprezentující přídavné napětí. U diferenciálních modelů je tenzor přídavného napětí určen z evoluční rovnice, která dává do relace napětí a rychlost jeho změny s kinematikou proudění (tenzorem rychlosti deformace). Volba mezi diferenciální a integrální formou je pro numerickou simulaci zásadní, protože pro obě formulace jsou značně komplikované a mají zcela odlišné výpočtové algoritmy. Zaměříme se především na diferenciální tvar konstitutivních vztahů. Integrální formulace se dotkneme pouze informativně.

Diferenciální modely

Diferenciální konstitutivní vztahy jsou tzv. rychlostní modely a lze je rozdělit na lineární a nelineární modely. Konstitutivní vztah (4.24) upravený na tvar

$$T_{ij} + \lambda \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = 2\eta V_{ij}, \quad (4.26)$$

popisuje **lineární Maxwellovu kapalinu**. λ je relaxační čas, tenzor V_{ij} vyjadřuje rychlost deformace a člen $\lambda \frac{\partial T_{ij}}{\partial t}$ představuje elasticitu kapaliny s ekvivalentním elastickým modulem G . Pro relaxační funkci, která popisuje historii napětí, lze např. použít

$$\Phi(t) = \frac{\eta}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}. \quad (4.27)$$

Analogicky ke vztahům (4.24), (4.26) je definována **Jeffreyova lineární kapalina**, pro kterou má konstitutivní vztah tvar

$$T_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = 2\eta \left(V_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} \right). \quad (4.28)$$

Pro rozšíření těchto lineárních modelů na nelineární problémy je nutno zajistit objektivitu (invariantnost) příslušných materiálových (konvektivních) derivací

obecně symetrického tenzoru 2. řádu. Necht φ_{ij} označuje kartézské souřadnice tenzoru 2. řádu, potom horní konvektivní derivace (tj. objektivní, také kontravariantní nebo Oldroydova) je definována [4]

$$\overset{\nabla}{\varphi}_{ij} = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_k} - L_{ik} \varphi_{kj} - L_{jk} \varphi_{ki}, \quad (4.29)$$

a dolní konvektivní derivace (také kovariantní)

$$\overset{\Delta}{\varphi}_{ij} = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_k} + L_{ki} \varphi_{kj} + L_{kj} \varphi_{ki}, \quad (4.30)$$

kde v_k jsou složky vektoru rychlosti, L_{ij} složky rychlostního gradientu. Vzhledem k tomu, že vztahy (4.29) a (4.30) jsou přípustné konvektivní derivace, tak jejich lineární kombinace je také přípustná (objektivní) derivace. Z toho plyne

$$\overset{0}{\varphi}_{ij} = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \overset{\nabla}{\varphi}_{ij} + \left(\frac{a}{2}\right) \overset{\Delta}{\varphi}_{ij}. \quad (4.31)$$

Tento vztah bývá nazýván zobecněná konvektivní derivace a zřejmě pro $a = 0$ se redukuje na (4.29) a pro $a = 2$ potom na (4.30). Pokud je $a = 1$ tak derivace (4.31) se nazývá Jaumannova derivace. Pro derivaci doplňkového tenzoru napjatosti s kartézskými složkami T_{ij} potom platí:

$$\overset{\nabla}{T}_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} - L_{ik} T_{kj} - L_{jk} T_{ki}, \quad (4.32)$$

$$\overset{\Delta}{T}_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} + L_{ki} T_{kj} + L_{kj} T_{ki}, \quad (4.33)$$

$$\overset{0}{T}_{ij} = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \overset{\nabla}{T}_{ij} + \left(\frac{a}{2}\right) \overset{\Delta}{T}_{ij}. \quad (4.34)$$

Všechny tyto derivace mohou být použity v různých diferenciálních konstitutivních vztazích. Výběr příslušného typu závisí na konkrétní viskoelastické kapalině a vyplývá obecně z experimentálních naměřených dat jednoduchého smykového proudění. Nejjednodušší diferenciální konstitutivní vztahy pro nelineární viskoelastické kapaliny dostaneme tak, že v Maxwellově modelu (4.26) použijeme horní či dolní objektivní derivaci. **Model horní konvektivní Maxwellovy kapaliny** má tvar

$$T_{ij} + \lambda \overset{\nabla}{T}_{ij} = 2\eta V_{ij}, \quad (4.35)$$

a je často používán pro testování numerických algoritmů. Dolní konvektivní model Maxwellovy kapaliny se příliš nepoužívá, neboť predikuje nerealistické fyzikální chování.

Pokud použijeme v Maxwellově modelu (4.26) zobecněnou konvektivní derivaci (4.31), dostaneme **Johsonův-Segalmanův model**

$$T_{ij} + \lambda \overset{0}{T}_{ij} = 2\eta V_{ij}. \quad (4.36)$$

Jednoduchou modifikací tohoto modelu je **Phan Thienův-Tannerův model**

$$Y(\mathbf{T}) T_{ij} + \lambda \overset{0}{T}_{ij} = 2\eta V_{ij}, \quad (4.37)$$

kde funkce $Y(\mathbf{T})$ před T_{ij} má tvar

$$Y(\mathbf{T}) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \text{tr}(\mathbf{T}), \quad (4.38)$$

kde ϵ je konstanta. Tomuto modelu se často dává přednost před modelem (4.36).

