

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MECHANIKY

Kmitání turbinové lopatky v poli odstředivých sil

Autor

Patrik VLADAŘ

Vedoucí

Prof. Dr. Ing. Jan DUPAL

2018



Poděkování

Rád bych vyjádřil poděkování Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za motivaci nejen k dané problematice, ochotu a věnovaný čas při vedení této práce. Dále bych rád poděkoval rodině, bez jejíž podpory by tato práce nemohla vzniknout.

Abstrakt

Tato práce spočívá v modelování turbinové lopatky jako jednorozměrného kontinua. Hlavním cílem je určit a analyzovat vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů lopatky v rotujícím poli odstředivých sil. Lopatka je rozdělena na několik prvků. Prvním krokem je sestavení pohybových rovnic jednoho prvku a následné dosazení do celkových pohybových rovnic lopatky pomocí MKP. V modelu zohledňujeme deplanaci a tzv. membránové síly, jejichž odvození je věnována zvláštní kapitola. Důležitá část je výpočet deplanační funkce, popisující deplanaci. Probíhá diskretizaci deplanační funkce na průřezu pomocí MKP. Mimo jiné se práce zabývá výpočtem průřezových parametrů, obsažených v pohybových rovnicích systému.

Abstract

In this study is created a turbine blade model as one-dimensional continuum. Main objective of this study is to analyze natural frequencies and modes of vibration of a blade in rotating field of centrifugal forces. Blade is divided into several elements. The first step is to construct equations of motions for one element and then to put them into equations of motions of the whole blade using FEM. We take in account deplanation and so called membrane forces, that are derived in a special section. An important part is calculation of deplanation function, which describes deplanation. It is done using FEM discretization of deplanation function at cross-section. In this study are also calculated cross-section parameters, that appears in equations of motions.

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 4 |
| 2 | Sestavení pohybových rovnic | 4 |
| 2.1 | Kinetická energie | 4 |
| 2.2 | Potenciální energie deformace [4] | 9 |
| 2.3 | Aproximace posuvů | 10 |
| 2.4 | Dosazení do Lagrangeových rovnic | 12 |
| 3 | Membránové síly [2] | 15 |
| 4 | Permutace a sestavení celého modelu | 19 |
| 5 | Deplanační funkce [2] | 21 |
| 5.1 | Deplanace | 21 |
| 5.2 | Potenciální energie | 21 |
| 5.3 | Diskretizace deplanační funkce pomocí MKP | 23 |
| 5.4 | Transformace souřadnic [3] | 26 |
| 6 | Průřezové parametry | 32 |
| 7 | Aplikace | 34 |
| 7.1 | Počet prvků lopatky | 34 |
| 7.2 | Ztráta stability | 35 |
| 7.3 | Vlastní frekvence v závislosti na úhlové rychlosti otáčení | 36 |
| 7.4 | Vlastní tvary kmitů | 37 |
| 8 | Závěr | 40 |

1 Úvod

Cílem předložené práce je zpracování metodiky, algoritmu a softwaru pro modelování vibrací turbinové lopatky v poli odstředivých sil. Východiskem modelování je sestavení koeficientových matic (matice hmotnosti, tuhosti, atd.) konečného prvku a provedení modální analýzy celé lopatky v závislosti na provozních otáčkách. Model bude vytvořen pomocí 1D prvků typu nosník, v nichž jsou respektovány tahové, ohybové a krutové deformace. Velká výhoda tohoto modelu oproti modelům, používajícím 3D prvky, je snížení počtů stupňů volnosti systému a tudíž urychlení řešení problému kmitání lopatek a značná úspora počítačové paměti. Model je možné použít nejen pro modelování jednotlivých lopatek, ale celých turbín a turbosoustrojí. V prvním přiblížení budeme uvažovat lopatku prismatickou, což znamená, že má po celé délce konstantní průřez. Materiál lopatky uvažujeme homogenní a izotropní s Youngovým modulem pružnosti v tahu E a modulem pružnosti ve smyku G .

2 Sestavení pohybových rovnic

Souřadnicový systém ξ, η, ζ , který budeme v modelu používat, rotuje společně s lopatkou okolo osy η úhlovou rychlostí ω . Pro sestavení pohybových rovnic systému využijeme Lagrangeovy rovnice II. druhu, které mají tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pd}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

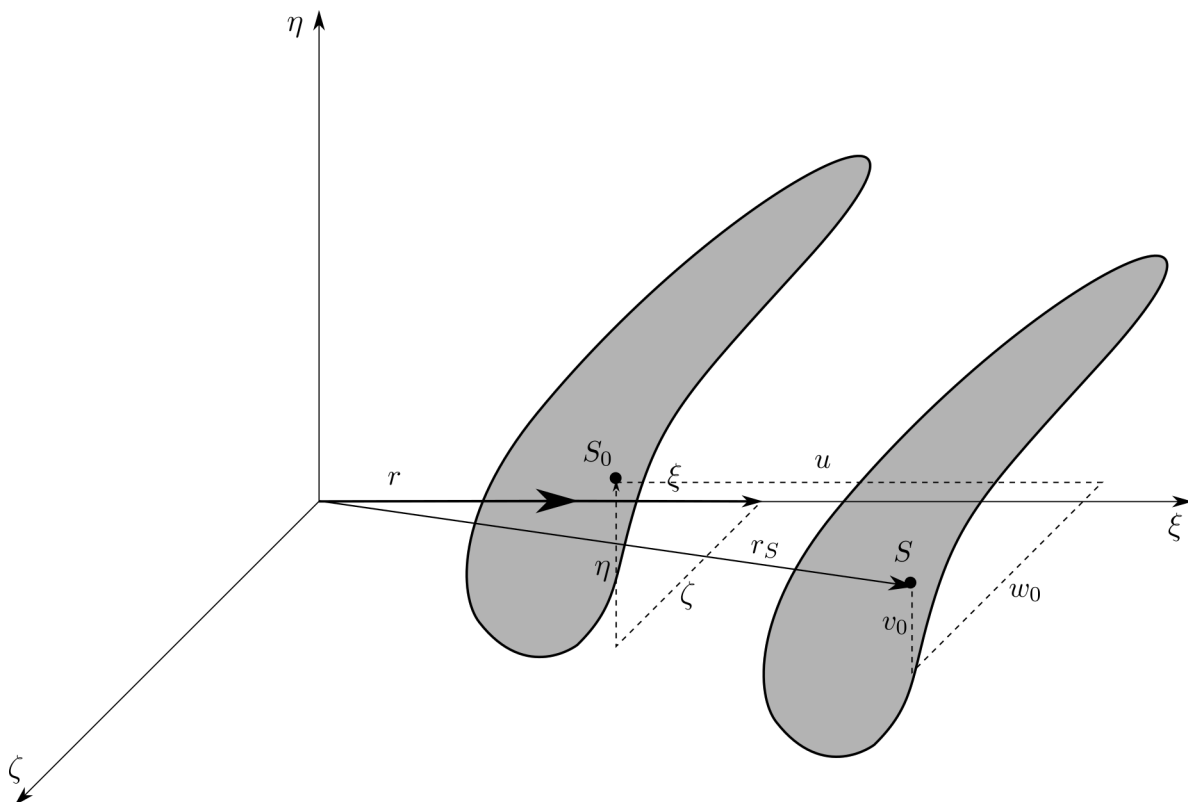
kde n je počet stupňů volnosti, E_k je kinetická energie systému, E_{pd} potenciální energie deformace, q_i je zobecněná souřadnice a Q_i je zobecněná síla pro i -tou zobecněnou souřadnici. Jako východisko modelování určíme kinetickou a potenciální energii jednoho konečného prvku délky l .

2.1 Kinetická energie

Kinetickou energii prvku lze vyjádřit jako

$$E_K = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \iint_A \dot{\mathbf{r}}_L^T \dot{\mathbf{r}}_L dV, \quad (2.2)$$

kde L je libovolný bod prvku o souřadnicích ξ, η, ζ . Hustota materiálu ρ může být vytknuta před integrálem, protože předpokládáme homogenní materiál, tudíž je hustota ve všech místech stejná. Pro výpočet E_K bude nutné vyjádřit radiusvektor \mathbf{r}_L a následně jej zderivovat. Ještě před vyjádřením polohového vektoru bodu L vyjádříme polohový vektor středu smyku průřezu, ve kterém se bod L nachází. Střed smyku je bod průřezu, který se při čistém krutu neposouvá.



Obrázek 1: Neposunutý a posunutý průřez

Radiusvektor středu smyku S zobrazeného průřezu po deformaci má tvar [2]

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} r + \xi + u \\ \eta_S + v_0 \\ \zeta_S + w_0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Pro přehlednost obrázku bylo zavedeno $u = u_T - (\eta_S - \eta_T)\psi + (\zeta_S - \zeta_T)\vartheta$. Zpětným dosazením do \mathbf{r}_S dostáváme

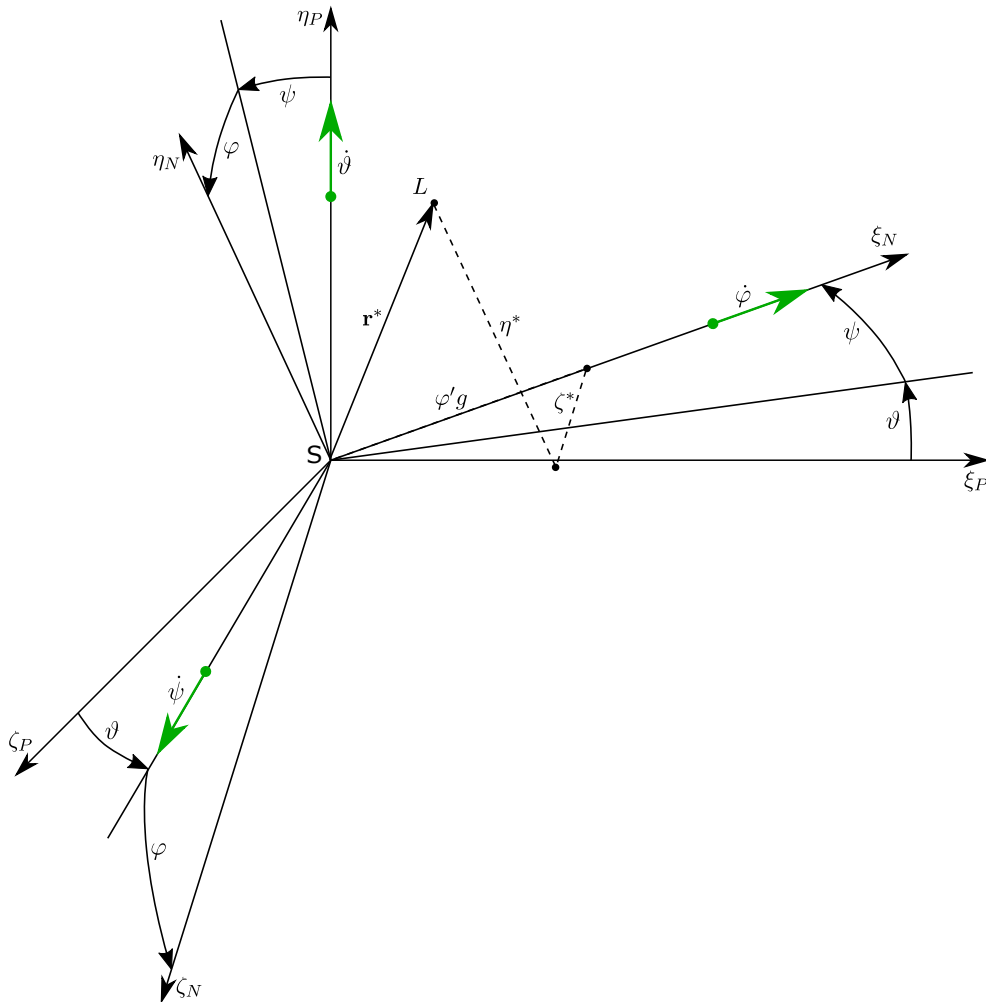
$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} r + \xi + u_T - (\eta_S - \eta_T)\psi + (\zeta_S - \zeta_T)\vartheta \\ \eta_S + v_0 \\ \zeta_S + w_0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

- r počátek prvku,
- $r + \xi$ ξ -souřadnice středu smyku před deformací,
- η_S eta-souřadnice středu smyku před deformací,
- ζ_S zeta-souřadnice středu smyku před deformací,
- η_T eta-souřadnice těžiště před deformací,
- ζ_T eta-souřadnice těžiště před deformací,
- u_T posuv od tahu ve směru ξ ,
- v_0 posuv od čistého ohybu ve směru osy η ,
- w_0 posuv od čistého ohybu ve směru osy ζ ,

symboly ψ a ϑ jsou úhly natočení okolo os ζ a η a při malých posuvech pro ně platí vztahy

$$\psi = \frac{\partial v_0}{\partial \xi} = v'_0, \quad \vartheta = -\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = -w'_0. \quad (2.5)$$

Nyní je třeba vyjádřit polohový vektor libovolného bodu průřezu L .



