Posudek doktorské disertační práce

Kandidát: Mgr. Lukáš Korous

Název práce: Large-scale Numerical Simulations of Magneto-hydrodynamic Phenomena in Astrophysics

Vysoká škola / Fakulta: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická

Předložená disertační práce se věnuje řešení vysoce aktuálního a ve vědecké komunitě, zabývající se studiem kosmického a astrofyzikálního plazmatu, palčivého problému: Jak korektně numericky modelovat multi-škálovou dynamiku plazmatu a magnetického pole v mnoha astrofyzikálních situacích. Kosmické plazma, většinou horké a řídké, je už svojí povahou náročným prostředím pro simulace. Z vysoké teploty a nízké hustoty prostředí vyplývá praktická absence vzájemných srážek částic plazmatu, tedy i extrémně vysoké Reynoldsovo (v tomto případě magnetické, spojené spíše s rezistivitou než s viskozitou) číslo Re_{Mag}. To je samozřejmě noční můra každého modeláře. Reynoldsovo číslo totiž řádově udává i poměr mezi největší škálou popisovaného procesu a nejmenším rozměrem, který jsme povinni v simulacích rozlišit.

Dosavadní přístup astrofyziků k tomuto problému obvykle využíval jednoduché numerické implementace – nahrazení příslušných parciálních derivací v MHD rovnicích, popisujících daný problém, konečnými diferencemi (metoda konečných diferencí, FD). Jen velmi pomalu a až v posledních letech se do astrofyzikálních MHD simulací prosazuje přístup běžný v inženýrské praxi při hydrodynamických výpočtech (*Computational Fluid Dynamics* – CFD) – sofistikovanější popis obecnější metodou konečných prvků (FEM). Předložená práce je tak vůbec jeden z prvních pokusů využít FEM pro MHD simulace kosmického plazmatu. FEM je sice implementačně (i ideovým základem) mnohem náročnější než metoda FD, na druhou stranu, má mnoho výhod právě při popisu multi-škálové dynamiky: Zejména, jeho nestrukturovaná mříž, která v principu nezná hranici mezi jemným a hrubým dělením, je mnohem méně náchylná k nefyzikálním efektům, kterými při použití techniky *Adaptive Mesh Refinement* (AMR) trpí FD implementace právě na hranicích mezi jednotlivými úrovněmi dělení mříže.

Byť už samotná implementace MHD solveru pomocí FEM je pionýrským počinem (dosavadní pokusy se počítají v jednotkách), kandidát vnesl do řešení problému celou řadu inovativních prvků, které míří k jádru problému: Multi-škálová dynamika plazmatu s extrémně vysokým Re_{Mag} vede inherentně k filamentaci a k tvorbě velmi tenkých hraničních vrstev a šoků. Mgr. Korous řeší tento problém volbou *Discontinuous-Galerkin* (DG) implementace FEM a zavedením vhodných *vertex-based slope*-limiterů. Vysokého rozlišení v místech, kde je to nutné, dosahuje volbou vhodného kritéria pro (lokální) adaptivní zvětšení/zmenšení rozlišení. Kód je paralelizovaný a škálovatelný pro běh na superpočítačích – tím je umožněno počítání i rozsáhlých úloh v rozumném čase (nemluvě o samotné proveditelnosti dosažené díky distribuci úlohy do mnoha RAM v uzlech). Velmi oceňuji i úsilí o co nejvyšší obecnost, programové vyhýbání se různým *ad-hoc* parametrům, zejména pokud jde o numerickou stabilizaci pomocí uměle zavedené viskozity/resistivity (což silně degraduje energetické spektrum při multi-škálové dynamice a činí řadu jiných kódů pro její studium prakticky nepoužitelných). Skvělým a originálním příspěvkem je i vynucení splnění „okrajové“ podmínky *div B = 0* omezením prostoru bázových funkcí na ty, které ji splňují automaticky.

Výsledkem je skutečně profesionální kód, který jak numericko-matematickým základem tak důsledně objektovou implementací v obecném FEM frameworku *Deal.II* o ligu předstihuje výsledky více-méně amatérských přístupů astrofyziků k této problematice (naše vědní oblast není lukrativní pro komerční kódy a z druhé strany, astrofyzikům zas často chybí hlubší znalosti num. matematicky a programování). Pevně věřím, že nalezne široké uplatnění nejen v naší pracovní skupině na Astronomickém ústavu AV ČR, ale po publikaci prvních aplikovaných výsledků i celosvětově. To už ovšem mluvím o budoucích aplikacích, kterým bych rád věnoval závěr tohoto posudku.

