

Posudek dizertační práce

Posudek oponenta

Autor:	Mgr. Šárka Petříčková
Název práce:	Chromatická teorie grafů
Rok odevzdání:	2017
Jméno a tituly oponenta:	doc. Mgr. Robert Šámal, Ph.D.
Pracoviště:	IÚUK MFF UK
Kontaktní e-mail:	samal@iuuk.mff.cuni.cz

Šárka Petříčková se ve své práci zabývá čtyřmi zajímavými otázkami z teorie grafů.

- **Online Ramsey theory** – Zde autorka zkoumá zajímavou grafovou úlohu založenou na hře dvou hráčů: Tvůrce se snaží vytvořit jednobarevnou kopii daného grafu, Malíř se tomu snaží zabránit. Hra probíhá tak, že Tvůrce nakreslí novou hranu, a Malíř ji obarví jednou ze dvou barev. Přitom Tvůrce musí celou dobu udržet svůj graf v dané třídě grafů.

Autorka zde shrnuje své výsledky (publikované se spoluautory), které odpovídají na dříve publikované hypotézy: Pokud je Tvůrce omezen na rovinné grafy, tak může vytvořit každý vnějškově rovinný graf, ale (navzdory hypotéze Grytczuk, Hałuszczak, and Kierstead) může vytvořit i jiné grafy.

- **Chromatic number of fractional graph powers** – Zde se zkoumají zlomkové mocniny grafu (založené na přidávání a podrozdělování hran) a jejich barevnost. Studována je zde zejména hypotéza Iradmusy, že barevnost a klikovost u zlomkových mocnin je stejná. Autorka tuto hypotézu v některých případech dokazuje, ale v obecnosti vyvrací.
- **List chromatic number of graph powers** – Zde autorka nachází grafy, pro jejichž mocniny je vybíravost podstatně větší než barevnost.
- **Game chromatic number** – Hrací barevnost grafu je minimální počet barev, který umožňuje Alici vyhrát následující hru: Dva hráči (Alice a Bob) střídavě obarvují vrcholy grafu, přičemž obarvení musí vždy být korektní. Tento důležitý parametr je možné odhadnout pomocí hravé varianty degenerovanosti. Autorka zpřesňuje naše poznání vztahu mezi hravou degenerovaností a klikovostí grafu. (Theorem 5.8).

Témata v práci řešená jsou aktuální a důležitá, což dokládají i dva publikované články (a jeden přijatý), na kterých je práce založena. Ve všech třech tematických oblastech jsou popsány výsledky částí rozsáhlého toku navazujících článků mezinárodní vědecké komunity, do kterého se autorčiny výsledky nepochybně začlení.

Autorka touto prací prokázala, že ovládá mnoho relevantních důkazových technik a že je schopna je tvůrčím způsobem používat.

I po formální stránce je práce dobře zvládnuta. V úvodu práce jsou shrnuty základní poznatky a techniky relevantní k barvení grafů, což zpřístupňuje práci širšímu publiku. V dalších kapitolách se autor věnuje popsaným oblastem barvení, vždy s vhodným motivačním a přehledovým úvodem. Důkazy jsou popsány přehledně a srozumitelně. Nepřesností (viz níže) je v práci velice málo, navíc se většinou jedná jen o drobné překlepy.

Dotazy & komentáře:

- V obr. 1.1 na str. 4 chybí hrana mezi pravým a spodním vrcholem. Pokud by práci četl někdo, kdo se s oblastí teprve seznamuje, je škoda ho takto mást.
- Na str. 5 dole se implicitně předpokládá, že $P \neq NP$.
- str. 11 uprostřed: 50 year má být 50 years.
- str. 18 dole: 1graph má asi být jen graph
- str. 31, obr. 5.2: unlored má být uncolored
- v souvislosti s online Ramsey games bych rád položil otázku, jak by se výsledky změnilly, kdyby Tvůrce musel průběžně tvořit rovinné nakreslení uvažovaného grafu (a nemohl by ho posléze měnit). Byly by stále vnějškově rovinné grafy nevyhnutelné?
- Bylo by vhodné, kdyby autorka vymezila svůj podíl na výsledcích publikovaných se spoluautory.

Závěr: Předložená dizertační práce beze sporu prokazuje předpoklady autorky k samostatné tvůrčí práci. Navrhují její přijetí a udělení titulu PhD.

V Hejnicích dne 31. května 2017

Robert Šámal



1. SIGNIFICANCE, METHODS AND EVALUATION

This thesis addresses problems in four areas—online Ramsey theory [54], chromatic number of fractional graph powers [28], list chromatic number of power graphs [41], and game chromatic number. In all four cases nontrivial answers using interesting techniques are given for questions that other researchers failed to solve. I fully agree with the decision of various editors to published the resulting papers. However none of these questions are of central interest to researchers in graph theory or even chromatic graph theory. I think the work on online Ramsey theory is by far the best because of ground breaking methods and results (and it is solo), but it is possible that the work on list coloring powers of graphs will be the most cited because it is in a more active area. I have studied and have results in all these areas, but the second.