Obrázek 2: Natočení okolo S

Na obrázku je souřadnicový systém ξ_P, η_P, ζ_P , který je rovnoběžný se systémem ξ, η, ζ a posunutý do středu smyku dané roviny. Za využití Cardanových úhlů je systém natočen o precesi ψ , nutaci ϑ a vlastní rotaci φ a tak vznikne systém ξ_N, η_N, ζ_N se středem v S . V tomto systému je poloha bodu L určena radiusvektorem

$$\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} \varphi' g \\ \eta^* \\ \zeta^* \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Bod L se podle předpokladu posune o hodnotu deplance ve směru osy ξ_N . Hodnota deplance je dána součinem tzv. deplanační funkce $g(\eta, \zeta)$ (viz kapitolu 5) a poměrného zkroucení $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$. Pomocí přenásobení transformační maticí \mathbf{T} , odvozené na základě cosinové věty

pro sferický trojúhelník, jsme schopni přetransformovat \mathbf{r}^* do systému ξ_P, η_P, ζ_P a pak snadno získáme obecnou polohu bodu L v systému ξ, η, ζ

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_S + \mathbf{T}\mathbf{r}^*. \quad (2.7)$$

Transformační matice má tvar

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta - \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & \sin\varphi\cos\vartheta + \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\varphi \\ -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi\sin\psi & \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Polohový vektor \mathbf{r}_L má tvar

$$\mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} r + \xi + u_T - (\eta_S - \eta_T)\psi + (\zeta_S - \zeta_T)\vartheta + \cos\psi\cos\vartheta\varphi'g + (\sin\varphi\sin\vartheta - \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi)\eta^* + (\sin\varphi\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi)\zeta^* \\ \eta_S + v + \sin\psi\varphi'g + \cos\psi\cos\varphi\eta^* + -\cos\psi\sin\varphi\zeta^* \\ \zeta_S + w + -\cos\psi\sin\vartheta\varphi'g + (\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi\sin\psi)\eta^* + (\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi)\zeta^* \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Polohový vektor \mathbf{r}_L je vyjádřen v systému ξ, η, ζ . Připomeňme, že souřadnicový systém ξ, η, ζ je pevně spojen s lopatkou, takže rotuje společně s ní úhlovou rychlostí

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Vektor absolutní rychlosti bodu L má tvar

$$\dot{\mathbf{r}}_L = \frac{d\mathbf{r}_L}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L. \quad (2.11)$$

Nyní jsme schopni vyjádřit kinetickou energii, která je následně dosazena do Lagrangeových rovnic.

2.2 Potenciální energie deformace [4]

Pro určení potenciální energie deformace vyjdeme z Hookeova zákona pro trojosou napjatost, který má tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_\zeta \\ \tau_{\eta\zeta} \\ \tau_{\xi\zeta} \\ \tau_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta \\ \gamma_{\eta\zeta} \\ \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu a ν je Poissonova konstanta. Předpokládejme, že lopatka nepřenáší napětí v příčném směru, tzn. $\sigma_\eta = \sigma_\zeta = 0$ a průmět obrysu lopatky do roviny $\eta\zeta$ nemění svůj tvar, tzn. $\gamma_{\eta\zeta} = 0$. Pak prvky tenzoru deformace, ze kterých budeme vycházet $\varepsilon_\xi, \gamma_{\xi\zeta}$ a $\gamma_{\xi\eta}$, můžeme vyjádřit jako

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi} = u'_T - (\eta - \eta_T)\psi' + (\zeta - \zeta_T)\vartheta' + \varphi''g + \varphi'g', \quad (2.13)$$

$$\gamma_{\xi\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \varphi'(g_\eta - \zeta + \zeta_S), \quad (2.14)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = \varphi'(g_\zeta + \eta - \eta_S). \quad (2.15)$$

Členy g', g_η, g_ζ jsou parciální derivace deplanační funkce podle souřadnic ξ, η, ζ . Poslední člen rovnice (2.13) je nulový, jelikož se deplanační funkce u prismatické lopatky podél souřadnice ξ nemění (je pro každý průřez stejná, protože průřez je konstantní). Maticový vztah (2.12) představuje 6 rovnic. Odečtením 2. a 3. rovnice získáme

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_\zeta = -\nu\varepsilon_\xi. \quad (2.16)$$

Z Hookeova zákona také přímo plyne vztah pro smyková napětí

$$\tau_{\eta\zeta} = 0, \quad (2.17)$$

$$\tau_{\xi\zeta} = G\gamma_{\xi\zeta}, \quad (2.18)$$

$$\tau_{\xi\eta} = G\gamma_{\xi\eta}, \quad (2.19)$$

kde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.20)$$

je modul pružnosti ve smyku. Hookeův zákon lze pro tuto úlohu zjednodušit na tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\zeta} \\ \tau_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{bmatrix},$$

což maticově zapíšeme jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.21)$$

Pro potenciální energii deformace platí vztah

$$\begin{aligned} E_{pd}^e &= \frac{1}{2} \iiint_V \lambda dV = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \iint_A (E\varepsilon_\xi^2 + G\gamma_{\xi\eta}^2 + G\gamma_{\xi\zeta}^2) dAd\xi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\lambda = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ je hutota deformační energie. Dosazením vztahů (2.13), (2.14), (2.15) do (2.22) dostáváme

$$\begin{aligned} E_{pd}^e &= \frac{1}{2} \int_0^l [E(Au_T'^2 + I_{\bar{\zeta}}v_0''^2 + I_{\bar{\eta}}w_0''^2 + I_\varphi\varphi''^2 \\ &+ 2D_{\bar{\eta}\bar{\zeta}}v_0''w_0'' - 2ED_{\varphi\eta}v_0''\varphi'' - 2ED_{\varphi\zeta}w_0''\varphi'') + GI_k\varphi'^2] d\xi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Symbol I_k , který vystupuje ve vztahu (2.23) je modul odporu v krutu

$$I_k = \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S)^2 + (g_\zeta + \eta - \eta_S)^2] dA. \quad (2.24)$$

Zbylé symboly jsou popsány v kapitole 6.

2.3 Aproximace posuvů

Tuto úlohu nelze řešit analyticky, proto zavádíme aproximaci třech posunutí a třech natočení

$$v_0(\xi) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_1, \quad (2.25)$$

$$\psi(\xi) = \boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_1, \quad (2.26)$$

$$w_0(\xi) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q}_2, \quad (2.27)$$

$$\vartheta(\xi) = \boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q}_2, \quad (2.28)$$

$$u_T(\xi) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_3, \quad (2.29)$$

$$u_T'(\xi) = \boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_3, \quad (2.30)$$

$$\varphi(\xi) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_4, \quad (2.31)$$

$$\varphi'(\xi) = \boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_4, \quad (2.32)$$

kde

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} v_0(0) \\ \psi(0) \\ v_0(l) \\ \psi(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} w_0(0) \\ \vartheta(0) \\ w_0(l) \\ \vartheta(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} u_T(0) \\ u_T'(0) \\ u_T(l) \\ u_T'(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \varphi(l) \\ \varphi'(l) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3].$$

Ukažme nyní, jak jsme získali aproximační vztahy výše například na aproximaci tahu $u(\xi)$ a relativního prodloužení $u'(\xi)$. Zvolme následující aproximaci tahu kubickým polynomem

$$u_T(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3, \quad (2.33)$$

maticově zapsáno jako

$$u_T(\xi) = \Phi \mathbf{c}. \quad (2.34)$$

Parciální derivací podle ξ dostáváme

$$u_T'(\xi) = \Phi' \mathbf{c}, \quad (2.35)$$

což rozepíšeme a tím získáme

$$u_T'(\xi) = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2. \quad (2.36)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

je matice konstant. Vyjádřením hodnoty $u(\xi)$ a $u'(\xi)$ v počátku ($\xi = 0$) a na konci ($\xi = l$) prvku dostáváme

$$u_T(0) = c_0, \quad (2.38)$$

$$u_T'(0) = c_1, \quad (2.39)$$

$$u_T(l) = c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3, \quad (2.40)$$

$$u_T'(l) = c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2. \quad (2.41)$$

Maticově zapsáno

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{S} \mathbf{c}. \quad (2.42)$$

Vynásobením maticí \mathbf{S}^{-1} zleva dostaneme

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_3. \quad (2.43)$$

Matici konstant \mathbf{c} v podobě (2.43) dosadíme do (2.34) a získáme (2.29). Při dosazení (2.43) do (2.35) dostaneme (2.30). Obdobným způsobem lze získat zbylých 6 aproximací.

2.4 Dosazení do Lagrangeových rovnic

Nyní je známa kinetická energie a potenciální energie deformace a můžeme přejít k sestavení pohybových rovnic prvku. V Lagrangeových rovnicích se postupně derivuje podle vektorů \mathbf{q}_i , $\dot{\mathbf{q}}_i$ a času, kde $i = 1, 2, 3, 4$. Již polohový vektor \mathbf{r}_L (vztah (2.9)) je poměrně rozsáhlý. Jeho časovou derivací pro získání rychlosti, dosazením do E_K a další derivací podle \mathbf{q}_i , $\dot{\mathbf{q}}_i$ a času v Lagrangeových rovnicích vzniknou složité vztahy, které jsou velmi rozsáhlé a proto je neuvádíme. Potřebné, výše zmíněné operace byly provedeny symbolicky v softwaru Mapple. Na závěr úprav byla provedena linearizace, což znamená náhradu goniometrických funkcí prvním členem Taylorovského rozvoje $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$, atd. Výsledné rovnice lze zapsat maticově jako

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_e + \omega \widetilde{\mathbf{G}}_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e + (\widetilde{\mathbf{K}}_e + \widetilde{\mathbf{K}}_{De}) \tilde{\mathbf{q}}_e = \tilde{\mathbf{f}}_{De} + \tilde{\mathbf{f}}_M. \quad (2.44)$$

Jednotlivé matice vystupující ve vztahu (2.44) nazveme

$\widetilde{\mathbf{M}}_e$ matice hmotnosti elementu,
 $\widetilde{\mathbf{G}}_e$ matice gyroskopických účinků elementu,
 $\widetilde{\mathbf{K}}_e$ matice tuhosti elementu,
 $\widetilde{\mathbf{K}}_{De}$ cirkulační matice elementu,
 $\tilde{\mathbf{f}}_{De}$ vektor cirkulačních sil elementu,
 $\tilde{\mathbf{f}}_M$ vektor membránových sil elementu.

Index e značí, že se matice vztahují k jednomu konečnému prvku a označení \sim znamená, že před dosazením do celkových matic \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{K} , \mathbf{K}_D , \mathbf{f}_D , popisujících chování celé soustavy (všech prvků), bude nutné provést permutaci jednotlivých prvků matic a jí odpovídající permutaci vektorů $\tilde{\mathbf{q}}_e$ na \mathbf{q}_e a $\tilde{\mathbf{f}}_{De}$ na \mathbf{f}_{De} . Při využití aproximačních vztahů (2.25)-(2.32) mají vektory $\tilde{\mathbf{q}}_e$, $\tilde{\mathbf{f}}_{De}$ a matice $\widetilde{\mathbf{M}}_e$, $\widetilde{\mathbf{G}}_e$, $\widetilde{\mathbf{K}}_e$ a $\widetilde{\mathbf{K}}_{De}$ tvar