K práci samotné: Především, je mi jasné, že popis matematického a algoritmického základu, stejně jako výsledky testovacích úloh tak, jak jsou shrnuty na cca sto stranách textu předložené disertace, jsou jen onou pověstnou špičkou ledovce – těžiště práce jistě leží v rozsáhlém vlastním numericko-matematickém výzkumu autora a ve vlastní implementaci kódu – což je práce, jejíž rozsah si jen stěží lze představit. Vlastnosti výsledné implementace kódu dokumentované na několika obtížných testech jsou skutečně impozantní. Co se týče textu disertace, práce je čtivá, dobře srozumitelná a text je velmi dobře a logicky zorganizován. Grafická a formální úroveň práce je rovněž velmi dobrá, jen s několika málo překlepy a pár typografickými prohřešky. Použité zdroje jsou korektně citovány a uvedeny v seznamu literatury.

Této vysoce kvalitní disertační práci se zásadním originálním výsledkem v podobě velmi pokročilého numerického MHD kódu lze celkově vytknout v zásadě jen formální nedostatky, z nichž ještě některé lze zařadit spíše do kategorie „kulturních rozdílů" mezi našimi obory výzkumu (plazmová astrofyzika, v níž je „doma" recenzent *vs.* numerická matematika, algoritmizace a programování, jež jsou specializací kandidáta). Protože se sluší v posudku i u takto dobré práce poukázat na některé drobné dílčí nesrovnalosti (vzato čistě subjektivně z pohledu o numerické matematice mírně poučeného čtenáře), následuje jejich stručný výčet.

Nejprve dovolte tři drobné věcné připomínky:

- MHD rovnice a veličiny uvedené hned v úvodní kapitole „*Notation*" (a občas i později, zejména v kapitole 5) jsou ve skutečnosti přeškálované (tj. uvedené ve speciální soustavě jednotek lišící se od SI). To je častý trik, který nám umožňuje zbavit se zbytečných faktorů (jako např. μ_0 apod.) a ušetřit tak mnoho numerických operací. Pro nepoučeného čtenáře to asi mělo být u rovnic v „bezrozměrné soustavě jednotek" uvedeno.
- Jako fyzik bych byl asi rezervovanější při použití pojmu „*Odvození/Derivation*" pro MHD rovnice v podkapitole 2.1. V rámci MHD teorie je nutné MHD rovnice nazírat jako axiomy; v rámci obecnější teorie plazmatu lze MHD nahlížet jako limitu kinetického popisu plazmatu pro velké (ve srovnání s např. *ion skin depth*) škály. Nicméně, autorův přístup je jistě legitimní, jde o plausibilní odůvodnění MHD rovnic jakožto zobecnění Eulerových rovnic pro tekutinu s objemovou silou zahrnující Lorenztovu sílu působící v elektromagnetismu.
- Rovnice (2.3), dávající do vztahu molární plynovou konstantu R a tepelné kapacity při stálém objemu a tlaku je spíše relací, jistě ne definicí konstanty R. (Tu lze „definovat" pomocí Avogadrovy a Boltzmannovy konstanty jako $R=N_A\,.\,k_B$).

Jak už jsem uvedl dříve, v případě těchto nedostatků jde spíše o ty „kulturní rozdíly" - jako fyzik jsem na ně asi citlivější, nicméně ani v nejmenším nezpochybňují dosažený výsledek.

Ostatní „výtky" jsou již čistě formální a jde více-méně o překlepy a jazykové nebo typografické nedorazy:

- Tabulka 0.1 *Notation*: Symbol „e" je uveden 2x. Navíc, důsledně vzato, jde o *internal energy per unit mass*, nikoli tedy *internal energy density*. Podobně, $\boldsymbol{\pi}$ je *momentum density*.
- Ve vztahu (0.2) chybí ρ v definici (hustoty) kinetické energie.
- Rovnice (2.25) a (2.29) na str. 13: Místo rotace má být divergence (po té, co byl vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$ přepsán jako anti-symetrizace tenzorového součinu).
- Eqs. (2.36) a (2.37) na str. 15: Objemové integrály by mohly končit „$\mathrm{d}V$" nebo „$\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$".
- Str. 18: *Share one face* → *Share one edge* (v druhém výskytu).
- Str. 25 – definice c_A: *rho* → ρ.
- Eq. (3.32) na str. 26: Chybí „=" za S_M.
- Eqs. (3.46) a (3.49) na str. 36: Nově se vyskytuje symbol „**A**" - z kontextu bych řekl, že jde o (nechtěnou) náhradu za symbol „**F**" (flux) např. v předchozí rovnici (3.41).

