FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI
STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2018

Paralelní algebraické předpodmiňovače

Pavla Fraňková[1], Petr Vaněk[2]

1 Úvod

Matematické modelování rozsáhlých reálných problémů vede ke vzniku soustav rovnic s velkým počtem neznámých. Rostoucí počet stupňů volnosti navíc zapříčiňuje zhoršování *podmíněnosti* soustav a k jejich řešení je třeba použít efektivní řešiče a předpodmiňovače soustav. Takové jsou metody typu *multigrid*.

Multigrid je široká třída řešičů, kterou spojují dva základní procesy: *zhlazování* a *korekce na hrubé úrovni*. Zhlazovače (jednoduché iterační metody) odstraňují složky chyby s vysokou frekvencí a umožňují provést dobrou restrikci vektoru chyby na hrubší úroveň diskretizace. Zde řešíme soustavu s menším počtem neznámých, čímž se odstraní zbylé složky chyby. Přechod mezi úrovněmi zajišťují operátory *restrikce* I^{T} a *prolongace* I.

Oblíbeným typem multigridu je algebraický multigird se zhlazenými agregacemi (SA-AMG), jehož autorem je Petr Vaněk (Vaněk et al. (2001)). Princip SA-AMG spočívá ve vytvoření *zhlazeného prolongátoru* $I = SP$. V první fázi je vytvořen pomocný prolongátor P rychlou agregační metodou. V druhé fázi je pomocný prolongátor zhlazen jedním krokem zhlazovače S.

2 Teoretická část

V naší práci (Fraňková a Vaněk (2015)) se zabýváme využitím metody zhlazených agregací v kombinaci s předpodmiňovačem typu BPX (Bramble et al. (1990)) pro řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Zatímco klasický multigrid je multiplikativní metoda, BPX je aditivní Schwarzova metoda a nabízí tedy přirozeně paralelní implementaci. Naším cílem je ukázat kriteria téměř optimální konvergence pro BPX předpodmiňovač $\mathcal{B}$ v kombinaci se zhlazenými agregacemi za podmínky, že síť je regulární.

Předpodmiňovač $\mathcal{B}$ je definován jako

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\bar{\sigma}_1}\tilde{Q}_{\,1} + \sum_{l=2}^{L}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}_l} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{l-1}}\right)\tilde{Q}_{\,l}, \tag{1}$$

kde pro $l = 1, \ldots, L$ definujeme: $\bar{\sigma}_l$ horní odhad $\rho(\mathbf{A})$, $Q_{\,l} : U \to U_l$ ortogonální projekce na hrubé prostory, $\tilde{Q}_{\,l} : U \to U_l$ jejich spektrální ekvivalence, L počet úrovní a U_l hrubé prostory.

Myšlenka důkazu: Maticová forma projekcí je definována jako $Q_l = I_l^1((I_l^1)^{\mathrm{T}} I_l^1)^{-1}(I_l^1)^{\mathrm{T}}$ a $\tilde{Q}_l = I_l^1 D_l^{-1}(I_l^1)^{\mathrm{T}}$, $D_l = diag((I_l^1)^{\mathrm{T}} I_l^1)$. V předpodmiňovači $\mathcal{B}$ byly projekce $Q_{\,l}$ nahrazeny jejich spektrálními ekvivalencemi $\tilde{Q}_{\,l}$ - chceme se vyhnout výpočtu inverzní Gramovy matice a tak pro báze na hrubém prostoru chceme, aby šla Gramova matice aproximovat výpočetně

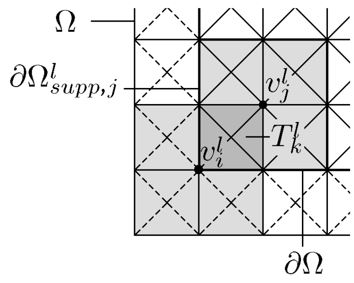
[1] studentka doktorského studijního programu Matematika, obor Aplikovaná matematika, e-mail: frankova@students.zcu.cz

[2] školitel dizertační práce

levnými l_2 projekcemi na hrubé prostory. Podle teorie multigridu musí být splněna *slabá aproximační podmínka* a k tomu je pro systém bázových funkcí $\{\varphi_i^l\}$ na hrubých prostorech potřeba zajistit ekvivalenci diskrétní a spojité L_2-normy:

$$\left\| \sum_i x_i \varphi_i^l \right\|_{L_2} \approx scaling \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Uniformní ekvivalenci norem ukážeme pomocí konstrukce makroelementů na modelové úloze, což je v našem případě eliptický problém definovaný na jednotkovém čtverci. Prolongátory jsou definovány podle teorie zhlazených agregací.



Obrázek 1: Makroelementy T_k^l

V případě regulární sítě bázové funkce na hrubé úrovni vytvoří systém makroelementů T_k^l (Obrázek 1), které obsahují průnik nosičů bázových funkcí. Definujeme pak referenční jednotkový čtverec $\hat{T}$, na kterém ukážeme, že pro $\hat{u} = \sum_{i=1}^4 \hat{\varphi}_i u_i$ platí

$$c\|\mathbf{u}\|^2 \leq \|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{T})} \leq C\|\mathbf{u}\|^2. \qquad (3)$$

Transformace z referenčního čtverce $\hat{T}$ pak zajistí ekvivalenci norem i na T_k^l. Konečný výsledek je pak kriterium

$$\frac{c_2}{C_1 L}\, a(u,u) \;\leq\; a(\mathcal{B}A\, u,\; u) \;\leq\; C_2 L\, a(u,u) \;\; \forall u \in U. \qquad (4)$$

3 Implementace a výsledky

Teoretické výsledky byly ověřeny na sérii numerických experimentů, které ukazují, že při použití předpodmiňovače na metodu sdružených gradientů získáme skoro uniformní konvergenci algoritmu, viz tabulky 1 a 2, kde je srovnání metody sdružených gradientů (CG), CG s předpodmíněním metodou BPX-SA (PCG) a její paralelní implementace. Implementace byla provedena pomocí Intel Fortranu 90 a OpenMP.

L		Čas výpočtu [s]			Počet it.	
	DOF	zhlaz.	CG	PCG	CG	PCG
3	81	0.000	0.000	0.000	12	14
4	729	0.000	0.000	0.000	35	18
5	6561	0.016	0.0312	0.015	99	22
6	59049	0.125	0.703	0.297	287	24
7	531441	1.250	13.156	3.390	>600	25

Tabulka 1: Výpočetní časy a počty iterací pro CG a PCG

L	Počet vláken					
	1	2	3	4	5	6
3	0.00	0.01	-	-	-	-
4	0.00	0.03	0.0	-	-	-
5	0.03	0.02	0.02	0.02	-	-
6	0.31	0.22	0.22	0.2	0.19	-
7	3.36	2.36	2.07	2.01	1.86	1.81

Tabulka 2: Výpočetní časy pro paralelní verzi PCG

Literatura

Bramble, J.M., Pasciak, J. E., Xu, J. (1990) Parallel Multilevel Preconditioners. *Mathematics of Computation*.

Fraňková, P., Mandel, J., Vaněk, P. (2015) Model Analysis of PBX preconditioner based on Smoothed Aggregtaion, *Applications of Mathematics*.

Vaněk, P., Brezina, M., Mandel, J. (2001) Convergence of Algebraic Multigrid Based on Smoothed Aggregation. *Numerische Mathematik*.