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{De} = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}S_\eta\mathbf{i}_0^0 \\ \mathbf{S}^{-T}A(r\mathbf{i}_0^0 + \mathbf{i}_0^1) \\ \mathbf{S}^{-T}D_{\eta*\zeta}\mathbf{i}_0^0 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_e = \rho \begin{bmatrix} AS^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} + I_{\zeta}^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1} & D_{\eta\zeta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & -S_{\eta^*}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} \\ D_{\eta\zeta}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1} & APS^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} + I_{\zeta}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & S_{\zeta^*}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & AS^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ -S_{\eta^*}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} & S_{\zeta^*}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & [I_{\eta} + I_{\zeta} + A(\eta_S^2 + \zeta_S^2 - 2\eta_S\zeta_S)]\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} EI_{\zeta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} & ED_{\eta\zeta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{\varphi\eta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} \\ ED_{\eta\zeta}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} & EI_{\eta}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{\varphi\zeta}\mathbf{PS}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & EAS^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ -ED_{\varphi\eta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} & -ED_{\varphi\zeta}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & EI_{\varphi}\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{22}\mathbf{S}^{-1} + GI_K\mathbf{S}^{-T}\mathbf{I}_{11}\mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_e = 2\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I_{\bar{\zeta}} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{10} \mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} & -D_{\bar{\eta} \bar{\zeta}} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{10} \mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & A \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & S_{\eta^*} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} \\ I_{\bar{\zeta}} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{10} \mathbf{S}^{-1} & D_{\bar{\eta} \bar{\zeta}} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{01} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} & -S_{\eta^*} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{De} = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} -I_{\bar{\zeta}} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{11} \mathbf{S}^{-1} & S_{\zeta^*} \bar{\zeta} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & S_{\eta^*} \mathbf{S}^{-T} (r \mathbf{I}_{10} + \mathbf{I}_{10}^1) \mathbf{S}^{-1} \\ S_{\zeta^*} \bar{\zeta} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{11} \mathbf{S}^{-1} & -A \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} - S_{\eta^*} \bar{\zeta} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{11} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & S_{\zeta^*} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} (r \mathbf{I}_{10} + \mathbf{I}_{10}^1 - \mathbf{I}_{00}) \mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ S_{\eta^*} \mathbf{S}^{-T} (r \mathbf{I}_{01} + \mathbf{I}_{01}^1) \mathbf{S}^{-1} & S_{\zeta^*} \mathbf{S}^{-T} (r \mathbf{I}_{01} + \mathbf{I}_{01}^1 - \mathbf{I}_{00}) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & -I_{\varphi} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{11} \mathbf{S}^{-1} + [(I_{\eta} - I_{\zeta}) - A(\eta_S^2 - 2\eta_S \bar{\eta} + \zeta_S \bar{\zeta})] \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_{00} \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Členy \mathbf{I}_{ab} , \mathbf{I}_{ab}^c jsou matice řádu 4 a \mathbf{i}_a^c je vektor rozměru 4×1 . Tyto matice byly zavedeny pro zpřehlednění a znamenají

$$\mathbf{I}_{ab} = \int_0^l \Phi^{(a)T}(\xi) \Phi^{(b)}(\xi) d\xi, \quad (2.51)$$

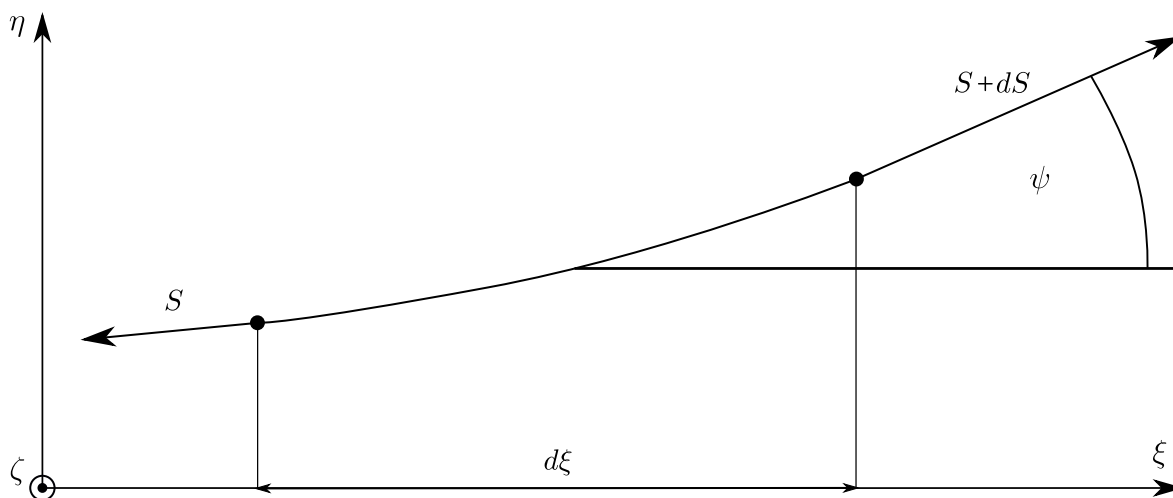
$$\mathbf{I}_{ab}^c = \int_0^l \xi^c \Phi^{(a)T}(\xi) \Phi^{(b)}(\xi) d\xi, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{i}_a^c = \int_0^l \xi^c \Phi^{(a)T}(\xi) d\xi. \quad (2.53)$$

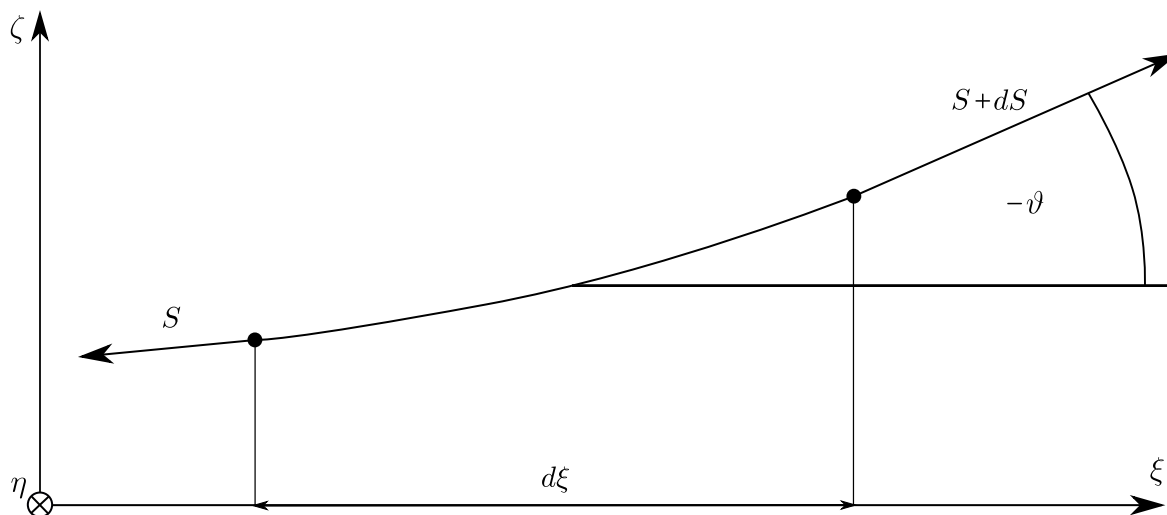
Indexy a a b jsou řády derivací aproximační matice Φ a index c je řád mocniny ξ . Vektor $\tilde{\mathbf{f}}_M$ budeme odvozovat v následující kapitole. Zbylé členy z (2.47)-(2.50) budou popsány v kapitole 6.

3 Membránové síly [2]

V modelu lopatky vznikají tzv. membránové síly, které působí ve směrech η , ζ . Jsou způsobeny osovou silou, přenášenou v lopatce. Tyto síly zvyšují tuhost lopatky. Na následujících dvou obrázcích je zobrazení osově síly v rovině $\xi\eta$, resp. $\xi\zeta$.



Obrázek 3: Osová síla v rovině $\xi\eta$



Obrázek 4: Osová síla v rovině $\xi\zeta$

Na obr. 3 resp. 4 je znázorněn diferenciálně malý kousek osy lopatky. Složku výslednice sil působících ve směru η , resp. ζ označme dV , resp. dW .

$$dV = S \sin(\psi) + \frac{\partial S \sin(\psi)}{\partial \xi} d\xi - S \sin(\psi) = \frac{\partial S \sin(\psi)}{\partial \xi} d\xi. \quad (3.1)$$

Pro malý úhel ψ vztah linearizujeme ($\sin(\psi) \approx \psi$) a derivujeme jako součin

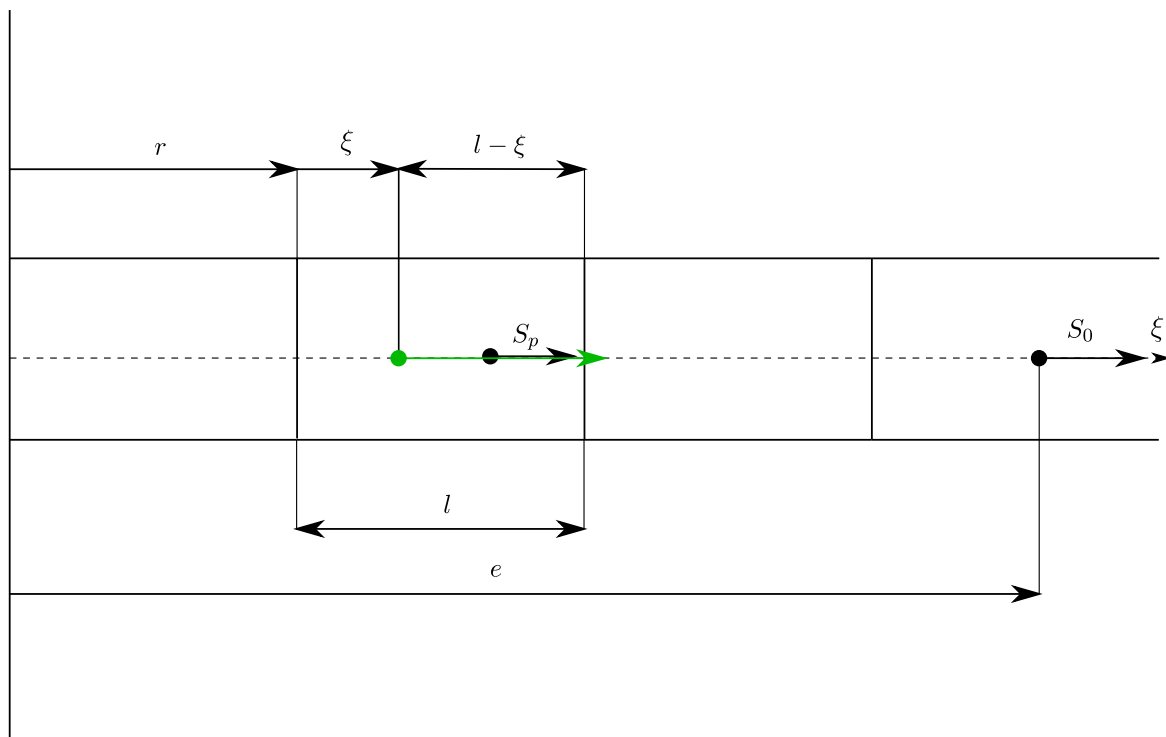
$$dV = \frac{\partial(S\psi)}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} S \right) d\xi. \quad (3.2)$$

Za využití vztahu (2.5) můžeme psát

$$dV = (S'v'_0 + Sv''_0)d\xi. \quad (3.3)$$

Podobně pro směr ζ můžeme psát

$$dW = (S'w'_0 + Sw''_0)d\xi. \quad (3.4)$$



Obrázek 5: Osová síla, působící v lopatce

Přenášenou sílu S rozdělíme na dvě části. První složka S_0 je odstředivá síla od zbylých prvků lopatky. Druhá složka S_p je odstředivá síla od zbytku prvku. Celková osová odstředivá síla v libovolné vzdálenosti od osy rotace má tvar

$$S(\xi) = S_0 + S_p = \Delta m_0 e \omega^2 + \Delta m_p \left(r + \xi + \frac{l - \xi}{2} \right) \omega^2, \quad (3.5)$$

Δm_0 je hmotnost zbylých prvků lopatky, e je souřadnice jejich těžiště. Δm_p je hmotnost zbytku prvku, v němž zjišťujeme $S(\xi)$, l je délka tohoto prvku. Vyjádřením Δm_p a úpravou dostáváme

$$S(\xi) = \Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 \left(r + \frac{\xi}{2} + \frac{l}{2} \right), \quad (3.6)$$

$$S(\xi) = \Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2). \quad (3.7)$$

Nyní vyjádříme derivaci

$$S'(\xi) = \frac{\partial S}{\partial \xi} = -\rho A \omega^2 (r + \xi). \quad (3.8)$$

Získanou derivaci dosadíme do 3.2, čímž získáme membránové síly, působící na diferenciálně malý kousek lopatky ve směru osy η

$$dV = \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) v'_0 + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) v''_0 \right] \right\} d\xi \quad (3.9)$$

a ve směru osy ζ

$$dW = \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) w'_0 + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) w''_0 \right] \right\} d\xi. \quad (3.10)$$

Vyjádříme nyní virtuální práci membránových sil působících v celém prvku lopatky tak, že udělíme soustavě diferenciálně malý posuv δv , resp. δw a zintegrujeme virtuální práci vykonanou při tomto posuvu přes délku prvku

$$\delta V = \int_0^l \delta v \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) v' + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) v'' \right] \right\} d\xi, \quad (3.11)$$

$$\delta W = \int_0^l \delta w \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) w' + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) w'' \right] \right\} d\xi. \quad (3.12)$$

Za použití aproximačních vztahů (2.26), resp. (2.27) dostaneme výraz

$$\delta V = \int_0^l \delta \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}^{-T} \Phi^T \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) \Phi' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_1 + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) \Phi'' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_1 \right] \right\} d\xi, \quad (3.13)$$

$$\delta W = \int_0^l \delta \mathbf{q}_2^T \mathbf{P}^T \mathbf{S}^{-T} \Phi^T \left\{ -\rho A \omega^2 (r + \xi) \Phi' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + \left[\Delta m_0 e \omega^2 + \rho A \omega^2 r (l - \xi) + \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - \xi^2) \Phi'' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 \right] \right\} d\xi. \quad (3.14)$$