Oba uvedené modely (4.36) a (4.37) „trpí“ běžným defektem, kdy pro monotónně vzrůstající smykovou rychlost existuje oblast, v níž smykové napětí klesá. To je fyzikálně nereálné chování. Často lze tyto anomálie odstranit dekompozicí přídavné napjatosti na dvě části

$$T_{ij} = T_{ij}^s + T_{ij}^p, \quad (4.39)$$

kde T_{ij}^s je čistě viskózní složka odpovídající Newtonově kapalině a T_{ij}^p složka viskoelastického tenzoru, která odpovídá např. polymerním přísadám. Pro Johnsonovu-Segalmanovu kapalinu platí

$$\begin{aligned} T_{ij}^s &= 2\eta^s V_{ij}, \\ T_{ij}^p + \lambda \overset{0}{T}_{ij}^p &= 2\eta^p V_{ij}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ze vztahů (4.39) a (4.40) lze vytvořit nový konstitutivní vztah (eliminace rozdílného napětí)

$$T_{ij} + \lambda \overset{0}{T}_{ij} = 2\bar{\eta} \left(V_{ij} + \lambda' \overset{0}{V}_{ij} \right), \quad (4.41)$$

kde $\bar{\eta} = (\eta^s + \eta^p)$ a $\lambda' = \lambda \frac{\eta^s}{\bar{\eta}}$ je retardační čas. Konstitutivní vztah (4.41) definuje kapalinu Oldroydova typu. Různý výběr konvektivní derivace v tomto vztahu generuje speciální modely kapalin. Např. pro $a = 0$ přejde $\overset{0}{T}_{ij}$ na $\overset{\nabla}{T}_{ij}$ a vztah (4.41) popisuje tzv. **Oldroydovu B kapalinu**. pro $a = 2$ přejde $\overset{0}{T}_{ij}$ na $\overset{\Delta}{T}_{ij}$ a dostaneme **Oldroydovu A kapalinu**.

Ve všech uvedených konstitutivních vztazích jsou materiálové parametry λ a η považovány za konstanty. Pro některé kapaliny tyto konstanty nevyhovují. Potom se parametry λ a η uvažují jako funkce invariantů tenzoru rychlosti deformace (obvykle závislost pouze na I_2). Konkrétně například pro horní konvektivní Maxwellovu kapalinu [21]

$$T_{ij} + \lambda(I_2) \overset{\nabla}{T}_{ij} = 2\eta^p(I_2) V_{ij}. \quad (4.42)$$

Tento konstitutivní vztah se obvykle nazývá jako Whiteův-Metzerův model. Ještě poznamenejme, že Oldroydova a Maxwellova konvektivní kapalina jsou odvozeny jako zobecnění jednoduchých lineárních viskoelastických modelů. Každý uvedený model je specifický a jeho platnost je omezena na konkrétní kapalinu. Zdůrazněme, že žádný model neplatí pro jakékoliv viskoelastické chování.

Integrální modely

Tento integrální model viskoelastických kapalin také reprezentuje přídavné (viskózní) napětí a je reprezentován integrálem přes historii deformace kapaliny. Obecný tvar integrálního modelu [21] je

$$T_{ij} = \int_{-\infty}^t 2m(t-t') H_{ij}(t-t') dt', \quad (4.43)$$

kde t je okamžitý čas, m skalární funkce paměti (také relaxační jádro), H_{ij} nelineární deformační tenzor (míra přetvoření mezi prošlým časem t' a okamžitým časem t). Opět zde existuje celá řada vhodných tvarů paměťové funkce i deformační míry mezi časy t' a t . Funkce paměti se standardně bere jako klesající funkce časového intervalu $s = t - t'$. Z toho plyne typický tvar této funkce v exponenciálním tvaru (souvisí s relaxační funkcí (4.27))

$$m(t-t') = m(s) = \frac{\eta_0}{\lambda^2} e^{-\frac{s}{\lambda}}. \quad (4.44)$$

Výběr míry deformace ve vztahu (4.43) je do značné míry libovolný a často se vyjadřuje obecně v tzv. rozdělené formě [4]

$$H_{ij} = \Phi_1(I, II) C_{ij}^{-1} + \Phi_2(I, III) C_{ij}, \quad (4.45)$$

kde C_{ij} je pravý Cauchyův-Greenův tenzor přetvoření, C_{ij}^{-1} je jeho inverzní tenzor (často nazývaný Fingerův tenzor), Φ_i jsou skalární funkce, které jsou funkcí invariantů deformačních tenzorů, tj. $I = \text{tr}(C_{ij}^{-1})$ a $II = \text{tr}(C_{ij})$. Uvedený deformační tenzor má tvar

$$C_{ij} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_j}. \quad (4.46)$$

\mathcal{X} je poloha částic kapaliny v čase t' , která se v čase t nachází v poloze x_i . Uvedené vztahy se samozřejmě musí specifikovat pro konkrétní kapaliny, např. jako speciální případ uvažujeme Maxwellův model kapaliny, kdy ve (4.45) položíme $\Phi_1 = 1$ a $\Phi_2 = 0$ a použijeme paměťovou funkci (4.44). Potom z (4.43) dostaneme

$$T_{ij} = \frac{\eta_0}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t -\frac{(t-t')}{\lambda} [C_{ij}^{-1}(t') - \delta_{ij}] dt'. \quad (4.47)$$

