

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Křivky na varietách

Anežka Švandová

Vedoucí: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Plzeň 2019

Poděkování:

Ráda bych poděkovala RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně, za použití pouze podkladů uvedených v příloženém seznamu literatury.

V Plzni dne 29.7. 2019 _____

Anežka Švandová

Abstrakt:

V této bakalářské práci je popsána základní teorie variet. Cílem této práce je pojmy z této oblasti přiblížit pomocí zajímavě volených příkladů, protipříkladů a názorných obrázků vytvořených v softwaru Mathematica. V závěru práce jsou odvozeny z obecné Stokesovy věty integrální věty vektorové analýzy.

Klíčová slova:

varieta, diferenciální forma, Stokesova věta, Greenova věta, Gaussova věta

Abstract:

This bachelor thesis describes the basic theory of manifolds. The aim of this work is to introduce concepts from this area using interesting examples, counterexamples and using the pictures created in the software Mathematica. At the end of the thesis, we derive Stoke's theorem, Green's theorem and Gauss's from the general Stokes theorem.

Key words:

manifold, differential form, Stoke's theorem, Green's theorem, Gauss's theorem

Obsah

1	Úvod	5
2	Základní pojmy k zavedení pojmu varieta	6
2.1	Metrický prostor	6
2.2	Topologický prostor	7
3	Varieta	8
3.1	Topologická varieta	8
3.2	Hladká varieta	10
3.3	Tečný prostor variety	17
3.4	Podvarieta	22
4	Hranice variety	24
4.1	Orientace variety	26
5	Integrální věty na varietách	32
5.1	Diferenciální formy na varietách	32
5.2	Zobecněná Stokesova věta	35
5.3	Greenova věta	37
5.4	Kelvin-Stokesova věta	38
5.5	Gaussova věta	38
6	Závěr	42

Použité značení

\mathbb{N}	Množina všech přirozených čísel
\mathbb{N}_0	Množina všech přirozených čísel s nulou
\mathbb{R}	Množina všech reálných čísel
\mathbb{R}^n	n -rozměrný kartézský prostor
H^n	Poloprostor prostoru \mathbb{R}^n
e_i	i -tý vektor kanonické báze v \mathbb{R}^n , $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i -té pozici
$U(x)$	Okolí bodu x
$Id_{\mathbb{R}^n}$	Identické zobrazení prostoru \mathbb{R}^n
$C^\infty(X)$	Prostor všech funkcí, které mají spojité derivace všech řádů
$\frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{x_i}$	Parciální derivace funkce f podle proměnné x_i
D_γ	Tečný vektor ve směru křivky γ
\wedge	Vnější součin
ω	Diferenciální forma
\vec{n}	Vnější jednotkový normálový vektor
$\Omega^k(X)$	Prostor všech k -forem na varietě X

1 Úvod

Bernard Riemann zavedl v druhé polovině 19. století pojem *Mannigfaltigkeit*, doslovně můžeme přeložit jako *rozmanitost*, který je dnes znám jako varieta. První zmínky jsou zaznamenány v jeho přednášce *Über die Hypothesen, welchen der Geometrie zu Grunde liegen* z roku 1854. Riemann postupně rozpracovával myšlenku n -dimenzionálních variet, počínaje křivkou jakožto varietou dimenze 1 a postupuje dále přes plochy až k obecné teorii. Jeho práce je založena na kombinaci dvou přístupů, a to na přístupu geometrickém a algebraickém. Tato teorie je základním stavebním kamenem pro vznik nového matematického odvětví, které se v následujícím období, za přispění mnoha slavných matematiků, rozvine v matematickou oblast, kterou dnes nazýváme diferenciální počet na varietách [1].

V první části této práce, tj. v první až čtvrté kapitole, definujeme pojem varieta a některé základní struktury, jako je tečný prostor variety, hranice variety a nebo její orientace. Hlavním cílem práce je pomocí konkrétních příkladů a protipříkladů ilustrovat definované pojmy.

V druhé části, tj. páté kapitole, zavedeme diferenciální formy na varietách. Pomocí těchto forem odvodíme z obecné Stokesovy věty integrální věty známé z klasické matematické analýzy.

Obecná Stokesova věta, neboli také moderní Stokesova věta, byla formulována francouzským matematikem Henri Poincarém na začátku 20. století [2]. Poincaré hrál význačnou roli mezi výše zmíněnými slavnými matematiky, a to především díky své práci *Analysis Situs*, publikované roku 1895, ve které formuloval základy topologie.

2 Základní pojmy k zavedení pojmu varieta

V této kapitole je čerpáno z [3], [4] a [5].

2.1 Metrický prostor

Množina je jedním ze základních pojmů matematiky, rozumí se jí souhrn prvků určený nějakou vlastností, nebo výčtem. Tyto prvky můžeme také chápat jako body. Vzdálenost dvou bodů x, y v dané množině X lze měřit pomocí metriky.

Definice 2.1. **Metrikou** na množině X je zobrazení $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné body $x, y, z \in X$ platí:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definice 2.2. **Metrický prostor** je dvojice (X, d) , kde X je množina a d je metrika na X .

Dále budeme metrický prostor značit zkráceně X .

Definice 2.3. Buď x_0 bod prostoru X a $r > 0$. Potom **otevřenou koulí v metrickém prostoru** se středem v x_0 a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů prostoru X majících vzdálenost od středu x_0 menší než r :

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Množinu $U(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \epsilon\}$, kde $\epsilon > 0$ nazýváme **okolí bodu** x_0 , zkráceně jí pak můžeme značit jako $U(x_0)$.

Množinu $P(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid 0 < d(x_0, x) < \epsilon\}$, kde $\epsilon > 0$ nazýváme **prstencové okolí bodu** x_0 , zde značení ponecháme.

Definice 2.4. Buď X metrický prostor. Podmnožina M prostoru X je **množinou otevřenou**, pokud všechny její body jsou **body vnitřní**, tj. pro každé $x \in M$ existuje $\epsilon > 0$ takové, že $U(x, \epsilon) \subset M$.

Definice 2.5. Nechť X je metrický prostor a M je jeho podmnožina. Množina všech vnitřních bodů se nazývá **vnitřek množiny** M a značíme ji $\text{int}(M)$.

Definice 2.6. Je dán metrický prostor X a jeho podmnožina M . Bod $x \in X$ nazveme **hromadným bodem** množiny M , jestliže v každém jeho prstenčovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .

Definice 2.7. Je dán metrický prostor X a jeho podmnožina M . Pak **uzávěrem množiny** M je sjednocení množiny M a množiny všech jejích hromadných bodů. Uzávěr množiny M značíme \overline{M} . Množina M se nazývá **uzavřená**, jestliže $M = \overline{M}$.

Definice 2.8. Metrický prostor X se nazývá **kompaktní prostor**, jestliže lze z každé posloupnosti prvků X vybrat konvergentní podposloupnost.

Definice 2.9. Podmnožina M metrického prostoru X se nazývá **kompaktní množina**, jestliže je M kompaktní prostor jako podprostor X .

2.2 Topologický prostor

Topologický prostor lze definovat více způsoby, jedním z nich je definice pomocí otevřených množin.

Definice 2.10. **Topologie** τ je systém otevřených podmnožin metrického prostoru X , pro který platí:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
2. $U_i \in \tau, i \in I \subset \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
3. $U_i \in \tau, i \in I \subset \mathbb{N}, I$ konečná $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \tau$.

Definice 2.11. Metrický prostor X s danou topologií τ nazýváme **topologický prostor** a budeme ho značit (X, τ) , nebo zkráceně X .

Definice 2.12. Řekněme, že B je **bází topologického prostoru** (X, τ) právě tehdy, když B je soubor otevřených podmnožin (X, τ) takových, že každá otevřená množina z (X, τ) může být zapsána jako sjednocení prvků z B .

Definice 2.13. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou topologické prostory, je spojitě v bodě $x \in X$, pokud $\forall U(f(x), \epsilon)$ existuje $U(x, \delta)$ takové, že platí

$f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$. Zobrazení f je **spojité zobrazení**, pokud je spojitě ve všech bodech $x \in X$.

Ekvivalentně můžeme říci, že zobrazení f je spojitě v $x \in X$, pokud platí implikace:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Definice 2.14. Necht' jsou dány topologické prostory (X, τ_1) , (Y, τ_2) . Pak **homeomorfismus** je spojitě, vzájemně jednoznačné zobrazení

$$f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2),$$

pro které platí, že jeho inverzní zobrazení $f^{-1} : (Y, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$ je opět spojitě. Jestliže takové zobrazení existuje, pak říkáme, že prostory (X, τ_1) a (Y, τ_2) jsou **homeomorfní**.

Homeomorfní prostory jsou z pohledu topologie identické.

Definice 2.15. Řekneme, že (X, τ) je **Hausdorffův topologický prostor**, jestliže pro každé jeho dva různé body x, y existuje okolí V bodu x a okolí W bodu y takové, že $V \cap W = \emptyset$.

Definice 2.16. Topologický prostor X se nazývá **souvislý**, když jediné podmnožiny v X , které jsou současně otevřené i uzavřené, jsou X a \emptyset . V opačném případě se prostor X nazývá **nesouvislý**.

Věta 2.1. [4] *Obraz souvislé množiny při spojitém zobrazení je souvislá množina.*

3 Varieta

V této kapitole je čerpáno z [3], [4] a [5].

3.1 Topologická varieta

Jedním z důležitých metrických prostorů je n -rozměrný kartézský prostor \mathbb{R}^n , jehož body jsou n -tice reálných čísel, tj $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Standardní metrika kartézského prostoru je indukována eukleidovskou normou tj.

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zkráceně tedy metrický prostor (\mathbb{R}^n, d) budeme značit pouze \mathbb{R}^n .

Pro další práci je nutno uvést, že na prostoru \mathbb{R}^n lze snadno zavést topologii τ pomocí otevřených koulí, a tedy \mathbb{R}^n je topologický prostor.

Definice 3.1. Topologickou varietou nazýváme Hausdorffův topologický prostor X se spočetnou bází B , v němž ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí homeomorfní s otevřenou množinou v \mathbb{R}^n . Říkáme, že topologická varieta je **lokálně homeomorfní** s prostorem \mathbb{R}^n .

Na topologické varietě X tedy uvažujeme topologii τ , kdy τ je systém okolí $U(x, \epsilon)$ pro všechna $x \in X$.

Příklad 3.1. *Dokažme, že rotační kuželová plocha K daná předpisem $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, není topologickou varietou.*

Z definice topologické variety víme, že $\forall x \in K$ musí existovat okolí, jež je homeomorfní s otevřenou množinou v prostoru \mathbb{R}^n . V případě kuželové plochy K budeme hledat homeomorfismy na otevřené množiny v \mathbb{R}^2 , neboť homeomorfní zobrazení otevřené množiny $U \subseteq K$ do prostoru \mathbb{R}^n , kde $n \neq 2$ nezobrazí U na otevřenou množinu.