Pro zjednodušení použijeme integrální matice (2.51), (2.52) a virtuální práce dostanou tvar

$$\delta V = \delta \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_1, \quad (3.15)$$

$$\delta W = \delta \mathbf{q}_2^T \mathbf{P}^T \mathbf{S}^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2. \quad (3.16)$$

Vektorem zobecněných posuvů $\delta \mathbf{q}_1$, resp. $\delta \mathbf{q}_2$ vynásobíme zleva rovnici (3.15), resp. (3.16) a dostaneme tak membránovou sílu, působící na lopatkový prvek

$$\mathbf{f}_1^M = \omega^2 \mathbf{S}^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_1, \quad (3.17)$$

respektive

$$\mathbf{f}_2^M = \omega^2 \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2. \quad (3.18)$$

Celkový vektor membránových sil má tvar

$$\tilde{\mathbf{f}}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2^M \\ \mathbf{f}_2^M \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Získali jsme vektor zobecněných sil, který stojí na pravé straně pohybových rovnic, jako jeden z vnějších silových účinků. Vzhledem k faktu, že tento vektor je lineární funkcí \mathbf{q}_1 a resp. \mathbf{q}_2 , je možné ho přepsat ve tvaru součiny

$$\tilde{\mathbf{f}}_M = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^M & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2^M & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

kde

$$\mathbf{M}_1^M = S^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \quad (3.21)$$

a

$$\mathbf{M}_2^M = \mathbf{P} \mathbf{S}^{-T} \left[\Delta m_p e \omega^2 \mathbf{I}_{02} + \rho A \omega^2 r l \mathbf{I}_{02} - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{02}^1 + \frac{\rho A \omega^2 l^2}{2} \mathbf{I}_{02}^1 - \frac{\rho A \omega^2}{2} \mathbf{I}_{02}^2 - \rho A \omega^2 r \mathbf{I}_{01} - \rho A \omega^2 \mathbf{I}_{01}^1 \right] \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}. \quad (3.22)$$

Výraz (3.20) zapíšeme maticově a vynásobíme jej -1 , aby byl ve tvaru pro dosazení na levou stranu pohybových rovnic

$$-\tilde{\mathbf{f}}_M = -\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_e^M \tilde{\mathbf{q}}_e \quad (3.23)$$

a matici $\tilde{\mathbf{M}}_e^M$ nazveme maticí membránových sil. Je násobena vektorem $\tilde{\mathbf{q}}_e$, stejně jako matice tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}_e$ a cirkulační matice $\tilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{De}$. Fyzikální význam membránové matice je zvyšování tuhosti lopatky. Pohybové rovnice (2.44) mají nyní modifikovaný tvar

$$\tilde{\mathbf{M}}_e \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_e + \omega \tilde{\mathbf{G}}_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e + (\tilde{\mathbf{K}}_e + \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{De} + \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_e^M) \tilde{\mathbf{q}}_e = \tilde{\mathbf{f}}_{De}, \quad (3.24)$$

kde na pravé straně zbyl pouze člen $\tilde{\mathbf{f}}_{De}$, vektor cirkulačních sil.

4 Permutace a sestavení celého modelu

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.4, řazení zobecněných posuvů ve vektoru $\tilde{\mathbf{q}}_e$, jemuž odpovídají i struktury matic rozměru 16×16 a silového vektoru $\tilde{\mathbf{f}}_{De}$ (16×1), je nepraktické. Z hlediska výpočtu je výhodné, aby se prvních osm členů $\tilde{\mathbf{q}}_e$ vztahovalo ke zobecněným posuvům prvního uzlu a zbylých osm členů ke druhému uzlu. Snadno toho docílíme pomocí permutační

matice \mathbf{J} , pro kterou platí

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \\ w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(l) \\ u'(l) \\ \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \varphi(l) \\ \varphi'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \\ \varphi(0) \\ \vartheta(0) \\ \psi(0) \\ u'(0) \\ \varphi'(0) \\ u(l) \\ v(l) \\ w(l) \\ \varphi(l) \\ \vartheta(l) \\ \psi(l) \\ u'(l) \\ \varphi'(l) \end{bmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{q}_e. \quad (4.1)$$

Touto permutací není chování lopatky nijak ovlivněno. Vektor \mathbf{q}_e je sestaven v požadovaném vhodném pořadí. Dosadíme tedy vztah (4.1) do pohybové rovnice (3.24) a vynásobíme maticí \mathbf{J}^T celý výraz zleva. Vznikne

$$\mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{M}}_e \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_e + \omega \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{G}}_e \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{K}}_{De} \mathbf{J} + \omega^2 \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{M}}_e^M \mathbf{J}) \mathbf{q}_e = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{f}}_{De}. \quad (4.2)$$

Z posledního vztahu lze snadno vidět, jak permutovat jednotlivé matice. Vynásobením permutační maticí zprava, resp. k ní transponovanou zleva, získáme matice, jejichž řádky a sloupce odpovídají požadovanému pořadí, které je dáno vektorem \mathbf{q}_e . Tyto matice mají tvar

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{M}}_e \mathbf{J}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{G}}_e \mathbf{J}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{J}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{K}_{De} = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{K}}_{De} \mathbf{J}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{M}_e^M = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{M}}_e^M \mathbf{J}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{f}_{De} = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{f}}_{De}. \quad (4.8)$$

Vztahy (4.3)-(4.8) dosadíme do (4.2) a získáme tak finální tvar pohybových rovnic elementu, který použijeme pro sestavení pohybových rovnic celé lopatky

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \omega^2 \mathbf{M}_{De} + \omega^2 \mathbf{M}_e^M) \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_{De}. \quad (4.9)$$

Všechny matice a vektory z posledního vztahu (4.9) použijeme pro sestavení celkových matic hmotnosti, gyroskopických účinků, tuhosti, cirkulační matice a vektoru cirkulačních sil, jak je běžné při aplikaci MKP, a tím získáme model celé lopatky.

5 Deplanační funkce [2]

5.1 Deplanace

Deplanace je jev, který by se doslovně přeložil asi jako “znerovinění”. Znamená odchylku bodu průřezu od roviny kolmé na osu prvku v důsledku zkroucení. Před zatížením leží body v jedné rovině (rovina příčného řezu) a po zkroucení již tomu tak není. Deplanační funkce g se poprvé objevuje ve vzorci (2.6), ve kterém provazuje zkroucení φ' s posuvem ve směru ξ . Cílem je nyní zjistit tvar deplanační funkce a souřadnice středu smyku η_S, ζ_S .

5.2 Potenciální energie

V celém modelu lopatky je uvažováno zatížení tahem, ohybem a krutem. Pro separátní výpočet deplanační funkce však budeme uvažovat čistý krut a volné kroucení (bez zabránění deplanace). Při výpočtu deplanační funkce začneme tím, že vyjádříme potenciální energii

$$E_p = E_{pd} + E_{pv}, \quad (5.1)$$

přičemž E_{pd} je potenciální energie deformace a E_{pv} je energie vnějších sil (konkrétně zde momentu, působícího na kraji prutu). Potenciální energie vnějších sil, nebo také jejich záporně vzatá práce má tvar

$$E_{pv} = - \int_0^l \varphi' M_\xi d\xi, \quad (5.2)$$

kde M_ξ je vnější zátěžný moment. Pro diferenciálně malý prvek o délce $l = d\xi$ je potenciální energie vnějších sil

$$E_{pv} = -\varphi' M_\xi d\xi. \quad (5.3)$$

Vztahy pro deformace (2.13)-(2.15) se změní při výše zmíněných podmínkách z tvaru

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = u'_T - (\eta - \eta_T)\psi' + (\zeta - \zeta_T)\vartheta' + \varphi''g + \varphi'g', \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \varphi'(g_\eta - \zeta + \zeta_S), \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = \varphi'(g_\zeta + \eta - \eta_S), \end{aligned}$$

na tvar

$$\varepsilon_\xi = 0, \quad (5.4)$$

$$\gamma_{\xi\zeta} = \varphi'(g_\eta - \zeta + \zeta_S), \quad (5.5)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \varphi'(g_\zeta + \eta - \eta_S). \quad (5.6)$$

První tři členy deformace ε_ξ jsou nulové, protože neuvažujeme tah a ohyb. Poslední člen $\varphi'g'$ zanedbáme, stejně jako jsme to udělali již při výpočtu potenciální energie pro Lagrangeovy rovnice, protože se deplanační funkce podél osy ξ nemění. Člen $\varphi''g$ je taktéž roven nule, jelikož při volném kroucení prismatického prutu je φ lineární funkcí ξ a proto $\varphi'' = 0$. Potenciální energie deformace bude mít za uvažování (5.4) tvar

$$E_{pd} = \frac{1}{2} \int_0^l \iint_A G(\gamma_{\xi\eta}^2 + \gamma_{\xi\zeta}^2) dAd\xi. \quad (5.7)$$

Po dosazení (5.5) a (5.6) do (5.7) dostáváme pro diferenciálně malý prvek o délce $d\xi$ vztah

$$E_{pd} = \frac{1}{2}G\varphi'^2 \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S)^2 + (g_\zeta + \eta - \eta_S)^2] dAd\xi. \quad (5.8)$$

Vztah (5.8) byl v modifikované podobě převzat z [1]. Dosadíme (5.3) a (5.8) do (5.1), vydělíme rovnici $d\xi$ a tím získáme vztah pro potenciální energii diferenciálně malého prvku

$$\frac{E_p}{d\xi} = \frac{1}{2}G\varphi'^2 \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S) + (g_\zeta + \eta - \eta_S)] dA - \varphi' M_\xi. \quad (5.9)$$

Je nutné, aby byl tento prvek v silové rovnováze ve směru osy ξ a momentové rovnováze vzhledem k osám η a ζ , což lze zajistit následujícími podmínkami [2]

$$\iint_A g dA = 0, \quad (5.10)$$

$$\iint_A g\eta dA = 0, \quad (5.11)$$

$$\iint_A g\zeta dA = 0. \quad (5.12)$$

Z funkcionálu (5.9) a podmínek (5.10)-(5.12) sestavíme dohromady modifikovaný funkcionál, z něhož budeme hledat extrém. Má tvar

$$I = \frac{1}{2}G\varphi'^2 \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S)^2 + (g_\zeta + \eta - \eta_S)^2] dA - \varphi' M_\xi + \lambda_1 \iint_A g dA + \lambda_2 \iint_A g\eta dA + \lambda_3 \iint_A g\zeta dA. \quad (5.13)$$

Funkcionál (5.13) obsahuje 7 neznámých φ' , g , η_S , ζ_S , λ_1 , λ_2 , λ_3 , které budou podléhat variaci. Členy násobené jednotlivými variacemi musí být rovny nule. Uved' me člen násobený variací $\delta\varphi'$

$$(GI_k\varphi' - M_\xi)\delta\varphi' = 0. \quad (5.14)$$

Člen násobený variací δg

$$G\varphi'^2 \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S) \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta g) + (g_\zeta + \eta - \eta_S) \frac{\partial}{\partial \zeta}(\delta g)] dA + \lambda_1 \iint_A \delta g dA + \lambda_2 \iint_A \delta g \eta dA + \lambda_3 \iint_A \delta g \zeta dA = 0. \quad (5.15)$$

Člen násobený variací $\delta\eta_S$

$$\delta\eta_S (-G\varphi'^2) \iint_A [(g_\zeta + \eta - \eta_S) dA] = 0. \quad (5.16)$$

Člen násobený variací $\delta\zeta_S$

$$\delta\zeta_S(-G\varphi'^2) \iint_A [(g_\eta - \zeta + \zeta_S)dA = 0. \quad (5.17)$$