Demonstrujeme vztah mezi diferenciálním a integrálním tvarem konstitutivního vztahu na lineární Maxwellově kapalině. Integrální tvar můžeme napsat ve tvaru [16]

$$T_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t \Phi(t-t') V_{ij}(t') dt'. \quad (4.48)$$

Do této rovnice dosadíme za relaxační funkci Φ (4.27), která hraje roli paměťové funkce, a dostaneme výchozí konstitutivní vztah

$$T_{ij} = \frac{2\eta}{\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\lambda}} V_{ij}(t') dt'. \quad (4.49)$$

Tento konstitutivní vztah budeme dále derivovat podle času. Pro derivaci použijeme Leibnitzovo pravidlo o derivování integrálu, jehož meze jsou závislé na parametru [18]. Derivace tenzoru (4.49) podle času má tvar

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = \frac{2\eta}{\lambda} \left[\int_{-\infty}^t \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{t-t'}{\lambda}} V_{ij}(t') dt' + 1V_{ij}(t) \right] = -\frac{1}{\lambda} T_{ij} + \frac{2\eta}{\lambda} V_{ij}, \quad (4.50)$$

resp. po vynásobení součinitelem λ dostáváme

$$T_{ij} + \lambda \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = 2\eta V_{ij}. \quad (4.51)$$

To je ale právě konstitutivní vztah (4.26). Z toho plyne, že integrální tvar konstitutivního vztahu (4.48) lineární Maxwellovy kapaliny je stejný jako „rychlostní“ tvar konstitutivního vztahu (4.26). A dále platí, že konstitutivní vztah (4.49) není nic jiného, než řešení lineární nehomogenní diferenciální rovnice (4.26). Poznamenejme, že lineární Maxwellovy kapaliny jsou akceptovatelné pouze pro ty kapaliny a takové pohyby kapalin, u kterých dochází během proudění k malým deformačním gradientům částic kapaliny. Dále konstitutivní vztah v integrálním tvaru (4.47) je ekvivalentní s horním konvektivním Maxwellovým modelem, jehož diferenciální tvar je (4.35). Ještě poznamenejme, že ačkoliv u Maxwellovy kapaliny existují oba tvary konstitutivního vztahu (diferenciální a integrální), tak obecně to pro konstitutivní vztahy jiných kapalin neplatí.

4.5 MKP model viskoelastické kapaliny

Postup řešení demonstrujeme na laminárním izotermickém proudění homogenní nestlačitelné kapaliny ve 2D prostoru. Uvažujeme model horní konvektivní kapaliny a zanedbáme opět objemové síly.

Řídícími rovnicemi jsou Navierova-Stokesova rovnice a rovnice kontinuity

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.53)$$

Použijeme Oldroydův B model kapaliny a budeme uvažovat výše uvedený konstitutivní vztah (4.40) (pro $a = 0$) ve tvaru

$$T_{ij}^s = 2\eta^s V_{ij}, \quad (4.54)$$

$$T_{ij}^p + \lambda T_{ij}^{p\nabla} = 2\eta^p V_{ij}. \quad (4.55)$$

Do vztahu (4.52) dosadíme (4.24) a zohledníme (4.39) a (4.54). Potom budou mít

řídící rovnice tvar

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\eta^s V_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{ij}^p}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \\ T_{ij}^p + \lambda T_{ij}^p &= 2\eta^p V_{ij},\end{aligned}\tag{4.56}$$

kde η^s je viskozita čistě viskózní kapaliny a η^p je viskozita elastické části kapaliny. Pro 2D proudění dávají rovnice (4.56) šest rovnic pro šest neznámých - $v_1, v_2, p, T_{11}^p, T_{22}^p, T_{12}^p$.

Nyní následuje formulace slabého řešení (Galerkinova metoda). Výchozí integrální identity mají pro stacionární pomalé proudění tvar

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta^s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial T_{ij}^p}{\partial x_j} \right] \delta v_i dx &= 0, \\ \int_{\Omega_e} \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= 0, \\ \int_{\Omega_e} \left[T_{ij}^p + \lambda T_{ij}^p - \eta^p \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \eta^p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \delta T_{ij}^p dx &= 0.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Na členy v hranaté závorce v první rovnici (4.57) aplikujeme Greenovu větu a zohledníme okrajové podmínky (stejně jako u Newtonovy kapaliny). Slabé řešení má potom tvar

$$\begin{aligned}\eta^s \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} p dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} T_{ij}^p dx &= \int_{\partial \Omega} \underbrace{\tau_{ij} n_j}_{\hat{t}_i} \delta v_i dx, \\ \int_{\Omega} \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= 0, \\ \int_{\Omega} \left[T_{ij}^p + \lambda T_{ij}^p - \eta^p \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \eta^p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \delta T_{ij}^p dx &= 0.\end{aligned}\tag{4.58}$$

4.5.1 Numerická realizace problému

Nyní provedeme numerickou realizaci problému. Budeme řešit stacionární úlohu proudění nenewtonské viskoelastické kapaliny a postup bude podobný jako v [20].