Pokud ale zvolíme libovolný bod $x \in K$, pro jehož okolí platí $[0, 0, 0] \notin U(x, \epsilon)$, pak existuje homeomorfní zobrazení $U(x, \epsilon)$ na otevřenou množinu v \mathbb{R}^2 . Budeme-li uvažovat bod $x_0 = [0, 0, 0] \in K$, pak homeomorfní zobrazení jeho okolí $U(x_0)$ na otevřenou množinu V v \mathbb{R}^2 neexistuje.

Důkaz provedeme sporem, kde budeme předpokládat, že existuje homeomorfismus

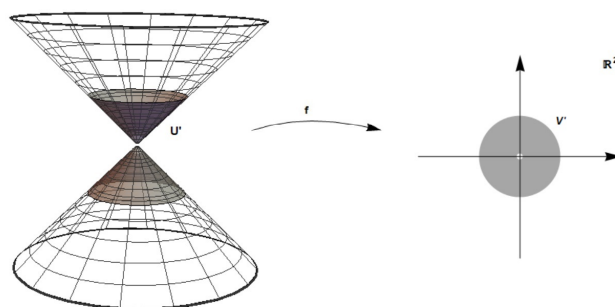
$$f : U \rightarrow V,$$

kde $U = U(x_0, \epsilon) \subset K$ a $V \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Dále budeme uvažovat otevřené množiny $U' = U(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}$ a $V' = V \setminus \{f(x_0)\}$. Pro zobrazení f platí:

$$f(U') = V' \wedge f^{-1}(V') = U'.$$

Množina U' je nesouvislá množina a naopak množina V' je souvislá množina, viz obrázek 1. Zde dostáváme spor, neboť z věty 2.1 vyplývá, že zobrazení f^{-1} není spojitě, tudíž se nejedná o homeomorfismus.

Poznámka 3.1. Dalším příkladem může být Bernoulliho lemniskáta, která je obdobou příkladu 3.1.



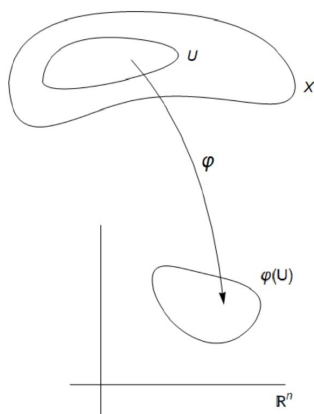
Obrázek 1: Zobrazení f .

Příklad 3.2. Ukážeme, proč graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ není topologickou varietou.

Okolí všech bodů z grafu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, kdy $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, jsou homeomorfní s otevřenými množinami v \mathbb{R} . Ovšem pro bod $x_0 = [0, 0]$ platí $U(x_0, \epsilon) = x_0$ pro $\forall \epsilon \leq 1$ a x_0 není homeomorfní s otevřenou množinou v \mathbb{R} . Okolí $U(x, \epsilon)$ pro $\forall \epsilon > 1$ je neprázdná otevřená množina, kterou lze spojitě zobrazit na interval $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, ovšem inverzní zobrazení $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U(x, \epsilon)$ spojitě není, a proto se nejedná o homeomorfismus. Pro bod x_0 tedy neexistuje okolí homeomorfní s otevřenou množinou v \mathbb{R} , a proto graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ není topologickou varietou.

3.2 Hladká varieta

Definice 3.2. Mapa na topologické varietě X je dvojice (U, φ) , zkráceně φ , kde U je otevřená podmnožina variety X a φ je homeomorfismus z U na otevřenou podmnožinu prostoru \mathbb{R}^n , n je dimenzí mapy, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Znázornění mapy φ na topologické varietě X .

Pokud je otevřená množina U otevřeným okolím bodu $x \in X$, pak φ je mapou při bodu x .

Definice 3.3. Atlas na topologické varietě X je libovolná množina map

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\},$$

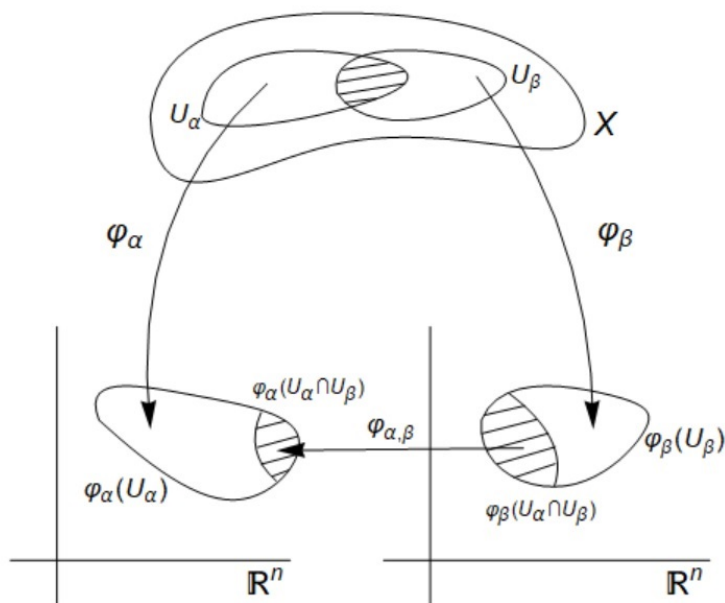
kde množina indexů A je dána tak, aby $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.

Definice 3.4. Topologická varieta, na které je dán atlas n -dimenzionálních map, se nazývá **n -dimenzionální varieta**.

Dále budeme uvažovat jen topologické variety. Příklady variet:

- 1-dimenzionální varietou je křivka lokálně homeomorfní s \mathbb{R} , jako je parabola nebo kružnice.
- 2-dimenzionální varietou je plocha lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^2 , sféra, torus, Möbiův list, atd.

Definice 3.5. Mějme dány dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ na varietě X , pro které platí, že $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, pak zobrazení $\varphi_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ definované na $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ nazýváme **přechodová funkce**, viz obrázek 3.



Obrázek 3: Přechodová funkce $\varphi_{\alpha,\beta}$.

Poznámka 3.2. Pro přechodové funkce mezi mapami φ_α a φ_β platí $\varphi_{\alpha,\beta}^{-1} = \varphi_{\beta,\alpha}$.

Poznamenejme, že topologická varieta má spojité přechodové funkce, můžeme tedy říci, že je třídy C^0 . Na takovéto varietě nemusí být například možné definovat tečný vektor a jiné, viz kapitola 3.3. Pro další práci ale tyto struktury budeme potřebovat, a proto je třeba zavést hladkou (diferencovatelnou) varietu.

Definice 3.6. Topologickou varietu nazveme C^k -**varietou**, pokud lze pokrýt atlasem, jehož přechodové funkce jsou spojité diferencovatelné až do řádu k , kdy $k \in \mathbb{N}_0$, neboli jsou pokrytelné C^k -**atlasem**.

Definice 3.7. Hladká varieta je C^∞ -varieta, tzn. je C^k -varieta $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Z praktických důvodů a pro úplné objasnění pojmu hladká varieta si hladkou varietu zadefinujeme i následujícím způsobem. Definice jsou ekvivalentní.

Definice 3.8. Difeomorfismus je spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení $f : U \rightarrow V$, kde $U, V \subset \mathbb{R}^n$ a f i f^{-1} jsou hladká zobrazení, tj. třídy C^∞ .

Definice 3.9. Budeme uvažovat mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ definované na varietě X . Pokud přechodová funkce $\varphi_{\alpha,\beta}$ je difeomorfismus mezi otevřenými množinami $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, pak jsou tyto dvě **mapy kompatibilní**.

Definice 3.10. Atlas, jehož každé dvě mapy jsou kompatibilní, budeme nazývat **hladký atlas**.

Definice 3.11. Hladká varieta je topologická varieta s hladkým atlasem.

Poznámka 3.3. Budeme-li uvažovat situaci, kdy $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ budeme přechodovou funkci chápat jako prázdné zobrazení, které triviálně splňuje podmínky kompatibility.

Příklad 3.3. Ukážeme, že graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

je pokrytelný hladkým atlasem.

Na grafu funkce $f(x)$ můžeme sestavit dvě mapy, a to (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) , kdy

$$U_1 = \{[x, -1] \in \mathbb{R}^2 \mid \text{kdy } x \in (-\infty, 0)\},$$

$$U_2 = \{[x, 1] \in \mathbb{R}^2 \mid \text{kdy } x \in (0, \infty)\}$$

a zobrazení

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\rightarrow (-\infty, 0), \\ \varphi_2 : U_2 &\rightarrow (0, \infty)\end{aligned}$$

jsou dána předpisy $\varphi_1 = x$ a $\varphi_2 = x$.

Zobrazení φ_1 a φ_2 jsou homeomorfismy. Dále platí $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, a tedy z poznámky 3.3 vyplývá, že mapy φ_1 a φ_2 jsou kompatibilní.

Dále musíme uvažovat přechodové funkce $\varphi_{1,1}$ a $\varphi_{2,2}$. Přechodová funkce $\varphi_{1,1}$ je definována na $\varphi_1(U_1) = (-\infty, 0)$ a má tvar $\varphi_{1,1} = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} = x$. Přechodová funkce $\varphi_{1,1}$ je difeomorfismus. Analogicky platí pro $\varphi_{2,2}$. A proto $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ je hladkým atlasem.

Nyní budeme uvažovat hladkou varietu X s daným hladkým atlasem. Mapa (U, φ) je kompatibilní s atlasem na varietě X , jestliže je kompatibilní se všemi mapami atlasu. Rozšíření atlasu o všechny mapy s ním kompatibilními nazveme maximálním atlasem. Maximální atlas variety X se nazývá diferencovatelnou strukturou. V praxi se ale budeme setkávat s atlasy, které mají konečný počet map, a proto si vystačíme s předchozí definicí hladké variety. Konečný hladký atlas takovéto variety přijmeme za diferencovatelnou strukturu, neboť každý hladký atlas lze doplnit na atlas maximální, důkaz viz [3].

Hladkou n -dimenzionální varietou tedy myslíme n -dimenzionální varietu s danou diferencovatelnou strukturou.

Dále, bude-li to vhodné, budeme n -dimenzionální varietu X značit X^n .

Poznámka 3.4. Všechny topologické variety dimenze $n \leq 3$ jsou zároveň variety hladké. První topologické variety bez hladké, tj. diferencovatelné struktury se objevují až v dimenzi 4. Tímto tématem se například zabývají matematici Michael Freedman a Simon Donaldson, jež prokázali existenci takového variet, například exotický prostor \mathbb{R}^4 viz [10].

Základním příkladem hladké variety je prostor \mathbb{R}^n . Varietu \mathbb{R}^n můžeme pokrýt atlasem stávajícím z jedné mapy, a to $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$, kde $Id_{\mathbb{R}^n}$ je identické zobrazení $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Příklad 3.4. *Rozhodněme, zda grafy funkcí*

$$f_1(x) = x^3 \text{ a } f_2(x) = |x|$$

jsou 1-dimenzionální hladké variety.