- Str. 51 (dole): … *the note* … → … *note* …
- Str. 56, *Algorithm 6*, druhý ř. kroku #2: $K^i \rightarrow K^j$
- Str. 65, 72 a 86 – definice poč. podmínky pro úlohy: Symboly u_i a B_i (i=1,2,3) by měly být ne-tučně (jde o komponenty vektorů).
- Str. 90, vztah (5.2.1): m_p je hmotnost protonu.
- Reference: Upřednostňoval bych celá příjmení autorů „*J. and B.*" a „*G.*". Někdy působí trochu rušivě, když reference v textu opakuje slovo (např.) *Equation* nebo *Algorithm*. Dovedu si představit, že oba problémy vznikly náhradou a expanzí klíče pro referenci pomocí BibTeXu :-) Jména autorů (v seznamu literatury) obsahující diakritiku by měla být uváděna důsledně včetně diakritiky.

Rozhodně, tyto drobné a naprosto formální (navíc – i vzhledem k enormnímu rozsahu matematické sazby v textu disertace – relativně nečetné) nedostatky nijak nesnižují hodnotu předložené práce – její přínos pro studium aktuálních otevřených problémů fyziky kosmického plazmatu je naprosto nesporný. Jejich uvedení má spíše ukázat, že recenzent práci opravdu důkladně (a se zájmem) pročetl :-)

V souvislosti s hodnocením disertační práce po věcné stránce bych se ještě rád vrátil k jejímu vlastnímu výsledku – vytvořenému a otestovanému numerickému kódu. Myslím, že má obrovský potenciál při výzkumu slunečních erupcí – jevů, které stojí u zrodu poruch tzv. *kosmického počasí* – tedy souboru fenoménů, které mají vliv na naši čím dál více technicky založenou civilizaci, a z tohoto důvodu je jejich studiu věnována značná pozornost. Současné modely erupcí v zásadě zohledňují dva klíčové aspekty tohoto MHD procesu: Fragmentační kaskádu od makroskopických rozměrů erupce (řádově 10^9 m) směrem k disipační škále kontrolované kinetickými procesy v plazmatu (desítky metrů) na jedné straně; a 3D povahu procesu magnetické rekonexe a její vztah k nestabilitě tokového lana (*magnetic flux-rope*) a výronu koronální hmoty (CME) na straně druhé. První přístup, tažený potřebou multi-škálové simulace byl dosud zvládnut pouze v 2.5D přiblížení (Bárta et al., 2011), zatímco druhý aspekt byl studován jen s pomocí 3D kódu s velmi omezeným rozlišením (Aulanier et al., 2015). Plné porozumění tomuto procesu ovšem může přinést pouze syntéza obou přístupů. Kód vytvořený v rámci doktorské práce Mgr. Korouse k tomu má – snad vůbec poprvé – potenciál. Osobně se tedy těším na jeho využití ve výzkumu naší skupiny a další rozvoj. To je samozřejmě otázka dlouhodobé práce, jdoucí daleko nad rámec časových možností doktorského studia.

Co říci závěrem: Kandidát předloženou disertační prací i bohatou publikační činností beze všech pochybností prokázal svoji schopnost samostatné tvořivé vědecké práce v oboru včetně srozumitelné prezentace jejich výsledků. Z tohoto důvodu jednoznačně doporučuji uznání předložené práce jako doktorské disertace a udělení titulu Ph.D. jejímu autorovi.

V Ondřejově 17. prosince 2018

M. Bárta

RNDr. Miroslav Bárta Ph.D.
Astronomický ústav AV ČR

Otázky k obhajobě:

(1) Vztah (3.29) na str. 26 udává rozdělení numerického toku HLLD pro jednotlivé větve mezi charakteristikami řešení přibližné Riemannovy úlohy. Definice toků F_L, F_L^*,... z práce Kusano (2005) uvedena (zřejmě kvůli stručnosti) není. Můžete ji aspoň naznačit?