Člen násobený variací $\delta\lambda_1$

$$\delta\lambda_1 \iint_A g dA = 0. \quad (5.18)$$

Člen násobený variací $\delta\lambda_2$

$$\delta\lambda_2 \iint_A g\eta dA = 0. \quad (5.19)$$

Člen násobený variací $\delta\lambda_3$

$$\delta\lambda_3 \iint_A g\zeta dA = 0. \quad (5.20)$$

Vztah (5.14) je na zbylých šesti rovnicích nezávislý, není s nimi nijak provázaný. Vyjadřuje momentovou podmínku ve směru osy ξ . Zbylých šest vztahů tvoří soustavu šesti rovnic o šesti neznámých. Ze vztahů (5.19) a (5.20) plyne fakt, že deviační deplanační momenty

$$D_{\varphi\eta} = \iint_A g\eta dA = 0, \quad (5.21)$$

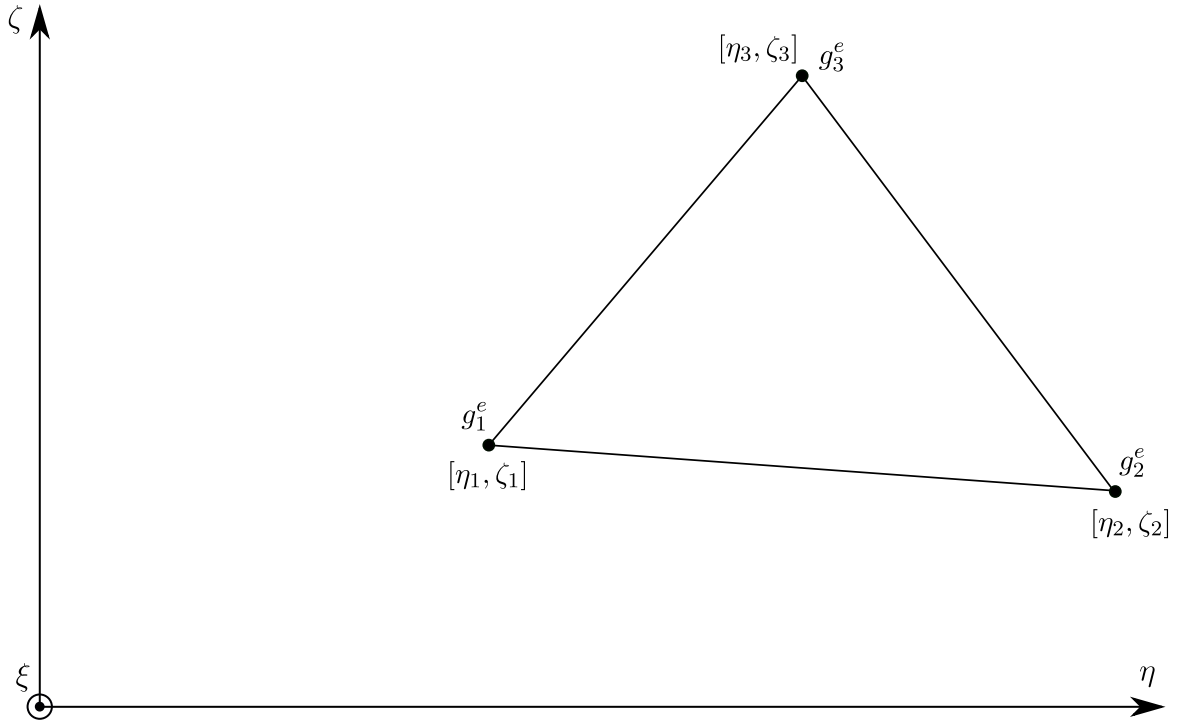
$$D_{\varphi\zeta} = \iint_A g\zeta dA = 0. \quad (5.22)$$

5.3 Diskretizace deplanační funkce pomocí MKP

Předpokládáme, že deplanační funkce je na průřezu spojitá. Řešení provedeme pomocí MKP. Vytvoříme na průřezu lopatky trojúhelníkovou síť, kde každý trojúhelník představuje jeden konečný prvek a jeho tři vrcholy jsou uzly, v nichž budeme určovat hodnotu deplanační funkce g . Na každém trojúhelníku má deplanační funkce lineární průběh. Označme

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

vektor globálních hodnot deplanační funkce. g_i je hodnota deplanační funkce v uzlu i , $i = 1, 2, \dots, m$, přičemž m je celkový počet uzlů na průřezu.



Obrázek 6: Trojúhelníkový prvek

Deplanační funkce je závislá na souřadnicích η a ζ a my ji budeme lineárně aproximovat

$$g(\eta, \zeta) = a_1 + a_2\eta + a_3\zeta, \quad (5.24)$$

což lze maticově zapsat jako

$$g(\eta, \zeta) = \boldsymbol{\psi}\mathbf{a}, \quad (5.25)$$

kde

$$\boldsymbol{\psi} = [1 \quad \eta \quad \zeta], \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

vyjádříme hodnotu deplanační funkce v uzlových bodech

$$g_1 = [1 \quad \eta_1 \quad \zeta_1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad g_2 = [1 \quad \eta_2 \quad \zeta_2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad g_3 = [1 \quad \eta_3 \quad \zeta_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Maticově dohromady zapsáno

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{S}_e\mathbf{a}, \quad (5.28)$$

kde

$$\mathbf{g}_e = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \eta_3 & \zeta_3 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

přičemž \mathbf{g}_e je vektor lokálních hodnot deplanační funkce. Vztah (5.28) vynásobíme inverzní maticí \mathbf{S}_e^{-1} zleva a dostaneme vztah pro vektor konstant.

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_e^{-1}\mathbf{g}_e, \quad (5.30)$$

který dosadíme do (5.25). Tím vznikne

$$g(\eta, \zeta) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e. \quad (5.31)$$

Vektor lokálních hodnot deplanační funkce \mathbf{g}_e lze vyjádřit pomocí globálního vektoru a lokalizační matice \mathbf{L}_e , která má rozměr $(3 \times m)$, na každém řádku má jedno pole na pozici i rovno 1 a zbylá rovna 0. Pozice hodnoty 1 závisí na tom, která globální hodnota g_i se nachází na příslušném uzlu trojúhelníku. Platí tedy

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{g}. \quad (5.32)$$

Vztah (5.32) dosadíme do (5.31) a získáme tak finální tvar lineární aproximace deplanační funkce na jednom prvku

$$g(\eta, \zeta) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g}. \quad (5.33)$$

Nyní můžeme vyjádřit také derivace a variaci deplanační funkce, objevující se ve vztazích (5.15)-(5.20)

$$g_\eta = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \eta} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g}, \quad (5.34)$$

$$g_\zeta = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \zeta} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g}, \quad (5.35)$$

$$\delta g = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \boldsymbol{\psi}^T, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\delta g) = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \eta}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\delta g) = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \zeta}. \quad (5.38)$$

Vztahy (5.33)-(5.38) dosadíme do vztahů (5.15)-(5.20) při zavedení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_\eta &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \eta}, & \boldsymbol{\psi}_\zeta &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \zeta}, \\ \delta g_\eta &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta g), & \delta g_\zeta &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(\delta g) \end{aligned}$$

pro zpřehlednění a získáme tak

$$\begin{aligned} G\varphi^2 \left(\sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\eta^T \boldsymbol{\psi}_\eta dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} - \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \zeta \boldsymbol{\psi}_\eta^T dA + \zeta_S \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\eta^T dA + \right. \\ \left. \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\zeta^T \boldsymbol{\psi}_\zeta dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} + \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \eta \boldsymbol{\psi}_\zeta^T dA - \eta_S \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\zeta^T dA \right) + \\ \lambda_1 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}^T dA + \lambda_2 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \eta \boldsymbol{\psi}^T dA + \lambda_3 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \iint_{A_e} \zeta \boldsymbol{\psi}^T dA = 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$-G\varphi'^2 \left(\sum_e \iint_{A_e} \psi_\zeta dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} + A\eta_T - A\eta_S \right) = 0, \quad (5.40)$$

$$-G\varphi'^2 \left(\sum_e \iint_{A_e} \psi_\eta dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} - A\zeta_T + A\zeta_S \right) = 0, \quad (5.41)$$

$$\sum_e \iint_{A_e} \psi dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0, \quad (5.42)$$

$$\sum_e \iint_{A_e} \eta \psi dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0, \quad (5.43)$$

$$\sum_e \iint_{A_e} \zeta \psi dA \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0. \quad (5.44)$$

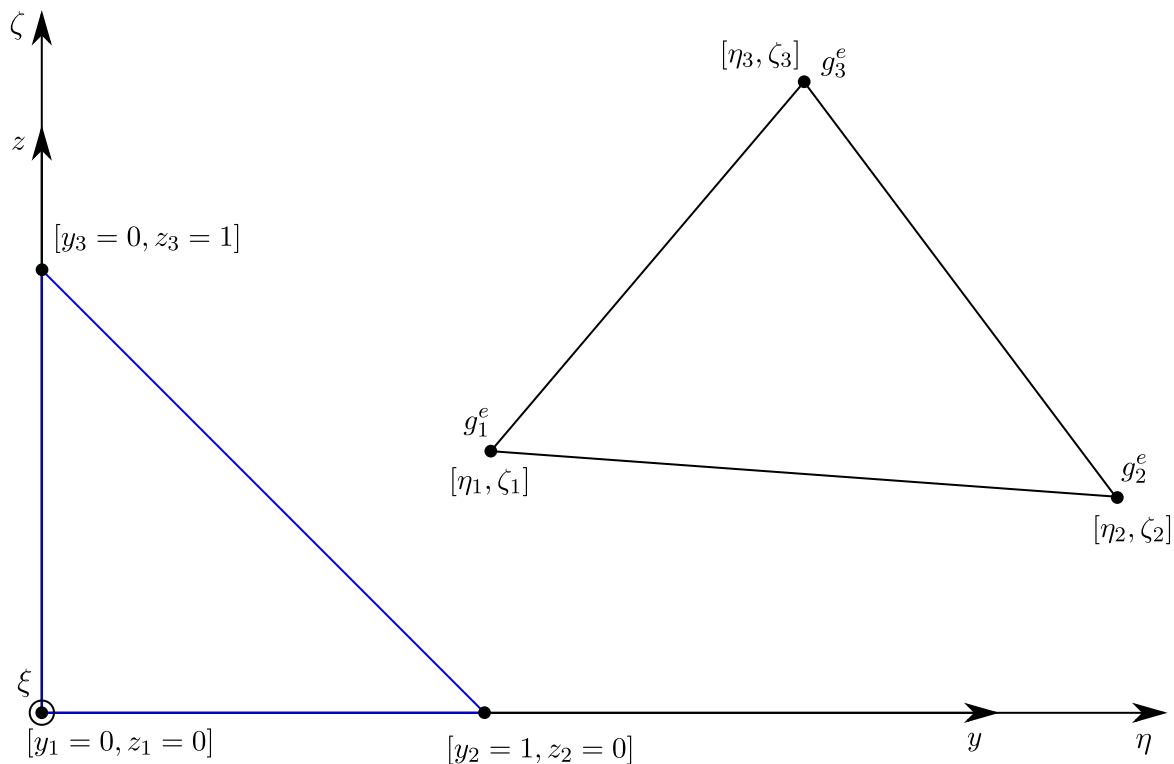
První tři rovnice vydělíme členem $G\varphi'^2$, který určitě není nulový. Pokud by byl, ztrácela by úloha smysl, protože bez zkroucení se deplanace neprojevuje. Po vydělení zavedeme v první rovnici členy

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{G\varphi'^2} \quad (5.45)$$

a budeme je dále uvažovat jako neznámé. Počet neznámých závisí na počtu uzlů ve vytvořené trojúhelníkové síti m . Je tedy m neznámých hodnot deplanační funkce v uzlech, $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \eta_S, \zeta_S$, dohromady $m + 5$ rovnic pro $m + 5$ neznámých.

5.4 Transformace souřadnic [3]

Souřadnice uzlů trojúhelníkové sítě jsou vyjádřené v souřadnicovém systému η, ζ . Pro usnadnění následujících výpočtů, především integrace přes plochu trojúhelníkového prvku, zavedeme transformovaný normovaný systém y, z , v němž budeme provádět další operace.



Obrázek 7: Transformace prvku

Mezi jednotlivými systémy platí následující transformační vztahy

$$\eta(y, z) = \eta_1 + \bar{\eta}_2 y + \bar{\eta}_3 z, \quad (5.46)$$

$$\zeta(y, z) = \zeta_1 + \bar{\zeta}_2 y + \bar{\zeta}_3 z, \quad (5.47)$$

kde

$$\bar{\eta}_2 = \eta_2 - \eta_1,$$

$$\bar{\eta}_3 = \eta_3 - \eta_1,$$

$$\bar{\zeta}_2 = \zeta_2 - \zeta_1,$$

$$\bar{\zeta}_3 = \zeta_3 - \zeta_1.$$

Jacobiho matice tohoto zobrazení má tvar

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_2 & \bar{\eta}_3 \\ \bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

a její determinant (jakobián)

$$\det(\mathbf{J}_e) = \bar{\eta}_2 \bar{\zeta}_3 - \bar{\zeta}_2 \bar{\eta}_3. \quad (5.49)$$

Zobrazení lze zapsat maticově jako

$$\eta = \mathbf{Y} \boldsymbol{\eta}_e, \quad (5.50)$$

$$\zeta = \mathbf{Y} \boldsymbol{\zeta}_e, \quad (5.51)$$

kde

$$\mathbf{Y} = [1 \quad y \quad z], \quad \boldsymbol{\eta}_e = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \bar{\eta}_2 \\ \bar{\eta}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_e = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix}.$$

Vztahy (5.46) a (5.47) dosadíme do (5.24), tím vznikne vyjádření deplanační funkce v závislosti na y, z

$$g(y, z) = a_1 + a_2(\eta_1 + \bar{\eta}_2 y + \bar{\eta}_3 z) + a_3(\zeta_1 + \bar{\zeta}_2 y + \bar{\zeta}_3 z), \quad (5.52)$$

maticově zapsáno

$$g(y, z) = [1 \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 0 & \bar{\eta}_2 & \bar{\zeta}_2 \\ 0 & \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \mathbf{X}_e \mathbf{a}, \quad (5.53)$$

vztah (5.53) ještě jednou upravíme dosazením (5.30) na

$$g = \mathbf{Y} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e. \quad (5.54)$$