Graf funkce $f_1(x) = x^3$ pokryjeme atlasem o jedné mapě a to $\{(U, \varphi_1)\}$, kdy

$$U = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid [x, y] = [x, x^3], \text{ kdy } x \in \mathbb{R}\}$$

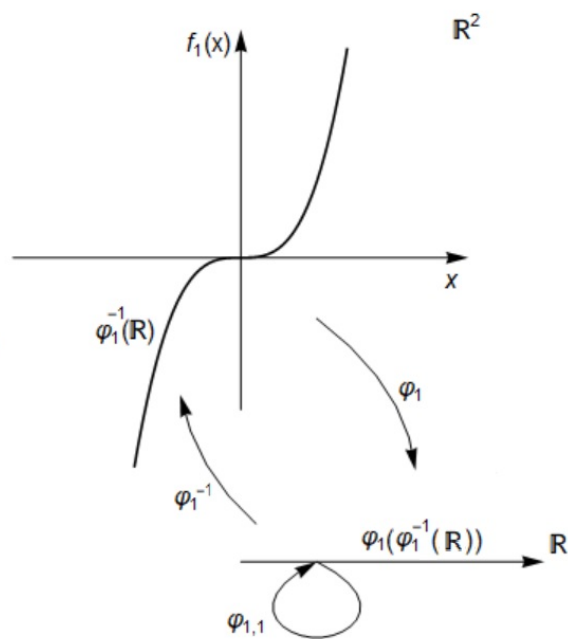
a zobrazení $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno:

$$\varphi_1(x, x^3) = x.$$

Nyní ověříme, zda přechodová funkce této mapy $\varphi_{1,1}$ definována na $\varphi_1(U) = \mathbb{R}$ je difeomorfismus. Platí:

$$\varphi_{1,1} = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} = Id_{\mathbb{R}}.$$

Přechodová funkce $\varphi_{1,1}$ je identické zobrazení viz obrázek 4, a proto $\varphi_{1,1}$ je difeomorfismus. A tedy graf funkce $f_1(x) = x^3$ je 1-dimenzionální hladká varieta.



Obrázek 4: Přechodová funkce $\varphi_{1,1}$ grafu funkce $f_1(x) = x^3$.

Graf funkce $f_2 = |x|$ pokryjeme atlasem $\{(U, \varphi_2)\}$, kdy

$$U = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid [x, y] = [x, |x|], \text{ kdy } x \in \mathbb{R}\}$$

a zobrazení $\varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno:

$$\varphi_2(x, |x|) = x.$$

Přechodová funkce $\varphi_{2,2}$ je definována na $\varphi_2(U) = \mathbb{R}$ a platí

$$\varphi_{2,2} = \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} = Id_{\mathbb{R}}.$$

Přechodová funkce $\varphi_{2,2}$ je difeomorfismus, tudíž se jedná o 1-dimenzionální hladkou varietu.

Je nutné si uvědomit, že nezobrazujeme pomocí map otevřené množiny z prostoru \mathbb{R}^2 na otevřené množiny v \mathbb{R} , nýbrž 1-dimenzionální objekt z prostoru \mathbb{R}^2 na otevřenou množinu v prostoru \mathbb{R} . Neboť platí následující věta.

Věta 3.1. [5] *Otevřená množina prostoru \mathbb{R}^n nemůže být homeomorfní s otevřenou množinou prostoru \mathbb{R}^m , kde $m \neq n$.*

Příklad 3.5. *V rovině \mathbb{R}^2 je dána kružnice S^1 o poloměru $r > 0$ a se středem v počátku. Najděme vhodné hladké pokrytí kružnice.*

Kružnici S^1 v rovině \mathbb{R}^2 pokryjeme atlasem stávajícím ze dvou map, jež se zobrazují na otevřené množiny v číselné ose \mathbb{R} ,

$$\varphi_1 : U_1 = S^1 \setminus \{[r, 0]\} \rightarrow (0, 2\pi),$$

$$\varphi_2 : U_2 = S^1 \setminus \{[-r, 0]\} \rightarrow (-\pi, \pi).$$

Inverzní zobrazení map $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou parametrické funkce $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisy:

$$\varphi_1^{-1}(t) = (r \cos t, r \sin t), \text{ kdy } t \in (0, 2\pi),$$

$$\varphi_2^{-1}(t) = (r \cos t, r \sin t), \text{ kdy } t \in (-\pi, \pi).$$

Pak přechodová funkce $\varphi_{1,2}$ je definována na $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ a je dána vztahem

$$\varphi_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} t + 2\pi & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ t & \text{pro } t \in (0, \pi). \end{cases}$$

Přechodová funkce $\varphi_{1,2}$ je difeomorfismus na celém svém definičním oboru. Přechodové funkce $\varphi_{1,1}$ a $\varphi_{2,2}$ jsou identická zobrazení, tj. difeomorfismy. A tedy $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ je hladký atlas na kružnici S^1 .

Příklad 3.6. Ukážeme, že asteroida A daná předpisem

$$A(t) = (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t),$$

kdy $t \in (0, 2\pi)$ je hladká varieta v rovině \mathbb{R}^2 .

Asteroidu A pokryjeme dvěma mapami, a to

$$\varphi_1 : U_1 = A \setminus \{[4, 0]\} \rightarrow (0, 2\pi),$$

$$\varphi_2 : U_2 = A \setminus \{[-4, 0]\} \rightarrow (-\pi, \pi).$$

Pak přechodová funkce $\varphi_{1,2}$ je definována na $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ a má tvar

$$\varphi_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} t + 2\pi & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ t & \text{pro } t \in (0, \pi). \end{cases}$$

Přechodová funkce $\varphi_{1,2}$ je difeomorfismus. Přechodové funkce $\varphi_{1,1}$ a $\varphi_{2,2}$ jsou identická zobrazení, tj. difeomorfismy. Asteroida A je tedy hladká varieta.

Definice 3.12. Řekneme, že dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) jsou souhlasně orientovány, pokud determinant Jacobiho matice jejich přechodové funkce $\varphi_{\alpha,\beta}$ je kladný na příslušném definičním oboru. Varieta X se nazývá **orientovatelná varieta**, pokud na ní existuje atlas, jehož každé dvě mapy jsou souhlasně orientovány. V opačném případě se varieta X nazývá **neorientovatelná varieta**.

Příklad 3.7. Ukažme, že kružnice S^1 dána parametrickým předpisem $K(t) = (\cos t, \sin t)$, kdy $t \in (0, 2\pi)$ je orientovatelná varieta.

Budeme uvažovat atlas na kružnici z příkladu 3.5, kdy $r = 1$. Mapy φ_1 a φ_2 jsou souhlasně orientovány, neboť determinant Jacobiho matice jejich přechodové funkce $\varphi_{1,2}$, $\det J_{\varphi_{1,2}} = 1$, $\forall t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ je kladný. Atlas na kružnici S^1 je hladký a skládá se pouze z map φ_1 a φ_2 , a proto dle definice 3.12 můžeme říct, že kružnice S^1 je orientovatelná varieta.

Příklad 3.8. Rozmysleme, zda Möbiův list M daný předpisem

$$P(a, p) = (\cos a + p \cos \frac{a}{2} \cos a, \sin a + p \cos \frac{a}{2} \sin a, p \sin \frac{a}{2}),$$

kde $a \in (0, 2\pi]$ a $p \in (-1, 1)$, je orientovatelná varieta.

Plochu M pokryjeme dvěma mapami (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) , kde

$$U_1 = M \setminus \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y, z] = [1 + x, 0, 0], \text{ kdy } x \in (-1, 1)\},$$

$$U_2 = M \setminus \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y, z] = [-1, 0, z], \text{ kdy } z \in (-1, 1)\}$$

a

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow (0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Tedy platí $\varphi_1^{-1} = P(a, p)$, kde $a \in (0, 2\pi)$, $p \in (-1, 1)$ a $\varphi_2^{-1} = P(a, p)$, kde $a \in (-\pi, \pi)$, $p \in (-1, 1)$.

Přechodová funkce je definována na $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \times (-1, 1) \cup (0, \pi) \times (-1, 1)$ a má tvar

$$\varphi_{1,2} = (a + 2\pi, -p), \text{ pro } (-\pi, 0) \times (-1, 1),$$

$$\varphi_{1,2} = (a, -p), \text{ pro } (0, \pi) \times (-1, 1),$$

Determinant Jacobiho matice pro celý definiční obor přechodové funkce má tvar:

$$\det J_{\varphi_{1,2}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

a je záporný na celém definičním oboru $\varphi_{1,2}$. Mapy φ_1 a φ_2 tedy nejsou souhlasně orientovány, proto nemůžeme říci, že M s atlasem $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ je orientovatelná varieta.

Poznámka 3.5. Möbiův list je neorientovatelná varieta viz [7].

3.3 Tečný prostor variety

V této podkapitole je čerpáno z [4] a [6].

Od této podkapitoly budeme dále uvažovat pouze hladké variety, a proto si pro zjednodušení vystačíme s pojmem varieta, pokud nebude řečeno jinak. Z klasické diferenciální geometrie je nám znám pojem křivka a její parametrizace. Nyní si tyto pojmy zavedeme ve smyslu variet.

Definice 3.13. Nechť X je varieta, pak **parametrizovaná hladká křivka na varietě X** je hladké zobrazení $\gamma : I \rightarrow X$, kde I je libovolný otevřený interval z \mathbb{R} .

Definice 3.14. Hovoříme o **parametrizaci křivky na varietě X při bodu $p \in X$** , pokud volíme interval $I = (-\epsilon, \epsilon)$, kde $\epsilon > 0$ a $\gamma(0) = p$.

Definice 3.15. Necht X je varieta, pak $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je **hladká funkce na varietě X** , pokud pro všechny mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z hladkého atlasu variety X platí:

$$\text{zobrazení } f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R} \text{ je třídy } C^\infty.$$

Pak můžeme psát $f \in C^\infty(X)$.

Definice 3.16. Zárodek na varietě X v bodě $p \in X$ nazveme třídu ekvivalence hladkých funkcí, které jsou definované alespoň na $U(p, \delta) \subset X$ a platí:

$$\forall x \in U(p, \delta) : f(x) = g(x), \text{ pro všechny funkce } f, g \text{ z této třídy.}$$

Zárodek v p budeme značit $[f]_p$.

Definice 3.17. Necht X je varieta a necht je pevně určen bod $p \in X$. Dále γ je hladká křivka na X parametrizována při bodu p . Pak pro všechny hladké funkce $f \in [f]_p$ můžeme definovat operátor $D_\gamma : C^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$, který je dán vztahem

$$D_\gamma(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \text{ kde } t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

jedná se o derivaci funkce f ve směru γ v bodě p . Pak křivce γ parametrizované při bodu p přiřazujeme operátor D_γ , který nazýváme **tečný vektor variety X ve směru křivky γ v bodě p** .

