

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

Numerické řešení úlohy kontaktu elastických těles

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Holeček

Plzeň 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval sám, za pomoci vedoucího práce a uvedené citované literatury

.....
Jan Holeček

V Plzni dne 15. 6. 2017

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi DSc. za jeho rady a čas vynaložený při řešení bakalářské práce. Dále bych rád poděkoval Ing. Vladimíru Lukešovi za pomoc při řešení softwarových náležitostí.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá úlohou kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou ve 2D. Překážka je uvažována linearizovaná, což umožňuje některá zjednodušení při řešení. Cílem této práce je vytvořit model pro úlohou kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou nejprve bez tření, následně se třením v místě kontaktu. Tato práce se dále zabývá možnými způsoby numerického řešení úlohy kontaktu s využitím známých poznatků o nelineárních komplementárních problémech, kam se řadí i úloha kontaktu.

Pro obdržení modelu vhodného k numerické simulaci je použita metoda konečných prvků. Numerický model získaný s využitím systémů Virtual Performance Solution a SfePy je implementován v systému MATLAB a vyzkoušen na modelových příkladech.

Klíčová slova: Úloha kontaktu, nelineární komplementární problém, Newtonova metoda s tlumením, suché tření, metoda konečných prvků

Abstract

The bachelor thesis deal with contact problem of elastic body with rigid obstacle in 2D. Obstacle is being considered linearised, this allows solving this problem with using some simplifications. The aim of this work is to create model of contact problem of elastic body with rigid obstacle first without friction, then with dry friction on the contact area. This work also deal with possible ways to numerical solving of contact problem, using known knowledge of nonlinear complementarity problem, where contact problem belongs.

Finite element method is used for obtaining a model suitable for numerical simulation. Numerical model obtained from systems Virtual Particle Solution and SfePy is implemented in system MATLAB and tried for model examples.

Key words: Contact problem, nonlinear complementarity problem, damped Newton method, dry friction, finite element method

Některé použité značení

D_{ijkl} - elastický tenzor čtvrtého řádu,

$\epsilon_{ij}(\mathbf{u})$ - tenzor malých deformací,

\mathbf{u} - vektor posuvů,

Ω - oblast řešení,

Γ_c - kontaktní hranice,

$Z(\mathbf{u})$ - oblast, kde dochází ke kontaktu,

Γ_o - tuhá překážka,

T_h - triangulace,

\mathbf{g} - napětí na kontaktní hranici,

\mathbf{K} - matice tuhosti,

\mathbf{f} - vektor pravých stran,

\mathbf{M} - matice "hmotnosti" na kontaktní hranici,

\mathbf{R} - matice rotace,

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ - restriční matice,

\mathbf{J} - Jacobiova matice.

Obsah

1 Úvod	6
1.1 Motivace	6
1.2 Cíl	6
2 Příprava	7
2.1 Určení vzdálenosti mezi tělesem a překážkou	7
2.1.1 Vzdálenost měřená od překážky	7
2.1.2 Vzdálenost měřená od tělesa	8
2.1.3 Kubický spline	8
2.2 Nelineární komplementární problém	10
2.2.1 Algoritmus využívající funkci <i>minima</i>	11
2.2.2 Algoritmus využívající <i>Fischerovu-Burmeisterovu</i> funkci	12
3 Úloha elastostatiky s jednostranným kontaktem bez tření	15
3.1 Variační formulace kontaktní úlohy bez tření	15
3.2 Aproximace pomocí metody konečných prvků	17
4 Numerická simulace úlohy kontaktu bez tření	21
4.1 Zhodnocení výsledků, pozorování	29
5 Úloha elastostatiky s jednostranným kontaktem se třením	30
5.1 Rozšíření modelu o tření	31
6 Numerická simulace úlohy kontaktu se třením	36
6.1 Zhodnocení výsledků, pozorování	42
7 Závěr	43

1 Úvod

1.1 Motivace

Úloha kontaktu elastických těles je důležitá součást mechaniky, uplatňuje se například při modelování crash-testů, záběru zubů ozubených kol, aj.

Tato práce se zaměřuje na numerickou simulaci úlohy kontaktu elastického tělesa a tuhé překážky ve 2D. V této práci bude vytvořen matematický model úlohy kontaktu bez uvažování tření. Tento model bude následně diskretizován pomocí metody konečných prvků a numericky vyřešen v systému MATLAB s využitím systému SfePy pro sestavení některých potřebných matic. Model pro úlohu bez tření bude následně rozšířen o suché tření na kontaktní hranici. Budou porovnány a vyhodnoceny výsledky pro různé použité numerické metody a pro různé přístupy k určení mezery mezi tělesem a překážkou.

Problémem kontaktu a jeho řešením se zabývají například práce [5], [6], [7] pro úlohu bez tření, či [2], [4] pro úlohu se třením. Ve všech těchto pracích je uvažována i možnost vzniku plastických deformací, model vytvořený v této bakalářské práci bude tedy méně robustní, nicméně jednodušší.

Úloha kontaktu spadá do kategorie tzv. nelineárních komplementárních problémů, více v [3], možným způsobem jejich řešení se zabývá například [1].

1.2 Cíl

Cílem této bakalářské práce je vytvořit 2D model úlohy kontaktu elastické překážky s linearizovanou tuhou překážkou a to jak bez tření, tak se třením v místě kontaktu, dále provést numerickou simulaci vytvořeného modelu a zhodnotit dosažené výsledky pro různé přístupy k řešení dílčích problémů.

2 Příprava

V této části bude nastíněn postup pro zjištění vzdálenosti mezi tělesem a překážkou. Dále bude definován tzv. nelineární komplementární problém, kam spadá i úloha kontaktu, a budou uvedeny dva způsoby řešení soustav nehladkých rovnic použité v této práci.

2.1 Určení vzdálenosti mezi tělesem a překážkou

Při určování vzdálenosti mezi tělesem a překážkou vyjdeme z následujících předpokladů. Při řešení vycházíme z úlohy elastostatiky, předpokládáme tedy malé deformace a malé posuvy. Dále předpokládáme, že překážka je linearizovaná a parametricky zadaná.

Předpoklady nás opravňují k následujícím zjednodušením. Vzdálenost mezi tělesem a překážkou bude vyhodnocena pouze jednou, a to na nezdeformovaném tělese. Vzdálenost mezi tělesem a překážkou může být pro daný bod z Γ_c měřena dvěma způsoby, a to jako vzdálenost daného bodu a překážky ve směru normály určené

- a) hranicí překážky Γ_o ,
- b) částí hranice tělesa Γ_c .

Vzhledem k předpokladům (linearizovaná překážka) by měly oba tyto způsoby poskytovat kvalitativně stejné výsledky, což bude ověřeno v části věnované porovnání výsledků numerické simulace.

2.1.1 Vzdálenost měřená od překážky

Mějme překážku Γ_o zadanou parametricky: $\Gamma_o(x, y(x))$ a daný bod $B(b_1, b_2)$ na hranici Γ_c . Tečna na Γ_o v bodě x má tvar $\gamma = [1, y'(x)]^T$. Normála v bodě x má tedy tvar $\nu = [y'(x), -1]^T$. Pro určení směru normály a vzdálenosti mezi Γ_c v bodě B a Γ_o je třeba vyřešit soustavu rovnic

$$B + k \cdot \nu = \Gamma_o(x, y(x)), \quad (1)$$

zapsáno v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} y'(x) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

pro neznámé k a x . Vyřešením této soustavy rovnic získáme normálu ν . Pokud vyjde $k < 0$, je ν možné použít jako vnější normálu na Γ_c v bodě B ,

pokud vyjde $k > 0$, má vnější normála na Γ_c v bodě B tvar $-\nu$. Vzdálenost s získáme ze vztahu

$$s(x) = \frac{|k|}{|\nu|}. \quad (3)$$

2.1.2 Vzdálenost měřená od tělesa

Jelikož pracujeme s triangulací T_h na aproximované hranici Γ_{c_h} , nemáme k dispozici informaci o křivce popisující hranici Γ_c a tudíž ani o normále k této hranici. Je tedy třeba proložit body triangulace T_h na hranici Γ_{c_h} křivkou a určit normály v daných bodech. Blíže v části 2.1.3.

Máme tedy stejně jako v předchozí části daný bod $B(b_1, b_2)$, parametricky zadanou překážku $\Gamma_o(x, y(x))$ a máme danou normálu ke Γ_c v bodě B, $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$. Řešíme tedy podobnou soustavu rovnic, jako v předchozí části:

$$B + k \cdot \nu = \Gamma_o(x, y(x)), \quad (4)$$

zapsáno v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix} \quad (5)$$

pro neznámé k a x . Pokud vyjde $k < 0$, je nutné jako vnější normálu na Γ_c v bodě B uvažovat $-\nu$. Vzdálenost s získáme ze vztahu

$$s(x) = \frac{|k|}{|\nu|}. \quad (6)$$

Jelikož v odvozeních v částech 3 a 5 pracujeme s normálou v normovaném tvaru, je třeba výslednou vnější normálu získanou pomocí jednoho z uvedených postupů do tohoto tvaru upravit podle vztahu

$$\nu_{\text{norm}} = \frac{\nu}{|\nu|}. \quad (7)$$

2.1.3 Kubický spline

V části 2.1.2 se ukázalo nezbytné určit vektor normály na hranici Γ_c . Aproximací této hranice metodou konečných prvků jsme ztratili informaci o jejím přesném tvaru. Pro určení vektoru normály v bodech triangulace T_h na aproximované hranici Γ_{c_h} proložíme tyto body křivkou, jejíž vektory normál v

bodech triangulace T_h budou aproximovat vektory normál na hranici Γ_c v bodech triangulace. K tomu využijeme kubický spline.

Máme $n + 1$ bodů $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$. Na každém z n intervalů interpolujeme hranici (křivku) Γ_{c_h} kubickým polynomem

$$P_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3. \quad (8)$$

Pro každý interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ musí platit

$$P_i(x_i) = y_i, P_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (9)$$

Pro konstrukci kubického spline je třeba kromě spojitosti, viz (9), splnit i spojitost v první a druhé derivaci, tedy pro

$$P'_i(x) = b_i + 2c_i x + 3d_i x^2, \quad (10)$$

$$P''_i(x) = 2c_i + 6d_i x, \quad (11)$$

požadujeme

$$P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i), \quad (12)$$

$$P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i) \quad (13)$$

pro $i = 2, 3, \dots, n, n + 1$, tj. pro vnitřní body.

Tímto postupem získáme pro $4n$ neznámých koeficientů a_i, b_i, c_i, d_i pouze $4n - 2$ rovnic. Pro získání zbývajících dvou rovnic je třeba zvolit dvě podmínky, které mají být splněny. Jedna z možností je například tzv. přirozený spline:

$$P''_1(x_1) = 0, P''_n(x_{n+1}) = 0. \quad (14)$$

Výše uvedeným postupem získáme $4n$ lineárních algebraických rovnic pro $4n$ neznámých koeficientů. Vyřešením této soustavy získáme předpis pro kubické polynomy aproximující hranici Γ_c . Normálový vektor v bodě triangulace na hranici Γ_c může být aproximován normálovým vektorem na křivku danou kubickým spline.