Pro dosazení do (5.39)-(5.44) musíme vyjádřit parciální derivace g podle η a ζ

$$g_\eta = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad (5.55)$$

$$g_\zeta = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}. \quad (5.56)$$

Pro určení parciálních derivací y a z podle η a ζ , vystupujících ve vztazích (5.55), (5.56), musíme vyjádřit inverzní zobrazení k zobrazení (5.46), (5.47)

$$y = \frac{(\eta - \eta_1)\bar{\zeta}_3 - (\zeta - \zeta_1)\bar{\eta}_3}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad (5.57)$$

$$z = \frac{(\zeta - \zeta_1)\bar{\eta}_2 - (\eta - \eta_1)\bar{\zeta}_2}{\det(\mathbf{J}_e)}. \quad (5.58)$$

Nyní můžeme provést parciální derivace potřebné pro vztahy (5.55), (5.56)

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\bar{\zeta}_3}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = -\frac{\bar{\eta}_3}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\bar{\zeta}_2}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = -\frac{\bar{\eta}_2}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad (5.59)$$

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{Y}_y \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e, \quad (5.60)$$

$$g_z = \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{Y}_z \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e. \quad (5.61)$$

Dosadíme (5.59)-(5.61) do (5.55), (5.56), které tak dostanou tvar

$$g_\eta = \frac{(\bar{\zeta}_3 \mathbf{Y}_y - \bar{\zeta}_2 \mathbf{Y}_z) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e}{\det(\mathbf{J}_e)}, \quad (5.62)$$

$$g_\zeta = \frac{(\bar{\eta}_2 \mathbf{Y}_z - \bar{\eta}_3 \mathbf{Y}_y) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e}{\det(\mathbf{J}_e)}. \quad (5.63)$$

Platí

$$\boldsymbol{\psi}(\eta, \zeta) = \mathbf{Y}(y, z)\mathbf{X}_e. \quad (5.64)$$

Plochu normovaného trojúhelníku, která je právě díky normalizaci neměnná, označme

$$A^* = \frac{1}{2}[m^2]. \quad (5.65)$$

Vyjádříme nyní integrály vystupující v rovnicích (5.39)-(5.44). Postup získání prvního z nich podrobně rozepíšeme.

$$\mathbf{r}_{e1} = \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi} dA = \iint_{A^*} \mathbf{Y} dA^* |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{X}_e = \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{Y} dz dy |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{X}_e = |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{u}^T \mathbf{X}_e. \quad (5.66)$$

Zbylé Integrály mají tvar

$$\mathbf{r}_{e2} = \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\eta dA = \frac{1}{2} \text{sgn}[\det(\mathbf{J}_e)] (\bar{\zeta}_3 \mathbf{e}_2^T + \bar{\zeta}_2 \mathbf{e}_3^T) \mathbf{X}_e, \quad (5.67)$$

$$\mathbf{r}_{e3} = \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\zeta dA = \frac{1}{2} \text{sgn}[\det(\mathbf{J}_e)] (\bar{\eta}_3 \mathbf{e}_2^T + \bar{\eta}_2 \mathbf{e}_3^T) \mathbf{X}_e, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{r}_{e4} = \iint_{A_e} \eta \boldsymbol{\psi} dA = |\det(\mathbf{J}_e)| (\bar{\eta}_1 \mathbf{u}^T + \bar{\eta}_2 \mathbf{v}^T + \bar{\eta}_3 \mathbf{w}^T) \mathbf{X}_e, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{r}_{e5} = \iint_{A_e} \zeta \boldsymbol{\psi} dA = |\det(\mathbf{J}_e)| (\bar{\zeta}_1 \mathbf{u}^T + \bar{\zeta}_2 \mathbf{v}^T + \bar{\zeta}_3 \mathbf{w}^T) \mathbf{X}_e, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{r}_{e6} = \iint_{A_e} \zeta \boldsymbol{\psi}_\eta dA = \frac{1}{6} \text{sgn}[\det(\mathbf{J}_e)] [(3\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_3^2) \mathbf{e}_2^T - (3\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_3) \mathbf{e}_3^T], \quad (5.71)$$

$$\mathbf{r}_{e7} = \iint_{A_e} \eta \boldsymbol{\psi}_\zeta dA = \frac{1}{6} \text{sgn}[\det(\mathbf{J}_e)] [(3\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_3^2) \mathbf{e}_2^T - (3\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3) \mathbf{e}_3^T], \quad (5.72)$$

$$\mathbf{I}_e^{\eta\eta} = \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\eta^T \boldsymbol{\psi}_\eta dA = \frac{\mathbf{X} \mathbf{D}_\eta \mathbf{X}_e}{|\det(\mathbf{J}_e)|}, \quad (5.73)$$

$$\mathbf{I}_e^{\zeta\zeta} = \iint_{A_e} \boldsymbol{\psi}_\zeta^T \boldsymbol{\psi}_\zeta dA = \frac{\mathbf{X} \mathbf{D}_\zeta \mathbf{X}_e}{|\det(\mathbf{J}_e)|}, \quad (5.74)$$

kde

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_3^2 & -\bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 \\ 0 & -\bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 & \bar{\eta}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_\zeta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}_3^2 & -\bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_3 \\ 0 & -\bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_3 & \bar{\zeta}_2^2 \end{bmatrix}$$

a \mathbf{e}_i je i -tý sloupec jednotkové matice $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{3,3}$. Vztahy (5.66)-(5.74) dosadíme do rovnic

(5.39)-(5.44) a ty tak společně s využitím (5.45) získají tvar, v němž se již nevyskytují integrály

$$\begin{aligned}
& \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{I}_e^{\eta\eta} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} - \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e6}^T + \zeta_S \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e2}^T + \\
& \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{I}_e^{\zeta\zeta} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} + \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e7}^T - \eta_S \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e3}^T + \\
& \bar{\lambda}_1 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e1}^T + \bar{\lambda}_2 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e4}^T + \bar{\lambda}_3 \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e5}^T = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$-\mathbf{r}_{e3} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} + A(\eta_S - \eta_T) = 0, \tag{5.76}$$

$$\mathbf{r}_{e2} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} + A(\zeta_S - \zeta_T) = 0, \tag{5.77}$$

$$\mathbf{r}_{e1} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0, \tag{5.78}$$

$$\mathbf{r}_{e4} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0, \tag{5.79}$$

$$\mathbf{r}_{e5} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{g} = 0. \tag{5.80}$$

Tyto rovnice lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix}
\sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} (\mathbf{I}_e^m + \mathbf{I}_e^\zeta) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e3} & \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e2} & \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e1} & \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e4} & \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{r}_{e5} \\
-\mathbf{r}_{e3} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{r}_{e2} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{r}_{e1} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{r}_{e4} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{r}_{e5} \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{L}_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{g} \\
\eta s \\
\zeta s \\
\bar{\lambda}_1 \\
\bar{\lambda}_2 \\
\bar{\lambda}_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} (\mathbf{r}_{e6}^T - \mathbf{r}_{e7}^T) \\
A \eta^T \\
A \zeta^T \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (5.81)$$

6 Průřezové parametry

V pohybových rovnicích se objevuje několik symbolů, které nyní můžeme snadno vypočítat pomocí zavedených normalizovaných souřadnic. U všech budeme sčítat příspěvky od jednotlivých trojúhelníků. Jedná se o plochu

$$A = \sum_e \iint_{A_e} d\eta d\zeta = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \int_0^1 \int_0^{1-y} dz dy = \frac{1}{2} \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)|, \quad (6.1)$$

statický moment plochy k ose η

$$\begin{aligned} S_\eta &= \sum_e \iint_{A_e} \zeta d\eta d\zeta = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \int_0^1 \int_0^{1-y} \zeta_1 + \bar{\zeta}_2 y + \bar{\zeta}_3 z dz dy = \\ &= \sum_e \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{Y} dz dy \boldsymbol{\zeta}_e = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{u}^T \boldsymbol{\zeta}_e. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pomocí statického momentu k ose η můžeme snadno vyjádřit souřadnici těžiště průřezu

$$\zeta_T = \frac{S_\eta}{A} = \frac{2 \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{u}^T \boldsymbol{\zeta}_e}{|\det(\mathbf{J}_e)|}, \quad (6.3)$$

obdobně získáme statický moment plochy k ose ζ

$$S_\zeta = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{u}^T \boldsymbol{\eta}_e \quad (6.4)$$

a druhou souřadnici těžiště

$$\eta_T = \frac{S_\zeta}{A} = \frac{2 \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{u}^T \boldsymbol{\eta}_e}{|\det(\mathbf{J}_e)|}. \quad (6.5)$$

Ze statických momentů S_η , S_ζ získáme statické momenty k osám, procházejícím středem smyku, S_{η^*} , S_{ζ^*} podle vztahů

$$S_{\eta^*} = S_\eta - A\zeta_S, \quad S_{\zeta^*} = S_\zeta - A\eta_S. \quad (6.6)$$

Kvadratický moment k ose η dostane díky použití normalizovaných souřadnic tvar

$$I_\eta = \sum_e \iint_{A_e} \zeta^2 dA = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \boldsymbol{\eta}_e^T \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} dz dy \boldsymbol{\eta}_e = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{J}_{00} \boldsymbol{\eta}_e, \quad (6.7)$$

kde

$$\mathbf{J}_{00} = \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} dz dy = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Kvadratický moment k ose ζ se vyjádří obdobně

$$I_{\zeta} = \sum_e \iint_{A_e} \eta^2 dA = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \zeta_e^T \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} dz dy \zeta_e = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \zeta_e^T \mathbf{J}_{00} \zeta_e. \quad (6.9)$$

Součtem I_{η} a I_{ζ} je polární moment setrvačnosti

$$I_p = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| (\boldsymbol{\eta}_e + \boldsymbol{\zeta}_e)^T \mathbf{J}_{00} (\boldsymbol{\eta}_e + \boldsymbol{\zeta}_e). \quad (6.10)$$

S využitím Steinerovy věty lze vyjádřit také kvadratické momenty k těžištním osám průřezu $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Jelikož je kvadratický moment k ose procházející těžištěm minimální ve vztahu se objeví znaménko '–'

$$I_{\bar{\eta}} = I_{\eta} - A \zeta_T^2, \quad I_{\bar{\zeta}} = I_{\zeta} - A \eta_T^2. \quad (6.11)$$

Dále je třeba určit deviační moment

$$D_{\eta\zeta} = \sum_e \iint_{A_e} \eta \zeta dA = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{J}_{00} \boldsymbol{\zeta}_e. \quad (6.12)$$

Z posledního vztahu vyjádříme opět pomocí Steinerovy věty se znaménkem '–' deviační moment k osám, protínajícím těžiště průřezu $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$

$$D_{\bar{\eta}\bar{\zeta}} = D_{\eta\zeta} - A \eta_T \zeta_T. \quad (6.13)$$

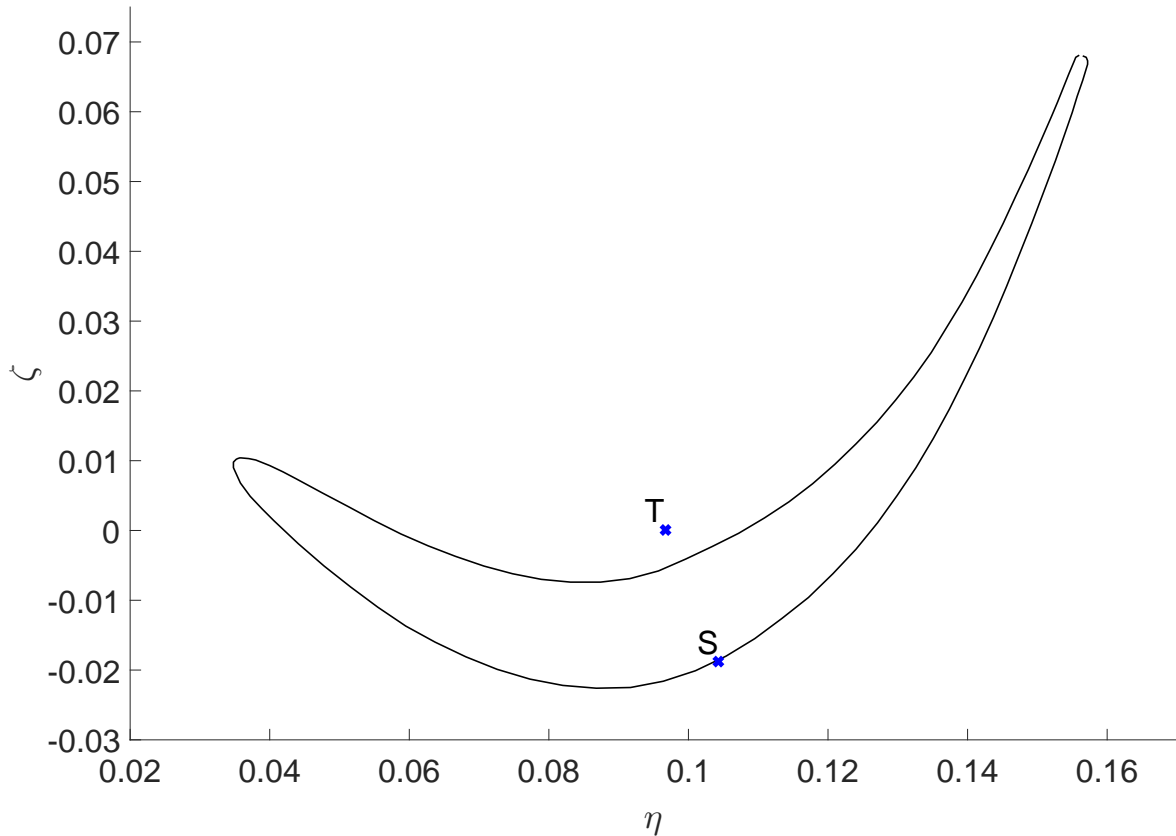
Poslední člen, který je třeba vyjádřit pro pohybové rovnice je deplanační kvadratický moment, do nějž za g dosadíme z rovnice (5.54)

$$I_{\varphi} = \sum_e \iint_{A_e} g^2 dA = \sum_e |\det(\mathbf{J}_e)| \mathbf{g}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{J}_{00} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{g}_e. \quad (6.14)$$

Nyní jsou vyjádřeny všechny členy, potřebné pro pohybové rovnice jednoho lopatkového elementu (4.9), čímž je ukončena teoretická část této práce.