Příklad 3.9. Je dán graf funkce $f(x) = \sin x$, který tvoří varietu X . Určeme tečný vektor v bodě $p = [\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Parametrizaci křivky, jež náleží varietě $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid [x, y] = [x, f(x)]\}$ při bodu p zvolíme jako $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\frac{3\pi}{4} + t, \sin(\frac{3\pi}{4} + t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a platí $\gamma(0) = p$. Pak pro tečný vektor v bodě p platí:

$$\begin{aligned} D_\gamma(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Parciálním derivacím $\{\frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$ v \mathbb{R}^2 v bodě p přísluší standardní báze $\{e_1, e_2\}$, analogicky to platí pro \mathbb{R}^n viz [7], proto

$$\begin{aligned}
D_\gamma &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \cdot 1|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} + t\right)|_{t=0} \\
&= (1, 0) \Big|_p \cdot 1 + (0, 1) \Big|_p \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Big|_p.
\end{aligned}$$

Tečný vektor v bodě p je $(1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Příklad 3.10. Uvažujme paraboloid, jako varietu X danou předpisem $x^2 + y^2 = z$ v \mathbb{R}^3 a bod $p = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \in X$. Určeme tečný vektor variety X v bodě p ve směru křivky $\gamma(t) = (\cos(t + \frac{\pi}{4}), \sin(t + \frac{\pi}{4}), 1)$ parametrizované při bodu p , tj. $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a platí $\gamma(0) = p$.

$$\begin{aligned}
D_\gamma(f) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{d\gamma_3}{dt} \right) \Big|_{t=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\gamma &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \cdot 0 \\
&= (1, 0, 0) \Big|_p \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{4}\right) + (0, 1, 0) \Big|_p \cdot \cos \frac{\pi}{4} + (0, 0, 1) \Big|_p \cdot 0 \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Big|_p.
\end{aligned}$$

Tečný vektor v bodě p je $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \Big|_p$.

Definice 3.18. Nechť X je varieta a bod $p \in X$, pak množinu $T_p X$ obsahující všechny tečné vektory v bodě p nazveme **tečný prostor variety X v bodě p** .

Tečný prostor $T_p X$ je vektorovým prostorem. Pro všechny křivky γ, γ' parametrizované na varietě X při bodu p platí:

$$(aD_\gamma + bD_{\gamma'})(f) = a(D_\gamma(f)) + b(D_{\gamma'}(f)), \forall f \in [f]_p \text{ a } a, b \in \mathbb{R}.$$

Definice 3.19. Nechť X^n je varieta a (U, φ) je mapa na X^n , pak pro každý bod $p \in U$ můžeme určit **lokální souřadnice bodu p na varietě X^n** jako $\varphi(p) = [\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)]$.

Definice 3.20. Necht' je dán pevný bod p a mapa (U, φ) na varietě X^n v prostoru \mathbb{R}^m , $n \leq m$ tak, aby lokální souřadnice bodu $p \in U$ byly dány $\varphi(p) = [\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)] = [0, \dots, 0]$, tj. mapa φ zobrazí bod p na počátek \mathbb{R}^n . Pak tečné vektory D_{γ_i} v bodě p ve směru křivek $\gamma_i(t) = (\gamma_{i,1}(t), \dots, \gamma_{i,m}(t)) = \varphi^{-1}(v_i(t))$, kde $v_i(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$, pro t na i -té pozici, $i = 1, \dots, n$ a $t \in I$, kdy I je alespoň $(-\epsilon, \epsilon)$, tvoří **bázi tečného prostoru** $T_p(X^n)$. Platí $\dim(T_p X^n) = n$ a i -tý bázevský vektor prostoru $T_p X^n$ je tedy dán vztahem:

$$D_{\gamma_i}(f) = \left. \frac{d}{dt}(f(\gamma_i(t))) \right|_{t=0}, \quad \forall f \in [f]_p.$$

Bázevské vektory tečného prostoru můžeme taky chápat jako parciální derivace ve směru lokálních souřadnic bodu p na varietě X^n , a proto můžeme psát:

$$D_{\gamma_i} = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right|_p, \quad i = 1, \dots, n.$$

Budeme-li uvažovat prostor \mathbb{R}^n jako varietu a bod $p = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, pak lokální souřadnice bodu p v prostoru \mathbb{R}^n určíme pomocí mapy (\mathbb{R}^n, φ) , kde $\varphi(p) = [Id_{\mathbb{R}^n,1}(p) - x_1, \dots, Id_{\mathbb{R}^n,n}(p) - x_n] = [0, \dots, 0]$. Tečný prostor $T_p \mathbb{R}^n$ tvoří pak celý prostor \mathbb{R}^n se standardní bází $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Důsledek nalezneme v příkladu 3.9.

Příklad 3.11. Rozhodněme, zda tečný vektor $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ z příkladu 3.10 náleží $T_p X^2$, kde X^2 je graf paraboloidu $x^2 + y^2 = z$ a $p = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.

Nejprve paraboloid pokryjeme atlasem, pro jednoduchost použijeme atlas z jedné mapy, $\{(U, \varphi)\}$, tak aby platilo $\varphi(p) = [0, 0]$, tj.

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\},$$

$$\varphi : U \rightarrow \{[\varphi_1, \varphi_2] \in \mathbb{R}^2 \mid [\varphi_1, \varphi_2] = [x - \frac{1}{\sqrt{2}}, y - \frac{1}{\sqrt{2}}]\}.$$

A platí

$$\varphi^{-1} : \{[\varphi_1, \varphi_2] \in \mathbb{R}^2\} \rightarrow$$

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y, z] = [\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, (\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2]\}.$$

V dalším kroku hledáme bázi $T_p X^2$. Křivky parametrizované při bodu p , v jejichž směru budeme hledat bázevské vektory, určíme pomocí křivek $v_1(t) = (t, 0)$ a $v_2(t) = (0, t)$ parametrizovaných při počátku \mathbb{R}^2 , tj.

$$\gamma_1(t) = \varphi^{-1}(v_1(t)) = (t + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, (t + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2),$$

$$\gamma_2(t) = \varphi^{-1}(v_1(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t + \frac{1}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right).$$

Nyní spočteme tečné vektory v bodě p podle křivek γ_1 a γ_2 , tj.

$$\begin{aligned} D_{\gamma_1}(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\gamma_{1,1}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\gamma_{1,2}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{d\gamma_{1,3}}{dt} \right) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\gamma_1} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \cdot 1 + \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \cdot 0 + \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (1, 0, 0)|_p \cdot 1 + (0, 0, 1)|_p \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} D_{\gamma_2}(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\gamma_{2,1}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\gamma_{2,2}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{d\gamma_{2,3}}{dt} \right) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\gamma_2} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \cdot 0 + \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \\ &= (0, 1, 0)|_p \cdot 1 + (0, 0, 1)|_p \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p. \end{aligned}$$

Bázi tečného prostoru $T_p X^2$ tvoří vektory $\{(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p, (0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p\}$. Tečný vektor z příkladu 3.10 můžeme zapsat jejich lineární kombinací

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)|_p = a \cdot (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p + b \cdot (0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})|_p, \text{ kde } a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a proto vektor $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)|_p \in T_p X^2$.

3.4 Podvarieta

V této podkapitole je čerpáno z [6] a [4].

Definice 3.21. Necht X^n a Y^m jsou dvě variety. A existuje spojitě zobrazení $\theta : X^n \rightarrow Y^m$. Pokud pro všechny mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z hladkého atlasu variety X^n a pro všechny mapy (V_β, ψ_β) z hladkého atlasu variety Y^m platí:

zobrazení $\psi_\beta \circ \theta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \theta^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^∞ ,

pak zobrazení θ je **hladké zobrazení**, tj. $\theta \in C^\infty(X^n)$, viz obrázek 5.

$$\begin{array}{ccc}
 X^n & \xrightarrow{\theta} & Y^m \\
 \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \psi_\beta \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_\beta \circ \theta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Obrázek 5: Hladké zobrazení.

Definice 3.22. Necht $\theta : X^n \rightarrow Y^m$ je hladké zobrazení a $p \in X^n$ je pevný bod, pak můžeme definovat **tečné zobrazení v bodě p** , $\theta_* : T_p X^n \rightarrow T_{\theta(p)} Y^m$, které je dáno předpisem:

$$\theta_*(D_\gamma) = D_{\theta \circ \gamma}, \quad \forall D_\gamma \in T_p X^n.$$

Definice 3.23. Necht X^n a Y^m jsou variety a platí $n \leq m$. Hladké zobrazení $\theta : X^n \rightarrow Y^m$ nazveme **vnořením variety X^n do variety Y^m** pokud tečné zobrazení θ_* je prosté v každém bodě $p \in X^n$.

Definice 3.24. Necht X^n a Y^m jsou variety a X^n vnořená varieta do variety Y^m . Pokud hladké zobrazení $\theta : X^n \rightarrow \theta(X^n) \subseteq Y^m$ je prosté, pak $\theta(X^n)$ je **podvarieta** variety Y^m .

Příklad 3.12. Ukažme, že $\theta(t) = (\cos(2t) + t, \sin(2t))$, $t \in I = (-2, 2)$ není podvarietou \mathbb{R}^2 .

Nejprve máme zobrazení θ a ukážeme, že se jedná o hladké zobrazení z variety $X^1 = I = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$ do variety $Y^2 = \mathbb{R}^2$. Zobrazení je tedy definováno jako,

$$\theta : I \rightarrow \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid [x, y] = [\cos 2t + t, \sin 2t], \forall t \in I\}.$$

Varietu I pokryjeme atlasem $\{(I, Id_{\mathbb{R}})\}$ a varietu \mathbb{R}^2 pokryjeme atlasem $\{(\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})\}$. Přechodové zobrazení definované na intervalu $(-2, 2) \subset \mathbb{R}$ je tvaru:

$$Id_{\mathbb{R}^2} \circ \theta \circ Id_{\mathbb{R}}^{-1} = \theta(I) \in C^\infty,$$

z čehož vyplývá dle definice 3.21, že θ je hladké zobrazení.

Dále ověříme, zda varieta I je zobrazením θ vnořena do variety \mathbb{R}^2 . Tečný prostor variety I v každém bodě $p \in I$ je určen bázovým prvkem:

$$D_\gamma(f) = \left. \frac{d}{du} f(\gamma(u)) \right|_{u=0},$$

kde $\gamma(u) = u + p$, pro alespoň $u \in (-\epsilon, \epsilon)$ a platí $\gamma(0) = p$, pak

$$D_\gamma = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{d(u+p)}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Tedy platí $T_p I = \mathbb{R}$, $\forall p \in I$. Z předchozí kapitoly víme, že tečný prostor variety \mathbb{R}^2 ve všech pevně zvolených bodech $p \in \mathbb{R}^2$ je opět \mathbb{R}^2 , a proto můžeme rovnou psát: $T_{\theta(p)} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, $\forall \theta(p) \in \mathbb{R}^2$. Pak zobrazení:

$$\theta_* : T_p I \rightarrow T_{\theta(p)} \mathbb{R}^2,$$

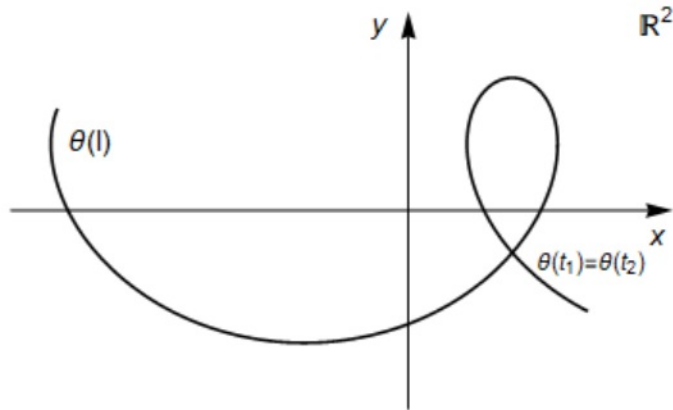
$\forall p \in I$ je dáno:

$$\begin{aligned} \theta_*(D_\gamma) &= D_{\theta \circ \gamma} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \cdot \frac{d}{du} (\cos 2(u+p) + (u+p)) + \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \cdot \frac{d}{du} (\sin 2(u+p)) \\ &= (1 - 2 \sin 2p, 2 \cos 2p) \Big|_p \end{aligned}$$

a je prosté. Hladké zobrazení θ je tedy vnoření variety I do variety \mathbb{R}^2 .