2.2 Nelineární komplementární problém

Nelineární komplementární problém (nonlinear complementarity problem, dále jen NCP) je úloha, jejíž cílem je pro dvě dané funkce \mathbf{A} , \mathbf{B} , které jsou spojitě diferencovatelné, $\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ najít takové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro které platí:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (15)$$

Definujme množinu indexů γ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\gamma = \{i : A_i(\mathbf{x}) = B_i(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (16)$$

Pokud pro řešení \mathbf{x} platí $\gamma = \emptyset$, hovoříme o nedegenerovaném řešení.

Velice často používaný způsob, jak přeformulovat NCP jako soustavu nelineárních rovnic je zavedení zvolené NCP funkce $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, pro kterou platí:

$$\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0, \quad (17)$$

kde a, b jsou spojitě diferencovatelné funkce, $a, b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Potom jsou podmínky (15) ekvivalentní se soustavou nelineárních rovnic

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(A_1(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x})) \\ \phi(A_2(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x})) \\ \dots \\ \phi(A_n(\mathbf{x}), B_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Dvě nejčastěji používané NCP funkce (dle [3]) jsou funkce minima

$$\phi(a, b) = \phi_{\min}(a, b) \equiv \min(a, b), \quad (19)$$

a Fischerova-Burmeisterova funkce

$$\phi(a, b) = \phi_{FB}(a, b) \equiv \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b). \quad (20)$$

Obě tyto funkce jsou diferencovatelné na celém svém definičním oboru s výjimkou počátku, kde mají nehladký bod (pro ilustraci viz Obr. 1). Z tohoto důvodu byly pro řešení soustavy rovnic (18) použity metody Newtonova typu pro nehladké soustavy rovnic, viz dále.

Před uvedením možných algoritmů řešení definujme pojem B-subdiferenciál, který bude dále používán. Nechť $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ je spojitá a je diferencovatelná až na konečně mnoho bodů. Označme D_G množinu bodů, kde je \mathbf{G}

diferencovatelná. Poté můžeme B-subdiferenciál funkce \mathbf{G} v bodě \mathbf{x} definovat takto:

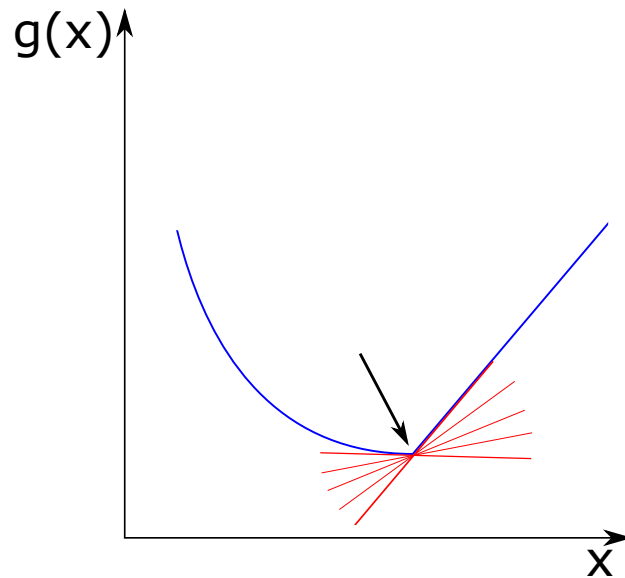
$$\partial_B \mathbf{G}(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{G}'(\mathbf{x}^k), \quad \text{kde } \mathbf{x}^k \in D_G, \quad (21)$$

pro ilustraci viz Obr. 1 pro funkci jedné proměnné.

Též uvedme definici Clarkova subdiferenciálu:

$$\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}) := \text{co } \partial_B \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad (22)$$

kde co značí konvexní obal množiny.



Obr. 1: Příklad grafu funkce jedné reálné proměnné (modrá barva) s nehladkým bodem (označen šipkou) a naznačenou množinou subderivací (červená barva) příslušející subdiferenciálu.

2.2.1 Algoritmus využívající funkci *minima*

Krok 0 Nastav $k=0$, $\alpha=1$, zvol $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \geq 0$.

Krok 1 (zastavovací podmínka) Pokud $\|\phi(\mathbf{x}^k)\| < \epsilon$ zastav.

Krok 2 Vyber $\mathbf{J}^k \in \partial_B \phi(\mathbf{x}^k)$ a vyřeš rovnici

$$\mathbf{J}^k \mathbf{d}^k = -\phi(\mathbf{x}^k) \quad (23)$$

Krok 3 Nastav $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k$.

Krok 4 Pokud $\|\phi(\mathbf{x}^{k+1})\| < \|\phi(\mathbf{x}^k)\|$ nastav $k = k + 1$, $\alpha = 1$ a jdi na Krok 1, jinak nastav $\alpha = \frac{\epsilon}{2}$ a jdi na Krok 3

Tento algoritmus je odvozen od Newtonovy metody pro řešení nelineárních rovnic. Je však modifikována přidáním tzv. parametru tlumení α . Parametr tlumení α slouží ke zmenšení chyb, které vznikají při použití Newtonovy metody pro řešení nelineárních rovnic v okolí nehladkého bodu.

Výběr Jacobiovy matice \mathbf{J} z množiny $\partial_B \phi(\mathbf{x})$ je v této práci realizován následujícím způsobem. i -tý řádek Jacobiovy matice \mathbf{J} (označme J_i) definujeme takto:

a) Pro $A_i(\mathbf{x}) > B_i(\mathbf{x})$: $J_i := \nabla B_i(\mathbf{x})$

b) Pro $A_i(\mathbf{x}) \leq B_i(\mathbf{x})$: $J_i := \nabla A_i(\mathbf{x})$.

Čtenář snadno nahlédne, že Jacobiova matice \mathbf{J} pro uvedený postup splňuje $\mathbf{J} \in \partial_B \phi(\mathbf{x})$.

Výhodou tohoto algoritmu je jeho relativní jednoduchost, nevýhodou je nutnost hledání parametru tlumení α , což může zpomalovat výpočet, pokud se řešení \mathbf{x} nachází blízko nehladkého bodu.

2.2.2 Algoritmus využívající *Fischerovu-Burmeisterovu* funkci

Tento algoritmus byl poprvé představen v [1].

Zavedme funkci ψ , pro kterou platí:

$$\psi(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \|\phi(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi(A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x}))^2. \quad (24)$$

Je zřejmé, že $\psi(\mathbf{x}) = 0$ právě tehdy, když \mathbf{x} je řešením (15), tedy řešení (15) je ekvivalentní s hledáním globálního minima $\psi(\mathbf{x})$

Krok 0 Nastav $k=0$, zvol $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, $p > 2$, $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, $\epsilon \geq 0$.

Krok 1 (zastavovací podmínka) Pokud $\|\psi(\mathbf{x}^k)\| < \epsilon$ zastav.

Krok 2 Vyber $\mathbf{J}^k \in \partial_B \phi(\mathbf{x}^k)$ a vyřeš rovnici

$$\mathbf{J}^k \mathbf{d}^k = -\phi(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Pokud soustava (25) není řešitelná, nebo pokud není splněná podmínka

$$\nabla \psi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \leq -\rho \|\mathbf{d}^k\|^p, \quad (26)$$

pak nastav $\mathbf{d}^k = -\nabla \psi(\mathbf{x}^k)$

Krok 3 (linesearch) Najdi nejmenší $i^k = 0, 1, \dots$ takové, že

$$\psi(\mathbf{x}^k + 2^{-i^k} \mathbf{d}^k) \leq \psi(\mathbf{x}^k) + \beta 2^{-i^k} \nabla \psi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \quad (27)$$

Krok 4 Nastav $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + 2^{-i^k} \mathbf{d}^k$ a jdi na Krok 1.

Za pozornost stojí fakt, že aplikací standardních pravidel nehladké analýzy dostáváme následující:

$$\partial \psi(\mathbf{x}^k) = \{\nabla \psi(\mathbf{x}^k)\} = \mathbf{V}^T \phi(\mathbf{x}^k) \quad \text{pro } \forall \mathbf{V} \in \partial \phi(\mathbf{x}^k). \quad (28)$$

Můžeme položit $\mathbf{V} = \mathbf{J}^k$ a vezmeme-li v úvahu (25), můžeme psát následující:

$$\nabla \psi(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}^k = (\phi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{J}^k) \mathbf{d}^k = -\|\phi(\mathbf{x}^k)\|^2. \quad (29)$$

Nyní uveďme postup při výpočtu Jacobiovy matice \mathbf{J}^k podle [1].

Krok 1 Nastav γ (viz (16)).

Krok 2 Vyber takové $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $z_i \neq 0$ pro $i \in \gamma$

Krok 3 Pro každé $i \notin \gamma$ má i -tá řádka Jacobiovy matice \mathbf{J}^k tvar

$$J_i = \left(\frac{A_i(\mathbf{x})}{\|A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x})\|} - 1 \right) \nabla A_i(\mathbf{x})^T + \left(\frac{B_i(\mathbf{x})}{\|A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x})\|} - 1 \right) \nabla B_i(\mathbf{x})^T. \quad (30)$$

Krok 4 Pro každé $i \in \gamma$ má i -tá řádka Jacobiovy matice \mathbf{J}^k tvar

$$J_i = \left(\frac{\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|} - 1 \right) \nabla A_i(\mathbf{x})^T + \left(\frac{\nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|} - 1 \right) \nabla B_i(\mathbf{x})^T. \quad (31)$$

Jacobiova matice \mathbf{J} pro uvedený postup splňuje $\mathbf{J} \in \partial_B \phi(\mathbf{x})$, důkaz viz [1].

Konkrétní hodnoty ρ , p , β byly zvoleny (v souladu s [1]) takto:

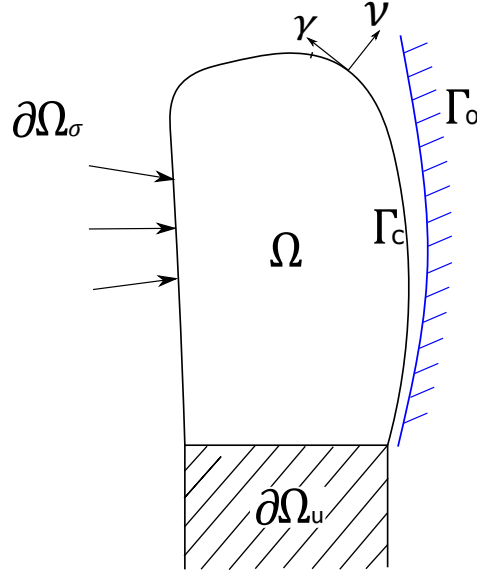
$$\rho = 10^{-8}, \quad p = 2.1, \quad \beta = 10^{-4}. \quad (32)$$

Jediné, co zbývá, je definice vektoru \mathbf{z} . V této práci byl zvolen stejně jako v [1] tak, aby platilo $z_i = 1$ pro $i \in \gamma$ a $z_i = 0$ pro $i \notin \gamma$.