(2) K časové diskretizaci: Co si můžeme slibovat od časové diskretizace vyššího řádu, již uvažujete v Kapitole 6? Lze uvažovat i o (semi)implicitní diskretizaci v časové oblasti? Je to vůbec technicky schůdné ?

Posudek dizertační práce Mgr. Lukáše Korouse

dizertant: *Mgr. Lukáš Korous, Katedra teoretické elektrotechniky, Fakulta elektrotechnická, Západočeská univerzita v Plzni.*

Obecné zhodnocení

Dizertační práce Mgr. L. Korouse s rozsahem 96 stran textu a grafických příloh se zabývá numerickými simulacemi magnetohydrodynamických jevů v astrofyzice. Předložená dizertační práce je členěna do pěti kapitol. V první úvodní kapitole je řešena motivace tohoto doktorského výzkumu, aktuální stav řešení problematiky a cíle práce. Ve druhé kapitole je představen matematický model studovaných procesů. Je uvedena silná formulace a velice stručně je nastíněna slabá formulace, která je pak rozpracována ve třetí kapitole. Třetí kapitola poté řeší formulaci problému představeného v předchozí kapitole pomocí nespojité Galerkinovy metody, diskretizaci rovnic pro algeraitskou fomulaci, integraci (ta by tedy měla spíše předcházet diskretizaci), časovou integraci a v závěru paralelní algoritmizaci úlohy. V následující kapitole je poté řešeno dynamické zjemňování sítě, díky kterému je možné při zachování přesnosti diskrétní aproximace dosáhnout výraznou úsporu v počtech stupňů volnosti úlohy. Dále následuje kapitola se stručným názvem „Results", kde dizertant představuje svoji implementaci řídících rovnic na známých benchmarkových úlohách. V závěrečné kapitole pak dizertant shrnuje přínos své práce. Do budoucna se dizertant plánuje zabývat simulací skutečných procesů v astrofyzice.

Stručná charakteristika dizertanta

Dizertant je autorem a spoluautorem sedmi prací publikovaných v žurnálech s impakt faktorem a jeho h-index je 4, coz je pro končícího doktoranda nadprůměrný výsledek. Je ovšem nutné podotknout, že většina je prací byla publikována již před několika lety. Článek s největším počtem citací (Solin a Korous, 2012), byl publikován před šesti lety. Což ovšem platí i pro jediný prvoautorský článek (Korous a Solin, 2012). Poslední publikace, kde byl dizertant již na posledním místě, byla publikována v roce 2015. Ačkoli není žádný předpis, který by upravoval maximální časový rozestup mezi publikacemi a obhajobou (v tomto případě se zdá, že disertant mohl obhajovat soubor prací již v roce 2012), tak zmíněný časový rozestup mezi publikacemi a obhajobou je přinejmenší nezvyklý. Prosím proto dizertanta o zdůvodnění.

Otázky a připomínky

K předložené práci mám následující připomínky a otázky. Výtky jsou vysázené *kurzivou*, otázky standardním fontem.

1. V úvodu disertant zmiňuje, že tento problém byl nedávno řešen metodou konečných diferencí. Může tedy dizertant v prezentaci formulovat v čem spočívá u tohoto problému zásadní výhoda nespojité Galerkinovy metody v porovnání se spojitou Galerkinovou metodou, která je přeci jen více standardní.

2. *Předložená práce popisuje náročný matematicko-fyzikální problém, místy spíše fyzikálně--matematický. Je proto nevhodné, že dizertant neuvádí u žádných charakteristik jednotky. Toto je především zásadním nedostatkem u prezentace benchmarkových úloh. Na druhou stranu tento přístup je akceptovatelný v případě, že autor řeší čistě matematickou úlohu bez hlubší fyzikální motivace, kdy jde spíše než o fyzikální veličiny o poměry mezi dimenzí časoprostorové oblasti a parametrů úlohy.*

3. Pokud správně rozumím, v modelu se nevyskytují Dirichletovy okrajové podmínky. Je zaručena vždy jednoznačnost řešení?

4. Kapitola 3.2.3. Existuje celá řada metod pro řešení nelineárních úloh, které nevyžadují výpočet Jakobiánu a mají vyšší stupeň přesnosti než explicitní přístup. Myslím tím metody odvozené od Picardovy metody. Jsou v tomto případě aplikovatelné?