Nyní budeme uvažovat body $t_1, t_2 \in I$, pro které platí $\theta(t_1) = \theta(t_2) \in \mathbb{R}^2$, viz obrázek 6. Hladké zobrazení θ zobrazí body t_1, t_2 do bodu $\theta(t_1)$ z čehož plyne, že hladké zobrazení θ není prosté, a proto $\theta(I)$ není podvarietou variety \mathbb{R}^2 .

Definice 3.25. Hladké zobrazení $\theta : X^n \rightarrow Y^n$ variet X^n a Y^n nazveme **difeomorfismem**, pokud je vzájemně jednoznačné a zobrazení $\theta^{-1} : Y^n \rightarrow X^n$ je hladké zobrazení. Pokud takovéto zobrazení mezi varietami X^n a Y^n existuje, můžeme X^n, Y^n nazývat **difeomorfní** variety.



Obrázek 6: Hladké zobrazení $\theta(t) = (\cos 2t + t, \sin 2t)$.

Definice 3.26. Necht' Y^m je varieta a $\theta(X^n)$ je její podvarietou. Pokud hladké zobrazení $\theta : X^n \rightarrow \theta(X^n) \subseteq Y^m$ je difeomorfismus, pak zobrazení θ nazveme **vložení** a $\theta(X^n)$ je **vloženou podvarietou**.

Pro vložené podvariety platí:

- (1) topologie $\theta(X^n)$ je indukována topologií Y^m ,
- (2) $\dim(X^n) = \dim(\theta(X^n))$.

4 Hranice variety

V této kapitole je čerpáno z [3].

Definice 4.1. Necht' H^n je **poloprostor** prostoru \mathbb{R}^n , který definujeme jako:

$$H^n = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}.$$

Hranice poloprostoru ∂H^n je pak dána:

$$\partial H^n = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n \mid [x_1, \dots, x_n] = [0, x_2, \dots, x_n]\}.$$

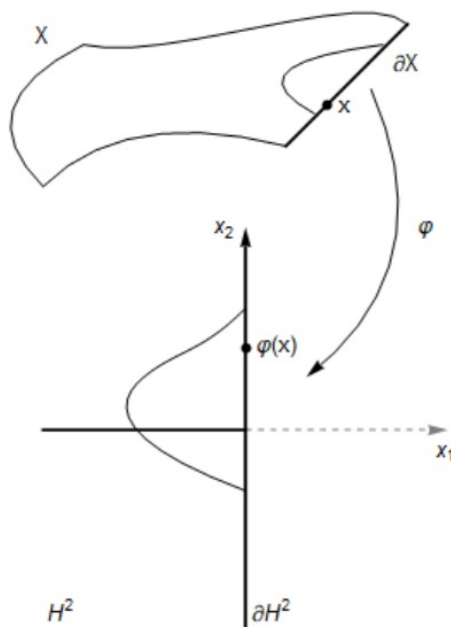
Poznámka 4.1. Topologie poloprostoru H^n je indukovaná topologií \mathbb{R}^n .

Definice 4.2. Necht' je dána množina $V \subset H^n$. Řekneme, že V je **otevřená množina v H^n** , jestliže existuje otevřená množina $W \subset \mathbb{R}^n$ taková, že platí $V = W \cap H^n$.

Nyní upravíme některé pojmy zavedené v kapitole 2.

Definice 4.3. Budeme-li uvažovat dvě otevřené množiny V, V' v poloprostoru H^n , pak vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V \rightarrow V'$ je **difeomorfismus** mezi V a V' právě tehdy, když $f \in C^\infty$ a f^{-1} je spojitě vzájemně jednoznačné zobrazení třídy C^∞ .

Definice 4.4. Hausdorffův topologický prostor X se spočetnou bází B , v němž ke každému bodu x existuje okolí homeomorfní s otevřenou množinou H^n , je **topologickou varietou** X . **Mapa** na X je dvojice (U, φ) , kde U je otevřená podmnožina X a φ je homeomorfismus z U na otevřenou množinu v H^n , n je dimenzí mapy. **Atlas** na X je libovolná množina map, která zajistí celkové pokrytí X a dimenze map v takovémto atlasu udává **dimenzi variety** X , viz obrázek 7. Opět, bude-li to vhodné, budeme varietu X dimenze n značit X^n .



Obrázek 7: Varieta s hranicí.

Není třeba upravovat další pojmy, nadále platí, že hladká varieta je varieta pokrytelná atlasem map, jejichž všechny přechodové funkce jsou difeomorfismy. Hladkou varietu stále budeme zkráceně označovat pouze jako varietu.

Definice 4.5. Řekneme, že X^n je **varieta s hranicí**, jestliže X^n je varieta, na které je dán atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ n -dimenzionálních map homeomorfních

s otevřenými množinami v prostoru H^n . Bod $x \in X^n$ je bod hranice variety, pokud pro všechny mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, kdy $x \in U_\alpha$, platí $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$. Množina všech těchto bodů pak tvoří **hranici variety** ∂X^n .

Od teď budeme rozlišovat mezi pojmy varieta, pro kterou platí $\partial X^n = \emptyset$ a varieta s hranicí, pro kterou naopak platí $\partial X^n \neq \emptyset$.

Věta 4.1. [3] *Nechť X^n je varieta s hranicí pokrytá atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Pak její hranice ∂X^n je varietou dimenze $n - 1$ pokrytelná atlasem $\{(U_\alpha \cap \partial X^n, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X^n})\}_{\alpha \in A}$.*

4.1 Orientace variety

V této podkapitole je čerpáno z [3] a [9].

Orientaci na souvislé a orientovatelné varietě X budeme zadávat standardně pomocí orientace tečného prostoru.

Poznámka 4.2. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} , množinu všech bází prostoru V označíme $B(V)$, pak všechny báze z množiny $B(V)$ můžeme roztrždit do dvou tříd ekvivalence. Dvě báze prostoru V jsou ekvivalentní, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant.

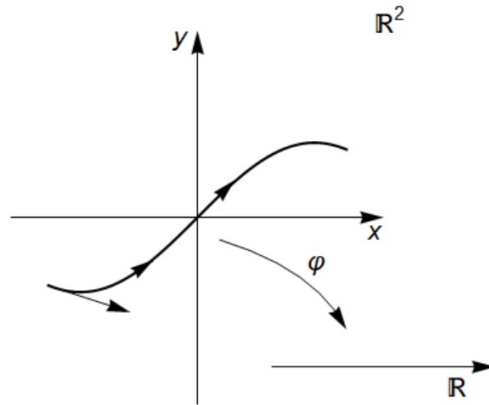
Budeme-li uvažovat tečný prostor variety v konkrétním bodě, pak jednu třídu ekvivalence jeho bází prohlásíme za kladnou a druhou budeme chápat jako zápornou.

Definice 4.6. Nechť X^n je souvislá a orientovatelná varieta a pro každé $p \in X^n$ existuje mapa (U, φ) na varietě X^n taková, že $p \in U$. Pak báze všech tečných prostorů $T_p X^n$ pro $p \in U$: $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}|_p\}$ prohlásíme za kladné, tím dostáváme **kladně orientovanou mapu (U, φ) na varietě X^n** . Souvislá orientovatelná varieta pokrytá atlasem z kladně orientovaných map je **kladně orientovaná varieta**.

Definice 4.7. Nechť ∂X^n je hranice variety s hranicí X^n a bod $p \in \partial X^n$, pak **kladná báze tečného prostor $T_p \partial X^n$** je dána $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \right\}$, kde $i = 2, \dots, n$. A platí $\dim(T_p \partial X^n) = n - 1$.

Nejjednodušším příkladem zadání orientace na varietě je orientace variety X^1 v prostoru \mathbb{R}^n . Kladnou orientaci variety X^1 zadáme ve všech bodech $p \in X^1$ pomocí tečných vektorů $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p$, které jsou bázemi všech

tečných prostorů $T_p X^n$. Orientaci pak zakreslíme pomocí šipek na varietě X^1 ve směru tečných vektorů, viz obrázek 8. Zakreslenou šipku na varietě X^1 můžeme chápat jako návod ukazující, které mapy potažmo parametrizace jsou kladně orientovány.



Obrázek 8: Křivka s kladnou parametrizací $\varphi^{-1}(t) = (t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka 4.3. Kanonická báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru \mathbb{R}^n je kladně orientovaná.

Pokud zadáme orientaci variety s hranicí, pak je jednoznačně určena orientace její hranice. Neboť pomocí věty 4.1 vytvoříme atlas hranice variety, který bude souhlasně orientován. Ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 4.1. Graficky znázorníme kladnou orientaci variety X^2 , jež je grafem funkce $f(x, y) = 1$, kde $x \in (-\infty, 0]$ a $y \in \mathbb{R}$ a její hranice ∂X , jež je grafem funkce $f(x, y) = 1$, kde $x = 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

Varietu X^2 pokryjeme atlasem stávajícím z jedné mapy (U_1, φ_1) , kde $U_1 = X^2$,

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \{[u, v] \in H^2 \mid u \in (-\infty, 0], v \in \mathbb{R}\}$$

a inverzní zobrazení je dáno

$$\varphi_1^{-1}(u, v) = (u, v, 1), \text{ kde } u \in (-\infty, 0] \text{ a } v \in \mathbb{R}.$$

Varieta X^2 je orientovatelná, neboť atlas $\{(U_1, \varphi_1)\}$ je tvořen pouze jednou mapou.