Zadanou úlohu, jejíž slabé řešení je popsáno rovnicemi (4.58), budeme řešit jako rovinnou úlohu proudění. Provedeme diskretizaci problému konečnými prvky. Tlak p a složky napětí T_{ij} , kde $i, j = 1, 2$, budeme aproximovat lineárním polynomem a složky rychlosti v_i , kde $i = 1, 2$ kubickým polynomem. Pro aproximaci hledaných funkcí v libovolném konečném prvku obecně platí

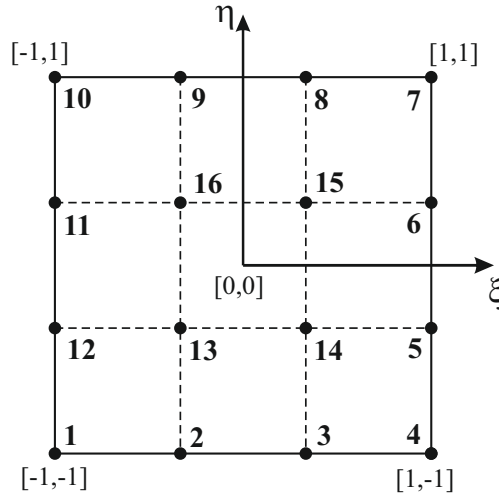
$$v_i = \mathbf{H}^T \mathbf{v}_i,\tag{4.59}$$

$$p = \mathbf{N}^T \mathbf{p},\tag{4.60}$$

$$T_{ij} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{T}_{ij}.\tag{4.61}$$

Pro naši volbu platí, že $\mathbf{N} = \Phi$ je sloupcová matice lineárních interpolačních funkcí 2D prvku [20]. Matice \mathbf{H} je v tomto případě sloupcovou maticí kubických interpolačních funkcí 2D prvku (4.62). Splnění Babuškovy-Brezzioho podmínky vede na požadavek, že složky vektoru rychlosti musí být aproximovány kubickým polynomem.

$$\mathbf{H}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} +\frac{1}{16}\frac{1}{16}(\xi-1)(9\xi^2-1)(\eta-1)(9\eta^2-1) \\ -\frac{9}{16}\frac{1}{16}(3\xi-1)(\xi^2-1)(\eta-1)(9\eta^2-1) \\ +\frac{9}{16}\frac{1}{16}(3\xi+1)(\xi^2-1)(\eta-1)(9\eta^2-1) \\ -\frac{1}{16}\frac{1}{16}(\xi+1)(9\xi^2-1)(\eta-1)(9\eta^2-1) \\ +\frac{1}{16}\frac{9}{16}(\xi+1)(9\xi^2-1)(3\eta-1)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{16}\frac{9}{16}(\xi+1)(9\xi^2-1)(3\eta+1)(\eta^2-1) \\ +\frac{1}{16}\frac{1}{16}(\xi+1)(9\xi^2-1)(\eta+1)(9\eta^2-1) \\ -\frac{9}{16}\frac{1}{16}(3\xi+1)(\xi^2-1)(\eta+1)(9\eta^2-1) \\ +\frac{9}{16}\frac{1}{16}(3\xi-1)(\xi^2-1)(\eta+1)(9\eta^2-1) \\ -\frac{1}{16}\frac{1}{16}(\xi-1)(9\xi^2-1)(\eta+1)(9\eta^2-1) \\ +\frac{1}{16}\frac{9}{16}(\xi-1)(9\xi^2-1)(3\eta+1)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{16}\frac{9}{16}(\xi-1)(9\xi^2-1)(3\eta-1)(\eta^2-1) \\ +\frac{9}{16}\frac{9}{16}(3\xi-1)(\xi^2-1)(3\eta-1)(\eta^2-1) \\ -\frac{9}{16}\frac{9}{16}(3\xi+1)(\xi^2-1)(3\eta-1)(\eta^2-1) \\ +\frac{9}{16}\frac{9}{16}(3\xi+1)(\xi^2-1)(3\eta+1)(\eta^2-1) \\ -\frac{9}{16}\frac{9}{16}(3\xi-1)(\xi^2-1)(3\eta+1)(\eta^2-1) \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$



Obr. 4.10: Zobrazení konečného prvku v souřadnicovém systému $\sum_{\xi\eta}$

Rovnice (4.58) rozepíšeme pro $i, j = 1, 2$ a přeznačíme. Navierova-Stokesova

rovnice a rovnice kontinuity mají potom tvar

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \eta^s (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dx \right]}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_1 + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dx \right]}_{\mathbf{B}_1} \mathbf{p} + \\
& + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_x \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{C}_{11}} \mathbf{T}_{11}^p + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_y \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{C}_{12}} \mathbf{T}_{12}^p = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{H}_s \hat{t}_1 dx}_{\mathbf{F}_1}, \\
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \eta^s (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dx \right]}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_2 + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dx \right]}_{\mathbf{B}_2} \mathbf{p} + \\
& + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_x \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{C}_{21}} \mathbf{T}_{21}^p + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{H}_y \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{C}_{22}} \mathbf{T}_{22}^p = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{H}_s \hat{t}_2 dx}_{\mathbf{F}_2}, \\
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_x^T dx \right]}_{\mathbf{K}_1} \mathbf{v}_1 + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_y^T dx \right]}_{\mathbf{K}_2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