5. *Uvnitř textu je příliš mnoho dat, doporučuji v textu prezentovat jen vybrané grafy a zbytek umístit do příloh (Appendix).*

6. Je u použité nespojité Galerkinovy metody zaručeno splnění Dirichletovy okrajové podmínky?

7. Kapitola 3.4.2 - volba časového kroku vycházela ze stabilitní podmínky pro explicitní metodu. Byla tedy úloha řešena čistě explicitní metodou? V dalších částech textu je zmíněno, že se uvažovala diskretizace úlohy do soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, která byla řešena příslušnou metodou pro řešení soustav lineárních rovnic. Prosím o vysvětlení.

8. Rovnice (3.41) obsahuje nelineární člen $\mathbf{F}(\Psi)$. Jak je tento člen zahrnut do diskrétní formulace rovnice?

9. Kapitola 3.8. bylo při řešení úlohy zaručeno dodržení principu diskrétního maxima?

10. *strana 48. „We use existing solvers." Toto je velice strohá informace, prosím o konkretizaci.*

11. Kapitola 3.10.1. Paralelizace pro systémy se sdílenou pamětí, nebo síťové clustery?

12. Rozumím, že dynamicky měnit síť v každé úrovni časové diskretizace nemusí být zcela efektivní. Jakým způsobem byl volen časový krok pro změnu sítě?

13. *Popis grafů je silně nedostatečný. Nejen, že chybí jednotky, dokonce ani není uvedena veličina, která je zobrazena, není popsána škála zobrazované oblasti.*

14. Není mi zcela jasný popis počátečních podmínek. Zatímco vektor popisující složky řešení v rovnici (2.31) neobsahuje složku $u_{1,2,3}$, tak v rovnici (5.1) je tato veličina uvedena.

Závěrečné zhodnocení

Předložená dizertační práce popisuje náročný doktorský výzkum dizertanta mgr. Lukáše Korouse, který popisoval komplikovaný fyzikální problém, který byl řešen vysoce aktuálními a pokročilými nástroji výpočetní matematiky. I přes uvedené připomínky, které budou zcela jistě v průběhu obhajoby vyjasněné, považuji předloženou dizertační práci za kvalitní a splňující obecně kladené požadavky pro doktorské dizertační práce. **Doporučuji práci k obhajobě** a udělení akademického titulu **PhD.** dizertantovi.

V Praze dne 10.1.2019 doc. Ing. Michal Kuráž, PhD.

Posudek dizertační práce Mgr. Lukáše Korouse

„Large-Scale Numerical Simulations of Magneto-Hydrodynamics Phenomena in Astrophysics"

Předložená práce se zabývá numerickými simulacemi úloh magneto-hydrodynamiky (MHD). Úlohy jsou aproximovány nespojitou Galerkinovou (DG) metodou. Autor se dále zaměřuje na adaptivní zjemňování sítě. Výsledný program je implementován v rámci software deal.II. Praktické ukázky simulací jsou na příkladech z astrofyziky. MHD je velmi atraktivní oblast nejen z pohledu astrofyziky, ale také pro mnoho průmyslových aplikací. Její numerické řešení jistě ještě není zcela probádáno. Téma této práce je proto velmi náročné.

Práce se skládá z 6 kapitol, seznamu literatury a seznamu autorových publikací. V první kapitole jsou zmíněny průmyslové aplikace MHD a úlohy z astrofyziky. Autor zde klade také požadavky na výsledný program. Ve state-of-the-art je dán přehled software.

Druhá kapitola se zabývá matematickým modelem. Ten páruje Eulerovy rovnice nestlačitelného proudění s Maxwellovými rovnicemi elektromagnetismu. Zanedbáním několika jevů jako např. Maxwellův posuvný proud se získá výsledný systém 8 rovnic, který se zapisuje v konzervativním tvaru. Slabá formulace je uvedena ve standardním Sobolevově prostoru H1. Jsou diskutovány okrajové podmínky.