Pro kladnou orientaci mapy (U_1, φ_1) kladně orientujeme tečný prostor $T_p X^2$ pro všechna $p \in U_1$. Pro grafické znázornění zvolíme jeden pevný bod $p \in U_1$, a to $p = [-1, 1, 1]$. Určíme tedy kladnou bázi prostoru $T_p X^2$ následovně:

Budeme uvažovat mapu na varietě X^2 , pro kterou platí $\varphi_2(p) = [0, 0]$, $U_2 = U(p, \epsilon)$ a její inverzní zobrazení je dáno vztahem $\varphi_2^{-1}(u, v) = (u - 1, v + 1, 1)$. Křivky parametrizované při bodu p v jejichž směru hledáme kladně orientovanou bázi $T_p X^2$ jsou pak dány:

$$\gamma_1(t) = \varphi_2^{-1}(t, 0) = (t - 1, 1, 1),$$

$$\gamma_2(t) = \varphi_2^{-1}(0, t) = (-1, t + 1, 1),$$

kde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a platí $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Bázové tečné vektory spočteme jako:

$$D_{\gamma_1}(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0}$$

$$D_{\gamma_1} = (1, 0, 0)|_p$$

a

$$D_{\gamma_2}(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0}$$

$$D_{\gamma_2} = (0, 1, 0)|_p.$$

Báze tečného prostoru $T_p X^2$ je tedy $\{(1, 0, 0)|_p, (0, 1, 0)|_p\}$ a jí příslušný normálový vektor

$$\vec{n} = D_{\gamma_1} \times D_{\gamma_2} = (0, 0, 1)|_p.$$

Nyní pomocí věty 4.1 určíme atlas hranice variety X^2 . Atlas variety ∂X^2 je dán:

$$\{(U_1 \cap \partial X^2, \varphi_1|_{U_1 \cap \partial X^2})\} = \{(U_3, \varphi_3)\},$$

kde $U_3 = \{[x, y, z] \in X^2 \mid x = 0, y \in \mathbb{R}, z = 1\}$,

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow \{[u, v] \in H^2 \mid u = 0, v \in \mathbb{R}\}$$

a inverzní zobrazení je dáno

$$\varphi_3^{-1}(v) = (0, v, 1), \text{ kde } v \in \mathbb{R}.$$

Pro kladnou orientaci variety ∂X^2 , tj. pro kladnou orientaci mapy (U_3, φ_3) kladně orientujeme tečný prostor všech bodů $r \in U_3$. Pro grafické znázornění opět zvolíme jeden, a to $r = [0, -1, 1]$.

Budeme uvažovat mapu na varietě ∂X^2 , pro kterou platí $\varphi_4(r) = [0, 0]$, $U_4 = U(r, \epsilon)$ a její inverzní zobrazení je dáno vztahem $\varphi_4^{-1}(v) = (0, v -$

1, 1). Křivka parametrizovaná při bodu r v jejímž směru hledáme kladně orientovanou bázi $T_r\partial X^2$ je pak dána:

$$\gamma_3(t) = \varphi_4^{-1}(t) = (0, t - 1, 1),$$

kde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a platí $\gamma_3(0) = r$.

Poznámka 4.4. Pokud bychom hledali zápornou orientaci variety, tj. například bázi $T_p X^2$ bychom stanovili jako $\{-D_{\gamma_1}, D_{\gamma_2}\}$, pak bychom křivku parametrizovanou při bodu r určili jako $\gamma_3(t) = \varphi_4^{-1}(-t)$.

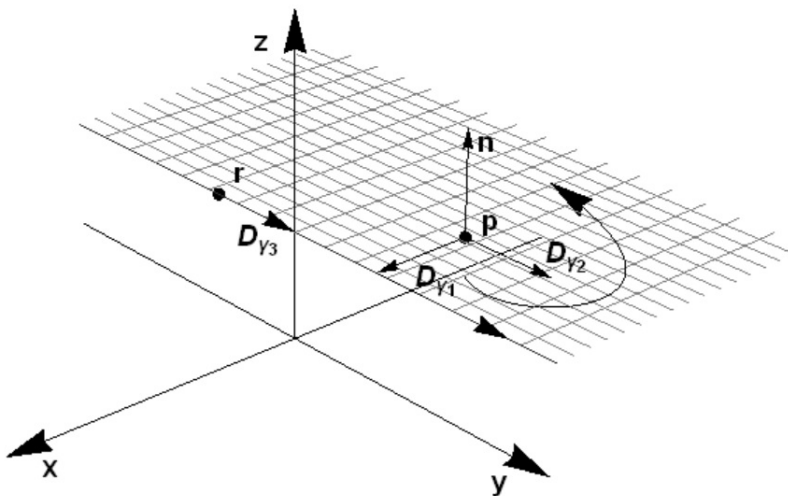
Bázový tečný vektor spočteme jako:

$$D_{\gamma_3}(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_3(t)) \right|_{t=0}$$

$$D_{\gamma_3} = (0, 1, 0) \Big|_r.$$

Poznámka 4.5. Tečný vektor D_{γ_3} můžeme také určit pomocí definice 4.7, tyto způsoby jsou ekvivalentní.

Výsledné tečné vektory a orientace variety X^2 s hranicí jsou znázorněny na obrázku 9.



Obrázek 9: Grafické znázornění kladné orientace (červeně) variety X^2 .

Obecně ukázat, že varieta s hranicí je orientovatelná, je složitý a zdlouhavý proces, a proto si pro následující práci uvedeme definici z [9].

Definice 4.8. Varietu X nazveme **orientovatelná**, jestliže existuje její orientace. V opačném případě hovoříme o **neorientovatelné** varietě. Orientovatelná varieta s vybranou orientací se nazývá **orientovaná**.

Příklad 4.2. *Opět budeme uvažovat paraboloid, ale tentokrát jako varietu s hranicí X^2 . Varieta X^2 je grafem funkce dané předpisem $f(x, y) = x^2 + y^2$, jejíž definiční obor je $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zadejme na varietě X^2 kladnou i zápornou orientaci a provedme kontrolu pomocí matice přechodu.*

Orientaci budeme zadávat v bodech $p_1 = [0, 0, 0] \in X^2 \setminus \partial X^2$ a $p_2 = [0, 1, 1] \in \partial X^2$.

Kladnou bázi tečného prostoru $T_{p_1} X^2$, tj. $\{D_{\gamma_1}, D_{\gamma_2}\}$ určíme pomocí mapy

$$\varphi_1 : \text{int}(X^2) \rightarrow \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 \mid [u, v] = [x, y]\},$$

jejíž inverzní zobrazení je dáno $\varphi_1^{-1}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Pak

$$\gamma_1(t) = \varphi_1^{-1}(t, 0) = (t, 0, t^2),$$

$$\gamma_2(t) = \varphi_1^{-1}(0, t) = (0, t, t^2).$$

A bázové vektory spočteme jako

$$D_{\gamma_1} = (1, 0, 0)|_{p_1},$$

$$D_{\gamma_2} = (0, 1, 0)|_{p_1}.$$

Kladná báze tečného prostoru $T_{p_2} \partial X^2$ je dána, dle definice 4.7, jako $\{D_{\gamma_3}\}$. Pro výpočet použijeme mapu

$$\begin{aligned} \varphi_2 : X^2 \setminus \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \wedge y \leq 0 \wedge 0 \leq z < 1\} \rightarrow \\ \rightarrow \{[u, v] \in H^2 \mid u \in (-1, 0] \text{ a } v \in (-\pi, \pi)\} \end{aligned}$$

viz obrázek 10, jejíž inverzní zobrazení je dáno

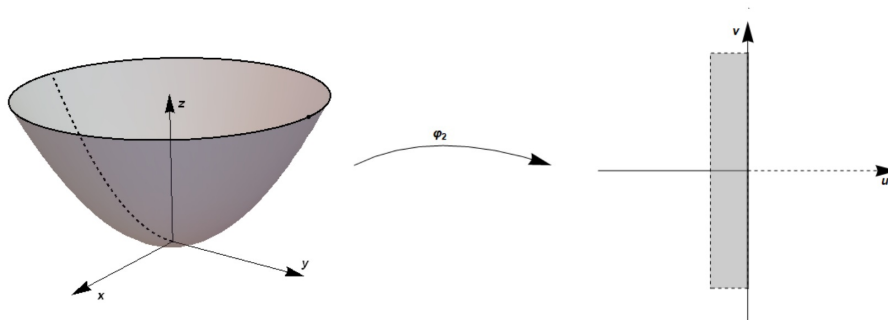
$$\varphi_2^{-1}(u, v) = ((u + 1) \cos(v + \frac{\pi}{2}), (u + 1) \sin(v + \frac{\pi}{2}), (u + 1)^2).$$

Pak

$$\gamma_3(t) = \varphi_2^{-1}(0, t) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), (u + 1) \sin(t + \frac{\pi}{2}), 1)$$

a bázový vektor tečného prostoru T_{p_2} spočteme jako

$$D_{\gamma_3} = (-1, 0, 0)|_{p_2}.$$



Obrázek 10: Grafické znázornění mapy φ_2 .

Máme tedy kladně orientovanou bázi prostoru T_{p_1} : $\{D_{\gamma_1}, D_{\gamma_2}\}$. Jako záporně orientovanou bázi prostoru T_{p_1} zvolíme $\{D_{\gamma_2}, D_{\gamma_1}\}$. Prvky matice přechodu a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} vypočteme jako

$$\begin{aligned} D_{\gamma_1} &= a_{11} \cdot D_{\gamma_2} + a_{12} \cdot D_{\gamma_1} \\ D_{\gamma_2} &= a_{21} \cdot D_{\gamma_2} + a_{22} \cdot D_{\gamma_1}, \end{aligned}$$

pak matice přechodu mezi bázemi $\{D_{\gamma_1}, D_{\gamma_2}\}$ a $\{D_{\gamma_2}, D_{\gamma_1}\}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A její determinant $\det A = -1 < 0$, tj. báze jsou opačně orientované.

Ke kladně orientované bázi prostoru T_{p_2} : $\{D_{\gamma_3}\}$ zvolíme bázi záporně orientovanou jako $\{-D_{\gamma_3}\}$. Matice přechodu bude dána jedním prvkem a_{11} , který získáme ze vztahu

$$D_{\gamma_3} = a_{11} \cdot (-D_{\gamma_3}).$$

Pak matice přechodu mezi bázemi $\{D_{\gamma_3}\}$ a $\{-D_{\gamma_3}\}$ má tvar:

$$A = (a_{11}) = (-1).$$

A její determinant $\det A = -1 < 0$, tj. báze jsou opačně orientované.

5 Integrální věty na varietách

V této kapitole je čerpáno z [3], [6], [7] a [8].

Cílem této závěrečné kapitoly je ukázat některé zajímavé případy integrace diferenciálních forem na varietě. Teorie diferenciálních forem a integrace na varietě je velice obsáhlá, my se omezíme na pojmy potřebné k základním integrálním větám.

5.1 Diferenciální formy na varietách

Definice 5.1. Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem \mathbb{R} a prvky $u, v, w \in V$, pak operace $\wedge : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **vnější součin**. Vnější součin se řídí následujícími pravidly:

- (i) $(au) \wedge v = u \wedge (av) = a(u \wedge v)$, kde $a \in \mathbb{R}$,
- (ii) $u \wedge (u + v) = u \wedge v + u \wedge w$,
 $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$,
- (iii) $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$,
- (iv) $u \wedge v = -(v \wedge u)$.