U konstitutivního vztahu je nutno nejdříve diskretizovat konvektivní derivaci (4.32). Zohledněním předchozích vztahů dostaneme

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{11} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - 2\mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_1 \Phi^T) \mathbf{T}_{11} - 2\mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_1 \Phi^T \mathbf{T}_{21}, \\
\bar{T}_{22} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - 2\mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_2 \Phi^T) \mathbf{T}_{22} - 2\mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_2 \Phi^T \mathbf{T}_{12}, \\
\bar{T}_{12} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_1 \Phi^T - \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_2 \Phi^T) \mathbf{T}_{12} - \\
& \quad - \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_2 \Phi^T \mathbf{T}_{11} - \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_1 \Phi^T \mathbf{T}_{22}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Diskretizovaná konstitutivní rovnice má potom tvar

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \Phi \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{D}} \mathbf{T}_{11} + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \lambda \Phi (\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - 2\mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_1 \Phi^T) \right]}_{\mathbf{E}_{11}} \mathbf{T}_{11} + \\
& + \underbrace{\left[\int_{\Omega} -2\lambda \Phi \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_1 \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{E}_{21}} \mathbf{T}_{21} + \underbrace{\left[-2 \int_{\Omega} \eta^p \Phi \mathbf{H}_x^T dx \right]}_{2\mathbf{L}_1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \\
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \Phi \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{D}} \mathbf{T}_{22} + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \lambda \Phi (\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - 2\mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_2 \Phi^T) \right]}_{\mathbf{E}_{22}} \mathbf{T}_{22} + \\
& + \underbrace{\left[\int_{\Omega} -2\lambda \Phi \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_2 \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{E}_{12}} \mathbf{T}_{12} + \underbrace{\left[-2 \int_{\Omega} \eta^p \Phi \mathbf{H}_y^T dx \right]}_{2\mathbf{L}_2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left[\int_{\Omega} \Phi \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{D}} \mathbf{T}_{12} + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \lambda \Phi \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_2 \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{G}_{11}} \mathbf{T}_{11} + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \lambda \Phi \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_1 \Phi^T dx \right]}_{\mathbf{G}_{22}} \mathbf{T}_{22} + \\
& + \underbrace{\left[\int_{\Omega} \lambda \Phi \left(\mathbf{H}^T \mathbf{v}_1 \Phi_x^T + \mathbf{H}^T \mathbf{v}_2 \Phi_y^T - \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}_1 \Phi^T - \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}_2 \Phi^T \right) dx \right]}_{\mathbf{G}_{12}} \mathbf{T}_{12} + \\
& + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \eta^p \Phi \mathbf{H}_y^T dx \right]}_{\mathbf{L}_2} \mathbf{v}_1 + \underbrace{\left[- \int_{\Omega} \eta^p \Phi \mathbf{H}_x^T dx \right]}_{\mathbf{L}_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Rovnice (4.63) a (4.65) zapíšeme v blokovém tvaru

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}(\mathbf{v}) & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22}(\mathbf{v}) & \mathbf{E}_{12}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{G}_{11}(\mathbf{v}) & \mathbf{G}_{22}(\mathbf{v}) & \mathbf{G}_{12}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 2\mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{L}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.66)
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}_U \mathbf{U} + \mathbf{R} \mathbf{T} = \mathbf{F}, \\
& \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{T} + \mathbf{E} \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_T(\mathbf{v})} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.67)
\end{aligned}$$

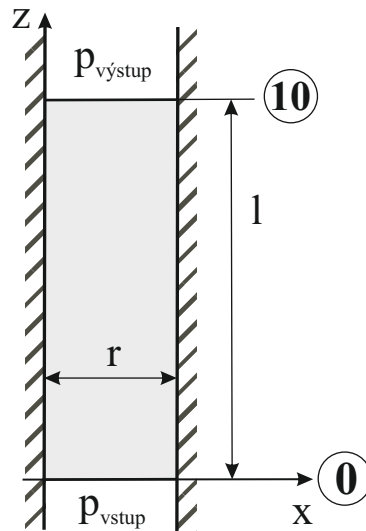
Řešíme tedy silně provázanou soustavu nelineárních algebraických rovnic (4.67), kterou spojíme a vyjádříme v symbolickém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{21} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} + \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{L}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} + \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{D} + \mathbf{G}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix} + = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

a řešíme klasickým postupem, viz. (3.43) až (3.45), (3.50). V následující kapitole uvedeme konkrétní příklad pro výpočet stacionárního proudění viskoelastické kapaliny.