Uvedený postup konverguje k řešení, důkaz viz [1], postup pro případné urychlení konvergence tamtéž.

3 Úloha elastostatiky s jednostranným kontaktem bez tření

Při formulaci vyjdeme z prací [5], [6], [7] vynecháním plasticity.



Obr. 2: Okrajové podmínky kontaktní úlohy.

3.1 Variační formulace kontaktní úlohy bez tření

Uvažujme poddajné těleso (viz Obr. 2) s oblastí Ω a tuhou překážkou Γ_o . Hranice poddajného tělesa je složena ze tří podmnožin

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{u_i} \cup \partial\Omega_{\sigma_i} \cup \Gamma_c, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

kde index i označuje ty části hranice, kde jsou předepsány okrajové podmínky v tečném ($i = 1$), resp. normálovém ($i = 2$) směru. $\partial\Omega_u$ je část hranice tělesa, kde jsou předepsány posuvy (pro zjednodušení nulové), $\partial\Omega_\sigma$ je část hranice tělesa, kde je předepsané napětí, Γ_c je část hranice tělesa, jejíž body mohou po deformaci přijít do kontaktu s překážkou Γ_o .

V každé bodě hranice tělesa Γ_c zavedeme ortonormální systém (γ, ν) , kde γ je tečný vektor k hranici a ν je vektor vnější normály k hranici. Nechť $s(x)$, $x \in \Gamma_c$ je počáteční mezera mezi hranicí Γ_c tělesa v nezdeformovaném stavu

a překážkou Γ_o . Zavedme množinu $Z(u) \subset \Gamma_c$, na které skutečně dochází ke kontaktu:

$$Z(u) = \{x \in \Gamma_c : \nu_i u_i - s = 0\}. \quad (34)$$

Sepišme rovnice statické rovnováhy pro počáteční nezdeformovanou konfiguraci

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})) + f_i = 0 & \text{na } \Omega \\ D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_j = b_i & \text{na } \partial\Omega_\sigma \\ u_j = 0 & \text{na } \partial\Omega_u \\ \nu_i u_i - s \leq 0 & \text{na } \Gamma_c \\ \nu_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_i \leq 0 & \text{na } \Gamma_c \\ \nu_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_i = 0 & \text{na } \Gamma_c \setminus Z(u) \\ \gamma_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_j = 0 & \text{na } \Gamma_c, \end{array} \right. \quad (35)$$

kde D_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$ je elastický tenzor čtvrtého řádu, pro který platí:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} \\ \exists \alpha_0 > 0 : D_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \geq \alpha_0 \epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \quad \text{pro } \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (36)$$

f_i jsou dané objemové síly, b_i jsou dané povrchové síly.

Soustava

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu_i u_i - s \leq 0 & \text{na } \Gamma_c \\ \nu_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_i \leq 0 & \text{na } \Gamma_c \\ \nu_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_i = 0 & \text{na } \Gamma_c \setminus Z(u) \end{array} \right. \quad (37)$$

matematicky popisuje kontakt poddajného tělesa s tuhou překážkou bez průniku, rovnice

$$\gamma_i D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\nu_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_c \quad (38)$$

je podmínka nulového tření.

Variační formulace kontaktního problému pro elastická tělesa v prostoru deformací vychází z úlohy minimalizace kvadratického funkcionálu $J(\mathbf{v})$ na množině přípustných posuvů

$$K_C = \{\mathbf{v} \in V : \nu_i v_i - s \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_c\}, \quad (39)$$

kde

$$V = \{x \in [H^1(\Omega)]^2 : v_i = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_u, i = 1, 2\}. \quad (40)$$

Kvadratický funkcionál má tvar

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}), \quad (41)$$

kde $a(\cdot, \cdot)$ je bilineární forma a $L(\mathbf{v})$ je lineární forma definované následujícím způsobem:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (42)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} b_i v_i \, dS. \quad (43)$$

Slabá formulace podmínek statické rovnováhy pro kontaktní úlohu je nutnou podmínkou minima

$$\mathbf{u} = \arg \min \{J(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in K_C\} \quad (44)$$

a má formu variační nerovnice

$$\mathbf{u} \in K_C \quad : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in K_C. \quad (45)$$

3.2 Aproximace pomocí metody konečných prvků

Pro vyřešení variační nerovnice (45) využijeme aproximaci metodou konečných prvků. Tím problém převedeme na soustavu nehladkých rovnic, kterou vyřešíme pomocí numerických metod popsanych v 2.2. Využijme již zavedené značení v [6]. Oblast Ω aproximujme oblastí Ω_h . Její polygonální hranici $\partial\Omega_h = \partial\Omega_{u_h} \cup \partial\Omega_{\sigma_h} \cup \Gamma_{c_h}$ tvoří vrcholy ležící na hranici $\partial\Omega_h$.

Na triangulaci T_h zavedme systém bázevých funkcí $\bar{\varphi}_i = (\varphi_i^1, \varphi_i^2)$. Necht $\boldsymbol{\nu}(x)$ je vektor normály k hranici Γ_c , $x \in \Gamma_c$. Označme $\boldsymbol{\nu}_h(x)$ aproximaci po částech lineární funkcí

$$\boldsymbol{\nu}_h(x) = \sum_{i \in I_c} \bar{\varphi}_i \bar{\boldsymbol{\nu}}_i, \quad x \in \Gamma_{c_h}, \quad (46)$$

$$\nu(\bar{x}_i) = \nu_h(\bar{x}_i) = \bar{\boldsymbol{\nu}}_i, \quad i \in I_c, \quad (47)$$

kde \bar{x}_i jsou kontaktní uzly triangulace T_h , I_c je množina indexů všech kontaktních uzlů a $\bar{\boldsymbol{\nu}}_i$ jsou normálové vektory k hranici Γ_c v uzlech triangulace. Zavedme aproximaci funkce $s(x)$ funkcí $s_h(x)$, která je dána předpisem

$$s_h(x) = \sum_{i \in I_c} \bar{\varphi}_i s_i, \quad (48)$$

$$s(\bar{x}_i) = s_h(\bar{x}_i) = s_i, \quad i \in I_c. \quad (49)$$

Kinematickou podmínku kontaktu lze oslabit na požadavek jejího splnění pouze v uzlech triangulace

$$\bar{\nu}_i \bar{u}_i - s(\bar{x}_i) \leq 0, \quad \forall i \in I_c. \quad (50)$$

S využitím funkce $s_h(x)$ je možné dodefinovat kontaktní podmínku ve všech bodech hranice Γ_{c_h} takto:

$$\nu_{h_i}(x) u_{h_i}(x) - s_h(x) \leq 0, \quad \forall i \in I_c. \quad (51)$$

S využitím nerovnosti (50) je možné definovat množinu kinematically přípustných posuvů pro aproximovanou úlohu:

$$K_{C_h} = \{v_h \in V_h : \boldsymbol{\nu}_h v_h - s_h \leq 0 \text{ na } \Gamma_{c_h}\}. \quad (52)$$

Aproximovaná variační nerovnost má tvar

$$u_h \in K_{C_h} \quad : \quad a_h(u_h, v_h - u_h) \geq L_h(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_{C_h}, \quad (53)$$

kde

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} D_{ijkl} \epsilon_{kl}(u_h) \epsilon_{ij}(v_h) dx, \quad (54)$$

$$L_h(v_h) = \int_{\Omega_h} f_{h_i} v_{h_i} dx + \int_{\partial\Omega_{\sigma_h}} b_{h_i} v_{h_i} dS, \quad (55)$$

f_h , resp. b_h je aproximace objemových sil f , resp. povrchových sil b .

Dimenze prostoru V_h je \tilde{N} . Indexová množina I_c obsahuje indexy kontaktních uzlů. Označme $\text{card}(I_c) = N_c$. Bez újmy na obecnosti zvolme $I_c = \{1, 2, \dots, N_c\}$. Tímto způsobem vytvoříme redukovaný vektor posuvů $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$, odvozený od uzlových posuvů \bar{u}_i vypuštěním uzlů odpovídajících homogenním Dirichletovým podmínkám. Jeho složky \mathbf{u}_{2i-1} , \mathbf{u}_{2i} , $i \in I_c$ odpovídají po řadě x-ovým a y-ovým souřadnicím posuvů v i -tém kontaktním uzlu. analogicky budou seřazené souřadnice vektoru $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{2N_c}$: $\nu_{2i-1} = \nu_1(\bar{x}_i)$, $\nu_{2i} = \nu_2(\bar{x}_i)$.

Při provádění integrace (54) volíme testovací funkce $\mathbf{v} \in V_h$ jako báze funkce $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{N}$ podprostoru V_h . Tím získáme matici tuhosti vzhledem k posuvům $\mathbf{K} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{N}}$. Zápisem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označme skalární součin. Variační nerovnost (53) přepíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{u} \in \mathbb{K}_c : \langle \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}_c, \quad (56)$$

kde \mathbb{K}_c je množina přípustných uzlových hodnot funkcí z K_{c_h} a je definovaná takto:

$$\mathbb{K}_c = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}} : v_{2i-1}v_{2i-1} + v_{2i}v_{2i} - s_i \leq 0, i \in I_c\} \quad (57)$$

Definujme matici rotace $\mathbf{R} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{N}}$ tak, aby složky posuvů kontaktních uzlů vyjadřovaly posuvy v tečném a normálovém směru, jak jsou definovány hranicí Γ_{c_h} . Označme $\mathbf{u}^* = \mathbf{R}\mathbf{u}$. Platí tedy

$$u_{2i-1}^* = \bar{u}_i \bar{\gamma}_i \quad (58)$$

$$u_{2i}^* = \bar{u}_i \bar{\nu}_i, \quad i \in I_c \quad (59)$$

$$u_k^* = u_k, \quad k = 2N_c + 1, \dots, \tilde{N}, \quad (60)$$

kde $\bar{\gamma}_i$ jsou tečné vektory v uzlech kontaktní hranice. Matice \mathbf{R} je ortonormální, tj. $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice. Nerovnost (56) můžeme tedy psát ve tvaru

$$\langle \mathbf{R}[\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}], \mathbf{R}[\mathbf{v} - \mathbf{u}] \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}_c. \quad (61)$$

Pro zjednodušení označme symbolem $*$ matice, na které byla aplikována rotace \mathbf{R} , tedy $\mathbf{f}^* = \mathbf{R}\mathbf{f}$, $\mathbf{K}^* = \mathbf{R}\mathbf{K}$. Zavedme množinu

$$\mathbb{K}_c^* = \{\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^{\tilde{N}} : v_{2i}^* - s_i \leq 0, i \in I_c\}. \quad (62)$$

Formální úpravou (61) získáme konečnou podobu variační nerovnosti pro kontaktní úlohu:

$$\mathbf{u}^* \in \mathbb{K}_c^* : \langle \mathbf{K}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*, \mathbf{v}^* - \mathbf{u}^* \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{K}_c^*. \quad (63)$$

Pro složky vektoru \mathbf{u}^* vyplývají z této variační nerovnice následující rovnosti:

$$\max\{(\mathbf{K}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*)_{2i}, u_{2i}^* - s_i\} = 0, \quad i \in I_c \quad (64)$$

Zvolíme-li v (63) $v_{2i-1} = 1$ a $v_k = 0$ pro $k \neq 2i - 1$, zjistíme, že

$$(\mathbf{K}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*)_j = 0, \quad j \equiv 2i - 1, i \in I_c. \quad (65)$$

Tento vztah zřejmě platí i pro indexy uzlů nepatřících do množiny Γ_{c_h} , tj. uzlů s indexy $j = 2N_c + 1, \dots, \tilde{N}$. Rovnosti (64) a (65) je vhodné vyjádřit v kompaktní formě pomocí restričních matic

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{N}-N_c},$$

$$\mathbf{Y} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c},$$

definovaných takto ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$):

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_k, & \text{pro } k > N_c \\ (\mathbf{X}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_{2k-1}, & \text{pro } k \leq N_c \\ (\mathbf{Y}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_{2k}, & \text{pro } k \leq N_c \end{aligned} \tag{66}$$

Podmínky statické rovnováhy pro úlohu kontaktu v diskretizované podobě můžeme tedy zapsat jako následující soustavu rovnic

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}) = 0 \\ \max\{\mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}), \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{s}\} = 0, \end{cases} \tag{67}$$

kde maximum je bráno po složkách.