Dále pokud, pro $u_1, \dots, u_k \in V$ platí $u_1 \wedge \dots \wedge u_k = 0$, pak jsou dané prvky lineárně závislé $\Rightarrow u \wedge u = 0$.

Definice 5.2. Vnější součin n vektorů v \mathbb{R}^n vzhledem ke kanonické bázi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ je dán jako determinant

$$\begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix},$$

kde $[v_{i1}, \dots, v_{in}] = \vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ a $i = 1, \dots, n$.

Pro následující práci je nutné získat geometrickou představu vnějšího součinu, učiníme tak v \mathbb{R}^2 a v \mathbb{R}^3 .

Absolutní hodnota vnějšího součinu vektorů \vec{u}, \vec{v} v \mathbb{R}^2 udává obsah rovnoběžníku jimi tvořeného.

Příklad 5.1. Spočtěme vnější součiny vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, kde $\vec{u} = [3, 0]$ a $\vec{v} = [2, 2]$. A určíme obsah rovnoběžníku jež vektory \vec{u}, \vec{v} tvoří.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Obsah rovnoběžníku tvořený vektory \vec{u}, \vec{v} je tedy $S = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{v} \wedge \vec{u}| = 6$.

Dále tedy uvažujeme prostor \mathbb{R}^3 , kde pomocí vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ utvoříme rovnoběžnostěn, pak absolutní hodnota vnějšího součinu $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ udává jeho objem. Pro jednoduchost a lepší představu v následující práci budeme uvažovat tento příklad.

Příklad 5.2. Spočtěme vnější součiny vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, kde $\vec{x} = [1, 0, 0]$, $\vec{y} = [0, 1, 0]$ a $\vec{z} = [0, 0, 1]$. A určíme objem rovnoběžnostěnu, jež vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tvoří.

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{z} \wedge \vec{x} \wedge \vec{y} = 1$$

a

$$\vec{x} \wedge \vec{z} \wedge \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{y} \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{x} \wedge \vec{z} = -1.$$

Objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tj. jednotkové krychle je $V = |1| = |-1| = 1$.

Definice 5.3. Necht V je vektorový prostor a v_1, \dots, v_n je jeho báze, pak množina multiindexů stupně $k \in \mathbb{N}$, kde $k \leq n$ je $I(k, n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n, \text{ kde } \alpha_i \in \mathbb{N}\}$. A pro $\alpha \in I(k, n)$ značíme $v_\alpha := v_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v_{\alpha_k}$.

Definice 5.4. Necht X je varieta s hranicí v prostoru \mathbb{R}^n , pak definujeme k -formu na varietě X jako

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_\alpha dx_\alpha,$$

kde $I(k, n)$ je multiindex stupně k , tedy platí $dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_k}$ a ω_α je $\binom{n}{k}$ hladkých funkcí na varietě X . **Vektorový prostor všech k -forem na varietě X budeme značit $\Omega^k(X)$.**

Příklad 5.3. Uvedme 2-formu na varietě X v prostoru \mathbb{R}^2 , dále uvedme 1-formu a 2-formu na varietě X v prostoru \mathbb{R}^3 .

2-forma na varietě X v prostoru \mathbb{R}^2 má tvar

$$\omega = \omega_{1,2} dx_1 \wedge dx_2,$$

kde $\omega_{1,2}$ je $\binom{2}{2} = 1$ hladká funkce na X .

1-forma na varietě X v prostoru \mathbb{R}^3 má tvar

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3,$$

kde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jsou $\binom{3}{1} = 3$ hladkých funkcí na X .

2-forma na varietě X v prostoru \mathbb{R}^3 má tvar

$$\omega = \omega_{1,2} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{2,3} dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{1,3} dx_1 \wedge dx_3,$$

kde $\omega_{1,2}, \omega_{2,3}, \omega_{3,1}$ jsou $\binom{3}{2} = 3$ hladkých funkcí na X .

Definice 5.5. 0-forma na varietě X jsou všechny hladké funkce f definované na varietě X , tj. $f \in C^\infty(X)$ prostor všech 0-form na varietě X je tedy $\Omega^0(X) = C^\infty(X)$.

Definice 5.6. Necht' X je varieta s krajem v prostoru \mathbb{R}^n . Pro všechna $k, 0 \leq k < n$, definujme právě jedno lineární zobrazení

$$d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X).$$

Zobrazení d nazýváme **vnější diferenciál** a pro formy ω na varietě X je definováno následovně:

1. Pro $\omega \in \Omega^0(X)$ platí:

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i,$$

kde symbol dx_i je vnější diferenciál skalární funkce x_i definované v \mathbb{R}^n ,

neboť platí $dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i$.

2. Pro $\omega \in \Omega^k(X)$ platí:

$$d\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} (d\omega_\alpha) \wedge dx_\alpha = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_\alpha.$$

Poznámka 5.1. Vlastnosti vnějšího diferenciálu:

- (i) pro $f \in \Omega^0(X)$ je df diferenciál funkce f ,
- (ii) $d(d\omega) = 0$,
- (iii) vnější diferenciál je lineární, tj. pro $\omega, \tau \in \Omega^k(X)$ platí $d(\alpha\omega + \beta\tau) = \alpha d(\omega) + \beta d(\tau)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- (iv) je-li $\omega \in \Omega^k(X)$ a $\tau \in \Omega^l(X)$ platí $d(\omega \wedge \tau) = d(\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (d\tau)$.

Příklad 5.4. Ukažme, že pro vnější diferenciál 0-formy na varietě X v prostoru \mathbb{R}^3 platí vlastnost (ii) z poznámky 5.1.

Nultá forma na varietě X má tvar $\omega = f$, kde $f \in C^\infty(X)$, pak

$$d\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz,$$

dále

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} dx + \frac{\partial f_x}{\partial y} dy + \frac{\partial f_x}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \\ &+ \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} dx + \frac{\partial f_y}{\partial y} dy + \frac{\partial f_y}{\partial z} dz\right) \wedge dy + \\ &+ \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} dx + \frac{\partial f_z}{\partial y} dy + \frac{\partial f_z}{\partial z} dz\right) \wedge dz. \end{aligned}$$

Z vlastností vnějšího součinu a ze záměnnosti smíšených parciálních derivací tj. například $f_{xy} = f_{yx}$ plyne

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= 0 + f_{xy} dy \wedge dx + f_{xz} dz \wedge dx - f_{xy} dy \wedge dx + 0 + \\ &+ f_{yz} dz \wedge dy - f_{xz} dz \wedge dx - f_{yz} dz \wedge dy + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

tedy vlastnost (ii) $d(d\omega) = 0$ platí.

5.2 Zobecněná Stokesova věta

V této podkapitole je navíc čerpáno z [11].

Definice 5.7. Nechť je f hladká funkce na varietě X , pak **nosič funkce** f , označujeme $\text{supp}(f)$, na varietě X je uzávěr množiny, na které je funkce f nenulová. Tedy

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Pokud je množina $\text{supp}(f)$ kompaktní, pak hovoříme o **kompaktním nosiči** hladké funkce f na varietě X .

Věta 5.1. [6] *Nechť X^n je orientovaná varieta s hranicí ∂X^n a ω je $(n-1)$ -forma na X^n s kompaktním nosičem, pak platí*

$$\int_{X^n} d\omega = \int_{\partial X^n} \omega.$$

Důkaz viz [6].

Poznámka 5.2. Jestliže varieta X^n je kompaktní, pak všechny n -formy definované na varietě X^n mají kompaktní nosič. Budeme-li uvažovat souvislou varietu s hranicí X^2 , jejíž hranice ∂X^2 je uzavřená křivka, tj. ∂X^2 je lokálně homeomorfní s kružnicí S^1 , pak všechny 2-formy definované na varietě X^2 mají kompaktní nosič, neboť X^2 je kompaktní. Analogicky platí pro $n > 2$, kdy ∂X^n je homeomorfní se sférou S^{n-1} .

V následujících podkapitolách si z obecné Stokesovy věty odvodíme některé integrální věty, k tomu je ovšem nutné uvažovat souvislou orientovanou varietu s hranicí X , kde $\text{int}(X)$ a ∂X jsou orientovány souhlasně. Dále tedy budeme pod pojmem varieta myslet souvislou varietu s hranicí, pokud nebude řečeno jinak.

Definice 5.8. Nechť X^k je varieta dimenze k a $X^k \subseteq \mathbb{R}^n$ pak nenulovou k -formu ω na varietě X^k nazveme **objemový element**. Varieta X^k , na níž existuje objemový element, je varieta **orientovatelná** a ω zadává na X^k **orientaci**. Pokud na X^k zadáme jinou k -formu ω' , pro kterou platí $\omega' = f\omega$, kde f je hladká funkce na X^k a $f > 0$, pak orientace zůstává neměnná. Na varietě X^k tedy existují dvě orientace.

Poznámka 5.3. V klasické vektorové analýze označujeme objemový element ds pro varietu dimenze 1, dS pro varietu dimenze 2 a dV pro varietu dimenze 3.

Definice 5.9. Nechť X^n je varieta dimenze n v prostoru \mathbb{R}^n , pak **objemový element zadávající kladnou orientaci na varietě X^n** má tvar

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

tj. $dS = dx \wedge dy$ a $dV = dx \wedge dy \wedge dz$.

Pokud budeme uvažovat varietu X^2 v prostoru \mathbb{R}^2 , pak 2-forma zadávající kladnou orientaci má tvar

$$\omega = f dx \wedge dy, \text{ kde } f \in C^\infty(X^2), f > 0$$

a například $\omega' = -f dx \wedge dy = f dy \wedge dx$ je forma na varietě X^2 zadávající orientaci zápornou.

Definice 5.10. Necht X^2 je varieta dimenze 2 v prostoru \mathbb{R}^3 , pak **objemový element zadávající kladnou orientaci na varietě X^2** má tvar

$$\omega = dy \wedge dz - dx \wedge dz + dx \wedge dy.$$

Poznámka 5.4. Pro integraci vnějšího součinu v diferenciální formě na varietě X platí:

$$\begin{aligned} \int_{X^n} \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_\alpha &= \int_{X^n} \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \underbrace{\int \dots \int}_{k\text{-krát}} \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \end{aligned}$$

5.3 Greenova věta

Nejprve budeme uvažovat varietu X^2 s hranicí ∂X^2 v prostoru \mathbb{R}^2 . Pokud 1-formu na varietě X^2 zapíšeme ve tvaru

$$\omega = f dx + g dy, \text{ kde } f, g \in C^\infty(X^2),$$

pak $d\omega$ můžeme vypočítat jako

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

$d\omega$ je 2-formou na varietě X^2 udávající kladnou orientaci. Nyní podle věty 5.1 můžeme zapsat

$$\int_{X^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial X^2} f dx + g dy$$

a dále podle poznámky 5.4 upravit

$$\iint_{X^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial X^2} f dx + g dy.$$

Pokud budeme uvažovat $\vec{F} = (f, g)$ jako hladké vektorové pole v okolí variety X^2 , pak se jedná o zápis Greenovy věty viz [3].