4.5.2 Výsledky

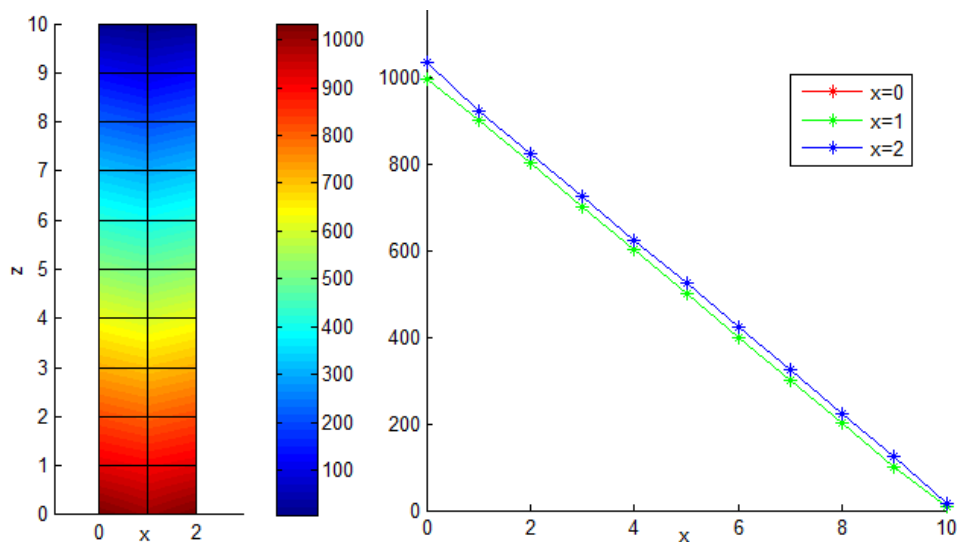
V tomto odstavci provedeme numerické řešení výše popsané úlohy. Postup je shodný s uvedeným v úvodu odstavce 3.1.2. Konkrétní výpočet ukážeme na přímém roviném kanálu znázorněném na obrázku 4.11 a budeme uvažovat bezrozměrné veličiny.



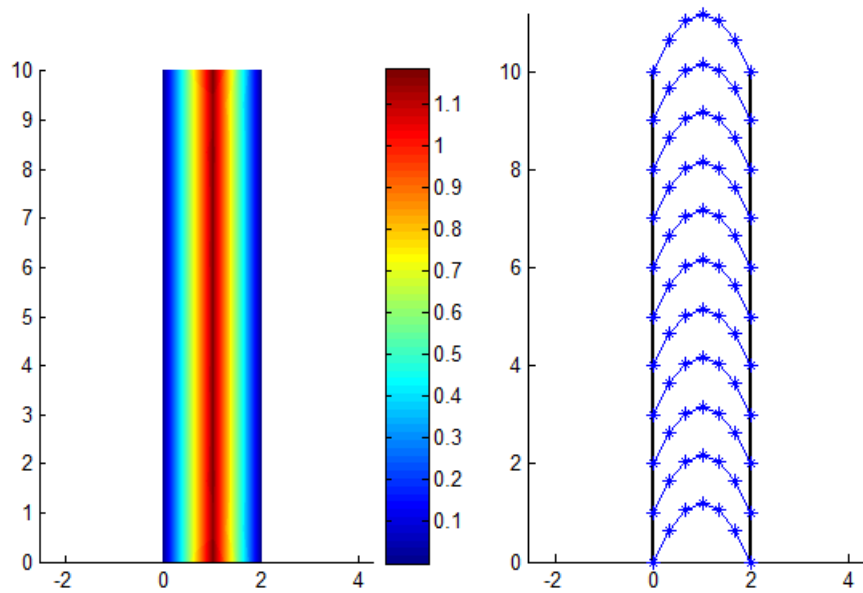
Obr. 4.11: přímý kanál v rovině xz

Zvolené vstupní parametry této úlohy a rozměry jsou následující:

- $p_{vstup} = 1000$ [-] tlak na vstupu kanálu,
 $p_{vystup} = 0$ [-] tlak na výstupu kanálu,
 $Re^s = 0,02$ [-] Reynoldsovo číslo pro čistě viskózní složku kapaliny
 (za η^s dosadíme $\frac{1}{Re^s}$),
 $Re^p = \frac{1}{7}$ [-] Reynoldsovo číslo pro elastickou složku kapaliny
 (za η^p dosadíme $\frac{1}{Re^p}$),
 $\lambda = 10^{-7}$ [-] relaxační čas,
 $l = 10$ [-] délka kanálu,
 $r = 2$ [-] šířka kanálu,
 $v_0 = 0$ [-] rychlost kapaliny na stěně kanálu.



Obr. 4.12: Rozložení tlaku v přímém kanálu v rovině xz



Obr. 4.13: Rozložení tlaku v přímém kanálu v rovině xz

Tabulka 4.7: Hodnoty tlaku v přímém kanálu

z/x	0	1	2
0	1033,4	995,6	1033,4
1	922,5	901,5	922,5
2	823,5	800,1	823,5
3	723,1	700,3	723,1
4	623,1	600,1	623,1
5	523,0	500,0	523,0
6	423,0	399,9	423,0
7	322,9	299,8	322,9
8	222,8	200,1	222,8
9	122,9	99,4	122,9
10	16,2	7,8	16,2

Tabulka 4.8: Hodnoty rychlosti v přímém kanálu

z/x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
0	0,0	0,63	1,05	1,18	1,05	0,63	0,0
1	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
2	0,0	0,65	1,04	1,16	1,04	0,65	0,0
3	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
4	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
5	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
6	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
7	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
8	0,0	0,65	1,04	1,16	1,04	0,65	0,0
9	0,0	0,65	1,03	1,16	1,03	0,65	0,0
10	0,0	0,63	1,05	1,18	1,05	0,63	0,0