7 Aplikace

V této sekci budeme aplikovat odvozené teoretické vztahy na konkrétním případě. Uvažujme pevně dané vstupní hodnoty: lopatku o délce 1 [m] a průřezu (obr. 8) vyrobené z oceli charakterizované parametry $E = 210$ [GPa], $G = 80$ [GPa] a mezi kluzu $R_e = 0,3$ [GPa].



Obrázek 8: Průřez lopatky

Bod T je těžiště lopatky, bod S je střed smyku průřezu. Cílem je zjistit vlastní frekvence soustavy a jim odpovídající vlastní tvary kmitu. Toho docílíme pomocí modální analýzy v 2N prostoru sestavením matic

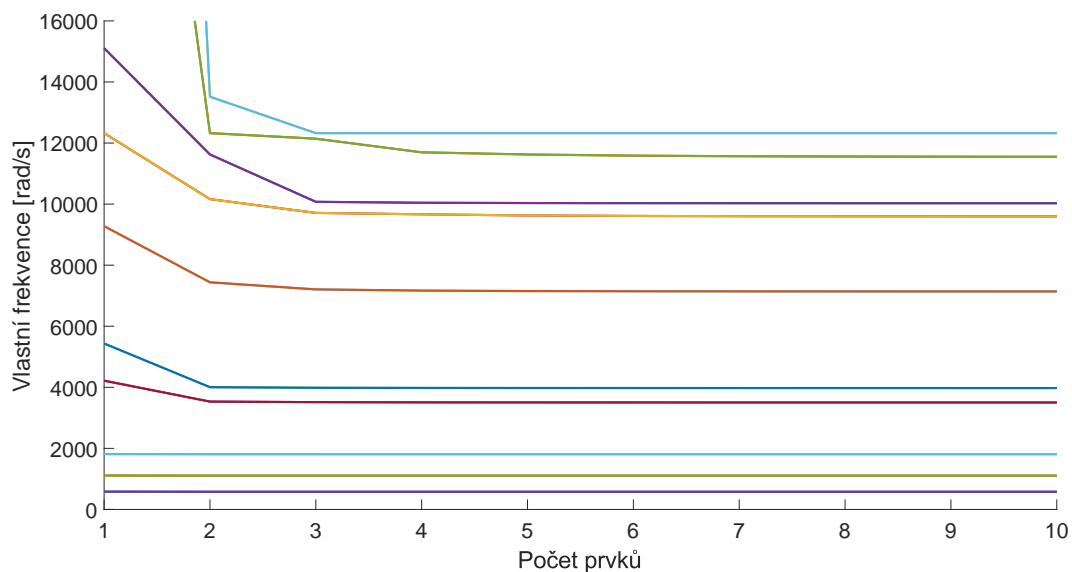
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \omega \mathbf{G} + \mathbf{B} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \omega^2 \mathbf{M}^M - \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}, \quad (7.1)$$

kde $\mathbf{B} = 10^{-7} \cdot \mathbf{K}$ je matice proporcionálního tlumení, a zjištěním vlastních čísel a vlastních vektorů matice \mathbf{A} . Budeme se dále zabývat dvěma možnými způsoby uložení lopatky. První z nich (*uložení 1*) umožňuje zkrut φ' a tudíž deplanaci $\varphi'g$ v počátku lopatky. Druhý (*uložení 2*) deplanaci ve vetknutí neumožňuje.

7.1 Počet prvků lopatky

Nejprve zjistíme, na kolik prvků je vhodné lopatku rozdělit. Tento základní odhad provedeme s případem *uložení 1*. Na grafu (9) je zobrazena závislost vlastních frekvencí na počtu použitých konečných prvků. Zobrazené hodnoty byly vypočteny při hodnotě úhlové rychlosti otáčení

lopatky $\omega = 314 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = 3000 [\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}] = 50 [\text{Hz}]$, což jsou běžné provozní otáčky turbín.



Obrázek 9: Vlastní frekvence v závislosti na počtu prvků lopatky

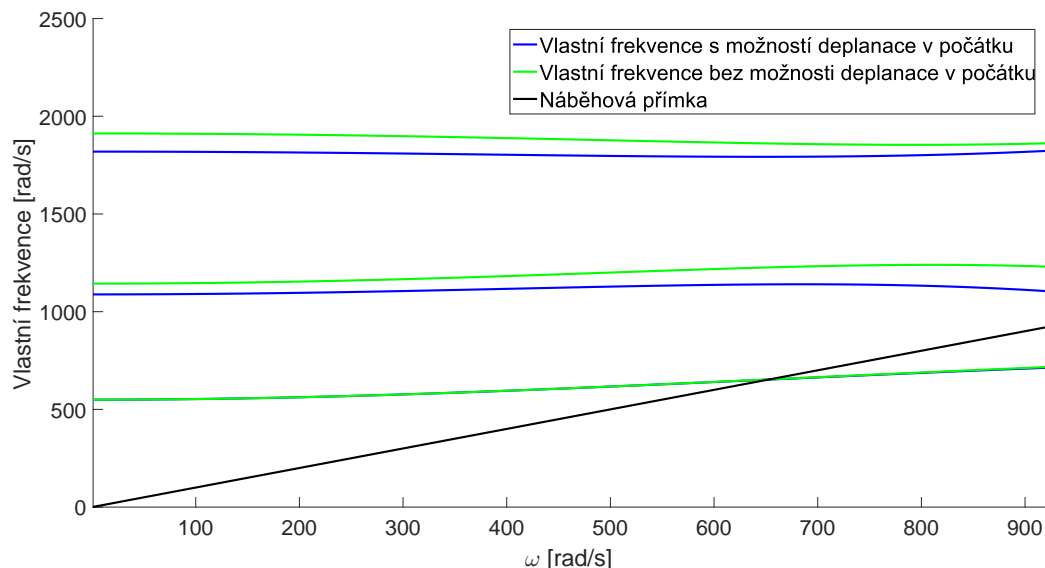
Jeden prvek má 16 stupňů volnosti. V jednom uzlu jsou jimi posuvy do 3 směrů (u, v, w), 3 natočení (φ, ϑ, ψ), zkrut φ' a relativní prodloužení u' . V prvním uzlu, jímž prochází osa rotace je lopatka vetknutá a tím ztrácí 6 stupňů volnosti (zbydou zde 2 možné nenulové zobecněné posuvy $u'(0)$ a $\varphi'(0)$). Pokud budeme uvažovat lopatku pouze jako jeden prvek, bude mít systém 10 stupňů volnosti, tudíž bude mít deset vlastních frekvencí. Pro možnost srovnání s případy, kdy je počet prvků vyšší, srovnáváme v grafu pouze prvních 10 nejnižších vlastních frekvencí. Vyšší vlastní frekvence nemůžou ohrozit bezpečný chod lopatky, jelikož úhlové rychlosti otáčení lopatky, která by se jim vyrovnala, není možné dosáhnout. Z grafu lze vyčíst, že se zvyšujícím se počtem prvků konvergují vlastní frekvence k určitým hodnotám. Pro prvních deset vlastních frekvencí se tomu tak děje už při použití pěti prvků. Pro další analýzy výsledků nám proto rozdělení lopatky na pět prvků postačí a s drobnějším dělením nebudeme pracovat. Celá lopatka má pak pouze 42 stupňů volnosti (pro *uložení 2* jen 41), což představuje oproti 3D modelování velkou úsporu paměti počítače a urychlení výpočtů.

7.2 Ztráta stability

Po provedení modální analýzy matice \mathbf{A} získáme vlastní čísla systému. Aby byl systém stabilní, musí být reálné části všech vlastních čísel záporné. Imaginární části vlastních čísel představují vlastní frekvence. Matice \mathbf{A} závisí na ω . Z toho důvodu se budou s úhlovou rychlostí měnit i vlastní čísla a vektory. Pro případ *uložení 1* zůstává systém stabilní do úhlové rychlosti otáčení $\omega = 1497 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = 14295 [\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}]$. Pro případ *uložení 2* zůstává systém stabilní do úhlové rychlosti $\omega = 1605 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = 15327 [\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}]$. Při ztrátě stability by v případě *uložení 1* působilo lopatce napětí 3,8 [GPa] a v případě *uložení 2* napětí 4,4 [GPa]. Takže v obou případech je již při nižších otáčkách 3992 [ot · min⁻¹] překročena mez kluzu R_e . Prakticky to znamená, že nestabilita nikdy nenastane.

7.3 Vlastní frekvence v závislosti na úhlové rychlosti otáčení

Jak již bylo řečeno, hodnota vlastních frekvencí se mění s úhlovou rychlostí. Na následujícím grafu je vidět závislost vlastních frekvencí na ω pro oba případy uložení.

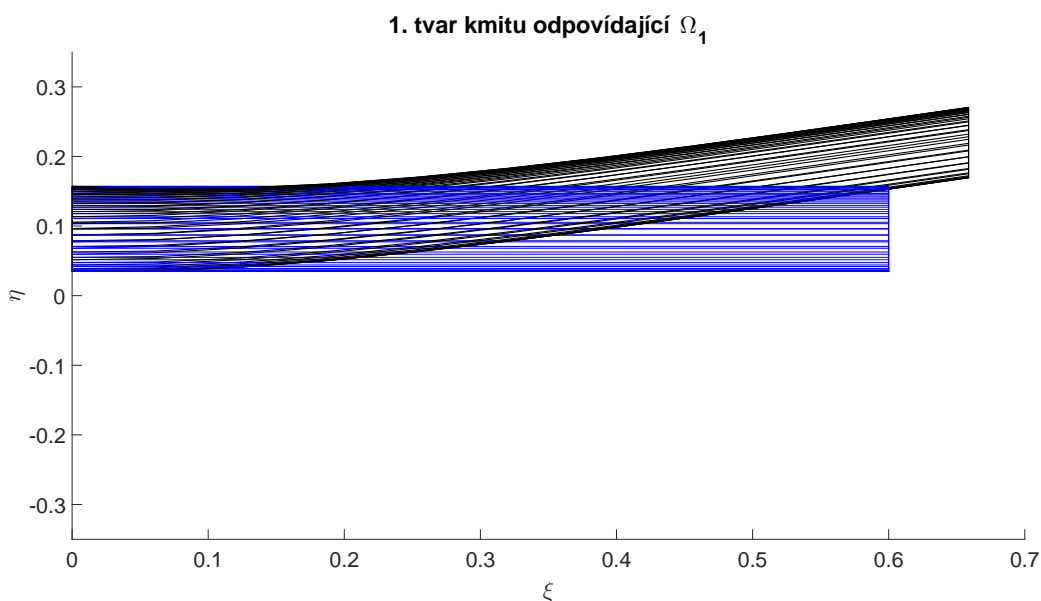


Obrázek 10: Závislost vlastních frekvencí na úhlové rychlosti otáčení

Tento graf se nazývá Campbellův diagram. Je v něm znázorněna také náběhová přímka, což je osa prvního kvadrantu. Je to množina bodů, kde je úhlová rychlost otáčení v rezonanci s některou z vlastních frekvencí systému. Místo protnutí křivek vlastních frekvencí a náběhové přímky značí kritické otáčky lopatky, kterým se je třeba v provozu vyhnout. Zde se konkrétně jedná o hodnotu úhlové rychlosti $\omega = 652 \text{ [rad}\cdot\text{s}^{-1}]$, což odpovídá otáčkám $n_{krit} = 6\,626 \text{ [ot}\cdot\text{min}^{-1}]$. Při těchto otáčkách je již překročena mez kluzu i pevnosti, takže v lopatce rezonance nenastane. Dříve se lopatka utrhne vlivem odstředivé síly. Je nutné zde připomenout, že uvažovaná lopatka je prismatická, takže má větší hmotnost a těžiště umístěné dále od osy otáčení. Oba tyto faktory způsobují, že zatěžující odstředivá síla je vyšší, než u reálné lopatky, a proto je mez kluzu překročena již při poměrně nízkých otáčkách. V diagramu jsou pro oba způsoby uložení znázorněny pouze první tři nejnižší vlastní frekvence. Označme je od nejnižší po nejvyšší Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 . Vyšší frekvence pro nás nejsou zajímavé, protože odpovídají otáčkám, ve kterých nebude žádné turbosoustrojí nikdy pracovat.