4 Numerická simulace úlohy kontaktu bez tření

K realizaci numerické simulace úlohy kontaktu bez tření byly použity systémy SfePy, MATLAB a Virtual Performance Solution (dále jen VPS). MKP síť byla vytvořena v systému VPS. V systému SfePy byly sestaveny matice tuhosti \mathbf{K} a vektor pravých stran \mathbf{f} diskretizovaného modelu pro síť vytvořenou v systému VPS. Ty byly následně importovány do systému MATLAB, kde byly použity k vlastní numerické simulaci diskretizované úlohy kontaktu se třením.

Jelikož se v části 2.2 při formulaci nelineárního komplementárního problému pracuje s funkcí minima (19), je třeba rovnice (67) upravit. Zřejmě pro jakékoliv dvě reálné hodnoty a, b platí:

$$\max(a, b) = \min(-a, -b). \quad (68)$$

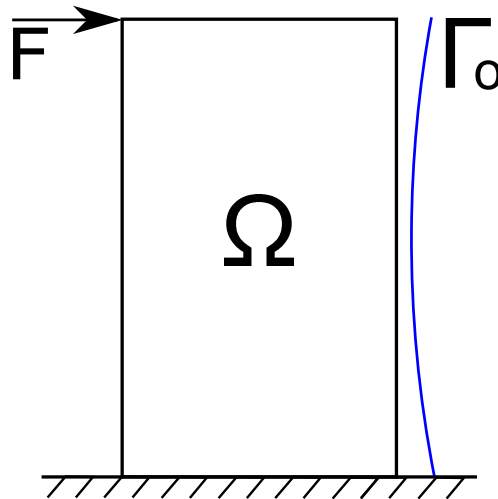
Proto lze rovnice (67) zapsat alternativně takto:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}) = 0 \\ \min\{-\mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{R}\mathbf{f}), -\mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{s}\} = 0. \end{cases} \quad (69)$$

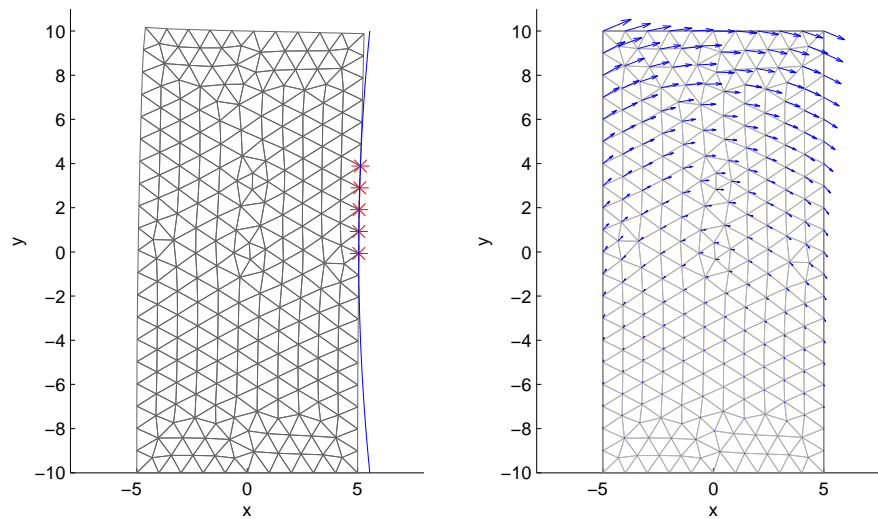
Stejným způsobem (vynásobením výrazů pro komplementární podmínky číslem -1) jsme postupovali i při implementaci metody využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.

Uvedme výsledky simulace pro úlohu na obr. 3. Těleso o rozměrech 10×20 (materiálové konstanty: Youngův modul pružnosti $E = 2 \cdot 10^5$, Poissonovo číslo $\mu = 0.3$) je zatíženo osamělou silou $F = 4000$ působící ve směru osy x . Tvar překážky Γ_o je zadán parametricky takto: $\Gamma_o = [5.05 + 0.005t^2, t]$ (počátek souřadnicového systému nechť je v těžišti tělesa).

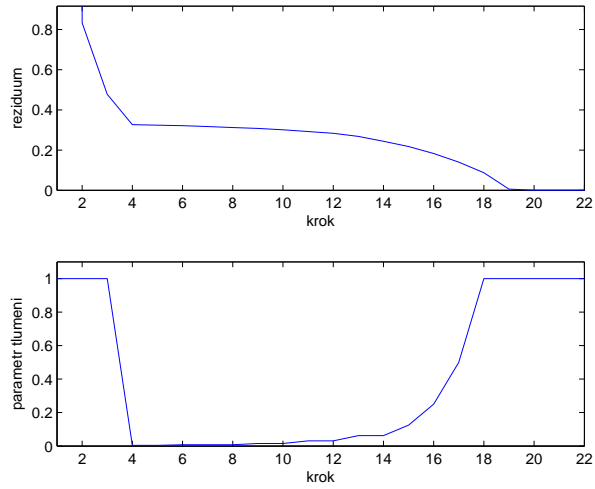
Ukázky výsledků numerické simulace jsou na obr. 4 až 15.



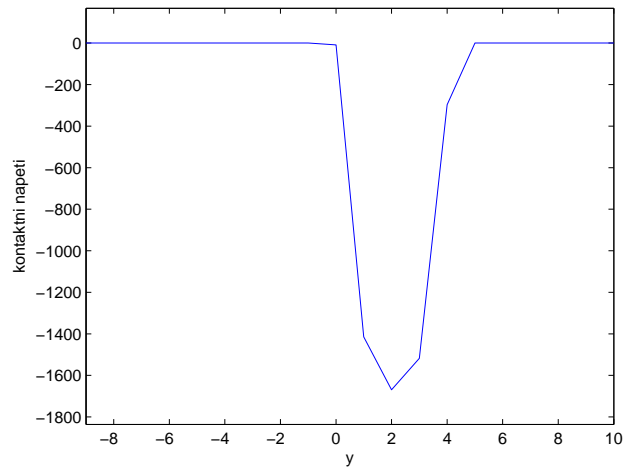
Obr. 3: Řešená modelová úloha.



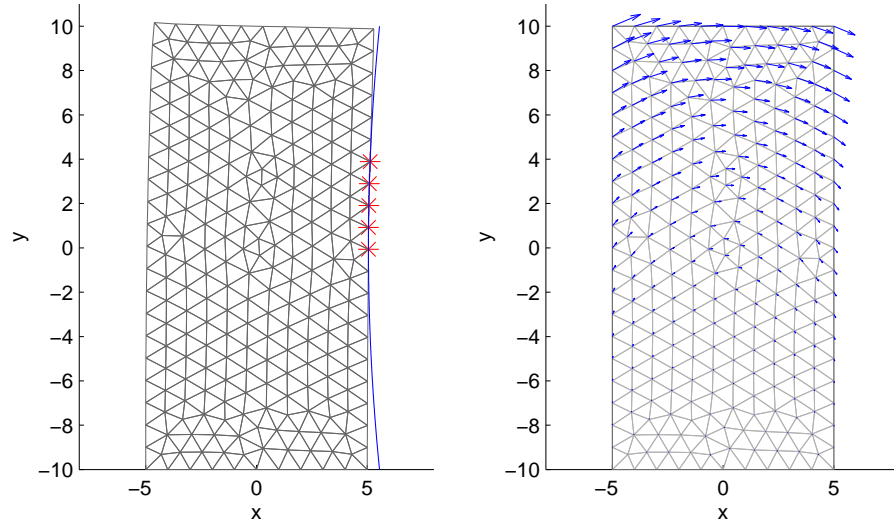
Obr. 4: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



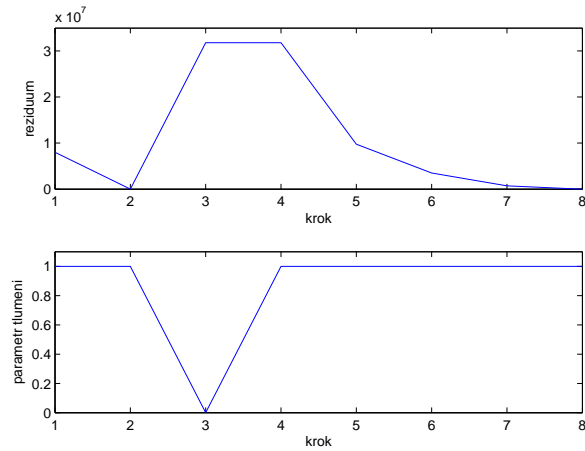
Obr. 5: Nahoře velikost rezidua v jednotlivých iteracích. Dole velikost parametru tlumení v jednotlivých iteracích. Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



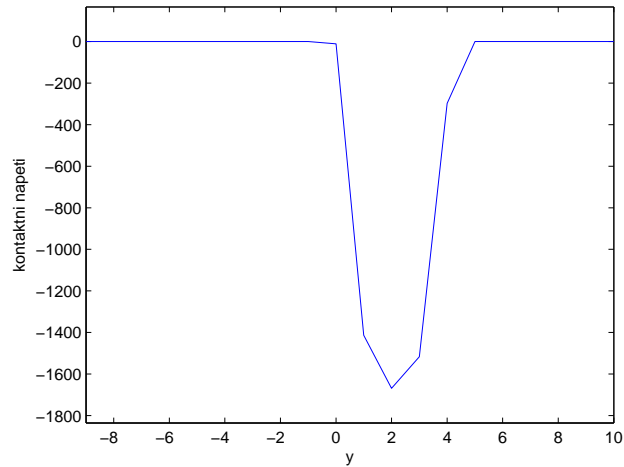
Obr. 6: Velikost kontaktního napětí na kontaktní hranici Γ_{ch} . Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



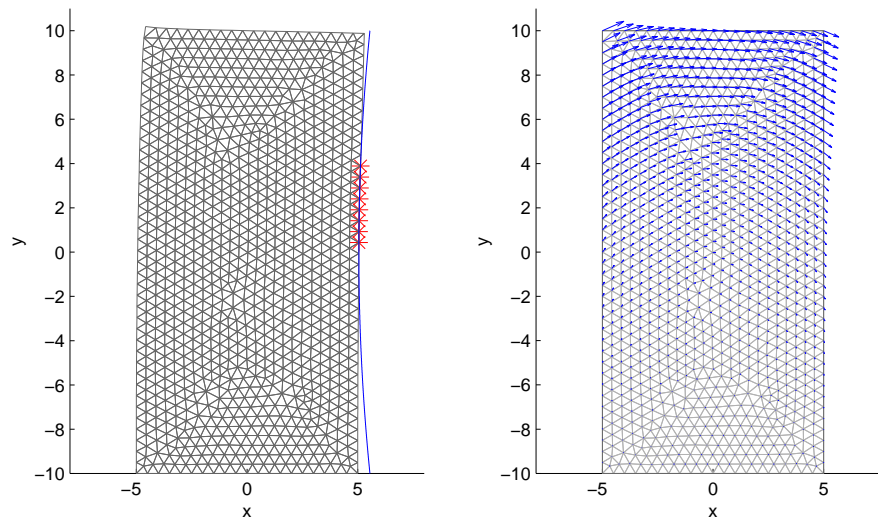
Obr. 7: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Použita metoda využívající funkci minima.