Z obr. 4.12 vidíme, že stejně jako u předchozích příkladů, klesá tlak skoro lineárně od vstupu k výstupu. Na rozložení tlaku má tedy vliv pouze souřadnice z . Z tohoto obrázku a tabulky 4.7 je také vidět, že se mírně liší hodnoty tlaku ve středu a na okrajích kanálu po celé jeho délce. To je nejspíš způsobenou samotnou strukturou kapaliny. Rychlostní profil v kapalině je parabolický a symetrický, viz obr. 4.13 a tabulka 4.8. Fyzikálně nepřesně zadané Neumannovy okrajové podmínky způsobují, že se hodnoty tlaku na vstupu a výstupu kanálu liší od zadaných a také, že paraboly rychlosti na koncích kanálu se mírně liší od parabol popisujících rozložení rychlostí ve středu kanálu.

5 Závěr

Diplomová práce je věnována matematickému modelování newtonských a neneutronských kapalin. K numerické realizaci je použita metoda konečných prvků. V úvodu je zmíněno něco málo z počátků historie metody konečných prvků a uvedeno několik osobností, které se této problematice věnovaly. Je zde také uvedeno několik bodů z historie výpočetních a CAD systémů, což přímo souvisí s metodou konečných prvků.

V další kapitole je uvedeno základní rozdělení kapalin, tedy na newtonské a neneutronské. Newtonovu kapalinu lze popsat lineárním konstitutivním vztahem a její dynamická viskozita je konstantní. Většina reálných kapalin se ale chová jako kapaliny neneutronské. Dynamická viskozita těchto kapalin je obecně funkcí tenzoru rychlosti deformace. Z pohledu modelování se tyto kapaliny dále dělí na čistě viskózní a viskoelastické kapaliny. Čistě viskózní mohou být například rozděleny na časově závislé a nezávislé nebo na řídnuocí a houstnoucí. U viskoelastických kapalin je klíčovou vlastností jejich paměťový efekt. Viskoelastická deformace je kombinací přetvoření vlivem viskózního toku a elastické deformace částic kapaliny. Tato deformace je dokonale vratná, ale není okamžitá.

Třetí kapitola se zabývá modelováním proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Úloha je popsána rovnicí kontinuity, Navierovou-Stokesovou rovnicí a okrajovými a počátečními podmínkami. Je uvažováno stacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s konstantní dynamickou viskozitou a s konvektivním členem. Tato úloha byla řešena v kartézských souřadnicích pro trojrozměrný přímý kanál ve tvaru rotačně symetrického válce a kanál kruhového průřezu se střednicí ve tvaru půlkružnice a v kovariantních souřadnicích pro přímý kanál. Diskretizace úloh byla provedena konečnými prvky. Byly aplikovány izoparametrické prvky včetně příslušných interpolačních funkcí. Aproximace tlaku byla provedena lineárním a aproximace rychlosti kvadratickým polynomem. Výpočet byl proveden v bezrozměrných veličinách a výsledkem bylo rozložení rychlostí a tlaku v uvažovaných kanálech. Porovnáním výsledků v kartézských a křivočarých souřadnicích bylo zjištěno, že tlak prakticky klesá lineárně od vstupu kanálu k jeho výstupu a rozložení rychlostí má parabolický tvar. Hodnoty tlaku na vstupu a výstupu kanálu vykazují malé odchylky oproti zadaným hodnotám. To je způsobeno fyzikálně nepřesnými Neumannovými okrajovými podmínkami. Na příkladu půlkruhového kanálu je vidět vliv geometrie na rychlostní profil kapaliny. Porovnáním výsledků z kapitoly 3.1.2 a 3.2.4 vidíme, že se hodnoty mírně liší.

Ve čtvrté kapitole je řešeno modelování stacionárního izotermického laminárního proudění nestlačitelné neneutronské kapaliny, konkrétně čistě viskózní časově nezávislé kapaliny a viskoelastické kapaliny se slabou pamětí. Základní rovnice, tedy Navierova-Stokesova rovnice a rovnice kontinuity, jsou stejné jako pro modelování Newtonovy kapaliny. Pro určení dynamické viskozity v konstitutivním vztahu pro čistě viskózní kapaliny je využito mocninového zákona. Tato úloha byla řešena pro

