



Laboratoire de Mathématiques
UMR 5127 - CNRS et Université de Savoie

D. Bresch,
Directeur de Recherche CNRS,
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex
France

didier.bresch@univ-smb.fr

10 août 2017

Object : Report PhD Thesis – Matteo CAGGIO

Title : "Navier-Stokes equations and related problems"

This PhD thesis is composed by three papers respectively published or accepted in *Nonlinear Analysis : real World Application* (2 papers) and in *Acta Appl. Math.*. They concern the inviscid incompressible limit for rotating fluids, the rotating Navier-Stokes-Fourier-Poisson system on thin domains and regularity criteria for the Navier-Stokes equations based on one component of velocity.

The first two papers are based on relative energy inequalities which have become a crucial and widely used tool in the study of asymptotic limits in the context of hydrodynamics : see for instance the recent book "Singular limits of thermodynamics of viscous fluids" by E. FEIREISL and A. NOVOTNY. The first paper concerns the inviscid incompressible limit for compressible barotropic rotating fluids in the whole space \mathbb{R}^3 . As usually to perform such kind of study, they have to describe properties related to the target system and to take into account the acoustic waves occurring in the ill prepared case : see papers by J.Y. CHEMIN, B. DESJARDINS, E. FEIREISL, I. GALLAGHER, E. GRENIER, N. MASMOUDI, A. NOVOTNY, P.-L. LIONS and others concerning weak solutions. Global existence of weak solutions of the starting system is given through a result by E. FEIREISL published in 2002 (VAN DER WAALS type pressure law) and global existence of strong solution for the target system for a large enough rotating system through a result by R. TAKADA in 2016. Note that the last result is in the spirit of a property which is now already well-known : High-rotation extends lifespan of the solution. The result by M. CAGGIO is obtained combining ideas from various papers related to inviscid and/or incompressible limit in fluid mechanics and taking care of the estimates. The paper is well-written and a precise rate of convergence is obtained.

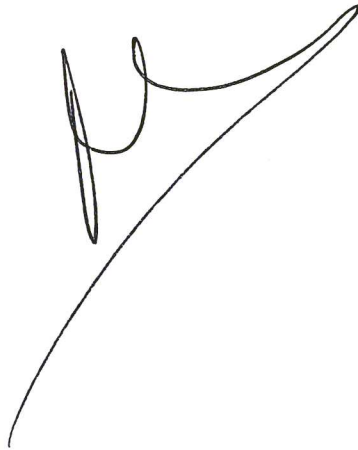
The second paper is an extension of a result by E. FEIREISL, A. NOVOTNY on the dimension reduction limit for compressible heat-conducting fluids in order to include the gravity force : The so-called Navier-Stokes-Fourier-Poisson system of equations. M CAGGIO and his collaborators (B. DUCOMET, S. NECASOVA AND M. POKORNY) distinguish two cases with respect to the behavior of the Froude number. According to the choice, they have to consider the correct form of the gravitational potential. As in previous works, the technic to reach the convergence is based on the relative energy method in order to show the convergence of the weak solution of the three-dimensional Navier-Stokes-Fourier system to the classical solution of the corresponding two-dimensional system. It concerns the rigorous derivation to the equations describing astrophysical objects

called accretion disks which are thin structures. It could be interesting in a future work to look at the geometry effect of the astrophysical objects. The paper starts with an existence result of global weak-solutions due to E. FEIREISL *et al.* for the starting system and an existence result or strong solution related to the target system due to D. MATSUMURA, T. NISHIDA and A. TANI. Then M. CAGGIO (and his collaborators) develops the well-known method of relative energy estimates taking care of the estimates related to new terms involving the gravity force. The paper is well-written and a precise discussion is realized related to the new term compared to the paper by E. FEIREISL, A. NOVOTNY.

The third paper concerns the problem of global regularity for incompressible fluids. More precisely, it concerns regularity criteria in terms of one velocity component in the spirit of works by J. NEUSTUPA, P. PENEL, I. KUKAVICA, M. ZIANE, Y. ZHOU, M. POKORNÝ. The analysis is based on the use of anisotropic Lebesgue spaces which seems to be convenient since it differentiates between different directions : Note that such anisotropic Lebesgue spaces are used in various mathematical papers related to geophysics. These spaces can be useful in the situations where regularity conditions are imposed only on one velocity component. The criteria proposed by M. CAGGIO (and his collaborators Z. GUO, Z. SKALÁK) concern estimates related to the vertical velocity namely control on ∇u_3 which yields the regularity of the full velocity field on $(0, T]$. In the paper under-consideration, using some generalized version of anisotropic inequalities and after several technical anisotropic interpolation estimates, M. CAGGIO and his collaborators are able to improve the results that may be encountered in previous papers such as the one by Z. SKALÁK.