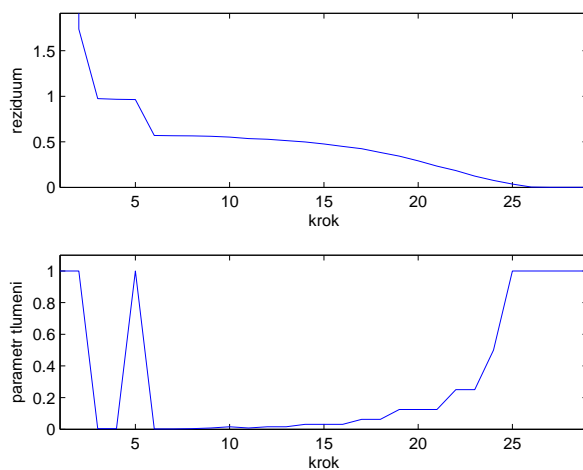
Obr. 8: Nahoře velikost rezidua v jednotlivých iteracích. Dole velikost parametru tlumení v jednotlivých iteracích. Použita metoda využívající funkci minima.



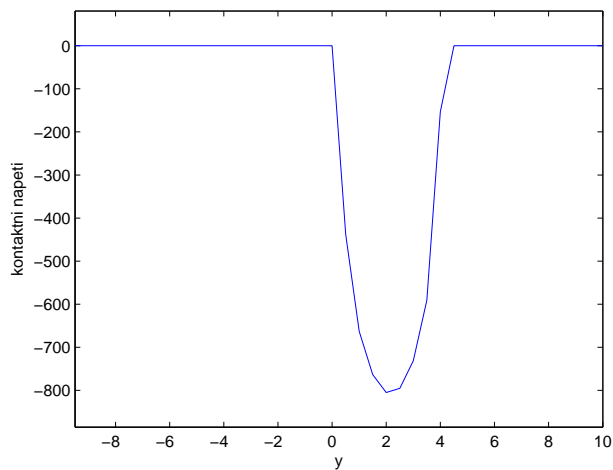
Obr. 9: Velikost kontaktního napětí na kontaktní hranici Γ_{ch} . Použita metoda využívající funkci minima.



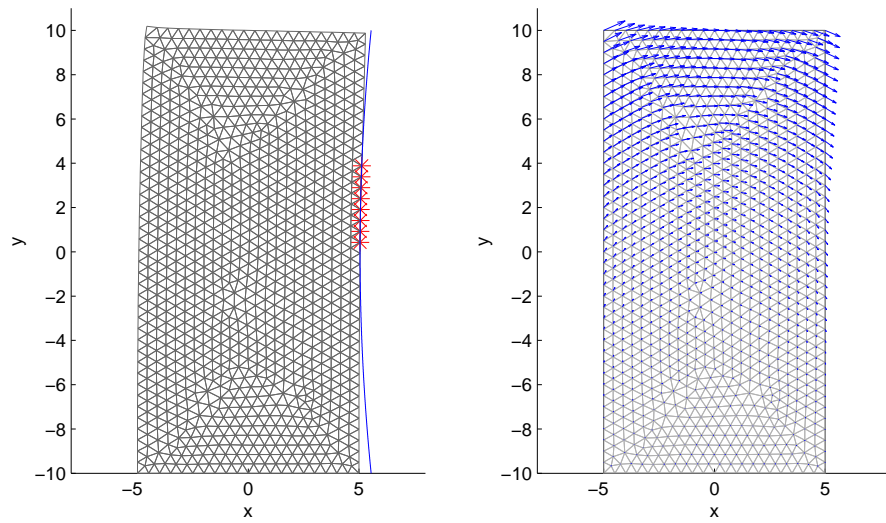
Obr. 10: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



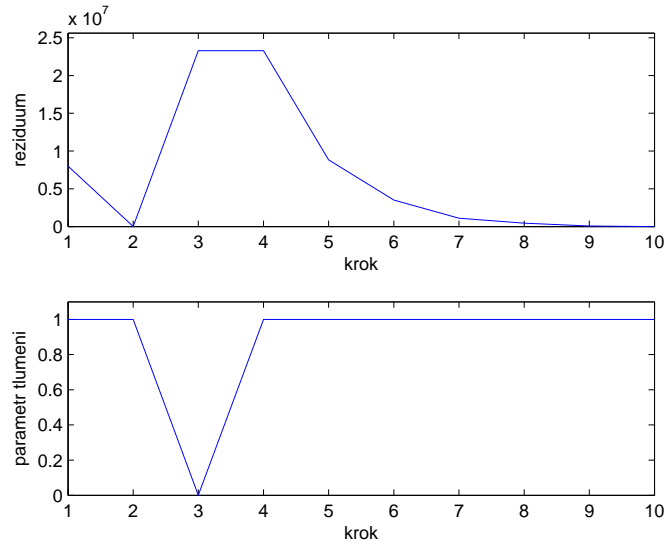
Obr. 11: Nahoře velikost rezidua v jednotlivých iteracích. Dole velikost parametru tlumení v jednotlivých iteracích. Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



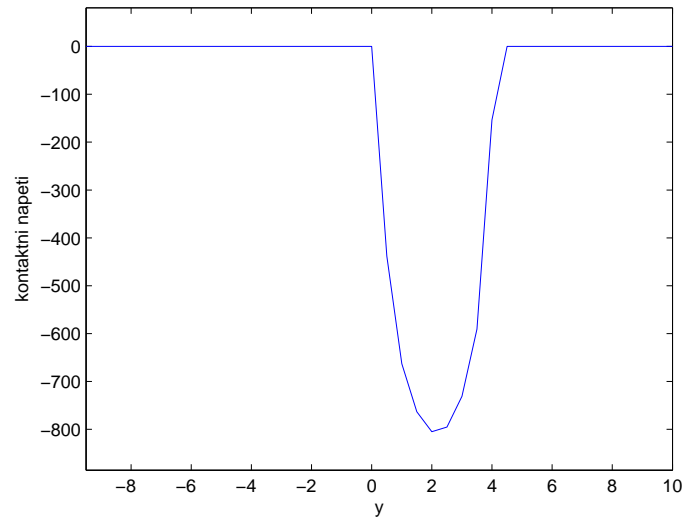
Obr. 12: Velikost kontaktního napětí na kontaktní hranici Γ_{ch} . Použita metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci.



Obr. 13: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Použita metoda využívající funkci minima.



Obr. 14: Nahoře velikost rezidua v jednotlivých iteracích. Dole velikost parametru tlumení v jednotlivých iteracích. Použita metoda využívající funkci minima.



Obr. 15: Velikost kontaktního napětí na kontaktní hranici Γ_{c_h} . Použita metoda využívající funkci minima.

4.1 Zhodnocení výsledků, pozorování

Výsledky simulace se nelišily pro oba použité způsoby pro výpočet vzdálenosti mezi tělesem a překážkou, ani pro použitou numerickou metodu. Drobné odlišnosti ve výsledcích lze pozorovat při použití většího množství konečných prvků pro popis elastického tělesa, v takovém případě je zřejmě přesněji určena oblast, kde dojde ke kontaktu.

Srovnáním obr. 5 a 8, resp. 11 a 14 vidíme, že numerická metoda využívající algoritmus představený v části 2.2.1 využívající funkci minima najde řešení rychleji, nicméně za cenu toho, že v průběhu výpočtu se v jedné iteraci nepodaří nalézt parametr tlumení, tedy metoda v této iteraci diverguje. Numerická metoda představená v části 2.2.2 využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci je pomalejší, nicméně v každém kroku konverguje k řešení. Jako lepší se tedy jeví metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci, a to díky tomu, že konverguje v každé iteraci ([1]), nicméně pro vyřešení úlohy kontaktu bez tření lze použít obě metody.

V tab. 1 jsou počty vyhodnocení funkční hodnoty, resp. Jacobiovy matice pro obě použité numerické metody a pro různý počet použitých konečných prvků.

Tab. 1: Srovnání náročnosti simulace pro různý počet použitých konečných prvků a obě použité numerické metody.

Metoda	Počet prvků	Počet výpočtů matice \mathbf{J}	Počet výpočtů $\mathbf{F}(\mathbf{x})$
φ_{FB}	118	18	80
φ_{\min}	118	6	61
φ_{FB}	454	22	117
φ_{\min}	454	8	65
φ_{FB}	1878	29	169
φ_{\min}	1878	10	69

5 Úloha elastostatiky s jednostranným kontaktem se třením

Pro zavedení tření do modelu je třeba nahradit podmínku (38) v tečném směru. Uvedme některé způsoby modelování tření (viz [4]). Ve všech modelech budeme uvažovat homogenní a isotropní vlastnosti materiálu, tj. velikost třecí síly nezávisí na směru ani místě působení. Následující modely jsou platné pro 2D úlohu

Tresca model Model tření Tresca je také známý jako model s předepsaným třením. Ačkoliv se nejedná o realistický mechanický model, lze jej použít v některých speciálních případech, nebo v iteračních metodách jako vstup pro Coulombův model (viz dále). Označme napětí v kontaktním uzlu v tečném směru $g_t = \gamma_i D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \nu_j$. Dále označme posuv uzlu v tečném směru jako u_t . Podmínka v tečném směru (38) se změní na

$$|g_t| \leq p \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (70)$$

$$|g_t| < p \Rightarrow u_t = 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (71)$$

$$g_t = 0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda g_t \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (72)$$

kde $p \geq 0$ je daná funkce, λ je třecí multiplikátor.