dvě různé hodnoty indexu toku v kartézských souřadnicích pro trojrozměrný přímý kanál ve tvaru rotačně symetrického válce a kanál kruhového průřezu se střednicí ve tvaru půlkružnice. Postup byl obdobný jako u Newtonovy kapaliny. Opět byl výpočet proveden v bezrozměrných veličinách a výsledkem bylo rozložení rychlostí a tlaku v uvažovaných kanálech. Porovnáním hodnot pro různé hodnoty indexu toku s výsledky z kapitoly 3. bylo zjištěno, že hodnoty tlaku jsou téměř shodné a lineárně klesají od vstupu k výstupu. Porovnáním rychlostních profilů bylo zjištěno, že odpovídají tokovým charakteristikám, tj. pseudoplastická kapalina má rychlostní profil plošší než Newtonova a rychlostní profil dilatantní kapaliny je z těchto tří nejvíce zakřivený. Pro konstitutivní vztah u viskoelastických kapalin byl použit Oldroydův B model kapaliny. Tato úloha proudění byla řešena na přímém dvourozměrném kanálu s pevnými stěnami. Aby byla splněna Babuškova-Breziho podmínka, bylo nutno pro numerickou realizaci aproximovat rychlosti kubickým polynomem. Jinak je postup obdobný a výsledkem je rozložení tlaku a rychlostí v uvažovaném kanálu. Rychlostní profil kapaliny má parabolický tvar a tlak klesá lineárně od vstupu k výstupu. Nepřesné hodnoty na vstupu a výstupu jsou způsobeny fyzikálně nepřesnou Neumannovou okrajovou podmínkou.

Závěrem uvedme, že jak v oblasti modelování čistě viskózních, tak i viskoelastických kapalin, by bylo možno použít jiné parametry zadávaných hodnot, jiné modely nebo řešit proudění ve složitějších strukturách. Základní princip řešení takovýchto úloh by byl obdobný jako u úloh uvedených v diplomové práci.

Seznam literatury

- [1] *A Brief History of Finite Element Analysis - Part I* [online]. Poslední změna 8.12.2014 [cit. 4.5.2017]. Dostupné z: <http://blog.multimechanics.com/brief-history-finite-element-analysis>.
- [2] BARKANOV, Evgeny. *Introduction to the finite element method* [online]. Riga, 2001. Institute of Materials and Structures, Faculty of Civil Engineering, Riga Technical University. [cit. 3.5.2017]. Dostupné z: <http://icas.bf.rtu.lv/doc/Book.pdf>.
- [3] BLAHETA, Radim. *Matematické modelování a metoda konečných prvků* [online]. Ostrava, 2012. [cit. 5.5.2017]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody_2.pdf.
- [4] BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav a SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011. 878 s. Gerstner; sv. 6. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [5] CRAHMALIUC, Radu. *75 Years of the Finite Element Method (FEM)* [online]. Poslední změna 26.11.2015 [cit. 4.5.2017]. Dostupné z: www.simscale.com.
- [6] *GM's Road to Virtual Product Development* [online]. [cit. 3.5.2017]. Dostupné z: <https://history.gmheritagecenter.com>.
- [7] HUEBNER, Kenneth, DEWHIRST, Donald, SMITH, Douglas, Byrom, Ted. *The finite element method for engineers*. New York: John Wiley & Sons, ©2001. 720 s. ISBN 0-471-37078-9.
- [8] CHHABRA, R. P. a RICHARDSON, J. F. *Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications*. Boston: Butterworth-Heinemann, 2008. xiv, 518 s. ISBN 978-0-7506-8532-0.
- [9] IRGENS, Fridtjov *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. 190 s. ISBN 978-3-319-01052-6.
- [10] JANALÍK, J. *Viskozita tekutin a její měření* [online]. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2010. [cit. 16. 10. 2016]. Dostupné z: <http://docplayer.cz/14903740-Viskozita-tekutin-a-jeji-mereni.html>.
- [11] KIM, Nam Ho a SANKAR, Bhavani V. *Introduction to finite element analysis and design*. New York: John Wiley & Sons, ©2009. ix, 419 s. ISBN 978-0-470-12539-7.
- [12] KLEMENTOVÁ, Daniela. *Modelování kapalin*. Plzeň, 2003. Diplomová práce. Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Jiří Křen.

- [13] KŘEN, Jiří a HORÁK, Miroslav. *Multimediální a experimentální podpora biomechaniky - FRVŠ 2300/2003* [online]. 2003. [cit. 4.3.2014]. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/granty/biofrvs/index.html>.
- [14] KŘEN, Jiří a ROSENBERG, Josef. *Mechanika kontinua*. 2., upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. 324 s. ISBN 80-7082-908-7.
- [15] KŘEN, Jiří a RYBNÍČEK, Petr. *Interakce nestlačitelné kapaliny s pružným okolím*. Plzeň, 1987. Zpráva. Vysoká škola strojní a elektrotechnická, Fakulta strojní.
- [16] LAI, W. Michael, RUBIN, David, KREMPL, Erhard. *Introduction to Continuum Mechanics*. 3rd ed. Oxford; New York: Pergamon Press, 1993. xiv, 556 s. ISBN 0080417000.
- [17] REDDY, Junuthula Narasimha, GARTLING, David K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. Boca Raton: CRC Press, 2010. 524 s. ISBN 9781420085983.
- [18] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 4. vyd. Praha: SNTL, 1981. 1137 s.
- [19] *The Origins of the Finite Element Method* [online]. Poslední změna 7.7.2016 [cit. 5.5.2017]. Dostupné z: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>.
- [20] VITÁKOVÁ, Klára. *Modelování proudění kapalin*. Plzeň, 2014. Bakalářská práce (Bc.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Jiří Křen.
- [21] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, Robert L. a NITHIARASU, Perumal. *The finite element method for fluid dynamics*. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann/Elsevier, 2014. xxxvi, 544 s. ISBN 978-1-85617-635-4.