5.4 Kelvin-Stokesova věta

Jako další budeme uvažovat varietu X^2 s hranicí ∂X^2 v prostoru \mathbb{R}^3 . Pak 1-formu na varietě X^2 můžeme zapsat ve tvaru

$$\omega = f dx + g dy + h dz, \text{ kde } f, g, h \in C^\infty(X^2),$$

stejným způsobem jako u Greenovy věty dostáváme

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Stejně jako v případě Greenovy věty $d\omega$ je 2-formou na varietě X^2 udávající kladnou orientaci. Podle věty 5.1 můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \int_{X^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \\ = \int_{\partial X^2} f dx + g dy + h dz \end{aligned}$$

a následně podle poznámky 5.4 upravit

$$\begin{aligned} \iint_{X^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \int_{\partial X^2} f dx + g dy + h dz. \end{aligned}$$

Pokud budeme uvažovat $\vec{F} = (f, g, h)$ jako hladké vektorové pole v okolí variety X^2 , pak se jedná o zápis Kelvin-Stokesovy věty viz [3].

5.5 Gaussova věta

Jako poslední budeme uvažovat případ, kdy máme varietu X^3 s hranicí ∂X^3 v prostoru \mathbb{R}^3 . Pak 2-formu na varietě X^3 můžeme zapsat ve tvaru

$$\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy, \text{ kde } f, g, h \in C^\infty(X^3),$$

pak $d\omega$ můžeme vypočíst jako

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\
&\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

3-forma $d\omega$ udává na varietě X^3 kladnou orientaci, a podle věty 5.1 můžeme zapsat

$$\begin{aligned}
\int_{X^3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz &= \int_{\partial X^3} f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dz \wedge dy \\
\iiint_{X^3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz &= \int_{\partial X^3} f dy dz + g dz dx + h dz dy.
\end{aligned}$$

Odtud tedy dostáváme Gaussovu větu, pro vektorové pole $\vec{F} = (f, g, h)$ viz [3].

Nyní si uvedeme konkrétní příklad Stokesovy věty na varietě. K výpočtu integrálů budeme potřebovat následující definice.

Definice 5.11. Nechť X^n je varieta v prostoru \mathbb{R}^m a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak hladké zobrazení

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

nazveme **parametrizace variety X^n v prostoru \mathbb{R}^m** , jestliže platí $\phi(\Omega) = X^n$. A pro ∂X^n platí $\partial X^n = \phi(\partial\Omega)$, kde $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega)$.

Pokud (U, φ) je mapa na varietě X^n pak platí

$$\phi = \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subseteq X^n$$

a ϕ je **parametrizace U na varietě X^n** .

Definice 5.12. Nechť X^n je varieta v prostoru \mathbb{R}^m a je dána $\omega \in \Omega^k(X^n)$, tj.

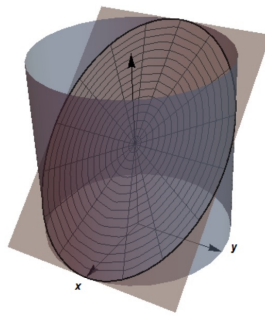
$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k, m)} \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_k}.$$

Dále necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\phi(\Omega)$ je parametrizace variety X^n v prostoru \mathbb{R}^m . Pak můžeme definovat formu $\phi^*(\omega) \in \Omega^k(\Omega)$:

$$\phi^*(\omega) = \sum_{\alpha \in I(k,m)} (\omega_\alpha \circ \phi) d\phi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{\alpha_k}.$$

Operaci ϕ^* nazýváme **přenesení**, nebo také "pullback."

Příklad 5.5. Uvažujme vektorové pole $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$ a varietu X^2 s hranicí ∂X^2 jako průnikem ploch $x^2 + y^2 = 1$ a $x + z = 1$ viz obrázek 11. Ověřme, že pro varietu X^2 a \vec{F} platí Zobecněná Stokesova věta.



Obrázek 11: Varieta X^2 s hranicí ∂X^2 jako průnikem ploch $x^2 + y^2 = 1$ a $x + z = 1$.

Na varietě X^2 budeme uvažovat 1-formu ve tvaru

$$\omega = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz.$$

Pak $d\omega$ můžeme vypočítat jako

$$d\omega = -2dy \wedge dz - 2dz \wedge dx - 2dx \wedge dy.$$

Nyní podle věty 5.1 můžeme zapsat

$$\int_{X^2} d\omega = \int_{\partial X^2} \omega,$$

kde

$$\begin{aligned} \int_{X^2} d\omega &= -2 \int_{X^2} 1dy \wedge dz + 1dz \wedge dx + 1dx \wedge dy \\ \int_{\partial X^2} \omega &= \int_{\partial X^2} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz. \end{aligned}$$

Parametrizaci variety X^2 určíme jako $\phi(v, u) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v \cos u)$, kde $\Omega_{vu} = (0, 1) \times (0, 2\pi)$, pak můžeme psát, neboť platí $\phi^*(d\omega) \in \Omega^2(\Omega_{vu})$,

$$\int_{X^2} d\omega = \int_{\Omega_{vu}} \phi^*(d\omega).$$

S využitím definice 5.12 dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{vu}} \phi^*(d\omega) &= -2 \int_{\Omega_{vu}} 1 d(v \sin u) \wedge d(1 - v \cos u) + \\ &\quad + 1 d(1 - v \cos u) \wedge d(v \cos u) + 1 d(v \cos u) \wedge d(v \sin u) \\ &= -2 \int_{\Omega_{vu}} v dv \wedge du + 0 + v dv \wedge du \\ &= -4 \int_{\Omega_{vu}} v dv \wedge du. \end{aligned}$$

Podle poznámky 5.4 upravíme a následně vypočteme jako

$$-4 \int_{\Omega_{vu}} v dv \wedge du = -4 \iint_{\Omega_{vu}} v dv du = -4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 v dv \right) du = -4\pi.$$

Parametrizaci variety ∂X^2 odvodíme z parametrizace $\phi(v, u)$, jako $\phi(u) = (\cos u, \sin u, 1 - \cos u)$, kde $\Omega_u = (0, 2\pi)$. Varieta ∂X^2 je varieta dimenze 1, tedy platí $\phi^*(\omega) \in \Omega^1(\Omega_u)$ a rovnou můžeme zapsat a vypočíst

$$\int_{\partial X^2} \omega = \int_{\Omega_u} \phi^*(\omega),$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_u} \phi^*(\omega) &= \int_{\Omega_u} (\sin u - 1 + \cos u) d(\cos u) + (1 - \cos u - \cos u) d(\sin u) + \\ &\quad + (\cos u - \sin u) d(1 - \cos u) \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin u + \cos u - 2) du \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy, že pro varietu X^2 a vektorové pole \vec{F} v prostoru \mathbb{R}^3 platí

$$\begin{aligned} \int_{X^2} d\omega &= \int_{\partial X^2} \omega, \\ -4\pi &= -4\pi, \end{aligned}$$

tj. platí Zobecněná Stokesova věta.

6 Závěr

Prvotním cílem této práce bylo zavést a vysvětlit pojem varieta. K definování variety bylo nutné definovat metrický a topologický prostor, což jsme učinili v kapitole Základní pojmy k zavedení pojmu varieta. V kapitole Varieta definujeme základní topologickou varietu, kterou následně obohacujeme o diferencovatelnou strukturu, tj. definujeme hladkou varietu. Uvádíme několik příkladů topologických variet a zároveň dokazujeme, že rotační kuželová plocha s námi zvolenou topologií není topologickou varietou. V následující podkapitole Hladká varieta tedy definujeme hladkou varietu, dále uvádíme několik příkladů hladkých variet, jako je kružnice či asteroida. V příkladech je ukázáno, že se opravdu jedná o hladké variety dle definice.

Důležitým bodem práce je podkapitola Tečný prostor variety, neboť tečný prostor je nezbytný pro definování podvariet a orientace variet. Dále v podkapitole tedy definujeme tečný vektor variety, tečný prostor variety a jeho bázi. Problematika je ukázaná na konkrétních příkladech. V závěrečné podkapitole kapitoly Varieta, tj. podkapitola Podvarieta, definujeme podvarietu viz příklad 3.12 a vloženou podvarietu.

V kapitole Hranice variety definujeme varietu s hranicí a její hranici. Dále pak v podkapitole Orientace variety pomocí orientace tečného prostoru variety (resp. tečného prostoru hranice variety) orientujeme varietu s hranicí (resp. hranicí variety). Opět jsou uvedeny konkrétní příklady. Například příklad 4.2, kde kladně orientujeme paraboloid s hranicí, tj. proti směru hodinových ručiček. V závěru příkladu uvádíme i zápornou orientaci, tj. orientaci opačnou k orientaci kladné a jejich vzájemný vztah.

Závěrem práce je kapitola Integrální věty na varietách, jejíž cílem bylo uvést Zobecněnou Stokesovu větu a uvést konkrétní příklad. K uvedení Stokesovy věty bylo nutné definovat diferenciální formy na varietách. Pro definování diferenciálních forem jsme se obeznámili s vnější algebrou, a to konkrétně s vnějším součinem. Příklady práce s vnějším součinem a konkrétních diferenciálních forem jsou uvedeny v podkapitole Diferenciální formy na varietách. V podkapitole Zobecněná Stokesova věta pak uvádíme obecný tvar Stokesovy věty a v následujících podkapitolách jsou z ní odvozeny integrální věty klasické vektorové analýzy, a to Greenova věta, Kelvin-Stokesova věta a Gaussova věta. Posledním stěžejním příkladem práce je příklad 5.5, kde ověříme Zobecněnou Stokesovu větu na konkrétní varietě s konkrétním vektorovým polem.

Literatura

- [1] L. Lomtatidze: *Historický vývoj pojmu křivka*
Nadace Universitas v Brně, 2007
- [2] V. J. Katz: *The History of Stokes' Theorem*
Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 3, 1979
- [3] L. Krump, V. Souček, J. Těšínský: *Matematická analýza na varietách*
Karolinum, 1997
- [4] O. Kowalski: *Úvod do Riemannovy geometrie*
Karolinum, 2005
- [5] E. Kreyszig: *Introductory functional analysis with applications*
1978
- [6] G. E. Bredon: *Topology and Geometry*
Springer-Verlag, 1993
- [7] M. Krbek: *Hladké variety v příkladech*
<http://www.physics.muni.cz/krbek/variety.pdf>
- [8] D. Pražák: *Matematika pro fyziky II*
Přednášky MAF042,
<http://http://www.karlin.mff.cuni.cz/prazak/vyuka/MAF042/>
- [9] T. Michalík, P. Novosad, R. Suchánek: *Sbírka řešených úloh z Globální Analýzy*
Brno, 2017
- [10] Články z anglické wikipedie: *Donaldson's theorem, Michael Freedman, 4-manifold, Exotic R^4 atd.*
- [11] M. Spivak: *Calculus on Manifolds*
Addison-Wesley Publishing Company, 1965