Coulombův model Coulombův model tření je podobný předcházejícímu modelu, nahrazuje v něm předepsanou funkci p součinem třecího koeficientu μ a absolutní hodnoty normálové síly σ_n . Označme napětí v kontaktním uzlu v normálovém směru $g_n = \nu_i D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \nu_j$. Vztahy (70) až (72) příslušným způsobem upravíme na tvar:

$$|g_t| \leq \mu |g_n| \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (73)$$

$$|g_t| < \mu |g_n| \Rightarrow u_t = 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (74)$$

$$g_t = 0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda g_t \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (75)$$

Nortonův-Hoffův model Nortonův-Hoffův model tření je variací předcházejícího modelu, zavádí koeficient ρ , pro který platí $0 < \rho < 1$ a může být zapsán takto:

$$g_t \leq \mu |g_n| \|u_t\|^\rho u_t \quad \text{na } \Gamma_c. \quad (76)$$

Poznamenejme, že čím více se koeficient ρ blíží nule, tím více se tento model blíží Coulombovu modelu.

5.1 Rozšíření modelu o tření

Jelikož obecně nemá úloha kontaktu s uvažováním tření jednoznačné řešení ([2]), budeme uvažovat úlohu jako kvazistatickou. Tedy rovnováhu tělesa vyhodnocujeme postupně ve více krocích pro zvětšující se zatížení, dynamické účinky zanedbáme. Označme κ_c počet kroků, v kolika budeme zatěžování tělesa vyhodnocovat. Toto si lze představit jako dostatečně pomalé postupné zatěžování v čase. V kroku κ , $\kappa = 1, 2, \dots, \kappa_c$ uvažujeme velikost působících sil rovnou $\frac{\kappa}{\kappa_c}F$, kde F je zadaná síla působící na těleso. Při volbě dostatečně velkého počtu kroků κ_c tímto postupem získáme trajektorii tělesa, po které se pohybuje během zatěžování.

Využijeme metodu Coulombova modelu tření v pevném bodě ([4]), která spočívá v tom, že v daném kroku κ řešíme model tření Tresca, kde daná funkce p , která má význam normálového napětí, je dána výsledky předcházející iterace. Tímto přístupem vzniká při numerické simulaci chyba, jelikož pro bod, který se v daném kroku dostal do kontaktu s překážkou je v prvním následujícím kroku hodnota $p = 0$. Tuto chybu lze zmenšit použitím dostatečného počtu kroků.

Vyjdeme ze značení zavedeného v části 3, odlišně zavedme restriční matice

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &: \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{N}-2N_c}, \\ \mathbf{Y} &: \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c}, \\ \mathbf{Z} &: \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c},\end{aligned}$$

definované takto ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$):

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_k, & \text{pro } k > N_c \\ (\mathbf{Z}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_{2k-1}, & \text{pro } k \leq N_c \\ (\mathbf{Y}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_{2k}, & \text{pro } k \leq N_c.\end{aligned}\tag{77}$$

Napětí \mathbf{g} rozdělme na část v tečném a na část v normálovém směru $\mathbf{g}_t = \mathbf{g}\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}\boldsymbol{\nu}$.

Rovnice rovnováhy pro úlohu kontaktu se třením má tvar

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_c} \mathbf{v}_t \mathbf{g}_t = 0,\tag{78}$$

kde

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{v}_t \mathbf{g}_t = \sum_{k \in I_c} \sum_{l \in I_c} \varphi_k(x) \varphi_l(x) \mathbf{v}^l \boldsymbol{\gamma}_k \mathbf{g}_t^k = \mathbf{v}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{g}_t.\tag{79}$$

\mathbf{M} je skalární matice "hmotnosti", pro jejíž složky platí:

$$M_{ij} = \int_{\Gamma_{c_h}} \varphi_i(x) \varphi_j(x). \quad (80)$$

Soustava rovnic (67) pro úlohu bez tření tedy pouze doplníme o člen $-\mathbf{M}\mathbf{g}_t$ pro stupně volnosti příslušné k tečným posuvům na kontaktní hranici. Za použití výše definovaných restričních matic \mathbf{X} , \mathbf{Y} a \mathbf{Z} získáme soustavu rovnic

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}) = 0 \\ \max\{\mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}), \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{s}\} = 0 \\ \mathbf{Z}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}) - \mathbf{M}\mathbf{g}_t = 0. \end{cases} \quad (81)$$

Nyní odvodíme velikost kontaktního napětí. Kontaktní napětí získáme úpravou následujícího vztahu:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_c} \mathbf{v}_t \mathbf{g}_t - \int_{\Gamma_c} \mathbf{v}_n \mathbf{c}_n = 0. \quad (82)$$

Zvolme testovací funkci \mathbf{w} takovou, že $\mathbf{w}_t = 0$, potom platí

$$\mathbf{w}_n = \sum_{k \in I_c} \varphi^k w_n^k. \quad (83)$$

Integrací rovnice (82) získáváme rovnici

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} - \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_t - \mathbf{R}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_n = 0. \quad (84)$$

Vynásobením této rovnice zleva $\bar{\mathbf{w}}_n^T = \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{Y}\mathbf{R}$, kde $\bar{\mathbf{w}}_n$ je testovací sloupcový vektor pro příslušné stupně volnosti pro \mathbf{w}_n testovací vektor pro normálový směr v globálním souřadnicovém systému, dostáváme

$$\bar{\mathbf{w}}_n^T \mathbf{Y}\mathbf{R}(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} - \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_t - \mathbf{R}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_n) = 0. \quad (85)$$

Úpravou dostaneme

$$\bar{\mathbf{w}}_n^T (\mathbf{Y}\mathbf{R}(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) - \mathbf{Y}\mathbf{Z}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_t - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{M}\mathbf{g}_n) = 0. \quad (86)$$

Jelikož $\mathbf{Y}\mathbf{Z}^T = \mathbf{0}$ a $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T = \mathbf{I}$, lze pro normálové napětí psát

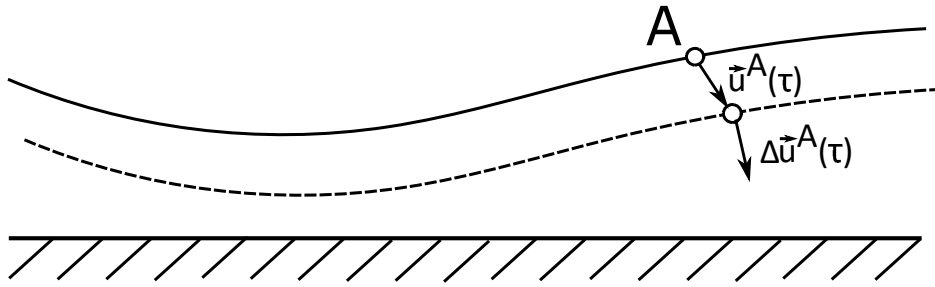
$$\mathbf{g}_n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{f}). \quad (87)$$

Zavedme změnu posuvu \mathbf{u} v čase $\Delta\tau$, mající význam změny posuvu \mathbf{u} v kroku $\kappa + 1$ takto:

$$\mathbf{u}^A(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{u}^A(\tau) + \Delta\mathbf{u}^A(\tau), \quad (88)$$

pro ilustraci viz obr. 16. Zapsáno ve tvaru s použitím kroku κ :

$$\mathbf{u}_{\kappa+1} = \mathbf{u}_{\kappa} + \Delta\mathbf{u}_{\kappa}, \quad (89)$$



Obr. 16: Změna posuvu v následující časové hladině.

Často používaný způsob, jak zapsat komplementární podmínky na kontaktní hranici, je způsob zavádějící třecí multiplikátor λ , viz výše. Komplementární podmínky pro úlohu tření lze potom psát ve tvaru

$$-\lambda \leq 0, \quad (90)$$

$$|g_t| - f_c g_n \leq 0, \quad (91)$$

$$(|g_t| - f_c g_n)\lambda = 0. \quad (92)$$

Ekvivalentní formulace je potom

$$\max\{|g_t| - f_c g_n, -\lambda\} = 0. \quad (93)$$

Pro posuv v tečném směru platí:

$$\Delta u_t = -\lambda g_t. \quad (94)$$

Tato formulace se ovšem jeví nevhodná pro námi zvolenou numerickou metodu, kdy obecně nejsou v kontaktu všechny uzly na kontaktní hranici Γ_{c_h} a která využívá Jacobiovy matice. Nelineární člen λg_t , který se vyskytuje v

rovnici 94, v naší úloze způsobí singularitu Jacobiovy matice například v případě, kdy alespoň jeden uzel kontaktní hranice není v kontaktu s překážkou.

Abychom tento problém vyřešili, rozdělme posuv v tečném směru na kontaktní hranici na dvě části, na posuv v kladném a záporném směru:

$$\Delta u_t = \Delta u_t^+ - \Delta u_t^-. \quad (95)$$

Poté platí následující komplementární podmínky. V záporném směru:

$$-\Delta u_t^- \leq 0, \quad (96)$$

$$g_t - f_c p \leq 0, \quad (97)$$

$$(g_t - f_c p)(-\Delta u_t^-) = 0. \quad (98)$$

V kladném směru:

$$-\Delta u_t^+ \leq 0, \quad (99)$$

$$-g_t - f_c p \leq 0, \quad (100)$$

$$(-g_t - f_c p)(-\Delta u_t^+) = 0. \quad (101)$$

Komplementární podmínky formulované výše lze ekvivalentně zapsat takto:

$$\max\{g_t - f_c p, -\Delta u_t^-\} = 0, \quad (102)$$

$$\max\{-g_t - f_c p, -\Delta u_t^+\} = 0. \quad (103)$$

Uvažujeme komplementární podmínky pro každý uzel zvlášť, normálové napětí z předchozí iterace proto budeme uvažovat takto (srov. s 87):

$$\mathbf{p}_\kappa = \mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u}_\kappa - \frac{\kappa}{\kappa_c}\mathbf{R}\mathbf{f}), \quad (104)$$

tedy zanedbáme vliv sousedních uzlů.

Posuvy v daném kroku κ jsou dány vztahem (89), což lze alternativně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u}_\kappa = \mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta \mathbf{u}_{\kappa-1}, \quad (105)$$

kde pro změny posuvů v tečném směru na kontaktní hranici platí:

$$\mathbf{Z}\mathbf{R}\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_t^+ - \Delta \mathbf{u}_t^-. \quad (106)$$

Označme

$$(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^- = \Delta\mathbf{u}_t^-, \quad (107)$$

$$(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^+ = \Delta\mathbf{u}_t^+. \quad (108)$$

Uvažujeme komplementární podmínky pro každý uzel zvlášť, normálové napětí z předchozí iterace proto budeme uvažovat takto (srov. s 87):

$$\mathbf{p}_\kappa = \mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u}_\kappa - \frac{\kappa}{\kappa_c}\mathbf{R}\mathbf{f}), \quad (109)$$

tedy zanedbáme vliv sousedních uzlů.