Následuje rozsáhlá třetí kapitola zabývající se numerickým řešením. Autor začíná FEM-triangulací a její paralelní distribuovanou verzí. Pak se věnuje metodě DG. Díky konzervativní povaze MHD rovnic dostává standardní systém, v němž se z důvodu nespojitosti toků zavádí buď Laxův-Friedrichsův numerický tok, nebo se řeší pomocný Riemannův problém. Ten lze však řešit pouze numericky. Byť je druhá varianta podstatně náročnější, autor se k ní přiklání, neboť nevyžaduje stabilizační parametr. Autor v této kapitole diskutuje zajištění bez-divergentní podmínky na magnetické pole. Dále zavádí časovou diskretizaci a diskutuje splnění CFL podmínek. Explicitní časová diskretizace vede na časovou posloupnost soustav lineárních rovnic s maticí hmotnosti. Zmiňuje se také Gaussova kvadratura a sestavení pravých stran v distribuovaném prostředí, kdy se volí doménová dekompozice s překrytím s tzv. ghost elementy. Dále se diskutuje stabilizace řešení v blízkosti nespojitostí. Kapitola končí poznámkami o vektorizaci a paralelní implementaci v prostředí deal.II, která zapouzdřuje nízko-úrovňové funkce standardu MPI.

Čtvrtá kapitola se zabývá adaptivním zjemňováním sítě. Je zde popsán standardní mechanismus estimate-mark-refine. Autor volí robustní řešení, kdy nejdříve zjemní síť stejnoměrně a na základě největších odchylek od řešení na hrubé síti označí podmnožinu elementů, které se zjemní už doopravdy. V paralelním prostředí zde dochází ke komunikaci všech s master procesem.

Pátá kapitola dokumentuje efektivitu a komplexitu numerických metod vyvinutých v předchozích kapitolách na netriviálních akademických příkladech ve 2d, ale i na reálném 3d příkladu erupce na Slunci. Kapitola je proložena množstvím ilustrací.

V šesté kapitole je podán závěr a další směřování práce.

Práce je psaná v angličtině na výborné jazykové úrovni. Výsledky práce již byly publikovány v sedmi článcích v časopisech s impakt faktorem, v jednom z nichž je dizertant hlavním autorem, a ve třech sbornících z konferencí. Mgr. Korous je s prof. Šolínem a dalšími spoluautorem dvou softwarových produktů: Hermes2D a Hermes3D.

Z textu dizertační práce je patrné, že Mgr. Korous velmi hluboce porozuměl formulaci úloh MHD, jejich numerickému řešení metodou DG i efektivní implementaci na paralelních počítačích urychlených vektorizací. Autor své výsledky umí také publikovat. Takový záběr je velmi ojedinělý. Před svým závěrečným doporučením si nicméně dovolím vznést několik dotazů:

1. Není mi známa matematická teorie řešitelnosti uvedené slabé formulace (2.37), ani teorie konvergence metody DG pro takto komplexní nelineární nestacionární úlohu. Správně citujete monografii prof. Dolejšího a prof. Feistauera, která pokrývá Eulerovy rovnice. Není mi ale jasné v jakém prostoru by se měla hledat magnetická indukce. Většinou se nehledá v H1, ale v prostoru H(curl) se zobecněnou rotací, což vede na Nédélécovy hranové prvky resp. jiný typ nespojitosti v případě DG. Jistá opatrnost je zapotřebí i při párování rovnic. Znáte nějaké matematické práce zabývající se slabou formulací MHD a její FEM nebo DG aproximací?

2. Zkoušel jste zaměnit explicitní časovou integraci za implicitní? Implementace bude náročnější o linearizace v Newtonově metodě, ale celkově bych čekal stabilní řešení při mnohem delším časovém kroku, tedy výrazné zkrácení výpočetního času.

3. Adaptivní zjemňování sítě přináší do paralelismu nevyváženost. Dá se s tím něco dělat?

4. Máte k Vašim příkladům v kapitole 5 nějaká referenční řešení? Například pozorování astrofyziků?

Závěrem je mi velkým potěšením konstatovat, že se jedná o vynikající práci, která splnila náročné vytyčené cíle. Práci vřele doporučuji k obhajobě.

V Ludgeřovicích, 30. listopadu 2018

Dalibor Lukáš

....

doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.,
Katedra aplikované matematiky,
Fakulta elektrotechniky a informatiky,
VŠB-TU Ostrava