1.1. Online Ramsey theory. This section concerns publication [54]. In [24] coauthors and I conjectured that a planar graph is unavoidable if and only if it is outerplanar. Our thinking was that this was a “divide and conquer” conjecture. Answering it positively or negatively would give real insight into which planar graphs are unavoidable. Petříčková first answered it negatively by showing that a particular non-outerplanar graph was unavoidable. But then, in the spirit of the conjecture she proved that it was half right, as every outerplanar graph is unavoidable. This is a very nice proof that requires a structure theory for outerplanar graphs and elegant strategies for builder. She then showed the existence of infinitely many non-outerplanar graphs that are unavoidable. This is the most significant work on online Ramsey theory for planar graphs. There is plenty more work to be done on classifying non-outerplanar graphs and she is well positioned to make further progress. Perhaps every subdivision of an outerplanar graph is unavoidable. This is highly original work.

1.2. Chromatic number of fractional graph powers. This section is on work [28] with coauthors. Iradmusa [31] conjectured that $\chi(G^{m/n}) = \omega(G^{m/n})$ for all integers $1 < m < n$ and all connected graphs G with $\Delta(G) \geq 3$, where $G^{m/n}$ is the m -power of the graph $G^{1/n}$ obtained by replacing every edge of G by a path of length m . Iradmusa proved the cases $m = 2$ and $m = n - 1$. The authors construct a small counterexample, $C_3 \square K_2$, and conjecture that it is the only counterexample. They prove the conjecture for even m and $\Delta(G) \geq 4$. For odd m they prove the conjecture when G is Δ -regular, $\Delta \geq 39$ and $\chi(G) \leq \Delta/4$. For general G and odd m they prove $\chi(G^{m/n}) \leq \omega(G^{m/n}) + 2$. This work proceeds by carefully analyzing the initial results of [31] and using the special structure fractional power graphs to construct colorings.

1.3. List chromatic number of graph powers. This section is on work [41] with coauthors that develops the study of list chromatic number of powers of graphs by addressing questions of senior researchers. Kostochka and Woodall [42] conjectured that $\chi(G^2) = \chi_l(G^2)$ for any graph G . This was disproved by Kim and Park [39]; they constructed a family of graphs showing that $\chi_l(G^2) - \chi(G^2)$ can be arbitrarily large. Zhu asked whether there is an integer k such that $\chi(G^k) = \chi_l(G^k)$ for any graph G . In [41], this is disproved for all k by constructing graphs such that $\chi_l(G^k) = \Omega(\chi(G^k) \log \chi(G^k))$. Their construction extends methods of Kim and Park. Here the contribution is first understanding [39], and then being able to extend it to disprove Zhu’s conjecture. On a personal note, my former student Ran Wang and I were asked to calculate $\chi_l(G^2)$ by local computer scientists for a particular practical application. We were surprised to find that it was a counterexample to the Kostochka-Woodall conjecture, but even more surprised to learn of [39] and then [41].

1.4. Game chromatic number. Petříčková’s unpublished work (with Kaiser) on the game coloring number of interval orders is interesting, but would have been more interesting twenty years ago when the theory was being developed. Now it is more of a curiosity, as the theory has moved past these initial examples. The methods involve new applications of techniques previously used by other authors. While the authors seem disappointed that their results only apply to game coloring number, not game chromatic number, I think the former is now the more important notion. Of course it would be nice to know both.

2. APPROACH, CLARITY AND LANGUAGE

The thesis is well organized and easy to read, but there are a number of minor typographical errors, some presumably introduced by spell checking, including “grief description”.

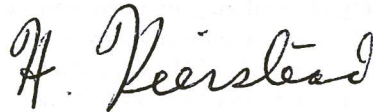
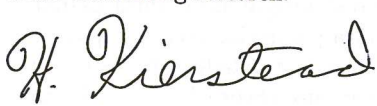
3. PUBLICATIONS

Petrickova has two publications [54] and [41] in solid journals (*Electronic Journal of Combinatorics* and *Discrete Mathematics*) and a third paper [28] accepted for publication in the well-respected *Journal of Graph Theory*. She also has some work in progress with Kaiser on the game coloring number of interval graphs (see Theorem 5.8). I expect that this will lead to another publication shortly. These publications are discussed above. Additionally, she has two published papers with Balogh that are not relevant to this thesis.

4. RECOMMENDATION

I strongly recommend this thesis for defense.

Perhaps it is useful to provide some context for my recommendation. I have supervised 19 successful Ph.D. candidates. Of these nine wrote dissertations that were significantly stronger in both technical depth and impact than this dissertation. Five others were significantly weaker. Of the remaining five, this one fits somewhere in the middle. Three of these five Ph.D.'s are now full professors at schools that at least expect some continuing research.



H. A. Kierstead