Conclusion. After reading and studying M. CAGGIO's thesis, I'm fully convinced the results are completely original and have scientific value with already accepted papers in international journals. The thesis fulfills all requirements aimed for obtaining a PhD thesis and I fully recommend it for the defense in front of the respective committee.

Didier BRESCH



Oponentský posudek doktorské disertační práce
Navier–Stokes Equations and Related Problems

autora Mattea Caggia

V předložené disertační práci se Matteo Caggio zabývá některými aspekty kvalitativní teorie Navierových–Stokesových rovnic pro stlačitelnou i nestlačitelnou tekutinu. Uvedeným rovnicím je v širší celosvětové matematické komunitě stále věnována velká pozornost a jejich kvalitativní teorie, kromě známých otevřených problémů, nepřetržitě generuje nové a nové otázky. Z tohoto hlediska je téma disertační práce aktuální a zajímavé.

Kromě rozšířeného úvodu disertační práce obsahuje tři kapitoly, ve kterých jsou popsány hlavní výsledky. V kapitole 2 autor studuje nervazkou nestlačitelnou singulární limitu v případě Navierových–Stokesových rovnic pro barotropní stlačitelnou tekutinu. Rovnice jsou zapsány v rotujícím kartézském souřadném systému, který se běžně používá pro popis proudění okolo rotujícího tělesa. Pro jednoduchost však autor rovnice zkoumá v celém prostoru \mathbb{R}^3 . Používá větu o existenci silného řešení Eulerových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu na časovém intervalu libovolné délky za předpokladu dostatečně velké rotace souřadného systému (viz Takada 2016) a ukazuje, že za jistých předpokladů o počátečních podmínkách pro hustotu a rychlost slabé řešení Navierových–Stokesových rovnic konverguje k Takadovu řešení Eulerových rovnic. Ve třetí kapitole autor ukazuje, že řešení 3D Navierových–Stokesových rovnic pro tepelně vodivou stlačitelnou tekutinu za jistých podmínek konverguje k řešení analogických 2D rovnic při Froudeovu číslu blízcím se k nule. Nakonec, ve čtvrté kapitole disertační práce, se autor věnuje některým otázkám regularity slabých řešení Navierových–Stokesových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu. Odvozuje aposteriorní podmínky pro jednu složku rychlosti (odpovídající slabému řešení) a její gradient, které garantují regularitu celého slabého řešení. Podmínky jsou velmi jemné a technické, nicméně například postačující podmínka pro regularitu v závislosti na jedné složce rychlosti rozšiřuje dosud známý nejobecnější výsledek Pokorného a Zhoua (2010).

Autor užívá metody, které byly pro analogické řešené problémy již dříve vyvinuty, a aplikuje je v dané konkrétní situaci. V kapitole 2 se jedná zejména o odhady rozdílu mezi řešením Navierových–Stokesových rovnic pro barotropní stlačitelnou tekutinu a řešením Eulerových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu v různých normách, ve třetí kapitole je nejdůležitějším nástrojem relativní energetická nerovnost, ve třetí kapitole pak důležitou roli hraje Troisyho nerovnost. Ve všech kapitolách autor používá moderní aparát teorie parciálních diferenciálních rovnic a speciálně Navierových–Stokesových rovnic, založený na vlastnostech různých prostorů funkcí (často anizotropních), větách o vnoření, apod.

Konkrétní výsledky disertační práce jsou nové a jsou zobecněním nebo zjemněním předchozích známých výsledků. Nepochybně budou zajímavé pro badatele, kteří se zabývají podobnou problematikou. Autor prokázal, že dobře zvládl moderní metody, používané v teorii Navierových–Stokesových rovnic, a že je schopen je aktivně používat.

Disertační práce je napsána přehledně a lze se v ní dobře orientovat. Nenašel jsem v ní žádné nedostatky, které by stály za zmínku v tomto posudku.

Autor uvádí tři články, jichž je spoluautorem. Jeden článek již byl otištěn v *Nonlinear Analysis*, jeden byl přijat k publikaci v *Nonlinear Analysis* a jeden je podán do časopisu *Acta Applicandae Mathematicae*. První článek souvisí s kapitolou 4 disertační práce a

druhý článek s kapitolou 2. Tato autorova publikační činnost je dle mého názoru z hlediska udělení titulu PhD dostatečná.

Vzhledem ke všem uvedeným skutečnostem doporučuji předloženou disertační práci k obhajobě a rovněž doporučuji, aby po úspěšné obhajobě byl autorovi udělen titul PhD.

V Praze, 10. srpna 2017



Prof. RNDr. Jiří Neustupa, CSc.

Západočeská univerzita v Plzni

Doručeno: 16.08.2017

ZCU 023808/2017

listy: 4
druh:

přílohy:



zcupes103e3b5