Výsledný model pro kontaktní úlohu se třením pro daný časový krok k má tvar

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(\mathbf{R}\mathbf{K}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\kappa_c}\mathbf{R}\mathbf{f}) = 0 \\ \max\{\mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{K}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\kappa_c}\mathbf{R}\mathbf{f}), \mathbf{Y}\mathbf{R}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \mathbf{s}\} = 0 \\ \mathbf{Z}(\mathbf{R}\mathbf{K}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\kappa_c}\mathbf{R}\mathbf{f}) - \mathbf{M}\mathbf{g}_t = 0 \\ \max\{-(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^-, \mathbf{g}_t - f_c\mathbf{p}_{\kappa-1}\} = 0 \\ \max\{-(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^+, -\mathbf{g}_t - f_c\mathbf{p}_{\kappa-1}\} = 0, \end{array} \right. \quad (110)$$

kde maximum je bráno po složkách a $\mathbf{u}_{\kappa-1}$ resp. $\mathbf{p}_{\kappa-1}$ jsou posuvy resp. normálové napětí vypočtené z předchozí iterace. Neznámé jsou změny posuvů $\Delta\mathbf{u}$, resp. jejich kladné a záporné složky pro tečný směr na kontaktní hranici, a třecí napětí \mathbf{g}_t .

6 Numerická simulace úlohy kontaktu se třením

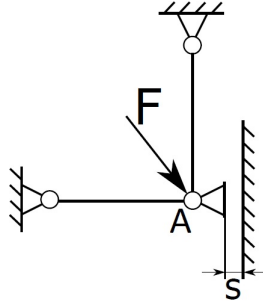
K realizaci numerické simulace úlohy kontaktu se třením byly použity software SfePy, MATLAB a Virtual Performance Solution (dále jen VPS). MKP síť byla vytvořena v systému VPS. V software SfePy byly sestaveny matice tuhosti \mathbf{K} , matice "hmotnosti" \mathbf{M} a vektor pravých stran \mathbf{f} diskretizovaného modelu pro síť vytvořenou v systému VPS. Ty byly následně importovány do software MATLAB, kde byly použity k vlastní numerické simulaci diskretizované úlohy kontaktu se třením. Vzhledem k výsledkům numerické simulace pro úlohu bez tření a vzhledem k většímu množství nehladkých rovnic obsažených ve vytvořeném modelu byla implementována pouze numerická metoda využívající Fischerovu-Burmeisterovu funkci (viz část 2.2.2).

Stejným způsobem, jako byl použit v části 4, je třeba upravit rovnice (110) tak, aby byly ve tvaru vhodném pro použití numerických metod popsaných v části 2.2. Rovnice (110) tedy vyjádříme ve tvaru:

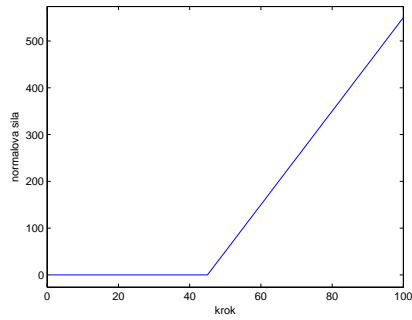
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(\mathbf{RK}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\kappa_c} \mathbf{Rf}) = 0 \\ \min\{-\mathbf{Y}(\mathbf{RK}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) + \frac{\kappa}{\kappa_c} \mathbf{Rf}), \mathbf{YR}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \mathbf{s}\} = 0 \\ \mathbf{Z}(\mathbf{RK}(\mathbf{u}_{\kappa-1} + \Delta\mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\kappa_c} \mathbf{Rf}) - \mathbf{Mg}_t = 0 \\ \min\{(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^-, -\mathbf{g}_t + f_c \mathbf{P}_{\kappa-1}\} = 0 \\ \min\{(\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u})^+, \mathbf{g}_t + f_c \mathbf{P}_{\kappa-1}\} = 0. \end{array} \right. \quad (111)$$

Nejprve byla simulace provedena pro jednoduchou prutovou soustavu, viz obr. 17. Zatěžování bylo vyhodnocováno postupně ve 100 krocích. Výsledky simulace pro zvolené hodnoty matice tuhosti $\mathbf{K} = 10^4 \cdot \text{diag}(9, 9)$, vektor pravých stran $\mathbf{f} = [1000, -1000]^T$, vzdálenost od překážky $s = 0.005$ a pro koeficient tření $f_c = 10$, resp. $f_c = 0.5$ jsou vykresleny na obr. 18 až 21.

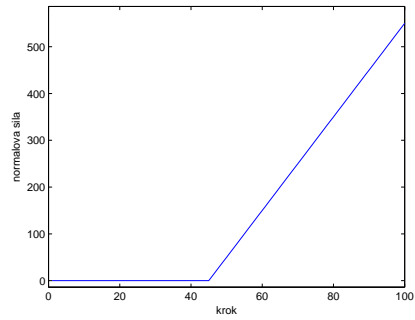
Poté byla simulace provedena pro totožnou úlohu, která již byla řešena bez uvažování tření v části 4. Ukázky výsledků simulace jsou na obr. 22 až 27.



Obr. 17: Jednoduchá prutová soustava.

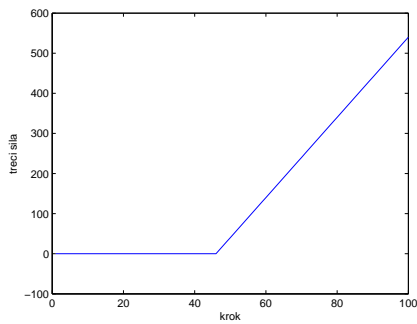


(a) Graf pro $f_c = 10$

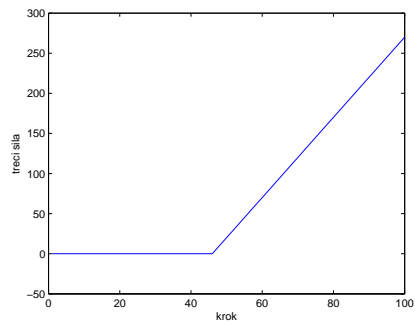


(b) Graf pro $f_c = 0.5$

Obr. 18: Průběh kontaktní síly v jednotlivých krocích simulace.

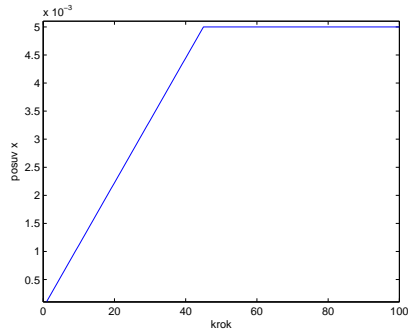


(a) Graf pro $f_c = 10$

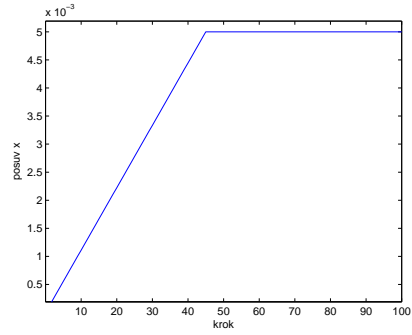


(b) Graf pro $f_c = 0.5$

Obr. 19: Průběh třecí síly v jednotlivých krocích simulace.

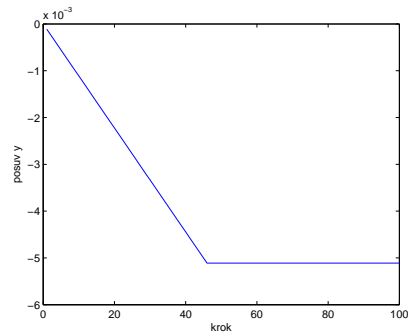


(a) Graf pro $f_c = 10$

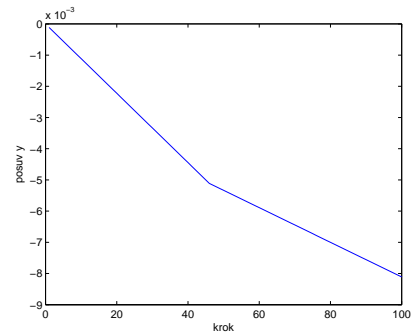


(b) Graf pro $f_c = 0.5$

Obr. 20: Průběh posuvu bodu A ve směru osy x v jednotlivých krocích simulace.

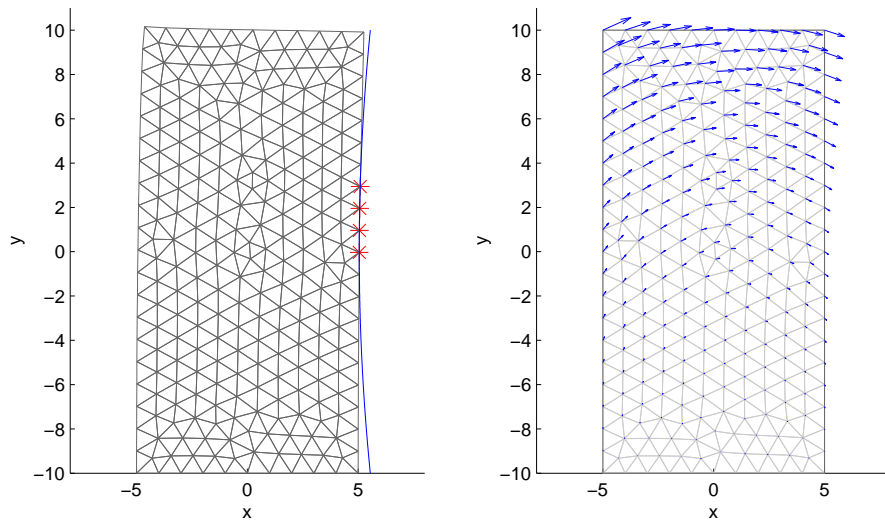


(a) Graf pro $f_c = 10$

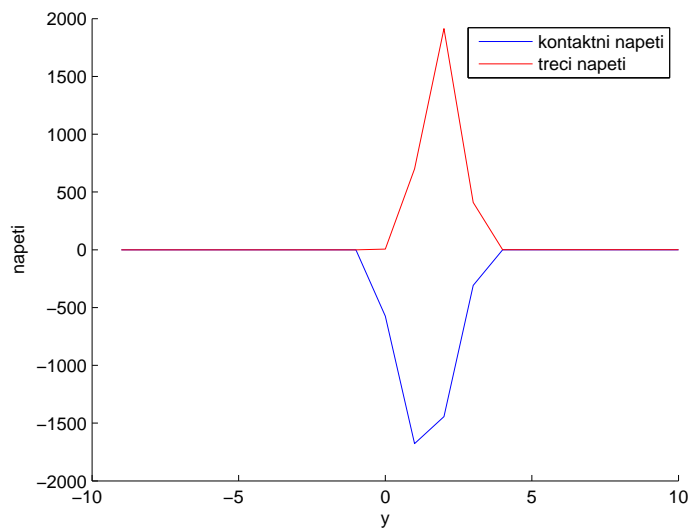


(b) Graf pro $f_c = 0.5$

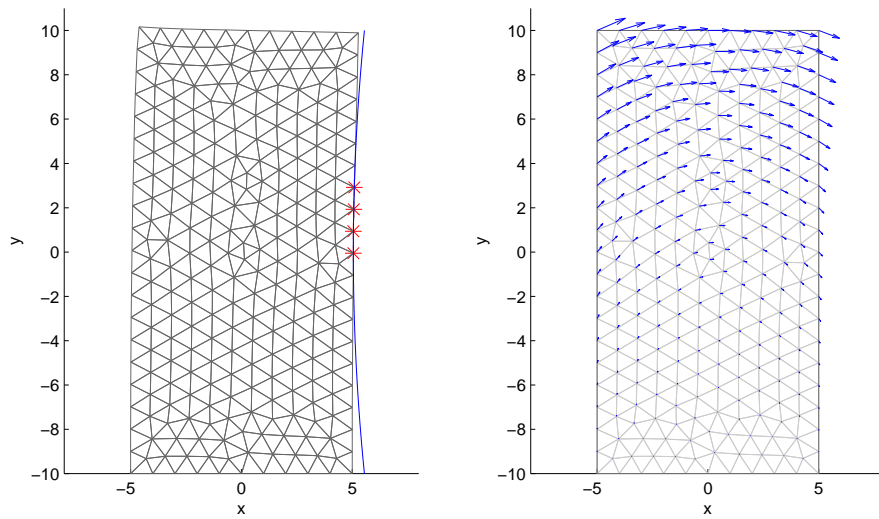
Obr. 21: Průběh posuvu bodu A ve směru osy y v jednotlivých krocích simulace.