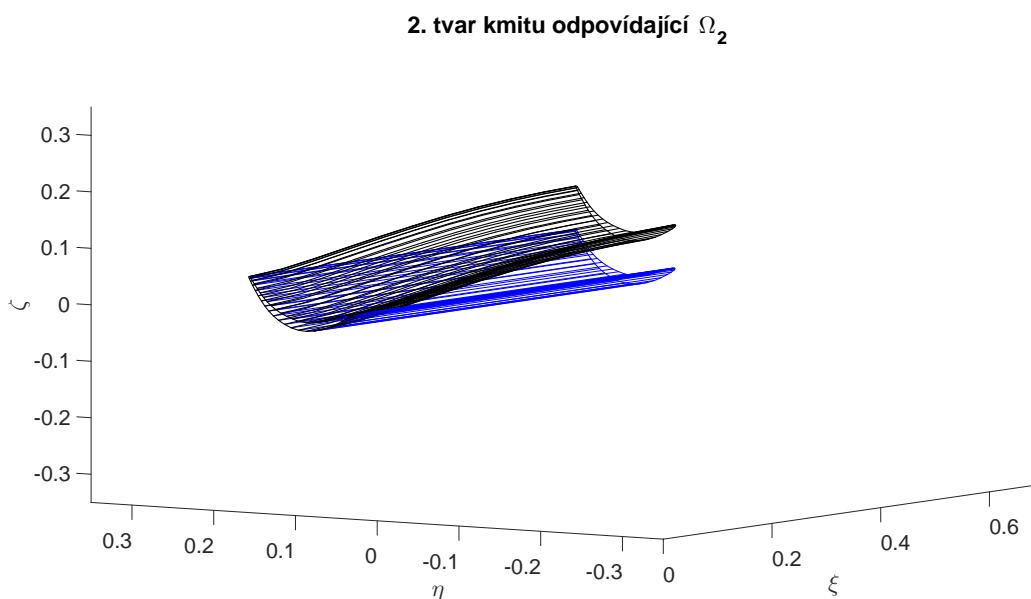
7.4 Vlastní tvary kmitů

Jednotlivým vlastním frekvencím odpovídají vlastní tvary kmitu. Je třeba podotknout, že uvedené obrázky nemají fyzikální význam, protože vlastní vektory (tvary kmitů) jsou komplexní. Zde jsou uvedeny absolutní hodnoty prvků vlastních vektorů jen pro představu, které výchylky při příslušném vlastním tvaru kmitu dominují. Na následujících grafech jsou černě vykresleny první tři tvary kmitů při úhlové rychlosti otáčení lopatky $\omega = 314 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$ pro oba případy uložení. První tři grafy popisují případ *uložení 1*.



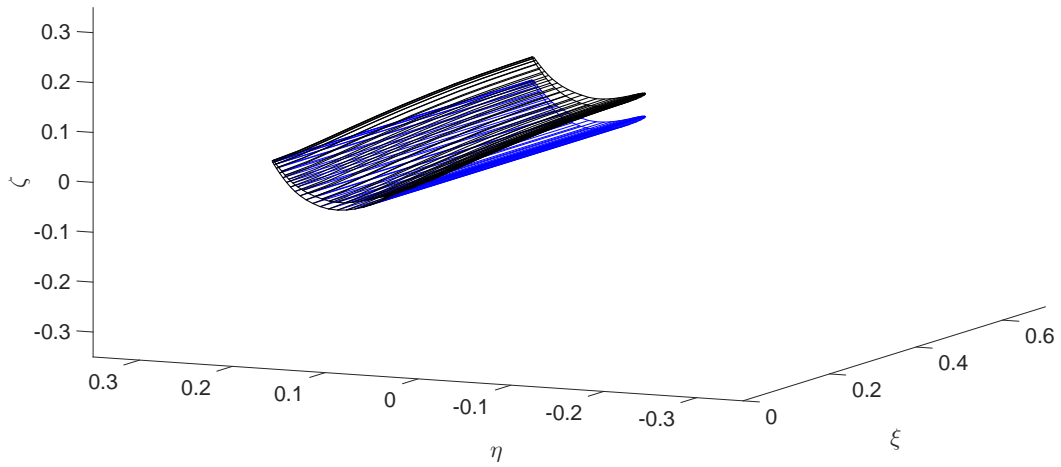
Obrázek 11: 1. vlastní tvar kmitu s umožněním deplanace v počátku

V tomto tvaru jednoznačně dominuje ohyb ve směru η společně s tahem. Další dva tvary jsou ohybové ve směru osy ζ .



Obrázek 12: 2. vlastní tvar kmitu s umožněním deplanace v počátku

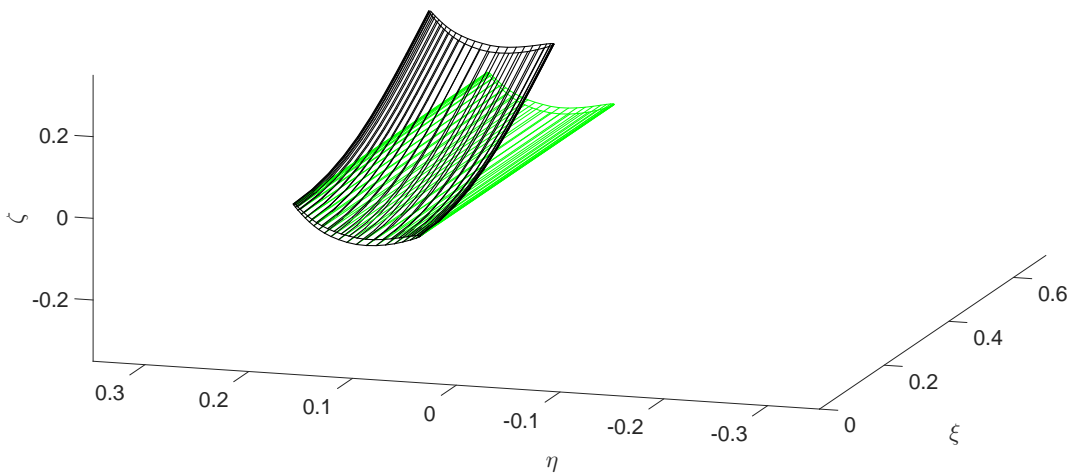
3. tvar kmitu odpovídající Ω_3



Obrázek 13: 3. vlastní tvar kmitu s umožněním deplanace v počátku

Pro *uložení 2* vypadají vlastní tvary kmitu následovně:

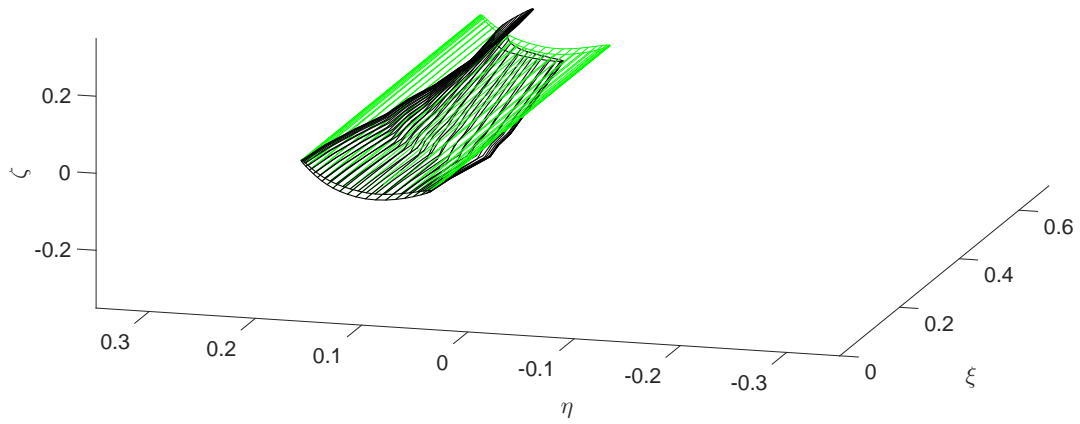
1. tvar kmitu odpovídající Ω_1



Obrázek 14: 1. vlastní tvar kmitu bez umožnění deplanace v počátku

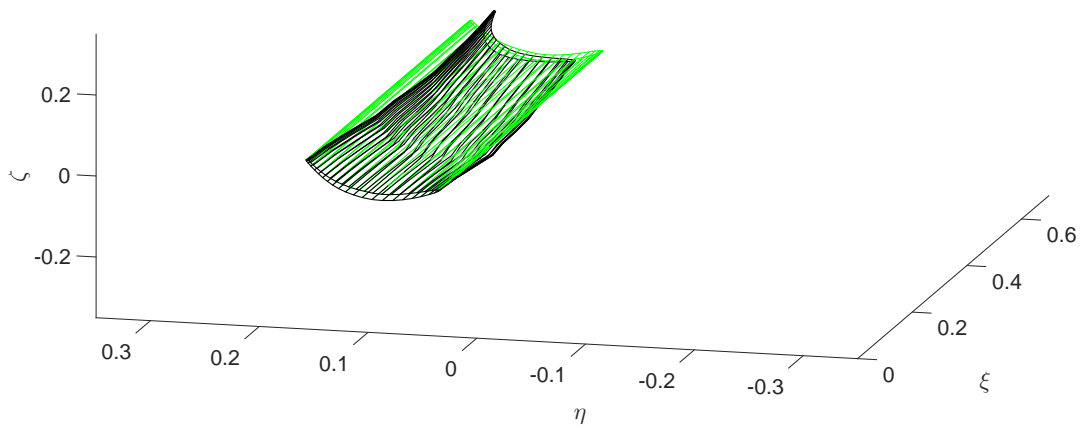
V prvním vlastním tvaru kmitu je dominantní ohybová deformace ve směru obou os η a ζ .
Ve druhém a třetím vlastním tvaru kmitu se nejvíce projevuje krutová deformace.

2. tvar kmitu odpovídající Ω_2



Obrázek 15: 2. vlastní tvar kmitu bez umožnění deplanace v počátku

3. tvar kmitu odpovídající Ω_3



Obrázek 16: 3. vlastní tvar kmitu bez umožnění deplanace v počátku

Je pozoruhodné, že zamezení jednomu zobecněnému posuvu tolik ovlivní chování celé lopatky.

8 Závěr

V práci byly sestaveny pohybové rovnice elementů turbinové lopatky, ze kterých byly následně pomocí MKP sestaveny celkové koeficientové matice, popisující chování celé lopatky. Ve zvláštních kapitolách byly odvozeny deplanační funkce, membránové síly a zbylé parametry vystupující v pohybových rovnicích. Dále byla provedena modální analýza, pomocí níž byly určeny vlastní frekvence a jim odpovídající vlastní tvary kmitů pro dva různé způsoby uložení lopatky. K sestavení celkových koeficientových matic, modální analýze, vykreslení vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu byl použit software Matlab. Všechny cíle vytyčené v úvodu této práce byly splněny. Prismatická lopatka, se kterou jsme zde pracovali, v praxi neexistuje. Teoreticky by ale bylo bezpečné tuto lopatku při běžných provozních otáčkách ($3\,000 \text{ [ot} \cdot \text{min}^{-1}]$) použít, aniž by hrozilo její rozkmitání či utržení. U reálné lopatky by se všechny průřezové parametry měnily v závislosti na ξ . Modelování reálné zkroucené lopatky a lopatkových věnců bude předmětem dalšího studia, případně diplomové práce.

Seznam literatury

- [1] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky 2*. Vydavatelství ČVUT Praha 1992.
- [2] Dupal, J., Zajíček, M.: *Modelování turbínových lopatek a jejich kmitání v poli odstředivých sil*. VZ NTIS - VP3 - 0011/2017, Plzeň 2017.
- [3] Kolář, V. a kol.: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. SNTL Praha 1979.
- [4] Brdička, M.: *Mechnika kontinua*. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.