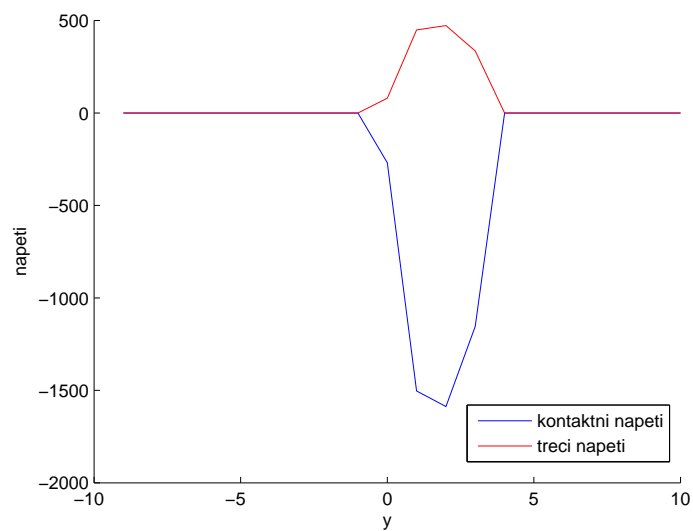
Obr. 22: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Koeficient tření $f_c = 10$.



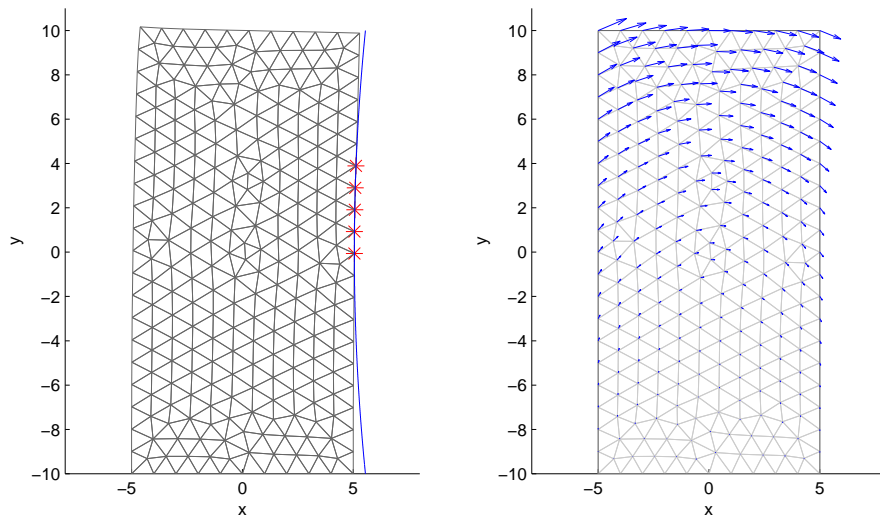
Obr. 23: Kontaktní a třecí napětí na kontaktní hranici. Koeficient tření $f_c = 10$.



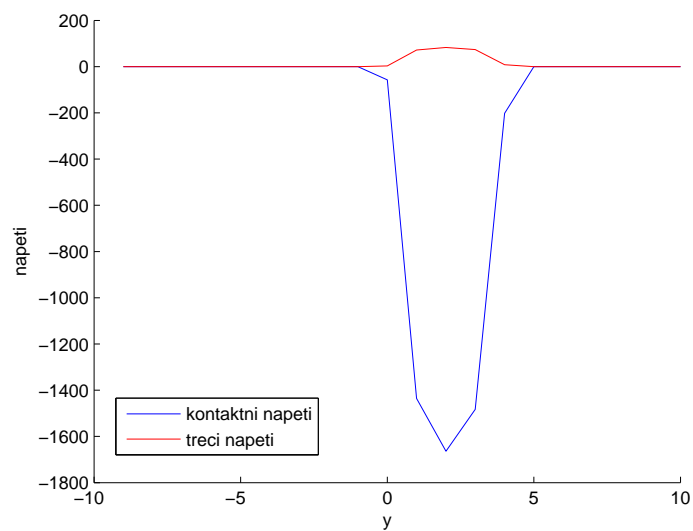
Obr. 24: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Koeficient tření $f_c = 0.3$.



Obr. 25: Kontaktní a třecí napětí na kontaktní hranici. Koeficient tření $f_c = 0.3$.



Obr. 26: Vlevo těleso po deformaci, uzly v kontaktu s překážkou jsou označeny hvězdičkou, překážka vykreslena modrou barvou. Vpravo nezdeformované těleso s vyznačenými směry posuvů. Koeficient tření $f_c = 0.05$.



Obr. 27: Kontaktní a třecí napětí na kontaktní hranici. Koeficient tření $f_c = 0.05$.

6.1 Zhodnocení výsledků, pozorování

Na výsledcích simulace jednoduché prutové soustavy je možné pozorovat, v jakém kroku zatěžování došlo ke kontaktu s překážkou, dále je z výsledků patrné, že pro koeficient tření $f_c = 10$ nedošlo k prokluzu, kdežto pro koeficient tření $f_c = 0.5$ k prokluzu došlo, posuv ve směru osy y se tedy pro oba případy dle očekávání liší, stejně tak velikost třecí síly.

V tab. 2 jsou počty vyhodnocení funkční hodnoty, resp. Jacobiovy matice pro různě zvolené koeficienty tření pro modelový případ elastického tělesa z obr. doplnit. Uvedené hodnoty byly získány pro zatěžování ve 100 krocích. Z tabulky je vidět, že pro vyšší hodnoty koeficientu tlumení je výpočet rychlejší. To je dáno pravděpodobně tím, že pro malou hodnotu koeficientu tření se řešení nalézá v blíže nehladkým bodům, viz 2.2

Výsledky simulace se dle očekávání liší pro různé hodnoty koeficientu tření f_c . Pro velmi malé hodnoty se kvalitativně shodují s výsledky získanými v části 4 pro úlohu bez tření a nezáleží na zvoleném počtu kroků zatěžování. Naopak, pro vysoké hodnoty koeficientu tření výsledky simulace závisí na zvoleném počtu kroků zatěžování, neboť při kontaktu s překážkou nedochází k prokluzu a pro obdržení správných výsledků je tedy třeba správně vyhodnotit místo, kde poprvé dojde ke kontaktu. Při použití malého počtu kroků též dochází ke zvětšení vlivu chyby způsobené použitím vstupu do modelu, kontaktní síly, z předchozí iterace.

Toto pozorování odpovídá informacím o podmínkách jednoznačnosti úlohy tření uvedeným v [2].

Tab. 2: Srovnání náročnosti simulace pro různé koeficienty tření.

Koeficient tření f_c	Počet výpočtů matice \mathbf{J}	Počet výpočtů $\mathbf{F}(\mathbf{x})$
0.05	664	3554
0.3	504	1014
10	308	616

7 Závěr

Na začátku práce jsme se seznámili s pojmem kontaktní úloha a jejím významem v mechanice.

Poté jsme nastínili postup pro výpočet vzdálenosti mezi tělesem a překážkou. Seznámili jsme se s pojmem nelineární komplementární problém a uvedli dva způsoby numerického řešení tohoto problému použité v této práci.

Následně byl vytvořen model 2D úlohy kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou pomocí variační formulace. Pomocí metody konečných prvků byl tento model diskretizován a provedena numerická simulace pro modelovou úlohu. Při simulaci byly použity dva různé přístupy pro výpočet vzdálenosti mezi tělesem a překážkou a oba algoritmy řešení představené v části 2.2. Výsledky simulací byly kvalitativně stejné pro všechny uvedené přístupy. Dále byla simulace provedena pro různé počty konečných prvků použitých k diskretizaci elastického tělesa. V tomto případě se výsledky lišily jen velmi málo, s použitím většího počtu konečných prvků byla přesněji určena oblast, kde skutečně došlo ke kontaktu.

Dále byl model doplněn o popis tření na kontaktní hranici. Vzhledem k tomu, že úloha tření je v tomto případě jednoznačně řešitelná pouze pro velmi malé koeficienty tření, byl statický model změněn na kvazistatický, a to tak, že bylo uvažováno zatěžování postupně v několika krocích, v každém kroku řešena rovnováha soustavy a řešení z předchozího kroku bylo použito jako počáteční aproximace v kroku následujícím. Numerická simulace byla provedena nejprve pro jednoduchou prutovou soustavu a poté pro stejnou úlohu, jako v případě bez tření. V případě vyšších hodnot koeficientu tření bylo řešení dle předpokladu závislé na průběhu (počtu kroků) zatěžování.

V další práci je možné se zaměřit na řešení úlohy pro obecnější předpoklady kladené na tvar překážky, pro kontakt dvou elastických těles, pro uvažování plastických deformací nebo například pro úlohu ve 3D.

Literatura

- [1] *De Luca T., Facchinei F., Kanzow C.:* **A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems**, Mathematical programming 75, 1996.

- [2] *Ligurský T.:* **Aproximace, numerická realizace a kvalitativní analýza kontaktních úloh se třením**, Disertační práce MFF UK Praha, 2011.

- [3] *Pieraccini S., Gasparo M. G., Pasquali A.:* **Global Newton-type methods and semismooth reformulations of NCP**, Applied Numerical Mathematics 44, 2003.

- [4] *Maurry A.:* **Shape optimization for contact and plasticity problems thanks to the level set Method**, Disertační práce Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2016

- [5] *Rohan E.:* **Contact shape optimalization of elasto-plastic bodies**, Proceedings of the University of West Bohemia '97, 1998.

- [6] *Rohan E.:* **Optimalizace tvaru elasto-plastických těles**, Disertační práce ZČU Plzeň, 1997.

- [7] *Rohan E., Whiteman R.J.:* **Shape optimalization of elasto-plastic structures and continua**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 187, 2000.